МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов всех специальностей заочной формы обучения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Могилёв 2019

УДК 517.91
ББК 22.161.6
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «11» июня 2019 г., протокол № 10

Составители: А. Н. Бондарев;
Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения, образцы решения примеров и задачи для самостоятельной работы по темам «Дифференциальные уравнения» и «Ряды».

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная вёрстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные (или дифференциалы).

ДУ называется ***обыкновенным***, если неизвестная функция, входящая в уравнение, зависит только от одной независимой переменной.

Порядком ДУ называется порядок входящей в уравнение старшей производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Обыкновенное ДУ первого порядка (ДУ-I) имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1), разрешенное относительно производной, называют ДУ в ***нормальной форме***. Оно имеет вид:

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

где функция $f(x, y)$ задана в некоторой области D плоскости xOy.

Решением уравнения (1) (или (2)) называется функция

$$y = \varphi(x), \tag{3}$$

определенная на некотором промежутке σ действительной оси и дифференцируемая на этом промежутке, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Решение ДУ, заданное неявно соотношением

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{4}$$

называется ***интегралом*** этого уравнения.

График решения ДУ называется ***интегральной кривой ДУ.***

Решение (3) (или (4)) дифференциального уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, называется ***частным решением*** (или ***частным интегралом***) ДУ, удовлетворяющим начальному условию.

Численный параметр, принимающий произвольные значения из множества $\mathbb{R}$, обозначим C. Функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и постоянной C, называется ***общим решением*** уравнения (1) (или (2)) в некоторой области σ, если оно является решением этого уравнения (при любом значении постоянной C из некоторого множества) и если любое решение уравнения в области σ при наличии начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$ может быть записано в виде $y = \varphi(x, C_0)$, где $C_0 = C(x_0, y_0)$.

Задача отыскания решения $y = \varphi(x)$ ДУ-I, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Равенство $\Phi(x,y,C)=0$, неявно задающее общее решение, называется ***общим интегралом*** уравнения (1) (или (2)) в области σ.

Решение ДУ, которое не может быть получено из общего ни при каком значении $C\in\mathbb{R}$, называют его ***особым решением***.

Процесс нахождения решения ДУ (1) (или (2)) называется ***интегрированием*** этого уравнения.

Известно из теоремы Коши, что если $f(x,y)$ непрерывна в окрестности точки $(x_0,y_0)\in D$, то решение задачи Коши существует, а если и $f'_y(x,y)$ непрерывна в окрестности точки $(x_0,y_0)\in D$, то такое решение задачи Коши будет единственным.

1.1 Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

ДУ-I с ***разделёнными переменными*** называется уравнение вида

$$f(x)dx+\varphi(y)dy=0, \tag{5}$$

где при dx стоит функция, зависящая только от x, а при dy – функция, зависящая только от $y=y(x)$.

Общий интеграл ДУ (5) имеет вид:

$$\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy=C.$$

ДУ-I с ***разделяющимися переменными*** называется уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0. \tag{6}$$

Если $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$, то, разделив обе части уравнения на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$, получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\dfrac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$. Следовательно, общий интеграл уравнения (6) имеет вид:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C.$$

Если $f_2(x)=0$ при некотором $x=\alpha$ или $\varphi_1(y)=0$ при некотором $y=\beta$, то уравнение, наряду с общим интегралом, имеет также решения $x=\alpha$ или $y=\beta$. Если эти решения не могут быть получены из общего интеграла при каком-то значении C, то они будут называться ***особыми решениями***; в противном случае они представляют собой частные решения при некоторых значениях C.

Пример 1 – Найти общий интеграл уравнения $\left(xy^2+y^2\right)dx+\left(x^2-x^2y\right)dy=0$.

Решение

Преобразуем левую часть уравнения: $y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0$.

Разделив уравнение на $x^2y^2\neq 0$, имеем $\dfrac{x+1}{x^2}dx+\dfrac{1-y}{y^2}dy=0$.

Проинтегрировав, получим общий интеграл ДУ:

$$\int\frac{x+1}{x^2}dx+\int\frac{1-y}{y^2}dy=C,\qquad \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=C,$$

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=C.$$

Пример 2 – Найти общий интеграл ДУ и частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию: $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}dy=0$, $y\left(\sqrt{8}\right)=1$.

Решение

Разделив уравнение на $y\cdot\sqrt{1+x^2}\neq 0$, получим $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\dfrac{1+y^2}{y}dy=0$.

Интегрируя данное уравнение, получим общий интеграл ДУ:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{1+y^2}{y}dy=C,\qquad \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}+\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=C,$$

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=C.$$

Полагая в общем интеграле $x=\sqrt{8}$, $y=1$, находим $C=\sqrt{9}+\dfrac{1}{2}+\ln 1=\dfrac{7}{2}$. Подставляя это значение C в общий интеграл, получаем частный интеграл ДУ:

$$\sqrt{1+x^2}+\frac{y^2}{2}+\ln|y|=\frac{7}{2}.$$

Пример 3 – Найти общий интеграл и решить задачу Коши для ДУ $\left(1+e^x\right)yy'=e^x$, $y(0)=1$.

Решение

Так как $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то разделяя переменные, получим

$$\left(1+e^{x}\right)y\frac{dy}{dx}=e^{x},\qquad ydy=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим общий интеграл ДУ:

$$\int ydy=\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx+C,\qquad \int ydy=\int\frac{de^{x}}{1+e^{x}}+C,\qquad \frac{y^{2}}{2}=\ln\left(1+e^{x}\right)+C.$$

Полагая в общем интеграле $x=0$, $y=1$, находим $C=\frac{1}{2}-\ln 2=\ln\frac{\sqrt{e}}{2}$. Подставляя это значение C в общий интеграл, получаем частный интеграл ДУ:

$$\frac{y^{2}}{2}=\ln\left(1+e^{x}\right)+\ln\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

1) $\left(1+x^{2}\right)dy-2x(y+3)dx=0$. *Ответ*: $y=C\cdot\left(x^{2}+1\right)-3$;

2) $y\cdot y'+x=1$. *Ответ*: $y^{2}=2x-x^{2}+C$;

3) $x\sqrt{1+y^{2}}dx+y\sqrt{1+x^{2}}dy=0$, $y\left(\sqrt{3}\right)=0$. *Ответ*: $\sqrt{1+x^{2}}+\sqrt{1+y^{2}}=3$;

4) $y'\sin x-y\cos x=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. *Ответ*: $y=\sin x$;

5) $y'+\sqrt{\frac{1-y^{2}}{1+x^{2}}}=0$. *Ответ*: $\arcsin y=C-\ln\left|x+\sqrt{1+x^{2}}\right|$;

6) $(1+2y)xdx-\left(1+x^{2}\right)dy=0$. *Ответ*: $1+x^{2}=C\cdot(2y+1)$;

7) $\left(y^{2}+xy^{2}\right)y'+x^{2}-yx^{2}=0$. *Ответ*: $\frac{y^{2}}{2}+y+\ln|y-1|=\frac{x^{2}}{2}-x+\ln|x+1|+C$;

8) $xy'-y=y^{3}$. *Ответ*: $\frac{y}{\sqrt{y^{2}+1}}=C\cdot x$;

9) $ydx+\operatorname{ctg}xdy=0$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$. *Ответ*: $y=-2\cos x$;

10) $y^{2}+y'\cdot x^{2}=0$, $y(-1)=1$. *Ответ*: $y=-x$;

11) $\sin x\cdot\sin ydx+\cos x\cdot\cos ydy=0$. *Ответ*: $\cos x=C\cdot\sin y$.

