

УДК 621.87:658.512.011.56

И. В. Лесковец, канд. техн. наук, доц.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ

В статье предлагается математическая модель гусеничного движителя. Модель составлена с использованием метода функциональных элементов. Движитель представлен как совокупность отдельных элементов. Для каждого элемента составлена математическая модель на основе физических зависимостей с учетом расположения элемента в каждый момент времени.

Современное состояние вычислительной техники позволяет производить достаточно точные расчеты сложных механических систем. Практически во всех случаях такие расчеты базируются на математических моделях. Математические модели гусеничных движителей, представленные в работах А. Н. Носова [1], В. В. Гуськова [2], И. Б. Барского [3] и других авторов, позволяют определить только наиболее общие характеристики гусеничных движителей, такие как несущая способность, тяговое усилие, некоторые внутренние параметры движителя, например среднее усилие натяжения гусеничной цепи, влияние неравномерности шага зубьев ведущей звездочки на динамические характеристики гусеничного обвода.

Современные требования к гусеничным машинам предполагают достаточно узкую специализацию: промышленные тракторы, строительные и дорожные машины, сельскохозяйственные машины, машины для лесного хозяйства и специальная техника. В связи с этим можно с уверенностью сказать, что к гусеничным движителям этих машин предъявляются разные требования. Для промышленных тракторов это тяговое усилие и несущая способность, для сельскохозяйственных машин – минимальное удельное давление на грунт, для машин лесного хозяйства – щадящее воздействие на почву, для машин специального назначения – требования к показателям быстроходности.

Существующие математические модели не в состоянии дать решения для всех типов возникающих задач. Таким образом, необходимо разработать универсальную

математическую модель, пригодную для реализации на ЭВМ в виде программного обеспечения. Данная математическая модель должна позволять производить исследования не только внешних показателей движителя (тяговое усилие, удельное давление на грунт), но и внутренних параметров и характеристик (ускорения колес, ускорения траков, усилий), возникающих при работе движителя в заданных условиях.

При составлении математической модели необходимо учесть требования, предъявляемые к современному программному обеспечению, наиболее общими из которых являются экономичность, универсальность, точность получаемых результатов, возможность проведения анализа результатов, возможность проведения оптимизации по заданным параметрам. Учитывая, что мощности современных компьютеров позволяют с достаточно высокой скоростью решать системы уравнений, состоящие из нескольких тысяч выражений (программное обеспечение, использующее метод конечных элементов), можно предположить, что моделирование всех подвижных элементов гусеницы машины вполне возможно, и к этому необходимо стремиться.

Анализ работы гусеничного движителя и его элементов показывает, что в целом весь механизм испытывает воздействие как внутренних, так и внешних сил. С точностью определить, какие силы являются внутренними, а какие внешними для каждого элемента или системы затруднительно. Для упрощения работы и наибольшей универсальности предполо-

жим, что необходимо создать модели каждого подвижного элемента, который обладает определенными свойствами и воспринимает внешние силы.

Дальнейший анализ показывает, что при составлении математической модели необходим учет динамических и кинематических свойств движителя, т.к. в каждый момент времени на отдельные элементы может воздействовать разное количество других элементов. Таким образом, при составлении математической модели наиболее пригоден метод функциональных элементов, тем более что для его дальнейшей реализации в языках программирования присутствует структура, целиком соответствующая данному методу, именуемая классом.

Основой для составления математической модели является динамическая модель движителя, представляющая его в наиболее универсальном виде.

Динамическая модель машины представлена на рис. 1. В качестве допущения примем, что модель плоская, рама маши-

ны представляет собой недеформируемую конструкцию. В состав модели входят траки, опорные колеса с подвесками, поддерживающие колеса с подвесками, ведущее колесо, направляющее колесо. Следует отметить, что в настоящее время подвески поддерживающих колес практически не применяют, однако для универсальности модели будем их учитывать, предположив, что создать модель поддерживающего колеса без подвески можно будет с помощью параметров подвески. Основными параметрами модели являются количество опорных и поддерживающих колес, расстояние между ними, расстояние от центра масс машины до ведущего и направляющего колес, а также до мест крепления подвесок к раме машины, размеры траков. На движитель в целом действуют силы от массы машины, реакции, приложенные к тракам от опорной поверхности, крутящий момент, подводимый к ведущему колесу от трансмиссии.

