

---

---

УДК 517.958: 629.113

*В. П. Тарасик*

---

---

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТРУКТУРНО-МАТРИЧНОГО МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

---

---

UDC 517.958: 629.113

*V. P. Tarasik*

---

---

**PHYSICAL BASICS OF STRUCTURAL MATRIX METHOD OF MATHEMATICAL MODELING OF ENGINEERING SYSTEMS**

---

---

**Аннотация**

Изложена методика моделирования технических систем, обеспечивающая полную формализацию процесса получения математических моделей. Приведен пример её использования при моделировании системы поддрессоривания кузова автомобиля и виброзащиты водителя и пассажиров.

**Ключевые слова:**

структурно-матричный метод, компонентные и топологические уравнения, динамическая модель технической системы, оргграф, матрица инцидентов, матрица трансформаторных элементов.

**Abstract**

The technique of simulation of engineering systems is presented, which provides a complete formalization of the process of obtaining mathematical models. The paper gives an example of its use in modeling the system of car body cushioning and vibro-protection of a driver and passengers.

**Key words:**

structural-matrix method, component and topological equations, dynamic model of engineering system, directed graph, incidence matrix, matrix of transformation elements.

---

Современные компьютерные технологии проектирования технических систем позволяют осуществлять поиск оптимального проектного решения создаваемого объекта с высокими показателями качества и эффективности при одновременном существенном сокращении временных и финансовых ресурсов. Эти технологии базируются на широком использовании математического моделирования. Математическая модель должна обеспечивать адекватное описание процессов функционирования проектируемого объекта, позволяющее исследовать влияние структуры и параметров элементов объекта на принятые оценочные критерии и получить оптимальный вариант искомого решения.

Существует множество типов математических моделей, выбор которых зависит от целей и задач проектирования. Классификация и назначение моделей приведены в [1]. Научной основой построения математических моделей технических систем являются законы физики. Корректное их использование обеспечивает адекватность и эффективность получаемых моделей. Рассмотрим основные аспекты проблемы построения модели на примере структурно-матричного метода моделирования. Этот метод предназначен для получения модели макроуровня. Характерной особенностью модели макроуровня является представление структуры объекта в виде упорядоченного множества дис-

кретных элементов, отображающего его физические свойства и взаимодействие с внешней средой.

Модели макроуровня можно получить или на основе законов физики, описывающих физические свойства всех входящих в них дискретных элементов и условия их взаимодействия, или путем аппроксимации моделей микроуровня, объекты на котором представляются в виде сплошных сред. Первый способ характерен для объектов, у которых существует набор явно выраженных конструктивных дискретных элементов или дискретные элементы легко выделяются из сплошной среды вследствие ее высокой степени неоднородности (например, дискретные элементы электрической системы – резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, трансформаторы). Во многих механических системах сравнительно легко выделяются дискретные элементы. При моделировании механической системы «двигатель – трансмиссия – ведущие колеса – дорога» можно выделить тяжелые вращающиеся массы с большими моментами инерции (маховик двигателя, шестерни трансмиссии, корпус дифференциала, колеса автомобиля), накапливающие почти всю кинетическую энергию относительного вращательного движения, но практически недеформируемые, и сравнительно тонкие длинные валы и упругие элементы шин, имеющие значительные угловые деформации и накапливающие потенциальную энергию.

Второй способ построения модели макроуровня заключается в применении сеточных методов дискретизации сплошной среды (метод конечных разностей и метод конечных элементов).

Рассмотрим используемые при проектировании различных механизмов особенности построения математических моделей механических систем на макроуровне. Для дискретизации структуры таких систем наиболее часто применяется метод сосредоточенных масс.

Дискретизация заключается в выделении некоторых абстрактных материальных субстанций с наделением их определенными физическими свойствами. Такими субстанциями являются сосредоточенные массы, эквивалентные массам соответствующих частей технического объекта, и элементы, лишённые массы (невесомые), отображающие характер взаимодействия сосредоточенных масс (упругие, диссипативные, трансформаторные, фрикционные). Структурная композиция, составленная из этих элементов, представляет собой динамическую модель объекта. Основное требование к процессу построения адекватной динамической модели – соблюдение закона сохранения энергии.

Сосредоточенные массы обладают только инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. По существу, это абсолютно твердые тела с одной степенью свободы, т. е. тела, совершающие один вид простейшего движения – поступательное или вращательное. Если твердое тело совершает сложное движение, то оно раскладывается на простейшие составляющие. Например, плоское движение твердого тела раскладывается на три составляющих – два поступательные движения и одно вращательное относительно соответствующих осей прямоугольной системы координат. Следовательно, в этом случае выделяется три сосредоточенные массы. В случае пространственного движения твердого тела выделяется шесть сосредоточенных масс. Количество сосредоточенных масс динамической модели равно числу степеней свободы моделируемого объекта.