1.2 Однородные уравнения

ДУ-I называется ***однородным***, если его можно представить в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

Однородное уравнение (7) сводится к ДУ с разделяющимися переменными (6) при помощи замены $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$, где $u = u(x)$ – новая искомая функция. Иногда удобна замена $u = \frac{x}{y} \Rightarrow x = uy$, где $u = u(y)$ – искомая функция.

Пример 4 – Решить ДУ $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

Решение

Приводим ДУ к виду (7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = y', \qquad y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Применяем подстановку $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Следовательно,

$$u'x + u = u - u^2, \qquad u'x = -u^2, \qquad \frac{du}{dx}\cdot x = -u^2, \qquad -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл ДУ.

$$-\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{dx}{x} + C, \qquad \frac{1}{u} = \ln|x| + C, \qquad \frac{x}{y} = \ln|x| + C.$$

Пример 5 – Решить задачу Коши для ДУ $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$, $y(2) = 1$.

Решение

Приводим ДУ к виду (7):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \qquad \frac{dy}{dx} = y', \qquad y' = \frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Применяем подстановку $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Следовательно,

$$u'x + u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2u}, \qquad \frac{du}{dx}\cdot x = \frac{u^2 - 1}{2u}, \qquad \frac{2udu}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл ДУ.

$$\int \frac{2udu}{u^2-1}=\int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|u^2-1\right|=\ln|x|+\ln|C|, \qquad u^2-1=Cx, \qquad \frac{y^2}{x^2}=1+Cx.$$

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию. Подставив $x=2$, $y=1$ в общий интеграл, находим значение C: $\frac{1}{4}=1+2C$, $C=-\frac{3}{8}$.

Тогда $y^2=x^2\left(1-\frac{3}{8}x\right)$ – частный интеграл ДУ при условии $y(2)=1$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти общие и частные (где это требуется) решения или интегралы однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$, $y(1)=1$. *Ответ*: $y^2=2x^2\ln|x|+x^2$;

2) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$. *Ответ*: $e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$;

3) $\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy$. *Ответ*: $\frac{x^2}{x^2-y^2}=C\cdot x$;

4) $(x-y)ydx-x^2dy=0$, $y(1)=\frac{1}{3}$. *Ответ*: $y=\frac{x}{3+\ln|x|}$;

5) $y'=-\frac{x+y}{x}$, $y(2)=0$. *Ответ*: $y=\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$;

6) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$. *Ответ*: $y+\sqrt{y^2-x^2}=C\cdot x^2$;

7) $y'=\frac{x+y}{x-y}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=C$;

8) $yy'=2y-x$. *Ответ*: $\ln|y-x|+\frac{x}{y-x}=C$;

9) $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$, $y(-1)=1$. *Ответ*: $y=\frac{1-3x^2}{2x}$;

10) $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$. *Ответ*: $\frac{y}{y-x}=C\cdot x$;

11) $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$. *Ответ*: $\sin\frac{y}{x}=C-\ln|x|$.

1.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

ДУ-I называется ***линейным***, если оно линейно (т. е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'.

Общий вид линейного ДУ первого порядка (ЛДУ-I) имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (8)$$

Если правая часть уравнения (8) $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным***, в противном случае оно называется ***неоднородным***.

Линейное однородное ДУ (ЛОДУ) имеет вид $y' + P(x)y = 0$.

Рассмотрим два метода решения ЛДУ-I: метод Бернулли (метод подстановки) и метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Метод Бернулли. Решение уравнения (8) ищем в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и ЛДУ-I примет вид:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x), \qquad u'v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x).$$

Одну из функций $u(x)$ или $v(x)$ можно взять произвольной, другая определяется на основании последнего уравнения. Удобно в качестве функции $v(x)$ взять частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Тогда $u'v = Q(x)$. Подставив выражение v в последнее уравнение, найдём $u = u(x, C)$. Затем находим общее решение данного уравнения: $y = u(x, C) \cdot v(x)$.

Метод Лагранжа. Сначала находим общее решение соответствующего ЛОДУ. Затем, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищем общее решение исходного ЛДУ-I.

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

называется ***уравнением Бернулли.***

Уравнение Бернулли удобно решать методом Бернулли, как и ЛДУ-I.

Пример 6 – Проинтегрировать уравнение $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Решение

Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид:

$$u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x, \qquad u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x) = \sin x.$$

Для нахождения функций u и v получаем систему

$$\begin{cases} v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0, \\ u'v = \sin x. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение.

$$v' = v \cdot \operatorname{ctg} x, \qquad \frac{dv}{dx} = v \cdot \operatorname{ctg} x, \qquad \frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx,$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x|, \qquad v = \sin x.$$

С учётом найденного v интегрируем второе уравнение.

$$u' \cdot \sin x = \sin x, \qquad u' = 1, \qquad u = x + C.$$

Таким образом, $y = u \cdot v = (x + C) \cdot \sin x$ – общее решение исходного ДУ.

Пример 7 – Проинтегрировать уравнение $y' - y = 2e^x$, найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение

Применим метод вариации произвольной постоянной. ЛОДУ, соответствующее исходному уравнению, имеет вид $y' - y = 0$. Его общее решение $y = Ce^x$, где C – произвольная постоянная.

Будем искать общее решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^x$, где $C(x)$ – неизвестная функция от x. Так как $y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, то, подставляя выражения для y и y' в исходное уравнение, получим

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = 2e^x, \qquad C'(x) = 2, \qquad C(x) = 2x + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид $y = (2x + C_1)e^x$.

Полагая $x = 0$, $y = 1$, из общего решения находим C_1: $C_1 = 1$.

Тогда частное решение исходного ДУ, удовлетворяющее начальному условию, имеет вид $y = (2x + 1)e^x$.

Пример 8 – Проинтегрировать уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решение

Имеем уравнение Бернулли $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$. Полагаем $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=u^2v^2\cdot\frac{\ln x}{x},\qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=u^2v^2\cdot\frac{\ln x}{x}.$$

Для нахождения функций u и v получаем систему

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=u^2v^2\cdot\dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение.

$$v'+\frac{v}{x}=0,\qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\qquad \ln|v|=-\ln|x|,\qquad v=\frac{1}{x}.$$

С учётом найденного v интегрируем второе уравнение.

$$u'\cdot\frac{1}{x}=u^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\ln x}{x},\qquad \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=u^2\cdot\frac{\ln x}{x^3},\qquad \frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^2}dx,\qquad \int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Интеграл справа найдем с помощью метода интегрирования по частям.

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[\begin{array}{l} u_1=\ln x,\ du_1=\dfrac{dx}{x} \\ dv_1=\dfrac{dx}{x^2},\ v_1=-\dfrac{1}{x} \end{array}\right]=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-C=-\frac{\ln x+1+Cx}{x}.$$

Тогда

$$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x+1+Cx}{x},\qquad u=\frac{x}{\ln x+1+Cx}.$$

Таким образом, $y=u\cdot v=\dfrac{x}{\ln x+1+Cx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$ – общее решение исходного ДУ.