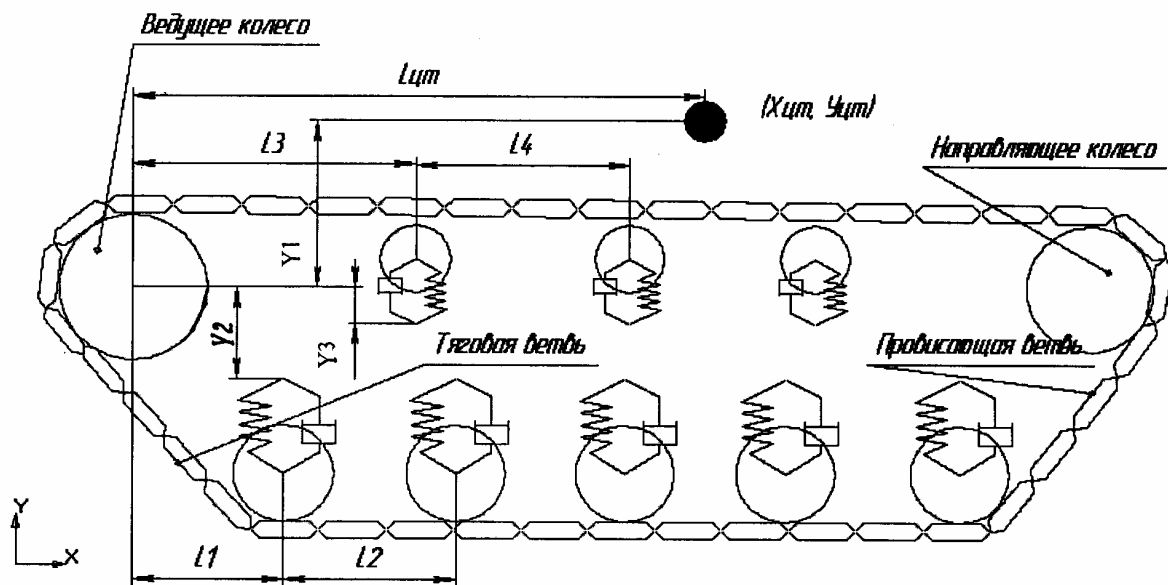


Рис. 1. Общая динамическая модель гусеничного движителя: $L_{цт}$ – расстояние от центра тяжести до центра ведущего колеса; L_1 – расстояние от центра ведущего колеса до центра опорного колеса; L_2 – расстояние между центрами опорных колес; L_3 – расстояние от центра ведущего колеса до центра поддерживающего колеса; Y_1 – расстояние от центра тяжести до центра ведущего колеса; Y_2 – расстояние от центра ведущего колеса до точки крепления опорной подвески; Y_3 – расстояние от центра тяжести до точки крепления верхней подвески

Наиболее сложным элементом с точки зрения составления математической модели является трак движителя, т.к. в каждый момент времени на один и тот же трак могут воздействовать различные силы в зависимости от того, в каком месте движителя трак находится. Определим основные места положения траков в движителе: под опорным колесом, между опорными колесами, на верхней ветви, на поддерживающем колесе, на провисающей ветви (см. рис. 1), на направляющем колесе, на ведущем колесе, на тяговой части ветви.

В соответствии с описанными случаями составим уравнения равновесия для траков в каждом отдельном случае.