Количество сосредоточенных масс реальных технических объектов может быть весьма значительным, что требует использования многомерного фазового пространства. Положение масс отображается геометрическими координатами фазового пространства, а характер их движения – скоростями.

Упругие элементы отображают

упругие свойства динамической системы и обладают способностью накапливать потенциальную энергию.

Диссипативные элементы позволяют учесть рассеивание энергии, обусловленное силами внутреннего трения деформируемых элементов.

Трансформаторные элементы отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии с учетом потерь на трение в трансформаторах объекта.

Фрикционные элементы отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта, характеристики которых обусловлены внешним трением.

Описание физических свойств дискретных элементов, составляющих структуру динамической модели, осуществляется компонентными уравнениями. Название этих уравнений следуют из того, что элементы являются компонентами динамической модели.

Компонентное уравнение инерционного элемента (сосредоточенной массы) получаем на основе второго и третьего законов Ньютона. Согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки  $\vec{a}$  пропорционально силе  $\vec{F}$ , приложенной к этой точке, и обратно пропорционально её массе  $m$ ; направление вектора ускорения  $\vec{a}$  совпадает с направлением вектора силы  $\vec{F}$ . Согласно третьему закону Ньютона, действие равно противодействию. Сле-

довательно, какая-то сила должна противодействовать силе  $\vec{F}$ , уравновесить её и быть противоположно направленной. Такой силой является сила инерции материальной точки  $\vec{F}_и$ . На рис. 1, а показана схема, отображающая изложенное. Очевидно, что сила инерции  $\vec{F}_и$  представляет собой реакцию инерционного элемента (материальной точки) на внешнее воздействие  $\vec{F}$ . В результате получаем компонентное уравнение инерционного элемента в следующем виде:

$$\vec{F}_и = -m\vec{a} = -m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

При вращательном движении сосредоточенная масса изображается на динамической модели в виде кружка с обозначением оси «о» и плоскости «п» вращения (рис. 1, б). Компонентное уравнение инерционного элемента в этом случае

$$\vec{M}_и = -J\vec{\varepsilon} = -J\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (2)$$

где  $\vec{M}_и$  – инерционный момент – реакция инерционного элемента на внешнее воздействие  $\vec{M}$ ;  $J$  – момент инерции сосредоточенной массы;  $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$  – угловое ускорение.

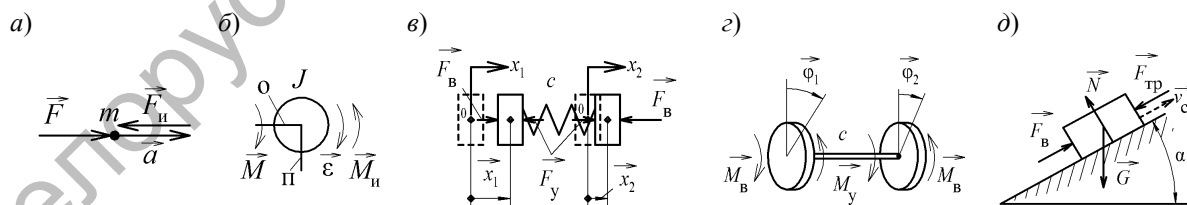


Рис. 1. Схемы к определению реакций элементов динамической системы на внешние воздействия

Определение параметров инерционных элементов  $m$  и  $J$  осуществляется

на основе закона сохранения кинетической энергии моделируемой системы

при дискретизации ее масс:

$$E_{kj} = \sum_{i=1}^N E_{kij}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

При поступательном движении масс технической системы

$$E_{kj} = m_j v_j^2 / 2; \quad (4)$$

$$E_{kij} = m_{ij} v_{ij}^2 / 2, \quad (5)$$

где  $E_{kj}$ ,  $m_j$ ,  $v_j$  – кинетическая энергия, масса и скорость  $j$ -й сосредоточенной массы динамической модели;  $E_{kij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $v_{ij}$  – то же  $i$ -й массы моделируемого объекта, приводимой к  $j$ -й сосредоточенной массе модели;  $N$  – количество твёрдых тел, учитываемых  $j$ -й сосредоточенной массой;  $n$  – количество сосредоточенных масс динамической модели.

Компонентное уравнение упругого элемента получаем на основе закона Гука, согласно которому деформация растяжения (сжатия) упругого тела пропорциональна приложенной силе (или моменту – при закручивании стержня).