Примеры для самостоятельной работы

1 Решить ЛДУ-I методом Лагранжа:

1) $y'-\dfrac{y}{x}=x$. *Ответ*: $y=x(x+C)$;

2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2y}{x}+x^2$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^5}{5}+C\right)$.

2 Решить ЛДУ-I методом Бернулли:

1) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^4}{4} + C\right)$;

2) $xy' - y = x^2\cos x$. *Ответ*: $y = x(\sin x + C)$.

3 Решить ЛДУ-I:

1) $x^2 + xy' = y$, $y(1) = 0$. *Ответ*: $y = x(1 - x)$;

2) $x' + x\cos y = \cos y$, $x(0) = 1$. *Ответ*: $x = 1$;

3) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. *Ответ*: $y = e^{x^2}\left(x^2 + C\right)$;

4) $2xy' - y = 3x^2$. *Ответ*: $y = x^2 + C\cdot\sqrt{x}$.

4 Решить уравнения Бернулли:

1) $y'x + y = -xy^2$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x(\ln|x| + C)}$;

2) $2xyy' - y^2 + x = 0$. *Ответ*: $y^2 = x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$;

3) $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{x^2 + C\cdot x}$.

1.4 Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т. е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y).$$

Это возможно, если выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Общий интеграл уравнения определяется формулой $u(x,y) = C$.

Поскольку $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$, то $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Пример 9 – Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2\sin 2y\right)dy = 0$ выбрать ту, которая проходит через начало координат.

Решение

Для данного в условии уравнения имеем

$$P(x,y)=2x\cos^2 y,\qquad Q(x,y)=2y-x^2\sin 2y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cdot 2\cos y\cdot(-\sin y)=-2x\sin 2y,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\sin 2y.$$

Так как выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cos^2 y,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y-x^2\sin 2y.\end{cases}$$

Интегрируя, например, второе из этих уравнений (x при этом считается постоянной), найдём

$$u(x,y)=\int\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+f(x),$$

где $f(x)$ – функция, подлежащая определению.

Чтобы найти функцию $f(x)$, продифференцируем по x функцию $u(x,y)$: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x\cos 2y+f'(x)$. Принимая во внимание равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cos^2 y$, имеем

$$x\cos 2y+f'(x)=2x\cos^2 y,\qquad x\cos 2y+f'(x)=x(1+\cos 2y),$$

$$x\cos 2y+f'(x)=x+x\cos 2y,\qquad f'(x)=x,\qquad f(x)=\frac{x^2}{2}.$$

Итак, $u(x,y)=y^2+\dfrac{1}{2}x^2\cos 2y+\dfrac{x^2}{2}$, а значит $y^2+\dfrac{1}{2}x^2\cos 2y+\dfrac{x^2}{2}=C$ – общий интеграл данного уравнения семейства интегральных кривых.

Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Подставим в уравнение семейства интегральных кривых начальные данные $x=0$ и $y=0$. Получим $C=0$.

Таким образом, $y^2+\dfrac{1}{2}x^2\cos 2y+\dfrac{x^2}{2}=0$ – искомый частный интеграл.

Примеры для самостоятельной работы

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

1) $(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0$. *Ответ*: $5x^2y-8xy+x+3y=C$;

2) $3x^2e^y+(x^3e^y-1)y'=0,\ y(0)=1$. *Ответ*: $x^3e^y-y=-1$;

3) $2y\cos^2 x dy+(2x-y^2\sin 2x)dx=0$. *Ответ*: $y^2\cos^2 x+x^2=C$;

4) $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$. *Ответ*: $\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{3x^2y^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+2x=C$;

5) $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. *Ответ*: $x^2+y^2+2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=C$;

6) $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$;

7) $(12x+5y-9)dx+(5x+2y-4)dy=0$. *Ответ*: $6x^2+5xy+y^2-9x-4y=C$;

8) $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$. *Ответ*: $x^2+ye^{\frac{x}{y}}=C$.

2 Дифференциальные уравнения высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0, \tag{9}$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция переменной x; $y',...,y^{(n)}$ – производные функции y.

При этом функция F может явно не зависеть от $x,y,y',...,y^{(n-1)}$, но обязательно должна зависеть от $y^{(n)}$.

Уравнение (9), разрешенное относительно $y^{(n)}$, т. е. записанное в виде

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right), \tag{10}$$

называется ***ДУ в нормальной форме***.

Функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, зависящая от x и n произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n, называется ***общим решением уравнения*** (10), если она является решением этого уравнения для любых значений C_1, C_2, …, C_n, и каковы бы ни были начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, существуют единственные значения постоянных C_1^0, C_2^0, …, C_n^0, такие, что функция $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0\right)$ удовлетворяет начальным условиям.

Неявно заданное общее или частное решение ДУ называется ***общим*** или ***частным интегралом ДУ*** соответственно.

Задача Коши и теорема Коши для ДУ высшего порядка формулируются аналогично их формулировкам для ДУ первого порядка.

2.1 Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим ДУ вида $y^{(n)} = f(x)$, $F(x, y', y'') = 0$, $F(y, y', y'') = 0$.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается n-кратным интегрированием ДУ.

Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в ДУ-I посредством подстановки $y' = p(x)$, откуда $y'' = p'$.

Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее явно аргумента x, преобразуется в ДУ-I посредством подстановки $y' = p(y)$, откуда $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$.

Пример 1 – Найти общее решение ДУ $y''' = \dfrac{1}{x^3}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$, $y''(1) = \dfrac{3}{2}$.

Решение

Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем общее решение ДУ.

$$y'' = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C_1,$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{2x^2} + C_1\right) dx = \frac{1}{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2x} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Подставляя $x = 1$, $y = 2$, $y' = \dfrac{1}{2}$, $y'' = \dfrac{3}{2}$ в выражения для y, y', y'', найдём значения C_1, C_2, C_3. Имеем

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1}{2} \cdot \ln 1 + C_1 \cdot \dfrac{1}{2} + C_2 + C_3, \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + C_1 + C_2, \\ \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -2, \\ C_3 = 3. \end{cases}$$

Искомое частное решение получаем из общего решения, подставляя найденные значения произвольных постоянных: $y=\frac{1}{2}\cdot\ln|x|+x^2-2x+3$.

Пример 2 – Проинтегрировать уравнение $y''=2(y'-1)\operatorname{ctg}x$.

Решение

Имеем уравнение вида $F(x,y',y'')=0$. Полагаем $y'=p(x)$, тогда $y''=p'$.

После подстановки получаем ДУ-I с разделяющимися переменными, интегрируя которое, находим $p(x)$.

$$p'=2(p-1)\operatorname{ctg}x,\qquad \frac{dp}{dx}=2(p-1)\operatorname{ctg}x,\qquad \frac{dp}{p-1}=2\operatorname{ctg}x\,dx,\qquad \int\frac{dp}{p-1}=2\int\operatorname{ctg}x\,dx,$$

$$\ln|p-1|=2\ln|\sin x|+\ln|C_1|,\qquad p-1=C_1\sin^2 x,\qquad p=1+C_1\sin^2 x.$$

Заменяя переменную p на y', получим уравнение $y'=1+C_1\sin^2 x$. Интегрируя его, найдём общее решение исходного ДУ.

$$y=\int\left(1+C_1\sin^2 x\right)dx=x+\frac{C_1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx=x+\frac{C_1}{2}x-\frac{C_1}{4}\sin 2x+C_2.$$

Пример 3 – Найти частное решение уравнения $yy''-(y')^2=y^2y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=1,\ y'(1)=2$.