На трак, расположенный между опорными колесами (рис. 2), действуют силы тяжести mg , реакции микропрофиля дороги Rq , горизонтальная составляющая силы взаимодействия с последующим траком F_x^{i+1} , горизонтальная составляющая силы взаимодействия с предыдущим траком F_x^{i-1} , вертикальная составляющая силы взаимодействия с последующим траком F_y^{i+1} , вертикальная составляющая силы взаимодействия с предыдущим траком F_y^{i-1} . Составим уравнения равновесия от рассмотренных сил. Учитывая, что рассматривается плоская модель, количество степеней свободы для трака в данном случае равно трем, необходимо составить три уравнения.

$$\frac{\partial \dot{X}_{\text{трк}}}{\partial t} = (F_x^{i+1} - F_x^{i-1}) / m_{\text{трк}} ;$$

$$\frac{\partial \dot{Y}_{\text{трк}}}{\partial t} = (F_y^{i+1} + F_y^{i-1} - m_{\text{трк}}g + R_q) / m_{\text{трк}} ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\phi}_{\text{трк}}}{\partial t} = & (F_y^{i+1} \cdot \sin(\alpha)L_{\text{трк}} / 2 - \\ & - F_y^{i-1} \cdot \sin(\alpha)L_{\text{трк}} / 2 - F_x^{i+1} \cdot \cos(\alpha)h_{\text{трк}} / 2 + \\ & + F_x^{i-1} \sin(\alpha)h_{\text{трк}} / 2) / J_{\text{трк}} , \end{aligned}$$

где $m_{\text{трк}}$ – масса трака; g – ускорение свободного падения; α – текущий угол наклона трака к направлению отсчета углов;

$$F_x = C_{\text{трк}}(x_n^{i+1} - x_k^i) - r \cdot \dot{x} ;$$

$$F_y = C_{\text{трк}}(y_n^{i+1} - y_k^i) - r \cdot \dot{y} ,$$

где $C_{\text{трк}}$ – приведенный коэффициент жесткости шарниров соседних траков.

Величины x_n^{i+1} , x_k^{i-1} , y_n^{i+1} , y_k^{i-1} определяются в соответствии с рис. 3.

Направление отсчета углов определим для каждого трака с учетом расположения декартовой системы координат с началом отсчета в левом нижнем углу, нулевое направление отсчета углов с запада на восток, положительное направление отсчета углов – против часовой стрелки.

