

УДК 531.8

## РАСЧЕТ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

С.А. СЕНЬКОВ, А.В. ЛОКТИОНОВ

Учреждение образования  
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»  
Витебск, Беларусь

Известно дифференциальное уравнение малых колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. При этом используется координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра тяжести системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения шарика  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ , угол отклонения  $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ .

Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из ползуна, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика, подвешенного к ползуну нерастяжимым стержнем. Масса ползуна равна  $M$ , масса шарика –  $m$ , длина нерастяжимого стержня –  $l$ . Принимаем, что в начальный момент угол  $\varphi = \varphi_0 = 0$ , а угловая скорость  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$ . Найдем закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых  $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$ .

Для решения воспользуемся уравнением Лагранжа. Принимаем, что на маятник не действуют силы тяжести и потенциальная энергия системы  $\Pi = 0$ . Система обладает двумя степенями свободы, а значит двумя обобщенными координатами  $x$  и  $\varphi$ . Тогда уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Рассчитаем кинетическую энергию  $T$  системы:

$$T = T_I + T_{II},$$

где  $T_I$  – кинетическая энергия первого тела;  $T_{II}$  – кинетическая энергия второго тела.

Кинетическая энергия ползуна определяется из выражения:

$$T_I = \frac{M}{2} \mathcal{V}_I^2 \text{ или } T_I = \frac{M\dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия шарика определяется из выражения:

$$T_{II} = \frac{m}{2} \mathcal{V}_{II}^2 \text{ или } T_{II} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2).$$

Тогда полная кинетическая энергия системы будет равна:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2).$$



Определяя частные производные кинетической энергии по координате и скорости и, интегрируя первое уравнение Лагранжа с учетом принятых начальных условий при  $t = t_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ , определим скорость движения ползуна:

$$\dot{x} = \frac{ml(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi} \cos \varphi)}{M + m}. \quad (1)$$

Уравнения (1) выражает зависимость скорости ползуна от угловой скорости вращения и угла отклонения стержня  $l$  от вертикальной оси.

Интегрируя уравнение (1), получим:

$$x = \frac{ml(\dot{\varphi}_0 t - \sin \varphi)}{M + m}. \quad (2)$$

Уравнение (2) выражает закон движения ползуна в зависимости от угла отклонения стержня  $l$  от вертикальной оси и времени.

Решая второе уравнение Лагранжа, имеем:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \varphi}}. \quad (3)$$

Уравнения (3) выражает зависимость угловой скорости вращения маятника от угла отклонения стержня  $l$  от вертикальной оси.

Из уравнения (3) найдем закон движения эллиптического маятника, считая угол  $\varphi$  малым. Так как для малых углов  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ , а  $\sin^2 \varphi < \sin \varphi$ , принимаем  $\sin^2 \varphi = \varphi$ . Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M} \varphi} d\varphi = \dot{\varphi}_0 dt. \quad (4)$$

Решая уравнение (4) окончательно имеем:

$$\varphi = \frac{M}{m} \left[ \sqrt[3]{\left( \frac{3m}{2M} \dot{\varphi}_0 t + 1 \right)^2} - 1 \right]. \quad (5)$$

Уравнение (5) выражает закон движения малых колебаний эллиптического маятника.

Подставляя уравнения (5) в уравнение (2) получим закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.