Решение

Имеем уравнение вида $F(y,y',y'')=0$. Полагаем $y'=p(y)$, тогда $y''=p'p$. Имеем

$$ypp'-p^2=y^2p,\qquad p\left(yp'-p-y^2\right)=0.$$

Приравнивая первый множитель к нулю, получаем простейшее уравнение $p=0$, т. е. $y'=0$. Его решение $y=C$.

Приравнивая второй множитель к нулю, получаем линейное по $p(y)$ ДУ-I $p'-\frac{p}{y}=y$. Его решение ищем в виде $p=uv$, тогда $p'=u'v+uv'$ и имеем

$$u'v+uv'-\frac{uv}{y}=y,\qquad u'v+u\left(v'-\frac{v}{y}\right)=y,\qquad v'-\frac{v}{y}=0,\qquad \frac{dv}{v}=\frac{dy}{y},\qquad v=y.$$

Так как $v=y$, то $u'v=y$ или $\frac{du}{dy}y=y$, откуда $\frac{du}{dy}=1$ или $u=y+C_1$. Тогда

$$p=uv=y(y+C_1),\qquad y'=y(y+C_1).$$

Из начальных условий найдем C_1. Так как $y(1)=1$, $y'(1)=2$, то $2=1\cdot(1+C_1)$, откуда $C_1=1$. Следовательно,

$$y'=y(y+1), \qquad \frac{dy}{dx}=y^2+y, \qquad \frac{dy}{y^2+y}=dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{dy}{y^2+y}=\int dx, \qquad \int\frac{d\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=x+C_2, \qquad \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot\ln\left|\frac{y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|=x+C_2,$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=x+C_2.$$

Найдем C_2: $\ln\frac{1}{2}=1+C_2$, $C_2=-1-\ln 2$.

Таким образом, $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=x-1-\ln 2$ – частное решение данного ДУ.

Примеры для самостоятельной работы

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

1) $y'''=\cos 2x$. *Ответ*: $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$;

2) $y''=12x^2$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$. *Ответ*: $y=x^4+x+2$;

3) $y'''=8e^{-2x}+3x^2$. *Ответ*: $y=-e^{-2x}+\frac{x^5}{20}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$;

4) $y'''=\frac{6}{x^3}$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$, $y''(1)=1$. *Ответ*: $y=3\ln x+2x^2-6x+6$;

5) $y''-\frac{y'}{x}=0$. *Ответ*: $y=\frac{C_1x^2}{2}+C_2$;

6) $(1+x^2)y''-2xy'=0$. *Ответ*: $y=C_1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+C_2$;

7) $x(y''+1)+y'=0$. *Ответ*: $y=-\frac{x^2}{4}+C_1\ln|x|+C_2$;

8) $y''=\frac{y'}{x}\left(1+\ln\frac{y'}{x}\right)$, $y(1)=\frac{1}{2}$, $y'(1)=1$. *Ответ*: $y=\frac{1}{2}x^2$;

9) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. *Ответ*: $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x\ln x - x) + C_2 x + C_3$;

10) $yy'' - (y')^2 = y^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. *Ответ*: $\sqrt{\frac{2}{y}} = 1 - x$;

11) $y'' - 2yy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \frac{1}{1-x}$;

12) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = \pm x + C_2$.

2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0$, где $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$ – непрерывные на некотором интервале (a,b) функции, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка.***

Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется ***линейно независимой*** на интервале (a,b), если равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$, где α_1, α_2, …, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Всякая система из n линейно независимых частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ ЛОДУ n-го порядка называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения.

Структура общего решения ЛОДУ *n*-го порядка: если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ – фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка, то общее решение y_{oo} этого уравнения имеет вид:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{11}$$

где a_1, a_2, …, a_n – некоторые действительные числа, называется ***линейным однородным ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.***

Уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

называется ***характеристическим уравнением*** ЛОДУ (11).

Характеристическое уравнение по основной теореме алгебры имеет n корней: k_1, k_2, …, k_n. Каждому из этих корней соответствует частное решение

$y_i \left(i=\overline{1,n}\right)$ ЛОДУ (11) по правилу (таблица 1).

Таблица 1 – Частные решения ЛОДУ n-го порядка в зависимости от корней характеристического уравнения

Корень характеристического уравнения	Частное решение ЛОДУ
$k \in \mathbb{R}$ – однократный корень	e^{kx}
$k \in \mathbb{R}$ – r-кратный корень	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – однократные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – r-кратные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Частным случаем ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами является ЛОДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, где p, $q \in \mathbb{R}$.

Характеристическое уравнение ЛОДУ второго порядка имеет вид $k^2 + pk + q = 0$. Общее решение ЛОДУ второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения можно представить в следующем виде (таблица 2).

Таблица 2 – Частные решения ЛОДУ второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения

Корень характеристического уравнения	Фундаментальная система решений ЛОДУ	Общее решение ЛОДУ
$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}$	$y_{oo} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$	$y_{oo} = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right)$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Пример 4 – Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 12y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ЛОДУ $k^2 - k - 12 = 0$. Его корни $k_1 = -3$, $k_2 = 4$. Соответствующие частные решения $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{4x}$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}$.

Пример 5 – Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ЛОДУ $k^2 - 4k + 4 = 0$. Его корни $k_{1,2} = 2$. Соответствующие частные решения $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Пример 6 – Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ЛОДУ $k^2 + 4k + 20 = 0$. Его корни $k_{1,2} = -2 \pm 4i$. Соответствующие частные решения $y_1 = e^{-2x}\cos 4x$, $y_2 = e^{-2x}\sin 4x$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right)$.

Пример 7 – Проинтегрировать уравнение $y'' - 5y' - 6y = 0$ и найти частное решение при начальных условиях $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

Решение

Характеристическое уравнение ЛОДУ $k^2 - 5k - 6 = 0$. Его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 6$. Соответствующие частные решения $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{6x}$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1e^{-x} + C_2e^{6x}$.

Тогда $y'_{oo} = -C_1e^{-x} + 6C_2e^{6x}$. Используя начальные условия, получим систему двух линейных уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 4 = -C_1 + 6C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = 2e^{-x} + e^{6x}$ – искомое частное решение.

Пример 8 – Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - 8y' = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ЛОДУ $k^3 - 2k^2 - 8k = 0$. Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, $k_3 = 4$. Соответствующие частные решения $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = e^{4x}$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^{4x}$.