В динамической модели объекта механической природы упругие элементы расположены между сосредоточенными массами. При поступательном перемещении сосредоточенных масс упругий элемент представляется в виде цилиндрической пружины (рис. 1, в), а при вращательном движении – в виде торсиона, изображаемого на динамической модели линией или стержнем (рис. 1, г). Параметром упругого элемента является коэффициент жёсткости  $c$ . Реакция упругого элемента на внешнее воздействие представляет собой силу упругости  $\vec{F}_y$  (или момент упругости  $\vec{M}_y$  – при вращательном движении масс). Компонентные уравнения упругих элементов для поступательной и вращательной систем соответственно:

$$\vec{F}_y = -c\Delta\vec{x} = -c(\vec{x}_1 - \vec{x}_2); \quad (6)$$

$$\vec{M}_y = -c\Delta\vec{\varphi} = -c(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2), \quad (7)$$

где  $\Delta\vec{x}$ ,  $\Delta\vec{\varphi}$  – векторы деформаций упругих элементов поступательной и вращательной систем соответственно;  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{\varphi}_1$ ,  $\vec{\varphi}_2$  – векторы фазовых координат, определяющих положения сосредоточенных масс в фазовом пространстве.

Диссипативные элементы механической системы отображают потери энергии на преодоление сил трения. Различают внешнее и внутреннее трения механического объекта. Внешнее трение возникает в плоскости касания двух тел при их относительном перемещении. На рис. 1, д приведена модель, отображающая внешнее трение. Под воздействием внешней силы  $\vec{F}_B$  в плоскости контакта тела с опорной поверхностью возникает сила трения  $\vec{F}_{тр}$ , создающая сопротивление перемещению и представляющая собой реакцию диссипативного элемента  $\vec{F}_d$  на внешнее воздействие  $\vec{F}_B$ , причём  $\vec{F}_{тр} = -\vec{F}_d$ .

Сила трения  $\vec{F}_{тр}$  пропорциональна нормальной реакции опорной поверхности  $\vec{N}$ , которая зависит от силы тяжести твёрдого тела  $\vec{G} = m\vec{g}$  и угла наклона опорной поверхности  $\alpha$ . Модуль реакции  $\vec{N}$  определяется по формуле  $|N| = |G| \cos \alpha$ . Относительное перемещение тела происходит при условии  $|F_B| \geq |F_{тр}|$ . При неподвижном контакте величина силы трения  $|F_{тр}|$  изменяется в широких пределах – от нуля до предельного значения, равного  $\mu_{сц}|N|$ , т. е. в пределах  $0 \leq |F_{тр}| \leq \mu_{сц}|N|$ . В состоянии покоя модуль силы трения  $|F_{тр}|$  переменный, возрастающий соответственно увеличению силы внешнего воздействия  $|F_B|$ .

Сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр.ск}}$  описывается выражением

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{тр.ск}} &= -\mu_{\text{ск}}(v_{\text{ск}})|N|\vec{e}_v = \\ &= \mu_{\text{ск}}(v_{\text{ск}})|N|\text{sign}(\vec{v}_{\text{ск}}^{\mathcal{O}}). \end{aligned} \quad (8)$$

Внешнее трение характерно для фрикционных элементов (сцепления, тормоза, скользящее колесо относительно дороги, сухое трение в многорычковых рессорах и др.).

При деформировании упругих элементов технического объекта также происходят потери энергии на преодоление возникающего при этом внутреннего трения в таких элементах. Предполагается, что это трение по своим физическим свойствам аналогично трению между слоями жидкости, обусловленному её вязкостью (ньютоновская жидкость). В связи с этим в качестве компонентного уравнения диссипативного элемента механической системы используется уравнение вязкого трения, которое в соответствии с законом Ньютона для поступательной и вращательной механических систем записывается соответственно:

$$\vec{F}_d = -\mu\Delta\vec{v} = -\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2); \quad (9)$$

$$\vec{M}_d = -\mu\Delta\vec{\omega} = -\mu(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2); \quad (10)$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкого трения (демпфирования);  $\Delta\vec{v}$ ,  $\Delta\vec{\omega}$  – векторы скоростей деформаций упругих элементов (относительных скоростей скольжения);  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  – векторы скоростей сосредоточенных масс, соединяемых упругим элементом.

На рис. 2 представлена динамическая модель, предназначенная для исследования плавности хода автомобиля и вибронегруженности водителя, пассажиров и механизмов подвески. Предполагается, что неподрессоренные массы автомобиля  $m_1$ ,  $m_2$  и масса водителя  $m_4$  (вместе с массой сиденья) совершают только вертикальные перемещения,

отображаемые фазовыми координатами  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_4$ . Следовательно, каждая из этих масс имеет одну степень свободы и представляется в динамической модели одной сосредоточенной массой.

