

УДК 517.958:629.114.2

**И. С. Сазонов, д-р техн. наук, проф., П. А. Амельченко, д-р техн. наук, проф.,
В. А. Ким, д-р техн. наук, проф., Э. И. Ясюкович, канд. техн. наук, доц.,
В. Д. Рогожин, канд. техн. наук, доц., А. Г. Стасилевич, А. А. Метто**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА МТЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ПЭВМ

В статье представлена математическая модель колесного трактора МТЗ, учитывающая шарнирную связь балансирной балки переднего моста с корпусом трактора и подвеску управляемых колес. Представлены выводы, сделанные по результатам решения математической модели на ПЭВМ.

Передний мост колесного трактора представим как колебательную систему «дорога – управляемые колеса – рулевое управление», которую, в отличие от известных, будем рассматривать с учетом моделируемых случайных возмущений. Расчетная схема такой системы, учитывающая упругость тяг и зазоры в шарнирах рулевого привода, диссипацию энергии в элементах подвески и шин, инерционность подвижных деталей, сухое трение в подвеске колес и кинематику рулевой трапеции, приведена на рис. 1.

В рассматриваемой механической системе выделим подрессоренную массу (балансирная балка и передняя часть трактора, масса которой приходится на передний мост) и неподдресоренную массу (управляемые колеса с шинами). Рассмотрим следующие возможные перемещения в системе:

- перемещение точки C_1 (рис. 1) в плоскости XOY по осям OX и OY ;
- вертикальные колебания подрессоренной массы по оси OZ ;
- угловые колебания переднего моста относительно продольной оси трактора;
- угловые колебания управляемых колес относительно осей шкворней.

Таким образом, поведение рассматриваемой механической системы определяется следующими обобщенными координатами:

- z_{c1}, y_{c1}, ψ_1 – вертикальное, боковое перемещение точки C_1 (см. рис. 1) и угол поворота переднего моста вокруг продольной оси трактора соответственно;

- z_1, z_2 – вертикальные перемещения левого и правого управляемых колес;
- η_1 – угол поворота левого управляемого колеса вокруг оси его шкворня.

Балансирная балка переднего моста колесного трактора, имеющая шарнирную связь с корпусом трактора, и подвеска управляемых колес привнесут специфические особенности в математическую модель его движения.

Запишем уравнения геометрических связей моделируемой системы, которые будут использованы при выводе динамических уравнений и уравнений кинематических связей. Из рис. 1 выразим длину отрезка $l_{шi}$, заключенного между точками пересечения осевой линии i -го поворотного шкворня с осевыми линиями балансирной балки и i -й поворотной цапфы, а также расстояние d_{ni} от центра масс переднего моста до точек крепления i -й подвески в положении статического равновесия:

$$\left. \begin{aligned} l_{шi} &= (h \pm l_i \sin \chi_i) / \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2; \\ d_{ni} &= d_{ki} \pm r_{сгi} \sin \chi_i + l_i \cos \chi_i \pm \\ &\quad \pm l_{шi} \sin \alpha_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} (1)$$

Выразим ординаты центров левого y_{k1} и правого y_{k2} колес через обобщенные координаты:

$$y_{ki} = y_{c1} \pm d_{ni} \cos \psi_1 - l_{oi} \sin(\alpha_i + \psi_1) \pm \pm l_i \cos(\eta_i + \eta_{oi}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где $l_{oi} = l_{шi} + z_{ni} - z_i$.

Углы λ_i между проекциями осевых

линий поворотных шкворней на плоскость ХОУ и осью ОУ, γ_i между вертикальными осями O_iZ_i и осевыми линиями шкворней, длины p_i проекций отрезков O_iB_i осевых линий шкворней на плоскость ХОУ и расстояния a_i точек O_i до опорной поверхности определяются из выражений (рис. 2, а):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \arctg [\operatorname{tg} \beta_i / \operatorname{tg}(\alpha_i + \psi_1)], \quad i = 1, 2; \\ \gamma_i &= \arctg [\operatorname{tg}(\alpha_i + \psi_1) / \cos \lambda_i], \quad i = 1, 2; \\ p_i &= a_i \operatorname{tg}(\alpha_i + \psi_1) / \cos \lambda_i, \quad i = 1, 2; \\ a_i &= r_{zi} \cos(\chi_i + \psi_1) + l_i \sin(\chi_i + \psi_1), \\ & i = 1, 2, \end{aligned} \right\} (3)$$

где r_{zi} – радиус i -го колеса. Причем:

$$r_{zi} = r_{cti} + z_i - q_i, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

