МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физика»

ФИЗИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов всех специальностей заочной формы обучения

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. МАГНЕТИЗМ. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Могилев 2019

УДК 535
ББК 22.33
Ф55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физика» «3» сентября 2019 г., протокол № 1

Составители: д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Хомченко;
канд. физ.-мат. наук, доц. О. Е. Коваленко;
канд. физ.-мат. наук С. О. Парашков;
ст. преподаватель Е. В. Пивоварова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат требования к выполнению контрольной работы, основные понятия и формулы по разделам «Электростатика», «Постоянный ток», «Магнетизм» и «Колебания и волны», примеры решения задач, а также таблицы физических постоянных. Учебный материал, приведенный в указаниях, может быть полезен при самостоятельной подготовке студентов к различным испытаниям.

Учебно-методическое издание

ФИЗИКА

Ответственный за выпуск А. В. Хомченко
Технический редактор А. А. Подошевко
Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 76 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изделий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Программа курса физики

Электростатика. Закон сохранения электрического заряда. Основные характеристики электростатического поля – напряженность и потенциал. Напряженность как градиент потенциала. Расчет электростатических полей методом суперпозиции. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Остроградского – Гаусса к расчету поля. Электрическое поле в веществе. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Типы диэлектриков. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость вещества. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость среды. Сегнетоэлектрики.

Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение зарядов в проводнике. Электроемкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы. Энергия заряженных проводника, конденсатора и системы проводников. Энергия электростатического поля.

Постоянный электрический ток. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Классическая электронная теория электропроводности металлов и ее опытные обоснования. Вывод закона Ома в дифференциальной форме из электронных представлений. Закон Ома в интегральной форме. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение. Затруднения классической теории электропроводности металлов. Границы применимости закона Ома. Работа выхода электронов из металла. Термоэлектронная эмиссия. Ток в газах. Несамостоятельный и самостоятельный разряды. Понятие о плазме.

Электромагнетизм. Магнитное поле. Магнитная индукция. Закон Ампера. Магнитное поле тока. Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Магнитное поле прямолинейного проводника с током. Магнитное поле кругового тока. Магнитный момент витка с током. Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока (циркуляция вектора магнитной индукции) для магнитного поля в вакууме и его применение к расчету магнитного поля тороида и длинного соленоида. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц. Контур с током в магнитном поле. Магнитный поток. Теорема Остроградского – Гаусса. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле.

Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Индуктивность. Токи при замыкании и размыкании цепи. Энергия системы проводников с током. Объемная плотность энергии магнитного поля.

Магнитное поле в веществе. Микро- и макротоки. Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков. Намагниченность. Магнитная восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды. Ферромагнетики. Опыты Столетова. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис. Точка Кюри. Домены. Спиновая природа ферромагнетизма. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Ток смещения. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

Колебания и волны. Гармонические колебания (механические и электромагнитные) и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Пружинный, математический, физический маятники. Электрический колебательный контур. Энергия гармонических колебаний. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Апериодический процесс. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Амплитуда смещения и фаза вынужденных колебаний. Понятие о резонансе. Волновые процессы. Механизм образования механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Синусоидальные (гармонические) волны. Уравнение бегущей волны. Длина волны и волновое число. Волновое уравнение. Фазовая скорость и дисперсия волн. Энергия волны. Принцип суперпозиции волн и границы его применимости. Когерентность. Интерференция волн. Уравнение стоячей волны и его анализ. Электромагнитные волны. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. Основные свойства электромагнитных волн. Монохроматическая волна. Энергия электромагнитных волн. Поток энергии. Вектор Умова–Пойтинга.

2 Методические указания к решению задач контрольных работ

1 За время изучения курса общей физики студент заочного отделения должен выполнить три контрольные работы.

2 Условия задач, которые необходимо проработать при предварительной подготовке к контрольной работе, студент может взять на кафедре «Физика» или на сайте университета.

3 Решения задач следует начинать с краткой записи условия с приведением его к СИ, а далее сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж.

4 Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи.

5 После получения расчетной формулы для проверки ее правильности нужно подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

6 Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

7 При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин нужно записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой и соответствующей степени десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3,52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 – $1,29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

8 Вычисления по расчетной формуле следует проводить с соблюдением правил приближенных вычислений [5]. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

Задачи сгруппированы по темам. В начале каждой темы приведены типовые задачи. Для решения таких задач достаточно использовать известные формулы, которые даны в теоретическом разделе.

Более сложные задачи можно решить, используя рассмотренные в методических рекомендациях и в литературе примеры решений.

3 Учебные материалы по разделам курса физики

3.1 Электростатика

Электрическое поле – *это силовое поле, которое возникает вокруг любого заряженного тела и проявляется в действии на другие заряженные тела.* В электростатике заряженная материальная точка называется *точечным зарядом.*

Закон Кулона определяет силу взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов. Значение силы Кулона определяется формулой

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2},$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2;

r – расстояние между зарядами;

ε – диэлектрическая проницаемость среды;

ε_0 – электрическая постоянная.

Если диэлектрическая проницаемость среды ε не указана, то она принимается равной единице.

Сила Кулона является *центральной силой* и соответствует притяжению ($F < 0$), если заряды разноименны, и отталкиванию ($F > 0$), если заряды одноименны.

Электрическое поле характеризуется напряженностью и потенциалом.

Формулы напряженности *E* и потенциала φ электрического поля.

В общем случае напряженность E и потенциал φ электрического поля определяются следующими формулами:

$$\vec{E} = \vec{F} / q; \quad \varphi = \Pi / q,$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на заряд q, который находится в электрическом поле;

П – потенциальная энергия положительного заряда q, который находится в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

Сила F, действующая на заряд и потенциальная энергия *П* заряда в некоторой точке поля, в которой напряженность и потенциал равны E и φ соответственно, рассчитывают по формулам:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}; \qquad \Pi = q \cdot \varphi .$$

Напряженность *E* и потенциал φ поля, **создаваемые точечным зарядом**, вычисляют по формулам:

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2}; \qquad \varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r},$$

где r – расстояние от заряда q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

Принцип суперпозиции электрических полей.

Напряженность и потенциал поля, создаваемые в некоторой точке пространства *системой точечных зарядов,* определяются *принципом суперпозиции* электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i; \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i ,$$

где $\vec{E}_i$ и φ_i – напряженность и потенциал, создаваемые i-м зарядом в данной точке поля.

Следует учитывать, что линии напряженности поля положительного заряда исходят от него. Линии же напряженности поля отрицательного заряда сходятся на нем (рисунок 1).

Поэтому в одних случаях (точка B) напряженности полей отдельных зарядов суммируют, а в других случаях (точки A и C) вычитают.

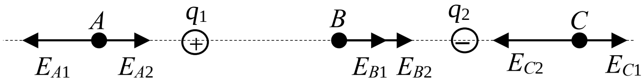

Рисунок 1 – Пояснение принципа суперпозиции напряженностей E

Потенциалы полей складываются с учетом их знаков, как это показано на рисунке 2.

При решении задач сначала по формулам вычисляются значения напряженностей (или потенциалов), создаваемых в заданной точке (A, B или C) каждым из зарядов (q_1 и q_2). Например, для точки A это будут E_{A1} и E_{A2} (или φ_{A1} и φ_{A2}). Затем полученные значения соответствующих величин складываются с учетом их знаков.

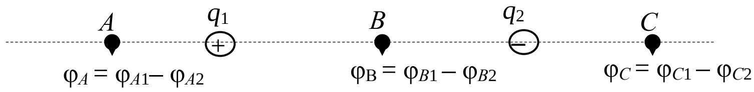

Рисунок 2 – Пояснение принципа суперпозиции потенциалов φ

Напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенными зарядами.

Если заряд равномерно распределен вдоль линии с линейной плотностью τ, то на линии выделяется малый участок длиной dl с зарядом $dq = \tau \cdot dl$. Такой заряд можно рассматривать как точечный и применить следующие формулы:

$$d\vec{E} = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \qquad d\varphi = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от выделенного элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность.