Кузов автомобиля при движении по неровностям дороги совершает движение в вертикальной плоскости  $xOz$  (рассматривается плоская модель колебаний). Разложим движение кузова на три составляющих – два поступательных перемещения относительно осей  $x$  и  $z$  и одно вращательное относительно оси  $y$ . Начало координат (точка  $O$ ) находится в центре масс кузова. Следовательно, твердое тело (кузов автомобиля) имеет три степени свободы и представляется в динамической модели тремя сосредоточенными массами. Две из них совершают поступательные движения и одна – вращательное. Параметрами первых двух является масса кузова  $m_3$ , а параметром третьей – момент инерции  $J_y$  относительно оси  $y$ . В результате система имеет 6 степеней свободы. Согласно стандартам на испытания, параметры плавности хода определяют при постоянной скорости движения автомобиля, поэтому уравнение движения вдоль оси  $x$  можно не составлять и использовать модель с 5-ю степенями свободы.

Упругие элементы с коэффициентами жёсткости  $c_1$  и  $c_2$  и диссипативные элементы с параметрами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  отображают свойства шин автомобиля. Рессоры представлены упругими элементами с параметрами  $c_3$  и  $c_4$ , амортизаторы – элементами с параметрами  $\mu_3$  и  $\mu_4$ , а свойства сиденья водителя – упругим и диссипативным элементами с параметрами  $c_5$  и  $\mu_5$ .

При построении математической модели структурно-матричным методом в дополнение к динамической модели используются *ориентированный граф (орграф)* и *матрица инцидентий*, позволяющие детально и наглядно

представить структуру динамической системы и полностью формализовать

процесс составления уравнений математической модели.

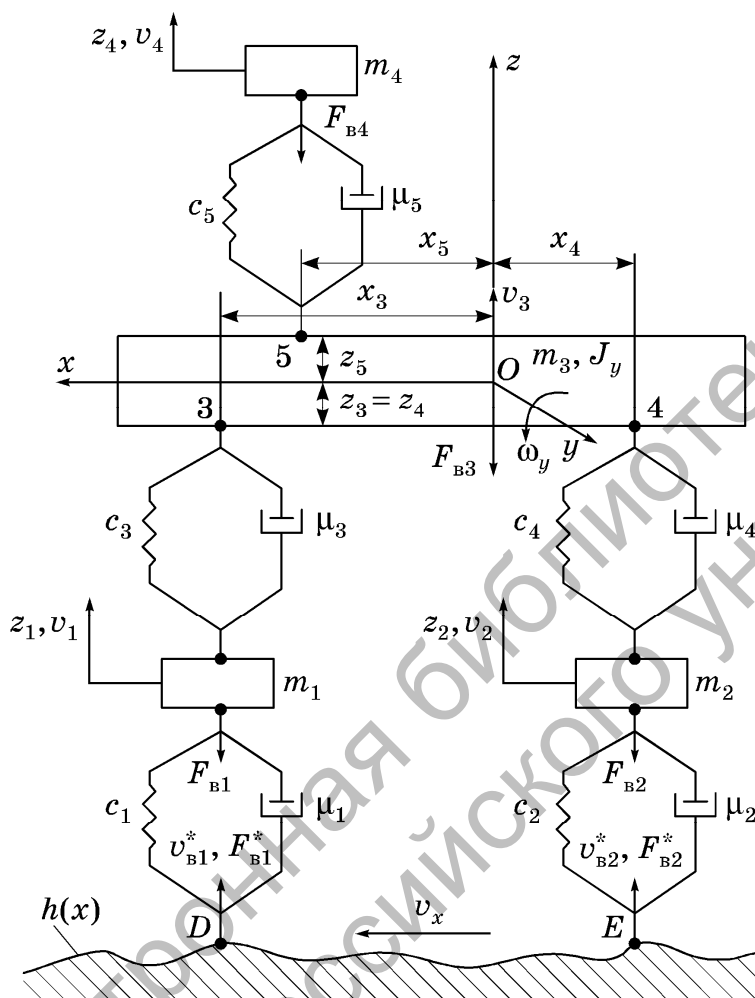


Рис. 2. Динамическая модель для исследования виброзащитных свойств системы поддрессоривания автомобиля