Пример 9 – Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ЛОДУ $k^5 + 2k^4 + 2k^3 = 0$. Его корни $k_{1,2,3} = 0$, $k_{4,5} = -1 \pm i$. Соответствующие частные решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^{-x}\cos x$, $y_5 = e^{-x}\sin x$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{-x}\left(C_4\cos x + C_5\sin x\right)$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{x} + C_2e^{4x}$;

2) $y'' + 8y' + 16y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$;

3) $y'' - 6y' + 34y = 0$. *Ответ*: $y = e^{3x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right)$;

4) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$. *Ответ*: $y = 2e^{3x} + 4e^{x}$;

5) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. *Ответ*: $y = \sin 2x$;

6) $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3$, $y'(0) = -1$. *Ответ*: $y = 3e^{2x} - 7xe^{2x}$;

7) $y'' - 6y' + 9y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$;

8) $4y'' - 8y' + 5y = 0$. *Ответ*: $y = e^{x}\left(C_1\cos\dfrac{x}{2} + C_2\sin\dfrac{x}{2}\right)$;

9) $y'' - 2y' - 15y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{5x}$;

10) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. *Ответ*: $y = (2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}$;

11) $y''' - 10y'' + 25y' = 0$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2e^{5x} + C_3xe^{5x}$;

12) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$.
Ответ: $y = -2e^{x} + \cos 2x + \sin 2x$.

2.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = f(x), \qquad (12)$$

где a_1, a_2, …, a_n – некоторые действительные числа, $f(x)$ – непрерывная на некотором интервале (a,b) функция, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами.*** Действительные числа a_1, a_2, …, a_n – коэффициенты ЛНДУ, $f(x)$ – правая часть ЛНДУ.

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0 \qquad (13)$$

называется ***однородным уравнением, соответствующим*** ЛНДУ (12).

Структура общего решения ЛНДУ *n*-го порядка. Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ (12) есть сумма его произвольного частного решения $y_{чн}$ и общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения (13), т. е. $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$.

Рассмотрим **метод Лагранжа** (метод вариации произвольных постоянных) решения ЛНДУ *n*-го порядка. Рекомендуется:

– найти фундаментальную систему решений y_1, y_2, …, y_n соответствующего однородного уравнения;

– записать вид общего решения ЛОДУ: $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные;

– записать общее решение ЛНДУ, считая C_1, C_2, …, C_n функциями от x: $y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n$;

– для определения $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$ составить систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + ... + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + ... + C_n'(x) y_n' = 0, \\ ... \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x); \end{cases}$$

– найти функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ и подставить их в формулу $y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n$.

Метод Лагранжа для ЛНДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$:

– для соответствующего ЛОДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ записываем общее решение $y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$;

– общее решение ЛНДУ ищем в виде $y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$;

– для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

Пример 10 – Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение

Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{он} = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Система уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 2x}{2\cos 2x}, \qquad C_2'(x) = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int\sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2.$$

Общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y_{он} = \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_2\right)\sin 2x$$

или

$$y_{он} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти общее решение ДУ методом Лагранжа:

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$. *Ответ*: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$;

2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$. *Ответ*: $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x + \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{3}{4}x^2\right)$;

3) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$. *Ответ*: $y = e^x\left(C_1 + C_2x + \sqrt{4-x^2} + x\arcsin\dfrac{x}{2}\right)$;

4) $y'' + y = \sin^2 x$. *Ответ*: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \dfrac{1}{3}\sin^4 x$;

5) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{1}{xe^{3x}}$. *Ответ*: $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + xe^{-3x}\ln|x|$;

6) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$. *Ответ*: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2}x\sin x$;

7) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$. *Ответ*: $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x + \dfrac{1}{2x}\right)$;

8) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$. *Ответ*: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2\cos x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$;

9) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 e^x + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \arcsin e^x$;

10) $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. *Ответ*: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + 2$.

2.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотрим ЛНДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

где a_1, a_2, …, a_n – действительные числа, а правая часть $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно. Правая часть такого вида называется ***специальной правой частью***.

Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ равно сумме общего решения $y_{оо}$ соответствующего ЛОДУ и какого-либо частного решения $y_{чн}$ ЛНДУ: $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Частное решение $y_{чн}$ для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью находят в виде

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right),$$

где r – кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического уравнения; $R_l(x)$ и $S_l(x)$ – многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, $l = \max\{n, m\}$.

Приведем сводную таблицу видов частных решений для различных видов правых частей ЛНДУ со специальной правой частью (таблица 3).

Замечание – Многочлены с неопределенными коэффициентами имеют вид:

$P_0(x) = A$ – многочлен нулевой степени;

$P_1(x) = Ax + B$ – многочлен первой степени;

$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлен второй степени и т. д.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов надо выражение $y_{чн}$ подставить в данное ДУ и после сокращения на $e^{\alpha x}$ приравнять коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x или при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Из полученной при этом системы уравнений определяются коэффициенты.

Таблица 3 – Вид частного решения ЛНДУ в зависимости от вида правой части

Правая часть ЛНДУ	Корень характеристического уравнения	Вид частного решения ЛНДУ
$P_n(x)$	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r Q_n(x)$
$ae^{\alpha x}$	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = Ax^r e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}$
$a\cos\beta x + b\sin\beta x$	Число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x +$ $+ Q_m(x)\sin\beta x)$	Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x +$ $+ S_l(x)\sin\beta x)$

При нахождении частных решений ЛНДУ полезна следующая теорема.

Теорема о наложении решений. Если правая часть ЛНДУ представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_{чн1}$ и $y_{чн2}$ – частные решения уравнений $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_1(x)$ и $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2}$ является решением данного ЛНДУ.

Пример 11 – Указать вид частного решения $y'' - 5y' + 4y = (3x + 2)e^x$.

Решение

Решим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 4 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Функции $(3x + 2)e^x$ соответствует $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Число $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности $r = 1$, множитель при e^x равен $(3x + 2)$ – многочлену первой степени. Следовательно, частное решение находим в виде $y_{чн} = x(Ax + B)e^x$.

Пример 12 – Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = e^x$.

Решение

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 4y = 0, \qquad k^2 + 4 = 0, \qquad k_{1,2} = \pm 2i, \qquad y_{oo} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Функции e^x в правой части уравнения соответствует $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения (кратность $r = 0$), коэффициент при e^x равен 1 (многочлен нулевой степени). Следовательно, частное решение находим в виде $y_{чн} = Ax^0e^x = Ae^x$.

Получим A, подставляя $y_{чн}$ в данное неоднородное уравнение:

$$y'_{чн} = Ae^x, \qquad y''_{чн} = Ae^x, \qquad Ae^x + 4Ae^x = e^x, \qquad e^x \neq 0, \qquad A = 0,2.$$

Таким образом, $y_{чн} = 0,2e^x$, а значит $y_{он} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 0,2e^x$.

Пример 13 – Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 8y = 85\cos x$.

Решение

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \qquad k^2 - 2k - 8 = 0, \qquad k_1 = -2, \qquad k_2 = 4,$$
$$y_{оо} = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}.$$

Функции $\cos x$ соответствует $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Число i не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение находим в виде $y_{чн} = A\cos x + B\sin x$. Тогда $y'_{чн} = -A\sin x + B\cos x$, $y''_{чн} = -A\cos x - B\sin x$. Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x - 8A\cos x - 8B\sin x = 85\cos x,$$

$$(-A - 2B - 8A)\cos x + (-B + 2A - 8B)\sin x = 85\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ слева и справа от знака равенства, получаем

$$\begin{cases} -9A - 2B = 85, \\ 2A - 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -9, \\ B = -2 \end{cases} \Rightarrow y_{чн} = -9\cos x - 2\sin x.$$

Таким образом, $y_{он} = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x} - 9\cos x - 2\sin x$.