Используя принцип суперпозиции электрических полей, интегрированием находят *напряженность* $\vec{E}$ *и потенциал* φ *поля, создаваемого распределенным зарядом*:

$$\vec{E} = \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \int_L \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \qquad \varphi = \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \int_L \frac{dl}{r}.$$

Интегрирование ведется вдоль всей длины L заряженной линии.

Интегрирование приводит к следующей формуле для **напряженности поля, создаваемого прямой бесконечной равномерно заряженной линией или бесконечно длинным цилиндром:**

$$E = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r},$$

где r – расстояние от нити или оси цилиндра до точки, в которой определяется напряженность поля;

τ – линейная плотность заряда, $\tau = q / l$.

При расчетах электростатического поля системы зарядов используется **теорема Остроградского–Гаусса.**

Определение теоремы Остроградского–Гаусса для поля в вакууме: *поток* $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$ *вектора напряженности E электростатического поля через любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов* $\sum_{i=1}^{N} q_i$, *которые охватываются этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную.*

Математическая формула теоремы имеет следующий вид:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sum_{i=1}^{N} q_i\,,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к элементу поверхности dS.

Если поверхность не охватывает заряд, то поток через такую поверхность равен нулю.

Значение потока вектора E через замкнутую поверхность не зависит ни от размеров, ни от формы поверхности. Поэтому при расчетах следует выбирать поверхность такой формы, которая позволяет наиболее просто вычислить поток.

Применение теоремы Остроградского–Гаусса к расчету поля приводит к следующим формулам для напряженностей и потенциалов.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей **заряженной сферой** радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

– при $r < R$ $\quad E = 0;\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot R};$

– при $r = R$ $\quad E = \dfrac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot R^2};\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot R};$

– при $r > R$ $\quad E = \dfrac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot r^2};\qquad \varphi = \dfrac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot r},$

где q – заряд сферы.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, определяется как

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\cdot\varepsilon}.$$

Связь потенциала с напряженностью:

– в общем случае $\vec{E} = -grad\,\varphi$ или $\vec{E} = -\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right);$

– если поле однородное, то $E = \dfrac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d};$

– если поле обладает центральной или осевой симметрией, то $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}.$

Работа по перемещению заряда *q* в электростатическом поле.

При заданной напряженности поля E работа по перемещению электрического заряда q определяется следующей формулой:

$$A = q\cdot\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l}\,,$$

где E – напряженность поля;

dl – элемент траектории L.

Работа по перемещению тела с зарядом q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 вычисляется по формуле

$$A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Эта работа идет на изменение кинетической энергии тела $\Delta W_к = A$. Поэтому справедливо следующее соотношение:

$$\Delta W_к = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \text{ или } \frac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} - \frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где m – масса тела;

υ_1 и υ_2 – начальная и конечная скорости тела.

Электроемкость – это физическая величина, численно равная заряду q, который необходимо сообщить проводнику (системе проводников), чтобы увеличить потенциал φ на 1 В.

Формулы электроемкостей:

– уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi};$$

– двух проводников

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{q}{U},$$

где U – разность потенциалов проводников.

Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d},$$

где S – площадь одной пластины (обкладки) конденсатора;

d – расстояние между пластинами.

Электроемкость батареи конденсаторов:

– при последовательном соединении $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$;

– при параллельном соединении $C = \sum_{i=1}^{N} C_i$,

где N – число конденсаторов в батарее.

При зарядке проводника (системы проводников) необходимо совершить определенную работу против силы возникающего электрического поля. Совершенная работа превращается в энергию этого поля.

Энергия заряженного конденсатора определяется формулами:

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2}; \qquad W = \frac{q^2}{2C}; \qquad W = \frac{q \cdot U}{2}.$$

Примеры решения задач

Пример 1 **–** Три точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

Дано:	*Решение*
$q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-9}$ Кл $a = b = c = r$	Все три заряда, расположенные в вершинах треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы какой-нибудь один из трех зарядов, например q_1, находился в равновесии.
q_4 – ?	

Заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил $\vec{F}_4$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ равна нулю (рисунок 3):

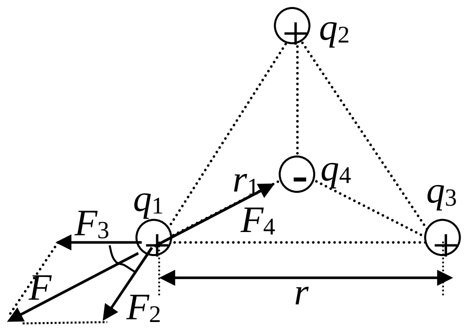

Рисунок 3

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0,$$

где $\vec{F}_4$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ – силы, с которыми на заряд q_1 действуют заряды q_4, q_2, q_3 соответственно;

$\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.

Так как силы F и F_4 лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны, то векторное равенство можно заменить скалярным: $F - F_4 = 0$, откуда $F_4 = F$. Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\varphi)}.$$

Применив закон Кулона и учитывая то, что $q_1 = q_2 = q_3$, найдем силу

$$F_4 = \frac{q_1 \cdot q_4}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}\sqrt{2\cdot(1+\cos\alpha)},$$

откуда

$$q_4 = \frac{q_1 \cdot r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Так как треугольник равносторонний, то

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2\cos 30^0} = \frac{r}{\sqrt{3}}; \qquad \cos\alpha = \cos 60° = 1/2.$$

С учетом последних соотношений окончательная формула примет следующий вид:

$$q_4 = q_1/\sqrt{3}.$$

Произведем вычисления:

$$q_4 = 10^{-9}/\sqrt{3} = 5,77\cdot 10^{-10}\,\text{Кл}.$$

Следует отметить, что равновесие системы будет неустойчивым.

Пример 2 **–** На тонком стержне длиной $l = 20$ см находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $q_1 = 40$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6$ мкН. Определить линейную плотность заряда на стержне.

Дано:	*Решение*
$l = 20\text{ см} = 0,2\text{ м}$ $a = 10\text{ см} = 0,1\text{ м}$ $q_1 = 4\cdot 10^{-8}$ Кл $F = 6\cdot 10^{-6}$ Н τ – ?	Сила взаимодействия F заряженного стержня с зарядом q_1 зависит от линейной плотности τ заряда на стержне. Зная эту зависимость, можно определить τ. При вычислении силы F следует иметь в виду, что заряд стерня не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применить нельзя. В этом случае можно поступить следующим образом.

Выделим на стержне (рисунок 4) малый участок dr с зарядом $dq = \tau\cdot dr$. Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда, согласно закону Кулона,

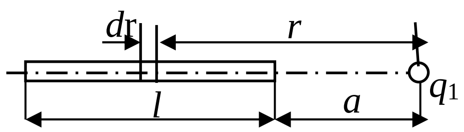

Рисунок 4

$$dF = \frac{q_1\cdot\tau\cdot dr}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2}.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от a до $a + l$

$$F = \frac{q_1\cdot\tau}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_a^{a+l}\frac{dr}{r^2} = \frac{q_1\cdot\tau}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = \frac{q_1\cdot\tau\cdot l}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a\cdot(a+l)}.$$

Тогда для искомой величины получим

$$\tau = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot (a + l) \cdot F}{q_1 \cdot l}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу линейной плотности электрического заряда. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[\varepsilon_0] \cdot [a] \cdot [a + l] \cdot [F]}{[q] \cdot [l]} = \frac{1\ \text{Ф/м} \cdot 1\ \text{м} \cdot 1\ \text{м} \cdot 1\ \text{Н}}{1\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{м}} = \frac{1\ \text{Ф} \cdot 1\ \text{Н}}{1\ \text{Кл}} =$$

$$= \frac{1\ \text{Н}}{1\ \text{В}} = \frac{1\ \text{Н} \cdot \text{Кл}}{1\ \text{Н} \cdot \text{м}} = 1\ \text{Кл/м}.$$

Найденная единица является единицей линейной плотности заряда. Произведем вычисления:

$$\tau = \frac{0{,}1 \cdot (0{,}1 + 0{,}2) \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{9} \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}2} = 2{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}.$$

Пример 3 **–** Электрическое поле создано длинным равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 20\ \text{нКл/м}$ цилиндром радиусом $R = 1\ \text{см}$. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $a_1 = 0{,}5\ \text{см}$ и $a_2 = 2\ \text{см}$ от поверхности цилиндра в средней его части.