Элементы орграфа – узлы и соединяющие их ветви. Узлы отображают сосредоточенные массы, а ветви – воздействия на каждую массу внешней среды и соответствующих безынерционных элементов системы, непосредственно связанных с данной массой. На рис. 3 представлен орграф моделируемого объекта. Базовый узел «0» отображает внешнюю среду. Ветви диссипативных элементов на орграфе не показаны с целью упрощения изображения. Методика построения орграфа изложена в [1]. Принадлежность ветвей соответ-

ствующим элементам обозначена их параметрами. На ветвях указываются направления потоков энергии, поступающей в систему, передаваемой через элементы системы и подводимой к потребителям (рабочим органам). Направление потока энергии определяется знаком его мощности, вычисляемой по следующим формулам:

$$P_{\Pi} = \vec{F}\vec{v} = Fv \cos(\vec{F}, \vec{v}); \quad (11)$$

$$P_{\text{вр}} = \vec{M}\vec{\omega} = M\omega \cos(\vec{M}, \vec{\omega}). \quad (12)$$



$$\left. \begin{aligned} v_{xi} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i; \\ v_{yi} &= \omega_z x_i - \omega_x z_i; \\ v_{zi} &= \omega_x y_i - \omega_y x_i, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $v_{xi}$ ,  $v_{yi}$ ,  $v_{zi}$  – проекции скорости  $i$ -й точки твёрдого тела на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  – угловые скорости вращения твёрдого тела относительно этих же осей;  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  – координаты  $i$ -й точки.

Преобразование параметров потока энергии (скоростей и потенциалов) осуществляется трансформаторными элементами (ТЭ). Формулы Эйлера (13) позволяют определить их параметры – передаточные числа. При принятых ограничениях на перемещения кузова автомобиля  $\omega_x = \omega_z = 0$ ;  $v_{yi} = 0$ . Движение вдоль оси  $x$  не рассматривается. В результате получаем расчётную формулу для определения передаточных чисел ТЭ исследуемого объекта

$$v_{zi} = -\omega_y x_i. \quad (14)$$

В обозначениях ТЭ и их передаточных чисел  $u$  используется двойной индекс: первый индекс  $i$  соответствует номеру сосредоточенной массы, а второй  $j$  – номеру упругого элемента, взаимодействующего с данной массой. Передаточное число равно отношению скорости на входе ТЭ к скорости на его выходе. Вход и выход определяются в соответствии с направлением потока энергии. В рассматриваемом примере три трансформаторных элемента. Они расположены между упругими элементами  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  и вращающимся твёрдым телом. Учитывая направления потоков энергии в упругих элементах, получаем следующие значения передаточных чисел:

$$u_{53} = v_{z3} / \omega_y = -x_3;$$

$$u_{54} = v_{z4} / \omega_y = -x_4;$$

$$u_{55} = \omega_y / v_{z5} = -1/x_5. \quad (15)$$

При определении передаточных чисел учитываются знаки координат точек  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ . Следовательно, передаточные числа представляют собой алгебраические числа со своими знаками.

Таким образом, очевидно, что орграф полностью отображает физические свойства технической системы и взаимодействие её с внешней средой.

Аналогичную информацию несёт матрица инцидентий  $I$  (табл. 1). В этой матрице каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви – столбец. Единицами в матрице отмечено наличие соединений между узлами и ветвями орграфа. Знак инцидентора отображает направление потока энергии: при подводе энергии к массе принимается знак «плюс», а при отводе – знак «минус». Матрица инцидентий состоит из четырёх подматриц  $I = [I_B, I_n, I_y, I_d]$ , отображающих воздействия источников внешней среды  $I_B$  и реакций инерционных  $I_n$ , упругих  $I_y$  и диссипативных  $I_d$  элементов на сосредоточенные массы. Подматрица  $I_n$  единичная, элементы её диагонали равны  $(-1)$ , а остальные нулевые. Поэтому её обычно не приводят в матрице инцидентий, но учитывают при составлении уравнений. Для механических систем  $I_d = I_y$ . В табл. 1 подматрицы  $I_n$  и  $I_d$  исключены с целью её упрощения.

Наличие трансформаторных элементов отображается матрицей ТЭ (табл. 2), в которой указываются места расположения этих элементов и их номера.

Уравнения математической модели можно составить или по орграфу, или на основе матриц  $I$  и ТЭ. Составляются два типа уравнений: *топологические*, характеризующие структуру динамической модели, учитывающие воздействия на сосредоточенные массы



внешней среды и элементов модели, и компонентные уравнения упругих и диссипативных элементов. Топологические уравнения составляются на основе принципа Даламбера, согласно которому геометрическая сумма потенциалов (сил или моментов), приложенных к материальной точке (сосредоточенной массе) со стороны внешней среды и взаимодействующих с ней элементов системы, с учётом потенциала инерционного элемента (силы инерции или

инерционного момента) равна нулю:

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ni} = 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где  $\vec{F}_{ij}$  –  $j$ -я сила, оказывающая воздействие на  $i$ -ю массу;  $\vec{F}_{ni}$  – сила инерции  $i$ -й массы;  $N$  – количество сил, воздействующих на  $i$ -ю массу;  $n$  – количество сосредоточенных масс системы.