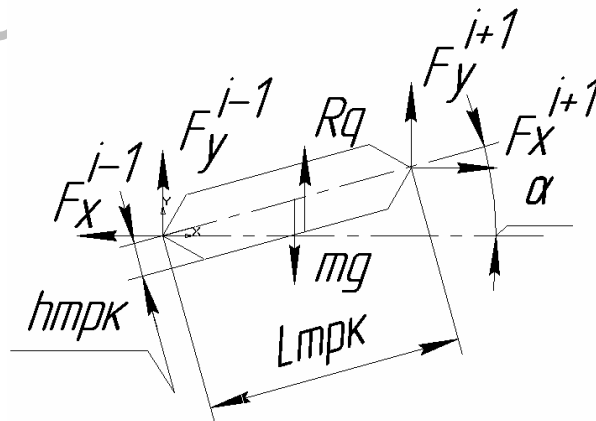


Рис. 2. Динамическая модель трака, расположенного между опорными колесами

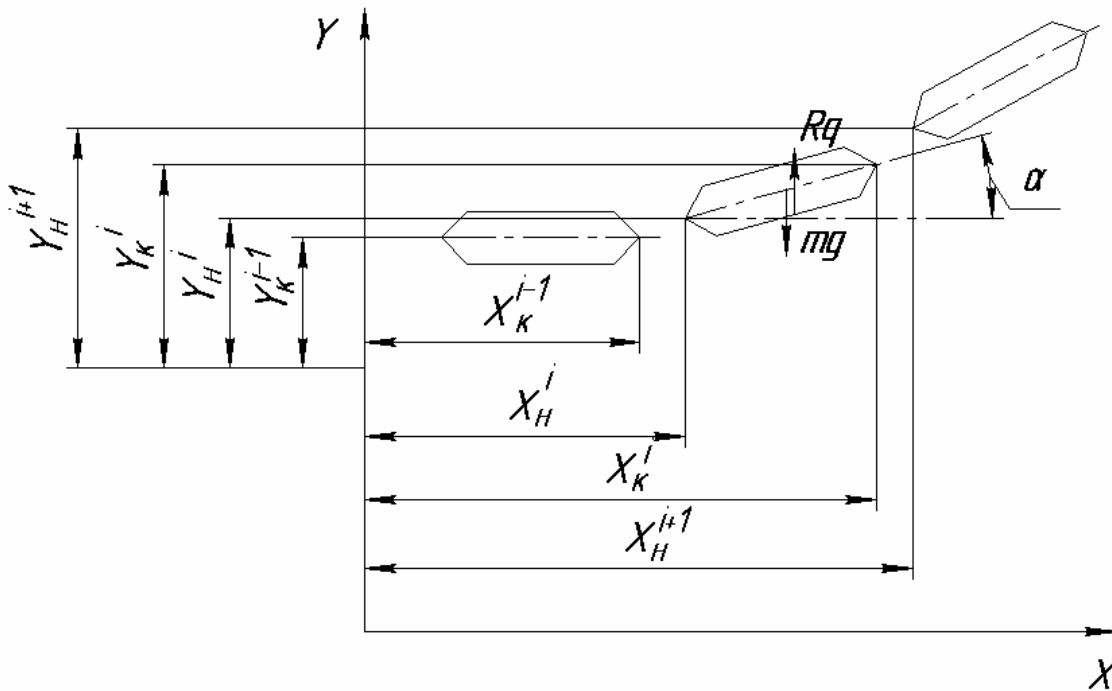


Рис. 3. Схема для определения расстояний между центрами шарниров соседних траков по горизонтальной и вертикальной осям: X_H^{i+1} – абсцисса левого шарнира последующего трака по оси X для траков, расположенных на опорной ветви; X_K^{i-1} – абсцисса правого шарнира предыдущего трака по оси X для траков, расположенных на опорной ветви; Y_H^{i+1} – ордината левого шарнира последующего трака по оси Y для траков, расположенных на опорной ветви; Y_K^{i-1} – ордината правого шарнира предыдущего трака по оси Y для траков, расположенных на опорной ветви

Аналогично составим уравнения равновесия для трака, расположенного под опорным колесом (рис. 4).

$$\frac{\partial \dot{X}_{\text{трк}}}{\partial t} = (F_x^{i+1} - F_x^{i-1}) / m_{\text{трк}};$$

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial t} = (F_y^{i+1} + F_y^{i-1} - m_{\text{трк}}g + R_q - R_k \cos(\alpha)) / m_{\text{трк}};$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}_{\text{трк}}}{\partial t} = (F_y^{i+1} \cdot \sin(\alpha) \cdot L_{\text{трк}} / 2 - F_y^{i-1} \cdot \sin(\alpha) \cdot L_{\text{трк}} / 2 - F_x^{i+1} \cdot \cos(\alpha) \cdot h_{\text{трк}} / 2 + F_x^{i-1} \cdot \sin(\alpha) \cdot h_{\text{трк}} / 2 - R_k \cdot \Delta L) / J_{\text{трк}},$$

где R_k – усилие от взаимодействия между траком и колесом; ΔL – текущее расстояние от центра трака до точки взаимодействия между траком и колесом.

Принимая допущения, что движи-

тель взаимодействует с опорной поверхностью, которая является несминаемой, силу R_q можно определить на основании теории упругости:

$$R_q = C_{\text{ТП}} \cdot \Delta Y,$$

где $C_{\text{ТП}}$ – приведенный коэффициент жесткости трака и опорной поверхности (в случае, когда жесткость опорной поверхности недостаточна, можно принять только коэффициент жесткости опорной поверхности); ΔY – величина заглубления трака в опорную поверхность.

В некоторых случаях трак может отрываться от опорной поверхности. Для определения возникновения данного случая на каждом шаге расчета необходимо проверять расстояние от центра трака до опорной поверхности; в случае, когда это расстояние превышает $h_{\text{трк}} / 2$, R_q равно нулю.