Дано:

$R = 1\ \text{см} = 10^{-2}\ \text{м}$

$\tau = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл/м}$

$a_1 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}$

$a_1 = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}$

$\varphi_1 - \varphi_2$ – ?

Решение

Для определения разности потенциалов воспользуемся формулой, которая связывает напряженность поля с изменением потенциала:

$$\vec{E} = -grad\ \varphi.$$

Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно записать как

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ или } d\varphi = -Edr. \qquad (1)$$

Интегрируя выражение (1), найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} Edr. \qquad (2)$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2) для разности потенциалов, получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Произведем вычисления, учитывая то, что величины r_1 и r_2, входящие в формулу в виде отношения, можно выразить в сантиметрах ($r_1 = R + a_1 = 1{,}5$ см, $r_2 = R + a_2 = 3$ см).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{10} \cdot \ln(3/1{,}5) = 250 \text{ В}.$$

Пример 4 **–** На трех концентрических сферах радиусами R, $2R$ и $3R$ распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1, σ_2 и σ_3. Используя теорему Гаусса, найти зависимость $E(r)$ напряженности электрического поля от расстояния для областей 1, 2, 3 и 4 (принять $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma = 25$ мКл/м^2, $\sigma_2 = -25$ мКл/м^2).

Построить график зависимости $E(r)$.

Дано:	*Решение*
R, $2R$, $3R$ $\sigma_1 = \sigma_3 = 25$ мКл/м^2 $\sigma_2 = -25$ мКл/м^2	Теорема Гаусса гласит, что в вакууме поток вектора E через любую замкнутую поверхность S равен ***алгебраической*** сумме зарядов, ***которые охватываются этой поверхностью***, деленной на электрическую постоянную ε_0.
$E(r)$ – ?	

Математическая запись этой теоремы имеет вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

где $\vec{n}$ – нормаль к элементу поверхности dS;

q – алгебраическая сумма зарядов.

Если выбранная ***поверхность не охватывает заряды****, то* ***поток*** *вектора E через такую поверхность* ***равен нулю****.*

По теореме поверхность **(гауссова поверхность)** может иметь любые форму и размер. Поэтому при расчетах стараются выбрать простые поверхности (сферическую, цилиндрическую и т. д.).

Если заряд точечный или сферы концентрические заряженные, то их окружают сферической поверхностью с радиусом *r*. Тогда интегрирование приводит к следующей формуле для потока:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = E \cdot 4\pi \cdot r^2 .$$

По теореме этот поток равен заряду *q*, деленному на ε_0:

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} .$$

Из последнего выражения получим формулу для напряженности:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r^2} . \qquad (4)$$

Еще раз уточним, что в формуле (4) величина *q* – алгебраическая сумма зарядов, которые охватывает проведенная гауссова поверхность, а величина *r* – радиус этой гауссовой поверхности.

Условию задачи соответствует рисунок 5.

Заряженные сферы показаны сплошными, а гауссовы поверхности в областях 1, 2, 3, 4 – пунктирными линиями.

Используя формулу (4), получим зависимости напряженности поля от расстояния в каждой из областей.

Область 1.

Из рисунка видно, что в области 1 поверхность радиуса $r_1 < R$ не охватывает заряды. По теореме Гаусса поток вектора *E* через эту поверхность равен нулю и напряженность поля в области 1 равна нулю ($E(r_1) = 0$).

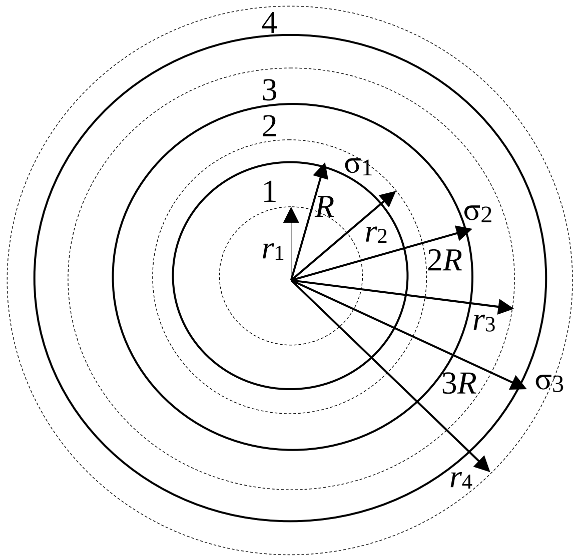

Рисунок 5

Область 2.

Значение радиуса гауссовой поверхности, проведенной в области 2, лежит в пределах

$$R \le r_2 \le 2R ,$$

поэтому эта поверхность охватывает только заряд первой сферы. По формуле (4) для напряженности в области 2 получим следующую зависимость:

$$E(r_2)=\frac{q_1}{\varepsilon_0\cdot 4\pi\cdot r_2^2}, \qquad (5)$$

где q_1 – заряд первой сферы радиуса R.

В условии задачи дана поверхностная плотность заряда σ_1, которая связана с зарядом формулой

$$q_1=\sigma_1\cdot 4\pi\cdot R^2. \qquad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим расчетную формулу для области 1:

$$E(r_2)=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{R}{r_2}\right)^2.$$

Подставив численные значения величин, получим, что в этой области напряженность поля изменяется от $E(R)=2{,}82\cdot 10^9$ В/м при $r_1=R$ до $E(2R)=0{,}73\cdot 10^9$ В/м при $r_1=2R$.

Область 3.

В области 3 радиус гауссовой поверхности лежит в пределах $2R\le r_3\le 3R$. Следовательно, эта поверхность охватывает заряды двух первых заряженных сфер.

По теореме Гаусса в правую часть формулы (4) следует подставить алгебраическую сумму (с учетом знаков) зарядов первой и второй сфер. Поэтому формула (4) запишется в следующем виде:

$$E(r_3)=\frac{q_1-q_2}{\varepsilon_0\cdot 4\pi\cdot r_3^2}. \qquad (7)$$

С помощью (6) выразив заряды сфер q_1 и q_2 через поверхностные плотности σ_1 и σ_2 и радиусы сфер R и $2R$ и подставив в (7), получим зависимость напряженности от расстояния в области 3:

$$E(r_3)=-\frac{3\cdot\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{R}{r_3}\right)^2. \qquad (8)$$

Подставив в (8) значения, получим, что в этой области напряженность поля изменяется от $E(2R)=-2{,}22\cdot 10^9$ В/м при $r_3=2R$ до $E(3R)=-0{,}94\cdot 10^9$ В/м при $r_3=3R$.

Область 4.

Гауссова поверхность, проведенная в области 4, охватывает заряды всех трех сфер $(r_4\ge 3R)$. Поэтому формула (4) запишется в следующем виде:

$$E(r_4)=\frac{q_1-q_2+q_4}{\varepsilon_0\cdot 4\pi\cdot r_4^2}. \qquad (9)$$

Применив формулу (6), приведем выражение (9) к виду

$$E(r_4)=\frac{6\cdot\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{R}{r_4}\right)^2 .$$

Подставляя численные значения величин, получим значения напряженности на различных расстояниях от сферы 3. В частности, вблизи этой сферы ($r_4=3R$) напряженность $E(3R)$ равна $1{,}88\cdot10^9$ В/м.

При известных зависимостях $E(r)$ построение графиков не представляет сложности.

Пример 5 **–** Определить ускоряющую разность потенциалов *U*, которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1=10^6$ м/с, чтобы скорость его возросла в $n=2$ раза.

Дано:

$v_1=10^6$ м/с

$n=2$

$e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

$m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг

$U-?$

Решение

Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу *A* сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением элементарного заряда *e* на разность потенциалов *U*:

$$A=e\cdot U . \tag{10}$$

Работа сил электрического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A=T_2-T_1=\frac{m_e\cdot v_2^2}{2}-\frac{m_e\cdot v_1^2}{2}, \tag{11}$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия электрона до и после прохождения ускоряющего поля;

m_e – масса электрона;

v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости электрона.