Табл. 1. Матрица инцидентий И

Узел орграфа	Ветвь орграфа										
	Потенциал источника внешнего воздействия						Потенциал упругого элемента				
	$F_{в1}$	$F_{в2}$	$F_{в3}$	$F_{в4}$	$F_{в1}^*$	$F_{в2}^*$	$F_{y1}$	$F_{y2}$	$F_{y3}$	$F_{y4}$	$F_{y5}$
1	-1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
2	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0
3	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	-1
4	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1
1*	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
2*	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0
Подматрицы	И <sub>в</sub>						И <sub>y</sub>				

Табл. 2. Матрица трансформаторных элементов ТЭ

Узел орграфа	Ветвь упругого элемента				
	$F_{y1}$	$F_{y2}$	$F_{y3}$	$F_{y4}$	$F_{y5}$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	ТЭ <sub>53</sub>	ТЭ <sub>54</sub>	ТЭ <sub>55</sub>
1*	0	0	0	0	0
2*	0	0	0	0	0

Используя матрицы И и ТЭ, выражение (16) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^L \mathbf{I}_{vil} F_{vl} + \sum_{j=1}^N \mathbf{I}_{yij} F_{yj} T_{yij} + \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{dik} F_{dk} T_{dik} - F_{ni} = 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{I}_{vil}$ ,  $\mathbf{I}_{yij}$ ,  $\mathbf{I}_{dik}$  – инциденторы, отображающие воздействия на  $i$ -ю массу потенциалов внешних источников  $F_{vl}$ , упругих  $F_{yj}$  и диссипативных  $F_{dk}$  элементов соответственно;  $T_{yij}$ ,  $T_{dik}$  – параметры трансформаторных элементов, расположенных между  $i$ -й массой и соответствующими упругими и диссипативными элементами;  $L$ ,  $N$ ,  $K$  – количество соответствующих потенциалов.

Выражения для вычисления параметров  $T_{yij}$  и  $T_{dik}$  имеют следующий вид:

$$T_{yij} = (u_{ij} \eta_{ij}) \mathbf{I}_{yij}; \quad T_{dik} = (u_{ij} \eta_{ij}) \mathbf{I}_{dik}, \quad (18)$$

где  $u_{ij}$  и  $\eta_{ij}$  – передаточное число и КПД ТЭ, расположенного между  $i$ -й массой и соответствующим упругим или диссипативным элементом.

Возведение в степень инцидентора позволяет учесть расположение ТЭ относительно упругого или диссипативного элемента.

Сила инерции  $F_{ni}$   $i$ -й массы записана в формуле (17) со знаком «минус», т. к. её инцидентор равен  $(-1)$ , что отмечалось ранее. Подставляя значение модуля силы  $F_{ni}$ , получаем систему дифференциальных уравнений движения

сосредоточенных масс

$$\frac{dv_i}{dt} = \left( \sum_{l=1}^L \mathbf{I}_{vil} F_{vl} + \sum_{j=1}^N \mathbf{I}_{yij} F_{yj} T_{yij} + \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{dik} F_{dk} T_{dik} \right) / m_i; \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Компонентные уравнения упругих и диссипативных элементов составляются по столбцам матрицы инциденций и имеют следующий вид:

$$F_{yj} = -c_j \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{yij} z_i S_{yij}; \quad j = \overline{1, N}; \quad (20)$$

$$F_{dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{dik} v_i S_{dik}; \quad k = \overline{1, K}. \quad (21)$$

Выражения для вычисления параметров  $S_{yij}$  и  $S_{dik}$  аналогичны выражениям (18), только в них не используются значения параметров  $\eta_{ij}$ .

Строки матрицы И, соответствующие узлам  $1^*$  и  $2^*$ , позволяют определить нормальные реакции дороги на колеса автомобиля по выражению

$$F_{vm}^* = - \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{I}_{ymj} F_{yj} + \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{dmk} F_{dk} \right); \quad m = \overline{1, M}, \quad (22)$$

где  $M$  – количество источников внешних воздействий типа потока.

Составим развёрнутые системы топологических и компонентных уравнений исследуемой системы.