Учитывая, что опорное колесо на некоторых режимах движения может выходить из соприкосновения с трактом, необходимо разработать алгоритм определения истинного взаимного положения

тракта и колеса.

Схема для составления модели тракта, расположенного на провисающей ветви гусеничного обвода (см. рис. 1), представлена на рис. 5.

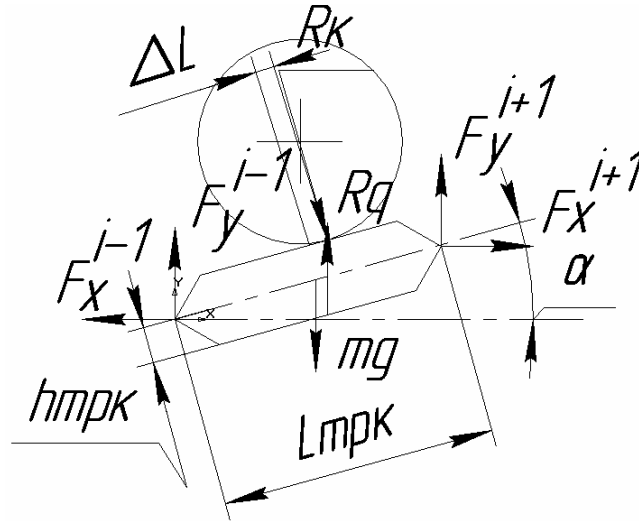


Рис. 4. Динамическая модель тракта, расположенного под опорным колесом

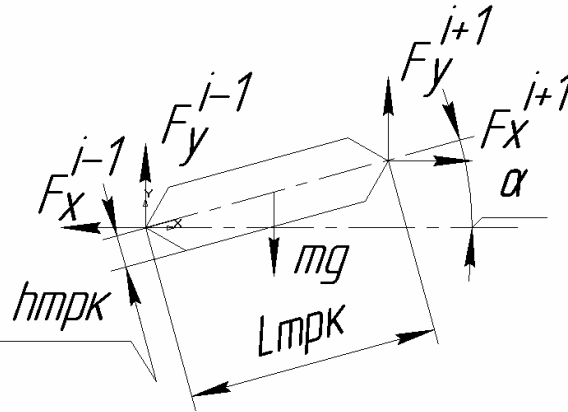


Рис. 5. Динамическая модель тракта, расположенного на провисающей ветви гусеничного обвода

Математическая модель для данного случая имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \dot{X}_{\text{трк}}}{\partial t} = (F_x^{i+1} - F_x^{i-1}) / m_{\text{трк}};$$

$$\frac{\partial \dot{Y}_{\text{трк}}}{\partial t} = (F_y^{i+1} + F_y^{i-1} - m_{\text{трк}} \cdot g) / m_{\text{трк}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\varphi}_{\text{трк}}}{\partial t} = & (F_y^{i+1} \cdot \sin(\alpha) \cdot L_{\text{трк}} / 2 - \\ & - F_y^{i-1} \cdot \sin(\alpha) \cdot L_{\text{трк}} / 2 - \\ & - F_x^{i+1} \cdot \cos(\alpha) \cdot h_{\text{трк}} / 2 + \\ & + F_x^{i-1} \cdot \sin(\alpha) \cdot h_{\text{трк}} / 2) / J_{\text{трк}}. \end{aligned}$$

Для траков, расположенных на верхней ветви, на поддерживающем колесе, на ведущем колесе, на тяговой ветви (см. рис. 1), уравнения составляются аналогичным образом.

В результате получена система уравнений, имеющая переменную структуру. Для решения такой системы уравнений требуется разработка специального алгоритма.

Принимая допущения о том, что ведущее и направляющее колеса не имеют перемещений относительно рамы машины, составим уравнения равновесия для опорных и поддерживающих колес.