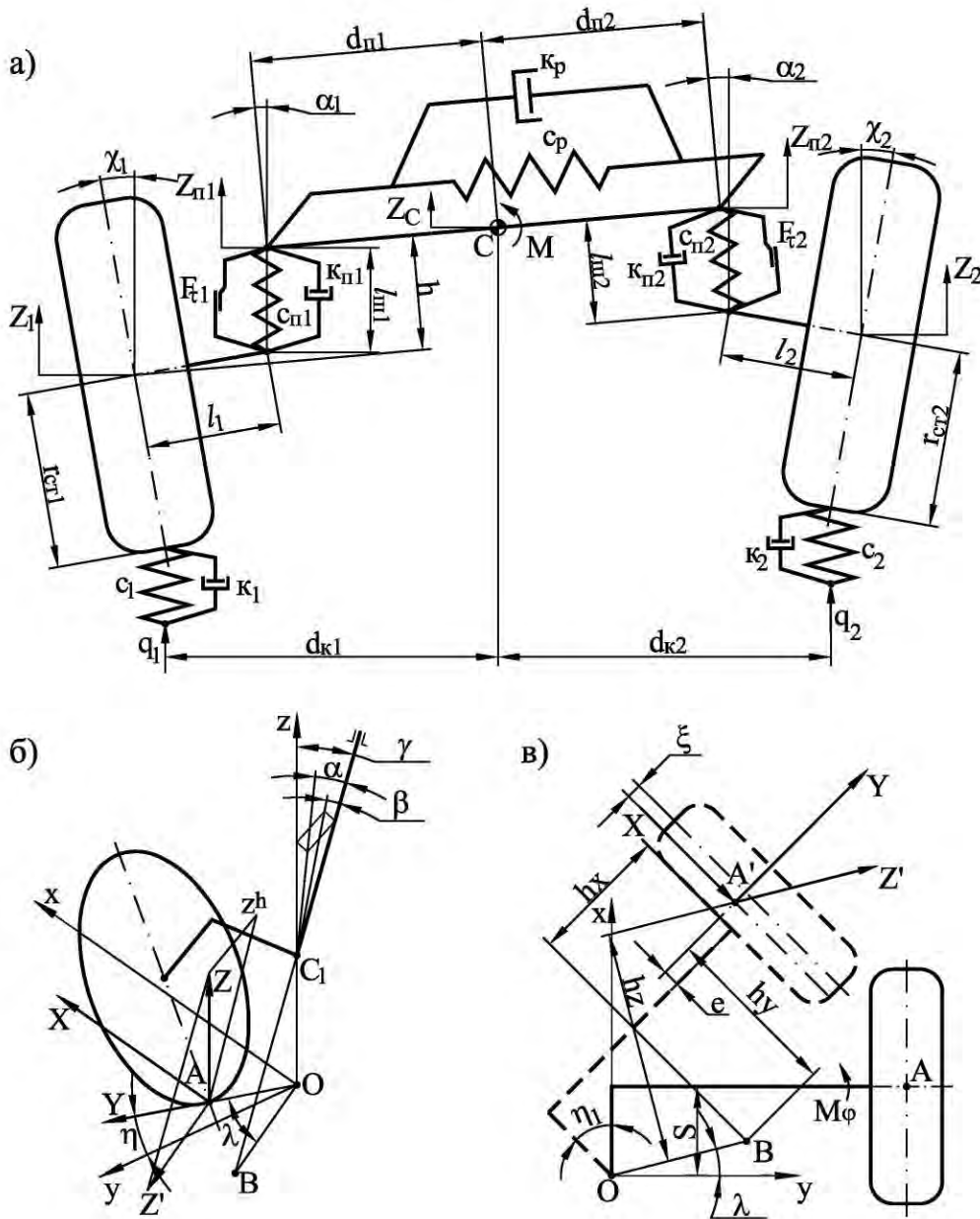


Рис. 1. Расчетная схема переднего моста колесного трактора

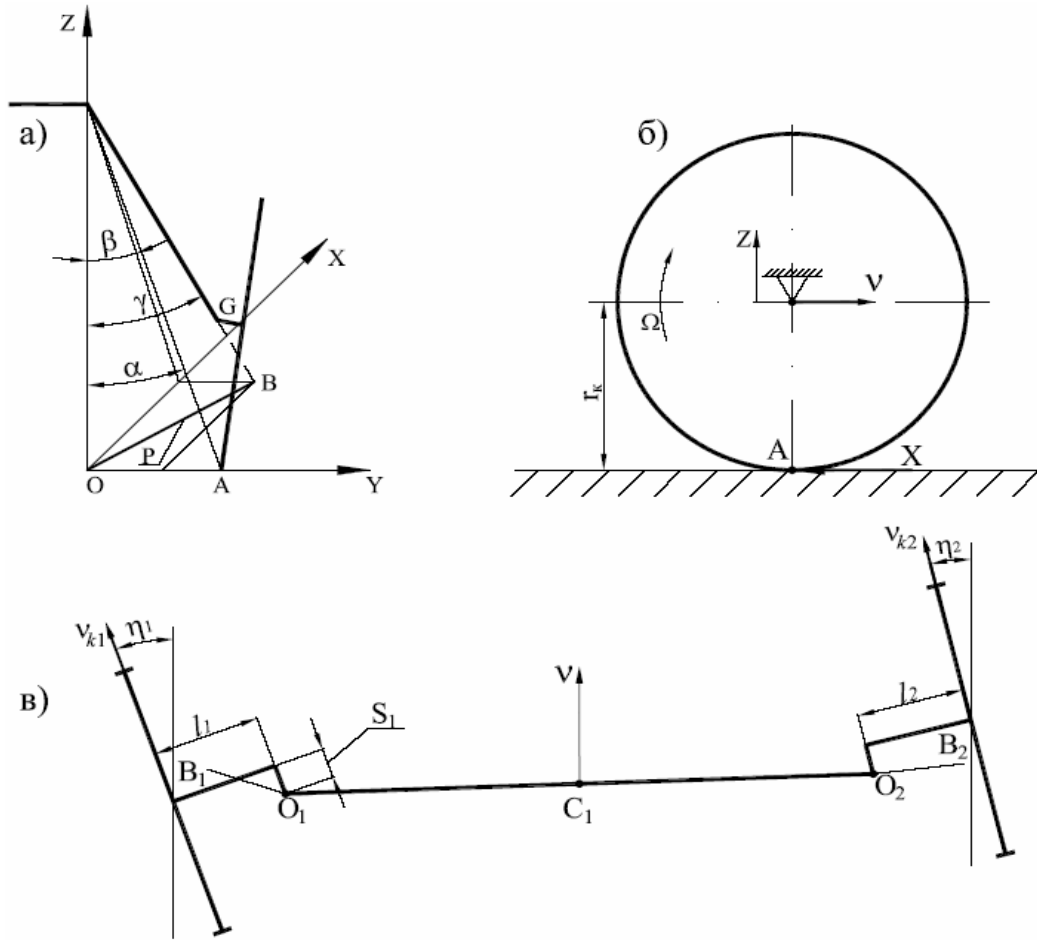


Рис. 2. Расчетные схемы для определения угла (а), продольной реакции опорной поверхности на управляемое колесо (б), скоростей центров колес (в)

Соотношение между углами поворота управляемых колес для обеспечения их чистого качения должно удовлетворять условию:

$$\operatorname{ctg} \eta_2 - \operatorname{ctg} \eta_1 = B / L, \quad (5)$$

где B – расстояние между осями шкворней поворотных цапф управляемых колес; L – база трактора; η_1, η_2 – углы поворота внутреннего и внешнего колес соответственно.

Ввиду того, что функция $\operatorname{ctg} \eta$ при $\eta = 0$ не определена, в уравнении (5) заменим ее через $1/\operatorname{tg} \eta$. Тогда после подстановки получим:

$$\eta_2 = \arctg \left[\operatorname{tg} \eta_1 / \left(\frac{B}{L} \operatorname{tg} \eta_1 + 1 \right) \right]. \quad (6)$$

Расстояния от осевых линий поворотных шкворней до линий действия продольных hx_i , боковых hy_i , вертикальных hz_i составляющих нормальных сил (рис. 2, в):

$$\left. \begin{aligned} hx_i &= l_i \cos(\chi_i + \psi_1) \pm p_i \cos(\lambda_i - \eta_i) + \xi_i, \\ i &= 1, 2; \\ hy_i &= -p_i \sin(\lambda_i - \eta_i) + s_i, \quad i = 1, 2; \\ hz_i &= \pm l_i \sin(\lambda_i - \eta_i) \mp s_i \cos(\lambda_i - \eta_i), \\ i &= 1, 2. \end{aligned} \right\} (7)$$