Приравняв правые части равенств (10) и (11), получим

$$e\cdot U=\frac{m_e\cdot v_2^2}{2}-\frac{m_e\cdot v_1^2}{2}=\frac{m_e\cdot n^2\cdot v_1^2}{2}-\frac{m_e\cdot v_1^2}{2},$$

где $n=v_2/v_1$.

Отсюда искомая разность потенциалов

$$U=\frac{m_e\cdot v_1^2\cdot(n^2-1)}{2e}.$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) = 8{,}53 \text{ В.}$$

Пример 6 **–** Определить, как распределится напряжение 120 В между тремя последовательно соединенными конденсаторами, имеющими емкости 0,3; 0,2 и 0,12 мкФ.

Дано:

$U = 120$ В
$C_1 = 0{,}3$ мкФ
$C_2 = 0{,}2$ мкФ
$C_3 = 0{,}12$ мкФ

U_1, U_2, U_3 – ?

Решение

Для решения задачи используем общую формулу для емкости конденсатора

$$C = \frac{q}{U}, \tag{12}$$

и формулу емкости батареи последовательно включенных конденсаторов

$$\frac{1}{C_{бат}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \tag{13}$$

Также учтем, что при последовательном соединении заряд каждого из конденсаторов равен заряду батареи $q_{бат} = q_i$.

Согласно (12), напряжения на батарее

$$U_{бат} = \frac{q_{бат}}{C_{бат}}, \tag{14}$$

на отдельных конденсаторах

$$U_i = \frac{q_i}{C_i}. \tag{15}$$

Из формулы (14) для заряда батареи получим

$$q_{бат} = C_{бат} \cdot U_{бат}. \tag{16}$$

Формула (16) является основной, и поэтому ее размерность можно не проверять.

Вычислив по формуле (13) емкость батареи ($C_{бат} = 0{,}06$ мкФ) и подставив это значение в (16), определим заряд батареи: $q_{бат} = 7{,}2$ мкКл. Таким же будет заряд каждого конденсатора: $q_1 = q_2 = q_3 = 7{,}2$ мкКл.

Затем, подставляя известные значения емкостей конденсаторов в (15), вычислим искомые напряжения:

$$U_1 = 7,2/0,3 = 24\ \text{В};\qquad U_2 = 7,2/0,2 = 36\ \text{В};$$

$$U_3 = 7,2/0,12 = 60\ \text{В}.$$

Пример 7 – Конденсатор емкостью $C_1 = 3\ \text{мкФ}$ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40\ \text{В}$. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5\ \text{мкФ}$. Какая энергия W' израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Дано:

$C_1 = 3\ \text{мкФ} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф}$
$U_1 = 40\ \text{В}$
$C_2 = 5\ \text{мкФ} = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{Ф}$

$W' - ?$

Решение

Энергия, израсходованная на образование искры,

$$W' = W_1 - W_2,$$

где W_1 – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора;

W_2 – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = C \cdot U^2 / 2,$$

где C – емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив энергии W_1 и W_2 через емкости и приняв во внимание то, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = C_1 \cdot U_1^2 / 2 - (C_1 + C_2) \cdot U_2^2 / 2, \qquad (17)$$

где U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что исходный заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot U_1}{C_1 + C_2}. \qquad (18)$$

Подставив выражение (18) в формулу (17) для W', найдем

$$W' = \frac{C_1 \cdot U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) \cdot C_1^2 \cdot U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

или

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_1^2.$$

Произведем вычисления:

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 = 1,5 \ \text{мДж}.$$

3.2 Постоянный электрический ток

Электрический ток – *это упорядоченное движение электрических зарядов. Характеристиками тока являются сила I и плотность j. Ток с неизменными силой и направлением называется постоянным.*

Сила постоянного тока определяется следующим выражением:

$$I = \frac{q}{t},$$

где q – заряд, который прошел через поперечное сечение проводника за время t.

Плотность постоянного тока вычисляется по формуле

$$j = \frac{I}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Связь плотности тока со средней скоростью $\bar{v}$ направленного движения заряженных частиц:

$$j = q \cdot n \cdot \bar{v},$$

где n – концентрация заряженных частиц;

q – заряд частицы.

Если электрические цепи неразветвленные, то задачи решаются с помощью законов Ома.

Закон Ома в дифференциальной форме позволяет определить плотность тока в любой точке, где известна напряженность поля.

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E},$$

где $\vec{j}$ – плотность тока;

γ – удельная проводимость;

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

Связь удельной проводимости γ с подвижностью b заряженных частиц (ионов):

$$\gamma = q \cdot n \cdot (b_+ + b_-),$$

где q – заряд иона;

n – концентрация ионов;

b_+ и b_- – подвижности положительных и отрицательных ионов.

Законы Ома в интегральной форме определяют силу тока в цепи:

– **участок цепи, не содержащий ЭДС** (однородный участок) (рисунок 6),

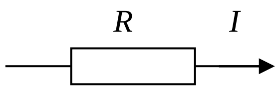

Рисунок 6

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи, $\varphi_1 - \varphi_2 = U$;

R – электрическое сопротивление участка;

– **участок цепи, содержащий ЭДС** (неоднородный участок),

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R},$$

где ε – ЭДС источника тока;

R – полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

– **замкнутая** (полная) **цепь** (рисунок 7)

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

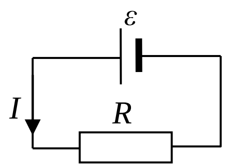

Рисунок 7

где R – сопротивление нагрузки (потребителя);

r – внутреннее сопротивление (источника тока).

Если цепи разветвленные, то их условно разбивают на узлы и контуры, и расчеты проводят с помощью правил Кирхгофа.

Правила Кирхгофа для электрических цепей:

– правило для узла – $\sum I_i = 0$;

– правило для контура – $\sum I_i \cdot R_i = \sum \varepsilon_i$,

где $\sum I_i$ – алгебраическая сумма сил токов в узле;

$\sum I_i \cdot R_i$ – алгебраическая сумма произведений сил токов на отдельных участках контура и сопротивлений этих участков;

$\sum \varepsilon_i$ – алгебраическая сумма ЭДС в контуре.

Сопротивление R *и проводимость* G проводника определяются следующими формулами:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}; \qquad G = \frac{\gamma \cdot S}{l},$$

где ρ – удельное сопротивление;

γ – удельная проводимость;

l – длина проводника;

S – площадь поперечного сечения проводника.

Зависимость сопротивления проводника от температуры

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t),$$

где R_0 – сопротивление проводника при нулевой температуре;

α – температурный коэффициент сопротивления;

t – температура.

Сопротивление системы проводников:

– при последовательном соединении

$$R = \sum R_i;$$

– при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i},$$

где R_i – сопротивление i-го проводника.

При последовательном соединении источников тока в батарею складываются как их ЭДС

$$\varepsilon_{бат} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i,$$

так и внутренние сопротивления

$$r_{\text{бат}} = \sum_{i=1}^{N} r_i.$$

Параллельное соединение N источников ЭДС используется, как правило, только для одинаковых источников. В этом случае ЭДС батареи равна ЭДС одного источника ($\varepsilon_{бат} = \varepsilon_1$), а внутреннее сопротивление батареи $r_{бат} = r_1 / N$.

Работа электрического тока определяется следующими формулами:

– для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение U,

$$A = I \cdot U \cdot t,$$

– для участка, не содержащего ЭДС,

$$A = I^2 \cdot R \cdot t; \qquad A = \frac{U^2}{R} \cdot t,$$

где I – сила тока;

U – напряжение;

t – время протекания тока.

Мощность тока

$$P = I \cdot U; \quad P = I^2 \cdot R; \quad P = U^2 / R.$$

Если по проводнику протекает электрический ток, то проводник будет нагреваться. Количество теплоты Q, которое выделится в проводнике, определяется **законом Джоуля–Ленца:**

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t,$$

где I – сила тока в проводнике;

R – электрическое сопротивление проводника;

t – время протекания тока.

Примеры решения задач

Пример 8 **–** К источнику, имеющему внутреннее сопротивление 2 Ома и ЭДС, равную 12 В, подключены конденсатор емкостью $C = 15$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 22$ Ом, как показано на рисунке 8.