Для опорного колеса схема представлена на рис. 6. Для удобства определения геометрических параметров подвески в данном случае предлагается перейти от декартовой системы координат с началом отсчета в левом нижнем углу к локальной декартовой системе координат с центром в центре тяжести машины и направлением оси ординат, совпадающим с направлением горизонтальной оси машины. В соответствии с принятыми допущениями необходимо составить одно уравнение, считая, что применяется подвеска свечного типа и колесо может иметь пе-

ремещения поперек продольной оси машины.

$$\frac{\partial \dot{Y}_k}{\partial t} = (C_{пр} \Delta L_{пр} - r_{пр} \dot{y}_k + R_{трк} - m_k g) / m_k,$$

где m_k – масса колеса; $C_{пр}$ – коэффициент жесткости пружины; $\Delta L_{пр}$ – относительное перемещение пружины; $r_{пр}$ – коэффициент диссипативных сил пружины; \dot{y}_k – вертикальная скорость колеса в системе вертикальных координат машины; $R_{трк}$ – усилие от взаимодействия колеса и трака, $R_{трк} = C_k \cdot \Delta L - r_k \cdot \dot{y}_k$; C_k – приведенный коэффициент жесткости колеса и трака; ΔL – величина определяющая взаимное перекрытие при контакте колеса и трака; r_k – коэффициент диссипативных сил между колесом и траком; \dot{y}_k – относительная скорость колеса и трака.

Аналогично составим расчетные модели для верхних колес машины.

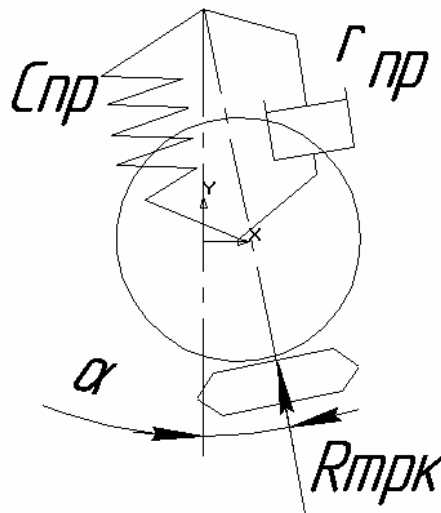


Рис. 6. Подвеска опорных колес

В данном случае приведена математическая модель для учета свойств подвески свечного типа. Для подвесок других типов необходимо составлять соответствующие уравнения. Учитывая, что подвеска имеет механизм, который обеспечивает ограничение хода подвески, необходимо алгоритмически предусмотреть возможные варианты работы данного механизма. В том случае, когда подвеска находится в точке между крайней верхней и крайней левой границами, уравнение соответствует приведенному выше. В случае, когда пружина подвески имеет максимальную длину, усилие пружины равно нулю в связи с тем, что механизм подвески ограничивает перемещение колеса и принимает на себя усилие предварительного сжатия пружины. В случае, когда пружина подвески находится в максимально сжатом состоянии (механизм подвески упирается в «отбойник»), усилие должно быть максимальным и значительно превышать усилие от сжатой пружины, этого можно достигнуть, изменяя коэффициент жесткости, принимая в данный момент коэффициент жесткости, равный коэффициенту жесткости рамы машины.

Для машины в целом уравнение, определяющее ускорение машины по оси ординат (учитывая, что модель плоская), будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial t} = (\sum F_{\text{пр}} - m \cdot g / 2) / m,$$

где $\sum F_{\text{пр}}$ – сумма сил от всех опорных подвесок. Значение $F_{\text{пр}}$ определяется по зависимости:

$$F_{\text{пр}} = C_{\text{пр}} \cdot (L_{\text{nl}} - L_{\text{t}}),$$

где $C_{\text{пр}}$ – коэффициент жесткости пружины; L_{nl} – начальная длина пружины, определяемая конструкцией механизма подвески; L_{t} – текущая длина пружины.