Апликаты точек крепления левой z_{n1} и правой z_{n2} рессор (пружин) к балансирной балке выразим через обобщенные координаты z_{c1} и ψ_1 :

$$z_{ni} = z_{c1} \mp d_{ni} \sin \psi_1, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Продифференцировав по времени выражения (2), (6) и (8), получим:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{ki} &= \dot{y}_{c1} + \dot{\psi}_1(l_{ai} \pm d_{ni} \sin \psi_1) + \\ &+ (\dot{z}_{ni} - \dot{z}_i) \sin(\alpha_i + \psi_1) \pm \\ &\pm \dot{\eta}_i l_i \sin(\eta_i + \eta_{oi}), \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{\eta}_1 \left\{ 1 / \cos^2 \eta_1 \left[\left(\frac{B}{L} \operatorname{tg} \eta_1 + 1 \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \eta_1 \right] \right\}; \quad (10)$$

$$\dot{z}_{ni} = z_{c1} \mp \dot{\psi}_1 d_{ni} \cos \psi_1, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Выражение, взятое в скобки, из уравнения (10) обозначим через E_1 , тогда

$$\dot{\eta}_2 = E_1 \dot{\eta}_1. \quad (12)$$

Продифференцировав по времени выражение (10) и произведя формальные преобразования, получим:

$$\ddot{\eta}_2 = \ddot{\eta}_1 E_1 - \dot{\eta}_1^2 \left\{ \frac{-\sin^2 2\eta_1 + 2 \left[\left(\frac{B}{L} \operatorname{tg} \eta_1 + 1 \right) + \operatorname{tg} \eta_1 \right]}{\cos^4 \eta_1 \left[\left(\frac{B}{L} \operatorname{tg} \eta_1 + 1 \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \eta_1 \right]} \right\}. \quad (13)$$

Обозначив через E_2 выражение, заключенное в фигурных скобках, имеем:

$$\ddot{\eta}_2 = E_1 \ddot{\eta}_1 - E_2 \dot{\eta}_1^2. \quad (14)$$

Поступательные скорости движения управляемых колес v_{k1}, v_{k2} выразим через скорость центра масс переднего моста v (см. рис. 2, в):

$$v_{ki} = v \mp l_i \dot{\eta}_i, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Невозможность интегрирования одних динамических уравнений объясняется тем, что в их правые части входят неизвестные реакции, которые можно определить при добавлении уравнениями кинематических связей.

Другими словами, система динамических уравнений является неопределенной, так как число неизвестных превышает число уравнений. Для того, чтобы задача стала разрешимой относительно неизвестных, на систему необходимо наложить некоторые условия, которые определяются уравне-

ниями кинематических связей.

Уравнения кинематических связей имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{ki} + \dot{\xi}_i + v_{ki} \varphi_i + v_{ki} \dot{\eta}_i &= 0, \quad i = 1, 2; \\ \dot{\varphi}_i + \dot{\eta}_i + v_{ki} (U_{1i} \xi_i - U_{2i} \varphi_i - U_{3i} \chi_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \right\} (16)$$

где ξ_i, φ_i – боковые и угловые деформации шин соответственно; U_{1i}, U_{2i}, U_{3i} – кинематические коэффициенты.

Выражение кинематических коэффициентов можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 4 \psi_{in}^2 c_y^2 / k_y^2 = 4 c_y^2 / k_y^2; \\ U_2 &= 4 \psi_{in}^2 c_y / k_y = 4 c_y / k_y; \\ U_3 &= \psi_{in}^2 2 \lambda_c U_1 / U_2^2, \end{aligned} \right\} (17)$$

где ψ_{in} – относительное затухание переходного процесса в шине; c_y – коэффициент боковой жесткости глины; k_y – коэффициент сопротивления боковому уводу; λ_c – радиальная деформация пневматика при полной вертикальной нагрузке в положении статического равновесия.

С учетом (9), (15) и $v_{ki} \dot{\eta}_i = 0$ уравнения кинематических связей принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= -\dot{y}_{c1} - \dot{\psi}_1(l_{ai} \pm d_{ni} \sin \psi_1) - \\ &- (\dot{z}_{ni} - \dot{z}_i) \sin(\alpha_i + \psi_1) \mp \\ &\mp \dot{\eta}_i l_i \sin(\eta_i + \eta_{oi}) - (v \mp l_i \dot{\eta}_i) \varphi_i, \quad i = 1, 2; \\ \dot{\varphi}_i &= (v \mp l_i \dot{\eta}_i) [U_{1i} \xi_i - U_{2i} \varphi_i - \\ &- U_{3i} (\chi_i + \psi_1)] - \eta_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} (18)$$

Уравнения динамики движения колебательной системы запишем в форме уравнений Лагранжа второго рода [1].