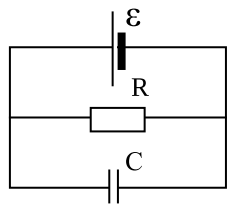

Рисунок 8

Чему равен заряд на конденсаторе?

Дано:	*Решение*
$r = 2$ Ом $\varepsilon = 12$ В $C = 15$ мкФ $R = 22$ Ом	Заряд конденсатора определяется по формуле
q – ?	

$$q = C \cdot U, \tag{19}$$

где U – напряжения на обкладках конденсатора.

Так как конденсатор подключен параллельно сопротивлению, U равно падению напряжения на сопротивлении R. Это падение напряжения определим с помощью закона Ома для участка цепи:

$$U = I \cdot R, \tag{20}$$

а силу тока I в цепи – законом Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{21}$$

где ε – ЭДС;

r – внутреннее сопротивление источника тока.

Подставив (21) в (20) и затем в (19), получим формулу для искомой величины:

$$q = \frac{C \cdot \varepsilon \cdot R}{R + r}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[q] = \frac{1\ \text{Ф} \cdot 1\ \text{В} \cdot 1\ \text{Ом}}{1\ \text{Ом}} = 1\ \text{Кл}.$$

Произведем вычисления:

$$q = \frac{15 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 22}{22 + 2} = 165 \text{ мкКл}.$$

Пример 9 – Батарея аккумуляторов, соединенных последовательно, имеет ЭДС 12 В. Ток в цепи – 4 А, а напряжение на зажимах – 11 В. Определить ток короткого замыкания этой батареи.

Дано:	*Решение*
$\varepsilon = 12$ В $U = 11$ В $I = 4$ А $I_{кз}$ – ?	Сила тока в цепи равна силе тока короткого замыкания $I_{кз}$ при внешнем сопротивлении, равном 0. Из формулы закона Ома для полной цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \tag{22}$$

получим

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}, \tag{23}$$

где ε – ЭДС;

r – внутреннее сопротивление источника;

R – сопротивление нагрузки.

Напряжение на зажимах источника определяется как произведение силы тока и сопротивления нагрузки: $U = I \cdot R$. Для этого напряжения из (22) получим

$$U = I \cdot R = \varepsilon - I \cdot r. \tag{24}$$

Выразив из (24) внутреннее сопротивление и подставив его в (23), получим формулу для искомой величины:

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon \cdot I}{\varepsilon - U}.$$

Размерность полученной формулы очевидна.

Подставив в эту формулу значения величин, получим

$$I_{кз} = \frac{12 \cdot 4}{12 - 11} = 48 \text{ А}.$$

Пример 10 – Аккумулятор с ЭДС, равной 12 В, и внутренним сопротивлением 1 Ом заряжается при силе тока 3 А.

Найти напряжение на клеммах аккумулятора.

Дано:	*Решение*
$\varepsilon = 12$ В $r = 1$ Ом $I = 3$ А	В общем случае сила I зарядного тока определяется обобщенным законом Ома для неоднородного участка цепи:
U – ?	$$I = \frac{U - \varepsilon}{r + R},$$

где U – напряжение на клеммах аккумулятора;
ε – ЭДС;
r – внутреннее сопротивление аккумулятора;
R – внешнее сопротивление (сопротивление проводов).

Для зарядки аккумуляторов используются провода с малым сопротивлением (толстые провода). Поэтому сила зарядного тока определяется формулой

$$I = \frac{U - \varepsilon}{r}.$$

Откуда

$$U = \varepsilon + I \cdot r.$$

Найдем численной значение искомой величины:

$$U = 12 + 3 \cdot 1 = 15 \text{ В}.$$

Пример 11 – Как изменится температура медного стержня, если по нему в течение 0,5 с будет проходить ток, плотность которого 9 А/мм^2?

Дано:	*Решение*
$t = 0{,}5$ с $j = 9$ А/мм^2 $= 9 \cdot 10^6$ А/м^2 $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\rho_{эл} = 17 \cdot 10^{-9}$ Ом/м $c = 390$ Дж/(кг · К)	Проводник нагревается за счет джоулевой теплоты. Поэтому для решения задачи следует применить закон Джоуля-Ленца $$Q = I^2 \cdot R \cdot t.$$
ΔT – ?	Уравнение теплового баланса в этом случае запишется в следующем виде:

$$I^2 \cdot R \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T,$$

где I – сила тока в проводнике;
R – сопротивление проводника;
t – время протекания тока;
c – удельная теплоемкость материала проводника;
m – масса проводника;

ΔT – изменение температуры проводника за время t.

Из формулы теплового баланса выразим искомую величину:

$$\Delta T = \frac{I^2 \cdot R \cdot t}{m \cdot c}. \tag{25}$$

Выразим неизвестные величины через известные:

$$\frac{I^2 \cdot R}{m} = \frac{j^2 \cdot S^2 \cdot \rho_{эл} \cdot \dfrac{l}{S}}{\rho \cdot l \cdot S} = \frac{j^2 \cdot \rho_{эл}}{\rho}, \tag{26}$$

где j – плотность тока;

S – площадь сечения проводника;

l – длина проводника;

ρ – плотность материала проводника;

$\rho_{эл}$ – удельное сопротивление проводника.

Подставив (26) в (25), получим

$$\Delta T = \frac{j^2 \cdot \rho_{эл} \cdot t}{\rho \cdot c}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[\Delta T] = \frac{\left(1\,\dfrac{\text{А}}{\text{м}^2}\right)^2 \cdot 1\,\text{Ом} \cdot 1\,\text{м} \cdot 1\,\text{с}}{1\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 1\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}} = \frac{1\,\text{Вт} \cdot 1\,\text{с}}{1\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}} = 1\,\text{К}.$$

Найдем численное значение величины:

$$\Delta T = \frac{9^2 \cdot 10^{12} \cdot 17 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}5}{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 390} \approx 0{,}2\,\text{К}.$$

3.3 Электромагнетизм

Магнитное поле – это силовое поле, которое возникает вокруг любого движущегося заряда и проявляется в действии на другие движущиеся заряды. Основной характеристикой магнитного поля является магнитная индукция B. Расчеты магнитной индукции проводят с помощью **закона Био-Савара-Лапласа.**

Закон Био-Савара-Лапласа определяет индукцию $d\vec{B}$ магнитного поля, создаваемую элементом $d\vec{l}$ проводника с током I в некоторой точке А, положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рисунок 9).

Формулы закона в векторной и скалярной формах:

$$d\vec{B}=\frac{\mu\cdot\mu_0\cdot I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{4\pi\cdot r^3};\ dB=\frac{\mu\cdot\mu_0\cdot I\cdot\sin\alpha}{4\pi\cdot r^2}\cdot dl\ ,$$

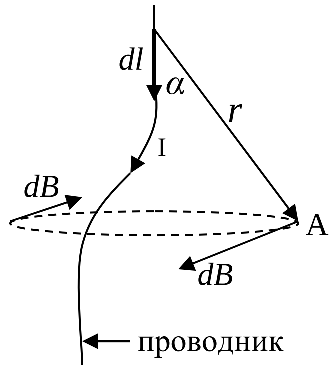

Рисунок 9

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция, которую создает элемент проводника длиной dl с током I в некоторой точке A пространства;

$\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента проводника в точку A, в которой определяется магнитная индукция;

α – угол между радиусом-вектором и направлением тока в элементе проводника;

μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м;

μ – магнитная проницаемость среды, где находится проводник.

Направление вектора магнитной индукции определяется по правилу правого винта.

Магнитная индукция, создаваемая проводниками с различными формой и размером, определяется интегрированием по всей длине проводника. Далее приводятся результаты интегрирования для разных проводников.

Магнитная индукция в центре кругового витка с током

$$B=\frac{\mu\cdot\mu_0\cdot I}{2R},$$

где R – радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового витка с током

$$B=\frac{\mu\cdot\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\pi\cdot R^2\cdot I}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}},$$

где a – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника с током (рисунок 10),

$$B=\frac{\mu\cdot\mu_0\cdot I}{4\pi\cdot r_0}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right).$$

Обозначения представлены на рисунке 10. Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ обозначено точкой – это значит, что вектор $\vec{B}$ направлен к нам перпендикулярно плоскости чертежа.