Уравнение, определяющее угол поворота машины, имеет вид:

$$\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t} = (\sum (F_{\text{пр}} \cdot (L_i - L_1 - L_{\text{ст}}))) / J,$$

где $L_i = L_1 \cdot i$; i – номер соответствующего колеса.

В данном случае уравнение определяет угол поворота машины относительно центра тяжести. Поэтому масса машины не учитывается.

В процессе расчетов могут возникнуть случаи, когда машина опирается на заднее либо переднее опорное колесо. В случае, когда машина опирается на заднее опорное колесо (см. рис. 1, слева), уравнение, определяющее угол поворота машины, приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t} = (\sum (F_{\text{пр}} \cdot (L_i - L_1 - L_{\text{ст}})) - m \cdot g \cdot L_{\text{ст}}) / J,$$

где i – изменяется от двух до максимального количества опорных колес.

Для определения перемещения машины вдоль оси X возможно использование нескольких уравнений. Это связано с тем, что в процессе трогания машины с места и в процессе движения из-за возникновения вертикальных колебаний машины давление траков на опорную поверхность изменяется в достаточно широких пределах. В связи с этим изменяется коэффициент сцепления движителя с опорной поверхностью. Кроме того, величина момента сопротивления, который преодолевается ведущим колесом, также колеблется, следовательно, угловая скорость ведущего колеса изменяется постоянно. Таким образом, можно воспользоваться как минимум двумя уравнениями, первое из которых:

$$\dot{x} = \dot{\varphi}_{\text{вк}} \cdot r_{\text{вк}},$$

где $\dot{\varphi}_{\text{вк}}$ – угловая скорость ведущего колеса; $r_{\text{вк}}$ – радиус ведущего колеса.

Второе уравнение:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial t} = (\sum F_{\text{трк}}^{\text{т}} - \sum F_{\text{трк}}^{\text{сопр}}) / m,$$

где $F_{\text{трк}}^{\text{т}}$ – сила тяги, создаваемая каждым траком; $F_{\text{трк}}^{\text{сопр}}$ – сила сопротивления

ний передвижению, возникающая на каждом траке.

Критерий перехода от одного уравнения к другому требует отдельных пояснений. Учитывая, что данная модель предназначена для реализации на ЭВМ методом функциональных элементов, все уравнения объединяются в одну систему алгоритмически. Предполагается, что в зависимости от наступления каждого расчетного случая для каждого из элементов системы будет решаться соответствующее уравнение. Данные действия необходимо осуществлять последовательно, используя известные методы интегрирования. Все уравнения алгоритмически объединяются в единую систему. Данный метод предполагается реализовать с помощью технологии объектно-ориентированного программирования с использованием классов. Возможно использование полученного программного продукта в системе автоматизированного проектирования гусеничных движителей. После подтверждения адекватности решений, полученных с использованием пакета программ, воз-

можно проведение оптимизации основных параметров гусеничного движителя с использованием теории планирования эксперимента.

Объединение полученной модели с моделями двигателя, гидротрансформатора (сцепления), трансмиссии, микропрофиля опорной поверхности, рабочего оборудования сделает возможным проведение выбора основных параметров машины с использованием критериев скоростей, ускорений, плавности хода и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Расчет и конструирование гусеничных машин / А. Н. Носов [и др.]. – Л. : Машиностроение, 1972. – 560 с.
2. Тракторы : учеб. пособие для вузов по специальности «Автомобили и тракторы» / В. В. Гуськов [и др.] ; под общ. ред. В. В. Гуськова. – Минск : Выш. шк., 1981. – Ч. 3 : Конструирование и расчет. – 383 с.
3. Барский, И. Б. Конструирование и расчет тракторов / И. Б. Барский. – М. : Машиностроение, 1968. – 376 с.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 23.10.2006

I. W. Leskovets
Mathematical model of crawler
propeller
Belarusian-Russian University

Given in the paper is a mathematical model of a crawler propeller. The model is constructed on the basis of the functional elements method. The propeller is a combination of separate elements. The mathematical model is constructed for each element on the basis of physical dependences taking into account placement of each at every time moment.