Пример 14 – Для уравнения $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(\cos x + x)$ указать вид частного решения.

Решение

Решим характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 2 = 0$: $k_{1,2} = -1 \pm i$. Для первого слагаемого $e^{-x}\cos x$ правой части уравнения имеем $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Число $\alpha + \beta i = -1 + i$ является корнем характеристического уравнения кратности $r = 1$. Для второго слагаемого xe^{-x} правой части уравнения имеем $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Число $\alpha = -1$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, получаем ответ: $y_{чн} = x(A\cos x + B\sin x)e^{-x} + (Cx + D)e^{-x}$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Для данных ЛНДУ написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами:

1) $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$. *Ответ*: $y_{чн} = \left(Ax^3 + Bx^2\right)e^{4x}$;
2) $y'' + 16y = \sin 4x$. *Ответ*: $y_{чн} = x(A\cos 4x + B\sin 4x)$;
3) $y'' - 7y' = (x - 1)^2$. *Ответ*: $y_{чн} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$;
4) $y'' + 4y = \cos(2x + 3)$. *Ответ*: $y_{чн} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

2 Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. *Ответ*: $y_{он} = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \dfrac{1}{9}e^{2x}$;
2) $y'' - 8y' + 7y = 14$. *Ответ*: $y_{он} = C_1e^{7x} + C_2e^{x} + 2$;
3) $y'' - 4y' + 4y = x^2$. *Ответ*: $y_{он} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$;
4) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$. *Ответ*: $y_{он} = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} - 0{,}4\cos 2x - 1{,}2\sin 2x$;
5) $y'' + 4y = x\sin 2x$.

Ответ: $y_{он} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{x^2}{8}\cos 2x + \dfrac{x}{16}\sin 2x$;

6) $y'' - 5y' + 6y = e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$. *Ответ*: $y_{чн} = \dfrac{1}{2}e^{3x} - e^{2x} + \dfrac{1}{2}e^{x}$;
7) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y_{чн} = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$;
8) $y'' - y = x^2 - x + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. *Ответ*: $y_{чн} = e^{x} + 2e^{-x} - x^2 + x - 3$;
9) $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Ответ: $y_{чн} = -\cos x - \dfrac{1}{3}\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 2x$;

10) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.

Ответ: $y_{чн} = 3\pi\cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$;

11) $y''+y'=5x+2e^{x}$. *Ответ*: $y_{он}=C_1+C_2e^{-x}+\dfrac{5}{2}x^2-5x+e^{x}$;

12) $y''+y'=\sin^2 x$. *Ответ*: $y_{он}=C_1+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{10}\cos 2x-\dfrac{1}{20}\sin 2x$.

3 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Совокупность дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases}\Phi_1\left(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'\right)=0,\\ \ldots\\ \Phi_n\left(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'\right)=0,\end{cases}$$

где x – аргумент, $y_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ – искомые функции, называется ***системой дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка***.

Система вида:

$$\begin{cases}y_1'=\varphi_1\left(x,y_1,\ldots,y_n\right),\\ \ldots\\ y_n'=\varphi_n\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\end{cases}$$

называется ***нормальной СДУ***.

Нормальные системы можно решить ***методом исключения***, который заключается в следующем: дифференцированием одного из уравнений системы и исключением неизвестных функций удается свести систему к одному уравнению n-го порядка относительно одной функции.

Пример 1 – Решить СДУ $\begin{cases}y_1'=4y_1-3y_2,\\ y_2'=3y_1+4y_2\end{cases}$ методом исключения.

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы $\begin{cases}y_1''=4y_1'-3y_2',\\ y_2'=3y_1+4y_2,\\ y_2=\dfrac{1}{3}\left(4y_1-y_1'\right).\end{cases}$

Подставим в первое уравнение системы второе и третье уравнения системы, исключив переменную y_2 и ее производную y_2'. Имеем уравнение $y_1''-8y_1'+25y_1=0$, решив которое, получим $y_1=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Из третьего уравнения системы найдем y_2:

$$y_1' = 4e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{4x}\left(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x\right) =$$
$$= e^{4x}\left(\left(4C_1 + 3C_2\right)\cos 3x + \left(4C_2 - 3C_1\right)\sin 3x\right),$$
$$y_2 = \frac{1}{3}\left(4e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) - e^{4x}\left(\left(4C_1 + 3C_2\right)\cos 3x + \left(4C_2 - 3C_1\right)\sin 3x\right)\right) =$$
$$= e^{4x}\left(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x\right).$$

Таким образом, получили общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right), \\ y_2 = e^{4x}\left(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x\right). \end{cases}$$

Пример 2 – Найти частное решение СДУ $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + x, \\ y_2' = -4y_1 - 3y_2 + 2x \end{cases}$ при заданных начальных условиях $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы $\begin{cases} y_1'' = y_1' + y_2' + 1, \\ y_2' = -4y_1 - 3y_2 + 2x, \\ y_2 = y_1' - y_1 - x. \end{cases}$

Подставим в первое уравнение системы второе и третье уравнения системы, исключив переменную y_2 и ее производную y_2'. Имеем уравнение $y_1'' + 2y_1' + y_1 = 5x + 1$, решив которое, получим $y_1 = e^{-x}\left(C_1 + C_2x\right) + 5x - 9$.

Из третьего уравнения системы найдем y_2:

$$y_2 = -e^{-x}\left(2C_1 + 2C_2x - C_2\right) + 14 - 6x.$$

Таким образом, получили общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}\left(C_1 + C_2x\right) + 5x - 9, \\ y_2 = -e^{-x}\left(2C_1 + 2C_2x - C_2\right) + 14 - 6x. \end{cases}$$

Найдем значения постоянных C_1 и C_2 при заданных начальных условиях:

$$\begin{cases} 1 = e^0 \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + 5 \cdot 0 - 9, \\ 0 = -e^0 \cdot \left(2C_1 + 2C_2 \cdot 0 - C_2\right) + 14 - 6 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = C_1 - 9, \\ 0 = -2C_1 + C_2 + 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10, \\ C_2 = 6. \end{cases}$$

Таким образом, получили частное решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}\left(10+6x\right)+5x-9, \\ y_2 = -e^{-x}\left(12x+14\right)+14-6x. \end{cases}$$

Примеры для самостоятельной работы

Решить системы дифференциальных уравнений методом исключений:

1) $\begin{cases} y'_x = z, \\ z'_x = -y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = C_1\cos x + C_2\sin x, \\ z = -C_1\sin x + C_2\cos x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'_x = y+5z, \\ z'_x + y + 3z = 0. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right), \\ z = \dfrac{e^{-x}}{5}\left(\left(C_2-2C_1\right)\cos x - \left(C_1+2C_2\right)\sin x\right); \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'_x = -3y - z, \\ z'_x = y - z. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = e^{-2x}\left(C_2 - C_1 - C_2x\right), \\ z = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x\right); \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'_x = y+z, \\ z'_x = x+y+z. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = C_1e^{2x} + C_2 - \dfrac{x^2+x}{4}, \\ z = C_1e^{2x} - C_2 + \dfrac{x^2-x-1}{4}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x'_t = x, \\ y'_t = -2x+3y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

6) $\begin{cases} x'_t = y, \\ y'_t = -2x+3y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

7) $\begin{cases} x'_t = x+y, \\ y'_t = -2x+3y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1\cos t + C_2\sin t \\ \left(C_1+C_2\right)\cos t + \left(C_2-C_1\right)\sin t \end{pmatrix}.$

4 Числовые и функциональные ряды

4.1 Числовые ряды. Достаточные признаки сходимости

Выражение вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n \in \mathbb{R}$, называется ***числовым рядом***. Числа u_1, u_2, …, u_n, … называются ***членами ряда***, число u_n – ***общим членом ряда***.

Суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, …, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, … называются ***частичными суммами***, а S_n – ***n-й частичной суммой ряда***.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***сходящимся***, а S – его ***суммой***;

если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется ***расходящимся***.

Сумма $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$ называется ***n-м остатком ряда***. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Признак сравнения. Пусть даны знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Если для всех n (или начиная с некоторого номера n) выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Предельный признак сравнения. Пусть даны знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$, то два ряда сходятся или расходятся одновременно.

В качестве рядов для сравнения применяют следующие «эталонные» ряды:

1) ***геометрический ряд*** или ***ряд геометрической прогрессии*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$;

2) ***обобщённый гармонический ряд*** или ***ряд Дирихле*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Признак Даламбера. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ нужны дополнительные исследования.

Признак Коши. Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ ряд расходится, при $l = 1$ нужны дополнительные исследования.

Интегральный признак Коши. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ таковы, что $u_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, где $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на $[1; +\infty)$ функция, то ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример 1 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n+1}$.

Решение

Применим необходимый признак сходимости. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}\neq 0$, то данный ряд расходится.

Пример 2 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,3^n}$.

Решение

Сравним n-й член ряда $u_n=\frac{1}{n\,3^n}$ с n-м членом ряда $v_n=\frac{1}{3^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ является геометрическим рядом, у которого $q=\frac{1}{3}<1$, а значит, он сходится. Так как $\frac{1}{n\,3^n}<\frac{1}{3^n}\ (\forall n\geq 2)$, то по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пример 3 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}$.

Решение

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}\neq 0,$$

то по предельному признаку сравнения исходный ряд расходится как сравниваемый с расходящимся рядом.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$.

Решение

Применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{n^2}{2^{n-1}},\qquad u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 5 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{6n-1}\right)^n$.

Решение

Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{6n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{6n-1}=\frac{1}{6}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 6 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+1)^2}$.

Решение

Функция $f(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши. Найдём несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^b=-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится, а значит, данный ряд также сходится.

Примеры для самостоятельной работы

1 Написать простейшую формулу *n*-го члена ряда:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots;$

2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots;$

3) $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{4}+\frac{5}{8}+\ldots;$

4) $\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{6}{9}+\frac{24}{16}+\ldots.$

2 Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак или признаки сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$;

16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3 Исследовать на сходимость, применяя признак Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(3n-1)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\,3^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

4 Исследовать на сходимость, применяя признак Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+\sqrt{n}+5}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{3}{n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\frac{n}{3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

5 Исследовать на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$;

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

4.2 Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

Числовой ряд вида $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ называется ***знакочередующимся***.

Признак Лейбница. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ таковы, что $u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится, причём его сумма $0<S\le u_1$.

Следствие. Остаток $r_n=(-1)^n(u_{n+1}-u_{n+2}+\ldots)$ всегда удовлетворяет условию $|r_n|\le u_{n+1}$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из абсолютных величин членов ряда, сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***; если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится – ***условно сходящимся***.

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, но из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Пример 7 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение

Модули членов данного знакочередующегося ряда монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=0$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+n}=2\neq 0,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ расходится, следовательно, исходный ряд сходится условно.

Пример 8 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^2}{3n^2+n}$.

Решение

Имеем знакочередующийся ряд. Второе условие признака Лейбница здесь не выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+n}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Так как необходимое условие сходимости ряда не выполняется, то данный ряд расходится.

Пример 9 – Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots\ .$$

Решение

Данный ряд не является знакочередующимся, следовательно, нельзя применить признак Лейбница. Рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ .$$

Этот ряд сходится, как ряд Дирихле (при $\alpha=2>1$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Примеры для самостоятельной работы

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\,2^{-n}$;

3) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2-9}$;

4) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n+5}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{n^2+1}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n-\ln n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{5n(n+1)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\dfrac{n}{2^n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{8n}{7^n\cdot(2n-3)}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{10n+1}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

4.3 Функциональные и степенные ряды

Пусть функции $u_i(x)\,(i=1,2,\ldots)$ определены в области D_x. Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется ***функциональным рядом***.

Функциональный ряд называется ***сходящимся в точке*** $x=x_0$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Множество значений x, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда***. Обозначим её D_s, причём $D_s\subset D_x$.

Если $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ – n-я частичная сумма, то его n-й остаток будет $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$. В области сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые ***коэффициентами ряда***, x_0 – фиксированное число. При $x_0 = 0$ имеем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{14}$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд (14) сходится при некотором значении $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$. Если степенной ряд (14) расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$.

Неотрицательное число R такое, что при всех $|x| < R$ степенной ряд (14) сходится, а при всех $|x| > R$ – расходится, называется ***радиусом сходимости ряда***. Интервал $(-R;\, R)$ называется ***интервалом сходимости ряда***.

Радиус сходимости ряда (14) находят по формулам (если указанные пределы существуют):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{или} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

Пример 10 – Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение

Данный ряд является суммой геометрической прогрессии с $q = \ln x$. Такой ряд сходится, если $|q| = |\ln x| < 1$, т. е. при $-1 < \ln x < 1$. Поэтому областью сходимости ряда является интервал $D_s : \frac{1}{e} < x < e$. Так как $D_x : x > 0$, то $D_s \subset D_x$.

Пример 11 – Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n \sqrt{n}}$.

Решение

Найдём радиус сходимости:

$$a_n = \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}}; \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 3^{n+1} \sqrt{n+1}}{2^{n+1} 3^n \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Степенной ряд сходится в интервале $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

При $x = -\frac{3}{2}$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. По признаку Лейбница он сходится.

При $x = \frac{3}{2}$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Данный ряд расходится, как ряд Дирихле (при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Таким образом, область сходимости есть промежуток $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Пример 12 – Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение

Найдём радиус сходимости:

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty.$$

Таким образом, ряд сходится на всей числовой прямой.

Примеры для самостоятельной работы

Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{3^n \sqrt{(n+1)^3}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$;

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3 - 1}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{2^{n-1}\, 3^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n}}{2^{n}}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Ответ: 1) $-2\le x<2$; 2) $-2<x<2$; 3) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{4}\le x\le\frac{3}{4}$; 5) $-6\le x<2$; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $-6<x<6$; 8) $-2<x<2$; 9) $-\frac{\sqrt{3}}{5}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{5}$; 10) $-2<x<2$; 11) $-1<x<1$; 12) $3<x<5$; 13) $0<x<4$; 14) $1\le x\le 3$.

4.4 Разложение функций в степенные ряды

Если функция $y=f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ с областью сходимости D_s, т. е. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\ \forall x\in D_s$, то этот ряд является её ***рядом Тейлора*** в точке x_0:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Частный случай ряда Тейлора при $x_0=0$ называется ***рядом Маклорена*** и имеет вид:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой δ-окрестности точки x_0 производные всех порядков, причём $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M\ (M=\mathrm{const})\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in(x_0-\delta;\,x_0+\delta)$, то функция $f(x)$ в этой окрестности разложима в ряд Тейлора.