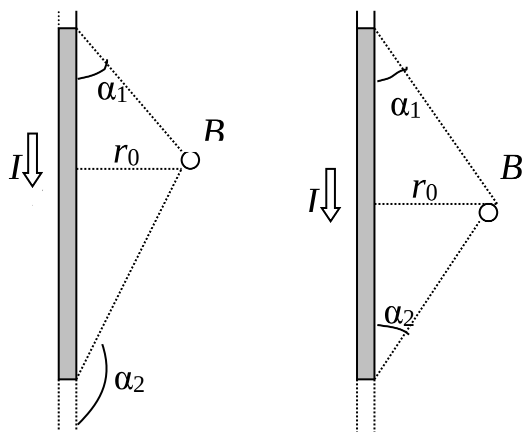

Рисунок 10

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (см. рисунок 10),

$$-\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 = \cos\alpha,$$

тогда

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \cdot \cos\alpha.$$

Магнитная индукция поля длинного прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_0},$$

где r_0 – расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Соленоидом называется катушка, намотанная на длинный цилиндрический каркас.

Магнитная индукция поля внутри соленоида

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N}{l} \cdot I,$$

где N – число витков;

l – длина соленоида.

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ *с напряженностью* $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость изотропной среды.

Если к незакрепленному проводнику с током поднести постоянный магнит, то проводник будет смещаться. Сила, которая действует в этом случае на проводник, определяется з**аконом Ампера.**

Если проводник с током прямолинейный и магнитное поле однородное, то формула закона Ампера имеет следующий вид:

$$\vec{F} = I \cdot \left[\vec{l} \times \vec{B}\right] \text{ или } F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha,$$

где l – длина проводника;

α – угол между направлением тока в проводнике и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

Направление силы Ампера определяется правилом левой руки.

Если поле неоднородно и проводник не является прямым, то закон Ампера записывается для элемента dl проводника как

$$d\vec{F} = I \cdot \left[d\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

Силу, действующую на весь проводник, определяют интегрированием:

$$\vec{F} = \int d\vec{F}\,.$$

За счет силы Ампера проводник с током занимает определенное положение в магнитном поле.

Механический (вращательный) момент *M*, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right] \text{ или } M = p_m B \sin\alpha\,,$$

где $\vec{p}_m$ – магнитный момент контура с током;

$\vec{B}$ – магнитная индукция поля;

α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}\,,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура;

I – сила тока, протекающего по контуру;

S – площадь, охватываемая контуром.

Потенциальная энергия (*механическая*) *контура с током* в магнитном поле

$$П_{МЕХ} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \text{ или } П_{МЕХ} = -p_m \cdot B \cdot \cos\alpha\,.$$

Сила Лоренца – *это сила, которая действует на частицу с зарядом q, движущуюся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B*.

$$\vec{F} = q \cdot \left[\vec{v} \times \vec{B}\right] \text{ или } F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha\,,$$

где $\vec{v}$ – скорость заряженной частицы;

α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Лоренца определяется правилом левой руки, и эта сила всегда перпендикулярна скорости частицы. Поэтому сила Лоренца является центростремительной и справедливо следующее соотношение:

$$q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha = \frac{m \cdot v^2}{R}\,,$$

где m – масса частицы;

R – радиус кривизны траектории.

Если частица движется перпендикулярно силовым линиям $(\vec{v} \perp \vec{B})$ однородного магнитного поля ($B = \text{const}$), то траектория представляет собой окружность радиусом R.

Закон полного тока для магнитного поля позволяет определить магнитную индукцию, которая создается системой проводников.

Закон формулируется следующим образом: *циркуляция* $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ *вектора магнитной индукции* $\vec{B}$ *по любому замкнутому контуру L равна магнитной постоянной* μ_0, *умноженной на алгебраическую сумму токов* I_i, *которые охватываются данным контуром*:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} I_i .$$

Например, если контур охватывает три проводника с токами I_1 и I_2, направленными в одну сторону, и током I_3, направленным в противоположную сторону, то алгебраическая сумма токов

$$\sum_{i=1}^{3} I_i = I_1 + I_2 - I_3 .$$

Если выбранный контур не охватывает проводников с током, то циркуляция вектора B по такому контуру равна нулю.

Магнитный поток *равен числу линий магнитной индукции, которые пересекают данную поверхность*.

Если магнитное поле однородное и поверхность плоская, то магнитный поток

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha ,$$

где S – площадь контура;

α – угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции.

В общем случае, если поле неоднородное и форма поверхности произвольная, то поток через нее определяют интегрированием:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\cdot dS ,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к элементу dS поверхности.

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле вычисляется по формуле

$$A = I \cdot \Delta\Phi ,$$

где $\Delta\Phi$ – магнитный поток через поверхность, которую очерчивает проводник при своем движении (число силовых линий, которые пересекает проводник).

Электромагнитная индукция – *это явление возникновения ЭДС в контуре при изменении магнитного потока через его поверхность.*

ЭДС индукции определяется **законом электромагнитной индукции**

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ или } \varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Если взять производную по времени от магнитного потока, то можно получить формулу для ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\left(\frac{dB}{dt}\cdot S\cdot\cos\alpha + \frac{dS}{dt}\cdot B\cdot\cos\alpha + \frac{d}{dt}(\cos\alpha)\cdot B\cdot S\right).$$

Первое слагаемое полученной формулы определяет ЭДС, которая возникает при изменении индукции магнитного поля, второе слагаемое связано с изменением площади контура, третье слагаемое характеризует ЭДС, возникающую при изменении положения контура.

Частным случаем электромагнитной индукции является возникновение **разности потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле**. Эта разность потенциалов определяется следующей формулой:

$$U = B\cdot l\cdot v\cdot\sin\alpha,$$

где B – индукция магнитного поля;

l – длина проводника;

v – скорость проводника;

α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Заряд q, протекающий по замкнутому контуру (катушке) при изменении магнитного потока $\Delta\Phi$, пронизывающего этот контур (катушку):

$$q = \Delta\Phi/R \text{ или } q = N\cdot\Delta\Phi/R,$$

где N – число витков катушки;

R – электрическое сопротивление контура (катушки).

Самоиндукция – это частный случай электромагнитной индукции.

Самоиндукция – это явление возникновения ЭДС (*индукционного тока*) *в контуре, по которому течет переменный ток.*

В этом случае магнитный поток Φ через контур определяется силой тока I, протекающего по контуру:

$$\Phi = L\cdot I,$$

где L – индуктивность.

Формула для *индуктивности соленоида* имеет вид:

$$L = \mu\cdot\mu_0\cdot\frac{N^2}{l}\cdot S,$$

где μ – магнитная проницаемость среды;

μ_0 – магнитная постоянная;

N – число витков на длине l соленоида;

S – площадь витка.

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_c = -L \cdot \frac{dI}{dt}.$$

По правилу Ленца индукционный ток во всех случаях препятствует изменению основного тока. Это приводит к замедлению нарастания силы тока при замыкании и ее убывания при размыкании цепи.

Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением R и индуктивностью L:

– при замыкании цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{R \cdot t/L}),$$

где ε – ЭДС источника тока;

t – время, прошедшее с момента замыкания цепи;

– при размыкании цепи

$$I = I_0 \cdot e^{-R \cdot t/L},$$

где I_0 – сила тока в цепи в момент размыкания (при $t = 0$);

t – время, прошедшее с момента размыкания цепи.

При прохождении электрического тока по проводнику часть энергии источника тока переходит в энергию магнитного поля.

Энергия магнитного поля проводника с током

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля соленоида к его объему)

$$w = \frac{B \cdot H}{2}, \; w = \frac{B^2}{2\mu \cdot \mu_0} \text{ или } w = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot H^2}{2},$$

где B – магнитная индукция;

H – напряженность магнитного поля.

Примеры решения задач

Пример 12 **–** Два параллельных бесконечно длинных провода *D* и *C*, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию *B* поля, создаваемого проводниками с током в точке А (рисунок 11), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии $r_1 = 5$ см, от другого – $r_2 = 12$ см.