Топологические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} dv_1/dt &= (-F_{в1} + F_{y1} - F_{y3} + F_{д1} - F_{д3})/m_1; \\ dv_2/dt &= (-F_{в2} + F_{y2} - F_{y4} + F_{д2} - F_{д4})/m_2; \\ dv_3/dt &= (-F_{в3} + F_{y3} + F_{y4} - F_{y5} + F_{д3} + F_{д4} - F_{д5})/m_3; \\ dv_4/dt &= (-F_{в4} + F_{y5} + F_{д5})/m_4; \\ d\omega_y/dt &= (F_{y3}u_{53}\eta_{53} + F_{y4}u_{54}\eta_{54} - F_{y5}/(u_{55}\eta_{55}) + \\ &+ F_{д3}u_{53}\eta_{53} + F_{д4}u_{54}\eta_{54} - F_{y5}/(u_{55}\eta_{55}))/J_y. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Компонентные уравнения линейных упругих элементов:

$$\left. \begin{aligned} F_{y1} &= c_1(z_{в1}^* - z_1); \\ F_{y2} &= c_2(z_{в2}^* - z_2); \\ F_{y3} &= c_3(z_1 - z_3 - \varphi_y u_{53}); \\ F_{y4} &= c_4(z_2 - z_3 - \varphi_y u_{54}); \\ F_{y5} &= c_5(z_3 - z_4 + \varphi_y u_{55}). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Компонентные уравнения линейных диссипативных элементов аналогичны уравнениям (24), только вместо  $c_j$  используются параметры  $\mu_k$ , фазовые координаты  $z_i$  и  $\varphi_y$  заменяются скоростями  $v_i$  и  $\omega_y$ , а функции внешних воздействий  $z_{вl}^*(t)$  — функциями  $v_{вl}^*(t)$ . Функции  $z_{вl}^*(t)$  и  $v_{вl}^*(t)$  представляют собой вероятностное описание микропрофиля опорной поверхности дороги. Методика их формирования изложена в [1].

Если упругие элементы линейные, выражения (24) можно продифференцировать по времени:

$$\left. \begin{aligned} dF_{y1}/dt &= c_1(v_{в1}^* - v_1); \\ dF_{y2}/dt &= c_2(v_{в2}^* - v_2); \\ dF_{y3}/dt &= c_3(v_1 - v_3 - \omega_y u_{53}); \\ dF_{y4}/dt &= c_4(v_2 - v_3 - \omega_y u_{54}); \\ dF_{y5}/dt &= c_5(v_3 - v_4 + \omega_y u_{55}). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Сведя выражения (23) и (25) в единую систему, получаем систему дифференциальных уравнений, базис которой составляют фазовые координаты  $v_i$  и  $F_{yj}$  (смешанный базис). Выполнив её интегрирование, находим искомые функции  $v_i(t)$  и  $F_{yj}(t)$ . Для получения значений ускорений сосредоточенных масс вычисляем правые части уравнений (23). В результате получаем информацию о процессе функционирования исследуемого объекта, необходимую для оценки критериев её качества и эффективности. Примеры решения таких задач приведены в [1].

Если упругие и диссипативные элементы имеют нелинейные характеристики  $F_{yj}(z_i)$ ,  $F_{дk}(v_i)$ , то система уравнений (23) дополняется уравнениями  $dz_i/dt = v_i$ ;  $i = \overline{1,4}$  и  $d\varphi_y/dt = \omega_y$ . В результате получаем систему уравнений с однородным базисом (фазовые координаты типа потока), решение которой даёт функции скоростей и перемещений сосредоточенных масс, на основе которых затем осуществляется вычисление ускорений масс и усилий упругих элементов по формулам (24).

На рис. 4, а-г приведены результаты моделирования процесса преодоления автомобилем порогового препятствия (например, бордюра).

Обозначения графиков исследуемых процессов соответствуют принятым в уравнениях математической модели (23)...(25). Высота препятствия  $h = 0,075$  м, скорость автомобиля  $v_a = 3$  м/с. Перемещения сосредото-

ченных масс (рис. 4, а) измерялись относительно недеформированного состояния упругих элементов рессор и шин. При деформациях, не превышающих

$\Delta z_3 = 0,3$  м и  $\Delta z_4 = 0,25$  м, работают только рессоры с линейными характеристиками. После превышения этих величин происходит пробой подвески и вступают в действие резиновые буферы

ограничителей ходов подвески. Коэффициент жёсткости упругих элементов резко возрастает. В примере принималось увеличение жёсткости в 4 раза. При пробое виброускорение подрессоренных масс существенно возрастает и может превысить допускаемую для человека величину  $0,4g$   $m/c^2$ .