При разложении многих функций в степенные ряды часто применяются следующие основные (табличные) разложения:

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \forall x\in(-\infty;+\infty)$;

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad \forall x\in(-\infty;+\infty)$;

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \forall x\in(-\infty;+\infty)$;

4) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \quad \forall x\in(-1;1)$;

5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} \quad \forall x\in(-1;1]$;

6) $\operatorname{arctg}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \forall x\in[-1;1]$;

7) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots=$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \quad \forall x\in(-1;1).$$

Данные разложения позволяют существенно упростить процесс разложения функций в ряд Тейлора (Маклорена).

Пример 13 – Разложить функцию $y=x^4-3x^2+2x+2$ по степеням разности $(x-1)$.

Решение

Воспользуемся формулой Тейлора при $x_0=1$. Имеем

$$y(1)=2,$$

$$y'(1)=(4x^3-6x+2)\big|_{x=1}=0,$$

$$y''(1)=(12x^2-6)\big|_{x=1}=6,$$

$$y'''(1)=24x\big|_{x=1}=24,$$

$$y^{\mathrm{IV}}(1)=24,$$

$$y^{\mathrm{V}}(1)=y^{\mathrm{VI}}(1)=\ldots=0.$$

Таким образом, получаем

$$x^4-3x^2+2x+2=2+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4=$$

$$=2+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4.$$

Пример 14 – Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\cos x$ по степеням разности $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение

$$f(x)=\cos x,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f''(x)=-\cos x=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\quad n=0,1,\dots .$$

Таким образом, получаем

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\dots+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n+\dots\right).$$

Найдем область сходимости полученного ряда.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Значит, ряд сходится $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Пример 15 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=3^x$.

Решение

Так как $3^x=e^{\ln 3^x}=e^{x\cdot\ln 3}$, то, заменяя в разложении в ряд Маклорена функции e^x переменную x на произведение $x\cdot\ln 3$, получим

$$3^x=1+\frac{\ln 3}{1!}\cdot x+\frac{\ln^2 3}{2!}\cdot x^2+\frac{\ln^3 3}{3!}\cdot x^3+\dots+\frac{\ln^n 3}{n!}\cdot x^n+\dots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Пример 16 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Решение

Разложим функцию на сумму простейших дробей.

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

Так как $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (|x|<1)$, $\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n\ (|2x|<1)$, то

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n+1}\right)x^n.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ сходится при $|x|<1$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$ – при $|x|<\frac{1}{2}$, следовательно, полученный ряд сходится к данной функции при $|x|<\frac{1}{2}$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Разложить многочлен $f(x)=x^5-4x^4+2x^3+2x+1$ в ряд по степеням $(x+1)$.

2 Разложить функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$. *Ответ:* $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}, -4<x<0$;

2) $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$. *Ответ:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}, 0\le x\le 2$.

3 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)$ и найти область сходимости полученного ряда:

1) $f(x)=e^{-x^2}$;
2) $f(x)=x\cos 2x$;
3) $f(x)=\cos^2 x$;
4) $f(x)=\ln(1-3x)$;
5) $f(x)=x\sin 2x$;
6) $f(x)=x^3\operatorname{arctg}x^2$.

4.5 Степенные ряды в приближённых вычислениях

Приближённое вычисление значений функции.

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_0$ с заданной точностью $\varepsilon>0$. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R,R)$ разлагается в степенной ряд и $x_0 \in (-R, R)$, то точное значение $f(x_0)$ равно сумме этого ряда при $x = x_0$, т. е. $f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots$, а приближённое значение – частичной сумме $S_n(x_0)$, т. е. $f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n$.

Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда $|r_n(x_0)|$. Для рядов лейбницевского типа остаток ряда не будет превосходить модуля первого из отброшенных членов. В остальных случаях составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти положительный ряд с большими членами, который легко бы суммировался. Тогда в качестве оценки $|r_n(x_0)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Приближённое вычисление определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R, R)$ включает в себя отрезок $[a,b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться почленным интегрированием этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Приближённое решение дифференциальных уравнений.

В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение не удаётся, его решение удобно искать в виде степенного ряда. При решении задачи Коши вида $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ используется ряд Тейлора $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а остальные производные находят путём последовательного дифференцирования уравнения и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Пример 17 – Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение

Воспользуемся разложением функции $(1+x)^m$ в ряд Маклорена:

$$\sqrt[3]{130} = \left(5^3 + 5\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1 + \frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2! \cdot 5^3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3! \cdot 5^5} + \ldots =$$

$$= 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3^2 \cdot 5^3} + \frac{1}{3^4 \cdot 5^4} - \ldots .$$

Начиная с четвёртого члена, отбрасываем все остальные члены, т. к. $\frac{1}{3^4 \cdot 5^4} < 0{,}0001$. Поэтому $\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0{,}06667 - 0{,}00089 \approx 5{,}0658$.

Пример 18 – Вычислить $\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

Воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена, заменив в нем x на x^2: $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$. Данный ряд сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \ldots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \approx 0{,}3333 - 0{,}0381 = 0{,}295.$$

Все члены разложения начиная с третьего отброшены, т. к. они меньше $\varepsilon = 10^{-3}$.

Пример 19 – Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 1$.

Решение

Из условия следует, что $y'(1) = 2$. Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''(1) = 6,$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \quad y'''(1) = 22,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \quad y^{\mathrm{IV}}(1) = 116 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6(x-1)^2}{2} + \frac{22(x-1)^3}{6} + \frac{116(x-1)^4}{24} + \ldots =$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots \; .$$

Примеры для самостоятельной работы

1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

1) $\sqrt[3]{10}$;
3) $\sqrt[10]{1027}$;
2) $\cos 10°$;
4) $\ln 5$.

Ответ: 1) $2{,}154$; 2) $0{,}985$; 3) $2{,}001$; 4) $1{,}609$.

2 Вычислить определённые интегралы с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

1) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}\,dx$;
3) $\int\limits_1^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$;
2) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$;
4) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$.

Ответ: 1) $0{,}508$; 2) $0{,}764$; 3) $4{,}855$; 4) $0{,}245$.

3 Записать первые пять ненулевых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения.

1) $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$;
2) $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$;
3) $y'' = x^2 y - y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Список литературы

1 Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – 5-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 1999. – Ч. 2.

2 Высшая математика. Общий курс: учебник / А. И. Яблонский [и др.]; под общ. ред. С. А. Самаля. – 2-е изд., перераб. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Т. 2.

4 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: учебное пособие для втузов / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1985. – Ч. 3.

5 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: учебное пособие для втузов / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – Москва: Наука, 1985. – Т. 2.

6 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2009.

7 Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие для втузов в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 2.

8 Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.]; под ред. С. Н. Федина. – 6-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2007.

9 Сборник задач по курсу высшей математики: учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – 3-е изд., перераб. – Москва: Высшая школа, 1973.

10 Сборник задач по математике для втузов: учебное пособие для втузов. Ч. 2: Специальные разделы математического анализа / В. А. Болгов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1986.

11 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2005.