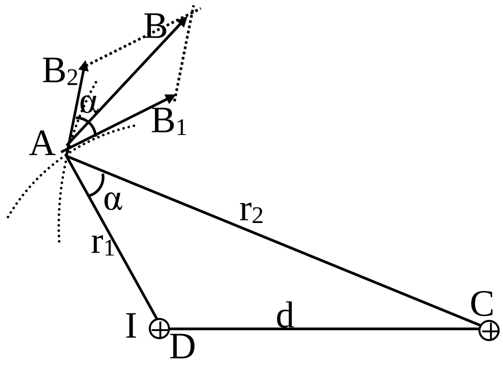

Рисунок 11

Дано:	*Решение*
$I = 60$ А $d = 10$ см $= 0{,}1$ м $r_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $r_2 = 12$ см $= 0{,}12$ м B – ?	Для нахождения магнитной индукции *B* в точке А воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций B_1 и B_2 полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Модуль вектора $\vec{B}$ может быть найден по теореме косинусов:

$$\left|\vec{B}\right| = B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}\,, \qquad (27)$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Магнитные индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ выражаются через силу тока *I* и расстояния r_1 и r_2 от проводника до точки *A* соответственно:

$$B_1 = \mu_0 \cdot I / (2\pi \cdot r_1);\; B_2 = \mu_0 \cdot I / (2\pi \cdot r_2).$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (27) и вынеся $\mu_0 \cdot I / (2\pi)$ за знак корня, получим

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 \cdot r_2}\cos\alpha}\,.$$

Вычислим $\cos\alpha$. Заметив, что α – это угол DAC, по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cos\alpha\,,$$

где *d* – расстояние между проводами. Откуда

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 \cdot r_2};\ \cos\alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2\cdot 5\cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 60}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{1}{(0{,}05)^2} + \frac{1}{(0{,}12)^2} + \frac{2}{0{,}05\cdot 0{,}12}\cdot\frac{23}{40}} = 3{,}08\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}.$$

Пример 13 – Короткая катушка, содержащая $N = 10^3$ витков, равномерно вращается с частотой $n = 10$ с$^{-1}$ относительно оси АВ, лежащей в плоскости катушки и перпендикулярной линиям однородного магнитного поля ($B = 0{,}04$ Тл). Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60°$ с линиями поля. Площадь катушки $S = 100$ см^2.

Дано:

$N = 10^3$
$n = 10$ с$^{-1}$
$B = 0{,}04$ Тл
$\alpha = 60°$
$S = 100$ см^2 $= 10^{-2}$ м^2

ε – ?

Решение

Мгновенное значение ЭДС индукции ε определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея–Максвелла:

$$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt}, \tag{28}$$

а потокосцепление $\psi = N\Phi$, где N – число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ. Подставив выражение ψ в формулу (28), получим

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}. \tag{29}$$

При вращении катушки магнитный поток Φ, пронизывающий катушку в момент времени *t*, изменяется по закону

$$\Phi = B\cdot S\cdot\cos(\omega\cdot t),$$

где B – магнитная индукция;

S – площадь катушки;

ω – угловая скорость катушки.

Подставив выражение для магнитного потока Φ в (29) и продифференцировав полученную формулу по времени, найдем мгновенное значе0 ние ЭДС индукции:

$$\varepsilon = N\cdot B\cdot S\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t).$$

Учитывая то, что угловая скорость ω связана с частотой вращения n катушки соотношением $\omega = 2\pi \cdot n$ и угол $\omega \cdot t = \pi / 2 - \alpha$, получим

$$\varepsilon = 2\pi \cdot n \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \sin(\pi / 2 - \alpha) = 2\pi \cdot n \cdot N \cdot B \cdot S \cdot \cos\alpha .$$

Анализ размерности:

$$\varepsilon = [n] \cdot [B] \cdot [S] = \frac{1\ \text{Тл} \cdot 1\ \text{м}^2}{1\ \text{с}} = \frac{1\ \text{Н} \cdot \text{м}^2}{1\ \text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}} = 1\ \text{В}.$$

Произведем вычисления:

$$\varepsilon = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 = 25{,}1\ \text{В}.$$

Пример 14 **–** Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 4$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Дано:

$N = 1200$
$I = 4$ А
$\Phi = 6\ \text{мкВб} = 6 \cdot 10^{-6}$ Вб

L, W – ?

Решение

Индуктивность L связана с потокосцеплением ψ и силой тока I соотношением

$$\psi = L \cdot I . \qquad (30)$$

Потокосцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\psi = N \cdot \Phi . \qquad (31)$$

Приравняв (30) и (31), найдем формулу для индуктивности соленоида:

$$L = N \cdot \Phi / I . \qquad (32)$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = L \cdot I^2 / 2 . \qquad (33)$$

Подставив в формулу (33) вместо индуктивности выражение (32), получим формулу для расчета энергии соленоида:

$$W = N \cdot \Phi \cdot I / 2 .$$

Произведем вычисления:

$$L = \frac{1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн} = 1{,}8\ \text{мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 1,44 \cdot 10^{-2}\,\text{Дж} = 14,4\ \text{мДж}.$$

3.4 Колебания и волны

Колебание – это процесс, который повторяется с течением времени.

При гармонических колебаниях значения физических величин изменяются по закону синуса или косинуса.

Кинематика колебаний описывается **кинематическим уравнением гармонических колебаний,** которое имеет вид:

$$S(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где S – мгновенное значение колеблющейся величины, при механических колебаниях S – смещение от положения равновесия;

A – амплитуда колебания (максимальное значение величины S);

$(\omega \cdot t + \varphi_0)$ – фаза колебания;

ω – угловая или циклическая частота колебания;

φ_0 – начальная фаза колебания.

Динамика колебаний описывается следующим **дифференциальным уравнением гармонических колебаний:**

$$\frac{d^2S}{dx^2} + \omega_0^2 \cdot S = 0.$$

Решением этого уравнения является приведенное выше кинематическое уравнение.

Быстрота изменения колеблющейся величины определяется **скоростью *v* и ускорением *a***, которые вычисляются по формулам:

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0);$$

$$a(t) = \frac{d^2S}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где $A \cdot \omega$ – амплитудное (максимальное) значение скорости;

$A \cdot \omega^2$ – амплитудное (максимальное) значение ускорения.

Следует иметь в виду, что приведенными уравнениями описываются как механические, так и электромагнитные колебания. Например, при электрических колебаниях первая производная от уравнения колебания заряда дает уравнение колебания силы тока:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

При сложении гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты результирующее колебание также является гармоническим. При этом амплитуда и фаза колебания определяются следующим образом:

– *амплитуда результирующего колебания*

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

– *начальная фаза* результирующего колебания

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

где A_1, A_2 и φ_1, φ_2 – амплитуды и фазы складываемых колебаний.

Траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = A_1 \cos(\omega \cdot t)$; $y = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, описывается уравнениями:

– $y = \frac{A_1}{A_2} x$, если разность фаз $\varphi = 0$;

– $y = -\frac{A_2}{A_1} x$, если разность фаз $\varphi = \pm\pi$;

– $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$, если разность фаз $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Волновой процесс (волна) – это процесс распространения колебаний в пространстве.

Уравнение плоской (бегущей) синусоидальной волны имеет вид:

$$S(x,t) = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \text{ или } S(x,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x),$$

где $S(x,t)$ – мгновенное значение смещения любой точки среды от ее положения равновесия;

x – расстояние от источника волны до рассматриваемой точки;

v – скорость распространения волны в среде;

k – волновое число, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (где λ – длина волны);

$(\omega \cdot t - k \cdot x)$ – фаза колебания точки среды.

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны, находящихся друг от друга на расстоянии Δx, отсчитанном в направлении распространения волны, определяется как

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x,$$

где λ – длина волны.

Наложение когерентных волн.

Когерентными называются волны с постоянной во времени разностью фаз.

Когерентными являются гармонические волны с одинаковыми частотами (длинами волн).

При наложении когерентных волн в одних точках пространства они взаимно усиливают, а в других ослабляют друг друга. То есть происходит перераспределение энергии волн в пространстве. Это явление называется интерференцией волн.