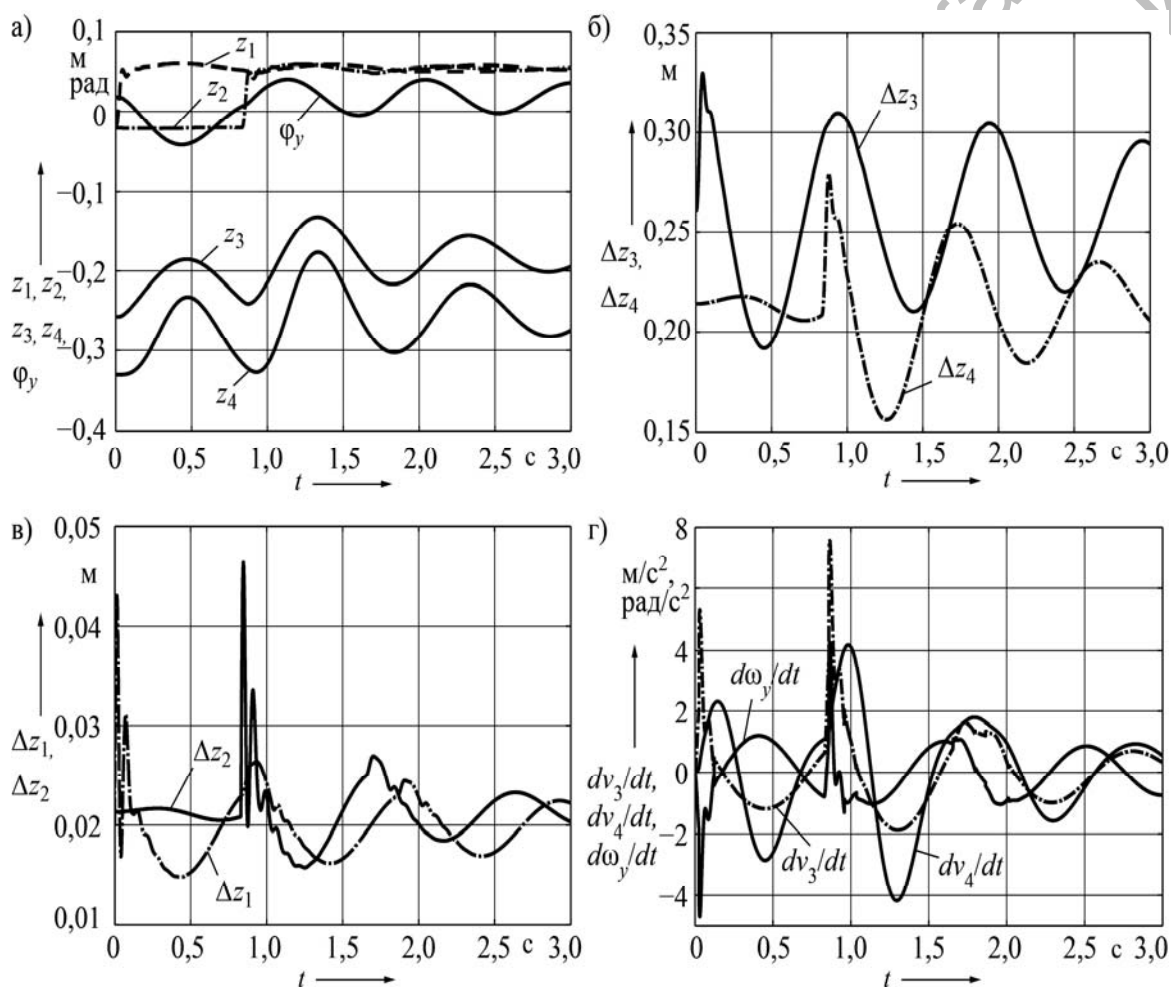


Рис. 4. Результаты моделирования: а – перемещения сосредоточенных масс; б – деформации рессор; в – деформации шин; г – ускорения подрессоренных масс

Изложенная методика математического моделирования используется многими исследователями и проекти-

ровщиками и позволяет успешно решать сложные задачи анализа и синтеза создаваемых технических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016. – 592 с.

2. **Норенков, И. П.** Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем / И. П. Норенков. – М. : Высш. шк., 1986. – 304 с.

*Статья сдана в редакцию 1 декабря 2015 года*

**Владимир Петрович Тарасик**, д-р техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет.  
E-mail: avto@bru.mogilev.by.

**Vladimir Petrovich Tarasik**, DSc (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University.  
E-mail: avto@bru.mogilev.by.