Как показали результаты моделирования, скорость поворота управляемых колес свыше $\dot{\eta}_1 = 2 \text{ с}^{-1}$ и вращение передней балки моста вокруг шкворня его крепления к остова трактора провоцируют появление гироскопического момента $M_{Г7}$.

Определив компоненты уравнения Лагранжа второго рода, получим систему дифференциальных уравнений движения колесного трактора в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{z}_{cl} &= \sum_{i=1}^2 P_{ni} / m_0^*; \\
 \ddot{y}_{cl} &= \frac{\sum_{i=1}^2 [y_i \cos(\eta_i + \eta_{oi}) + (P_{ki} - P_{\bar{n}}) \sin(\eta_i + \eta_{oi})]}{m_0}; \\
 \ddot{\psi}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^2 (\mp P_{ni} d_{ni}) \cos \psi_1 + M_{\psi 1}}{J_{x_0}}; \\
 \ddot{z}_i &= (P_i - P_{ni}) / m_i, \quad i=1, 2; \\
 \ddot{\eta}_1 &= \frac{J_{z2} E_2 \dot{\eta}_1^2 + \sum_{i=1}^2 M_{\Gamma i} + M_1}{J_{z1} + J_{z2} E_1 + N_1 - N_2}; \\
 \dot{\xi}_i &= -\dot{y}_{cl} - \dot{\psi}_1 (l_{ai} \pm d_{ni} \sin \psi_1) - \\
 &\quad - (\dot{z}_{ni} - \dot{z}_i) \sin(\alpha_i + \psi_1) \mp \\
 &\quad \mp \dot{\eta}_1 l_i \sin(\eta_i + \eta_{oi}) - (v \mp l_i \dot{\eta}_i) \varphi_i, \quad i=1, 2; \\
 \dot{\varphi}_i &= (v \mp l_i \dot{\eta}_i) [U_{1i} \xi_i - U_{2i} \varphi_i - \\
 &\quad - U_3 (\chi_i + \psi_1)] - \dot{\eta}_i, \quad i=1, 2,
 \end{aligned} \right\} (19)$$

где $P_{ni} = c_{ni}(z_{ni} - z_i) + k_{ni}(\dot{z}_{ni} - \dot{z}_i) - F_{\Gamma i} \text{sign}(\dot{z}_{ni} - \dot{z}_i)$ — усилие в i -м элементе подвески.

Разработанная методика составления математической модели динамики движения колесного трактора является уточнением метода, приведенного в [2], и может быть использована для составления математических моделей колесных машин, имеющих аналогичные кинематические связи.

Анализ результатов моделирования динамики движения колесного трактора на ПЭВМ позволил сделать следующие выводы.

1. Математическая модель позволяет исследовать влияние массогеометрических, упругодиссипативных характеристик шин и подвесок, параметров углов установки управляемых колес на курсовое движение трактора. Модель курсового движения от-

личается от существующих новыми уравнениями неголономных связей качения колес с опорной поверхностью, позволяющих определить силы в контакте колес с опорной поверхностью, что позволяет осуществлять контроль скольжения пятн контактов колес.

2. Анализ результатов моделирования показал:

– при изменении схождения управляемых колес трактора в пределах ± 3 мм среднеквадратичные отклонения амплитуд их угловых колебаний изменялись на 0,2 %, а среднеинтегральная ширина коридора движения поезда на 0,08 % при скоростях движения 8–12,5 м/с;

– эффективное снижение колебаний управляемых колес трактора происходит при изменении центра крена корпуса трактора путем наклона оси вращения шарнирного пальца, соединяющего балку моста с корпусом трактора. Оптимальный угол наклона оси вращения шарнирного пальца по отношению к продольной оси трактора составляет 10 – 12° в пределах изменения продольной базы порядка 3–4 м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.: ил.
- 2 Ясюкович, Э. И. Влияние установки управляемых колес на курсовую устойчивость трактора класса 14 кН : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.03 : защищена 15.10.1982 : утв. 09.03.1983 / Ясюкович Эдвард Игнатьевич. – Минск, 1982. – 199 с.: ил.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 09.10.2006

**I. S. Sazonov, P. A. Amelchenko, V. A. Kim,
E. I. Yasukovich, V. D. Rogozhin,
A. G. Stasilevich, A. A. Metto**
**The mathematical model of the MTZ wheel
tractor's dynamics and results of computer solving**
Belarusian-Russian University

The mathematical model of the MTZ wheel tractor's dynamics, that took into consideration a link connection of the balancing front-axle beam with tractor's body and the steering wheels suspension, is presented in the paper. The conclusions, based on the computer solving of the mathematical model, are given.