Результат наложения волн зависит от разности их хода Δx, с которой они приходят в данную точку.

Условие усиления волн.

Если разность хода

$$\Delta x = \pm 2m\cdot\frac{\lambda}{2},\ m = 0, 1, 2,...$$

то в точку наложения волны приходят с одинаковыми фазами и усиливают друг друга. Величина m называется номером максимума.

Условие ослабления волн.

Если разность хода

$$\Delta x = \pm(2m+1)\cdot\frac{\lambda}{2},\ m = 0, 1, 2,...$$

то в точку наложения волны приходят с противоположными фазами и ослабляют друг друга. Величина m называется номером минимума.

Примеры решения задач

Пример 15 – Частица массой $m = 0{,}01$ кг совершает гармонические колебания с периодом $T = 2$ с. Полная энергия колеблющейся частицы $E = 0{,}1$ мДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.

Дано:

$m = 0{,}01$ кг

$T = 2$ с

$E = 10^{-4}$ Дж

A, F_{max} – ?

Решение

Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением для полной энергии частицы

$$E = m\cdot\omega^2\cdot A^2/2,$$

где $\omega = 2\pi/T$.

Отсюда для амплитуды получим

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F = -k \cdot x$, где k – коэффициент квазиупругой силы; x – смещение колеблющейся точки. Сила будет максимальной при максимальном смеще-нии $x_{\max}$, равном амплитуде:

$$F_{\max} = k \cdot A.$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m \cdot \omega^2 = 4\pi^2 \cdot m / T^2.$$

Подставив выражения для полной энергии и коэффициента k в формулу для амплитуды и произведя упрощения, получим

$$F_{\max} = 2\pi \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot E} \,/\, T.$$

Проведем анализ размерности:

$$[F_{\max}] = \frac{[m \cdot E]^{1/2}}{T} = \frac{1\,\text{кг}^{1/2} \cdot 1\,\text{Дж}^{1/2}}{1\,\text{с}} = \frac{1\,\text{кг}^{1/2} \cdot 1\,\text{Н}^{1/2} \cdot 1\,\text{м}^{1/2}}{1\,\text{с}} =$$

$$= 1\,\text{Н}^{1/2} \cdot 1\,\text{Н}^{1/2} = 1\,\text{Н}.$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} = 0{,}045\,\text{м} = 45\,\text{мм};$$

$$F_{\max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2}\sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 4{,}44 \cdot 10^{-3}\,\text{Н} = 4{,}44\,\text{мН}.$$

Пример 16 – Платформа совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости с частотой 2 Гц и амплитудой 1 см. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу 0,2. Будет ли груз скользить по платформе? Ответ обосновать.

Дано:

$\nu = 2$ Гц

$A = 1\,\text{см} = 10^{-2}$ м

$\mu = 0{,}2$

Будет ли груз скользить?

Решение

Для решения приведем рисунок 12.

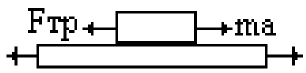

Рисунок 12

Груз будет скользить в том случае, когда максимальная сила инерции $m \cdot a_{\max}$, действующая на груз будет равна или больше силы трения $F_{тр}$. В рассматриваемом случае сила трения

$$F_{тр} = \mu \cdot m \cdot g, \qquad (34)$$

где m – масса груза;

g – ускорение свободного падения.

Максимальное ускорение силы инерции $a_{\max}$ равно максимальному ускорению колеблющейся платформы, которое определяется как

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot A \text{ или } a_{\max} = 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A.$$

Произведение $a_{\max}$ и массы груза дает максимальную силу инерции:

$$F_{ин} = m \cdot 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A. \qquad (35)$$

Приравняв (34) и (35) и выразив ν, получим формулу для частоты, при которой груз будет скользить по платформе:

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{4\pi^2 \cdot A}}.$$

Произведем вычисления:

$$\nu = \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 10^{-2}}} = 2{,}24 \text{ Гц}.$$

Согласно условию, груз будет скользить при значении частоты, равном полученному значению или больше него. Так как заданное значение частоты меньше полученного, то груз не будет скользить по платформе.

Пример 17 – В колебательном контуре происходят свободные колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора 10^{-6} Кл, а максимальная сила тока 10 А, найти частоту колебаний этого контура.

Дано:	*Решение*
$q_{max} = 10^{-6}$ Кл $I_{max} = 10$ А	При электрических колебаниях кинематическое уравнение колебания заряда записывается в виде
ν – ?	$$q(t) = q_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где ω – циклическая частота колебания;

φ_0 – начальная фаза колебания.

Взяв производную по времени от заряда, получим уравнение колебания силы тока

$$q(t) = -q_{max} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0). \qquad (36)$$

В уравнении (36) произведение максимального заряда и циклической частоты определяет максимальное (амплитудное) значение силы тока:

$$I_{max} = q_{max} \cdot \omega. \qquad (37)$$

При известных значениях q_{max} и I_{max} можно найти циклическую частоту. По условию задачи требуется найти ν. Поэтому используем формулу, которая связывает ω и ν:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu. \qquad (38)$$

Подставив (38) в (37) и выразив ν, получим расчетную формулу

$$\nu = \frac{I_{max}}{2\pi \cdot q_{max}}.$$

Произведем расчеты:

$$\nu = \frac{10}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-6}} = 1{,}59 \cdot 10^{6}\ \text{Гц} = 1{,}59\ \text{МГц}.$$

Пример 18 – Напряжение и сила тока в катушке изменяются по законам $U(t) = 60\sin(314t + 0{,}25\pi)$ и $i(t) = 15\sin(314t)$.Определить разность фаз $\Delta\varphi$ между током и напряжением, а также полное Z, активное R и реактивное X_p сопротивления катушки.

Дано:	*Решение*
$U(t) = 60\sin(314t + 0{,}25\pi)$ $i(t) = 15\sin(314t)$	Известно, что фазой колебания называется величина, стоящая под знаком $\sin$ или $\cos$. Поэтому искомая разность фаз $\Delta\varphi$ определяется как разность
$\Delta\varphi$, Z, R, X_p – ?	

$$\Delta\varphi = (314t + 0,25\pi) - 314t = 0,25\pi .$$

Полное сопротивление определим с помощью закона Ома для цепи переменного тока:

$$Z = \frac{U_a}{I_a} ,$$

где U_a и I_a – амплитудные значения напряжения и силы тока.

Из заданных уравнений следует, что $U_a = 60$ В и $I_a = 15$ А. Следовательно, полное сопротивление

$$Z = \frac{60}{15} = 4 \text{ Ом}.$$

Для определения активного R и реактивного $X_p = \omega \cdot L$ сопротивлений запишем формулы для полного сопротивления

$$Z^2 = R^2 + (\omega \cdot L)^2 \qquad (39)$$

и для сдвига фаз

$$\text{tg}\, \Delta\varphi = \frac{\omega \cdot L}{R}, \qquad (40)$$

где L – индуктивность катушки.

Выразив $\omega \cdot L$ из (40) и подставив в (39), получим формулу для активного сопротивления:

$$R = \frac{Z}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \Delta\varphi}} .$$

Подставив в эту формулу найденные значения Z и $\Delta\varphi$, рассчитаем R:

$$R = \frac{4}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 0,25\pi}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2,83 \text{ Ом}.$$

Теперь по формуле (39) можно найти X_p:

$$X_p = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{4^2 - 2,83^2} \approx 2,83 \text{ Ом}.$$

Таким образом, получили, что при разности фаз $\Delta\varphi \cdot R = X_p$.

Пример 19 – Синусоидальная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебания точек шнура – 2,4 с, амплитуда колебания – 7 см. Определить длину волны, фазу и смещение точки, отстоящей на 45 м от источника колебаний, через 4 с.

Дано:	*Решение*
$v = 15$ м/с $T = 2,4$ с $A = 7$ см $= 7 \cdot 10^{-2}$ м $x = 45$ м $t = 4$ с	Уравнение синусоидальной волны имеет вид:
λ, Φ, $S(x,t)$ – ?	

$$S(x,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x), \qquad (41)$$

где ω – циклическая частота;

k – волновое число;

$\omega \cdot t - k \cdot x$ – фаза колебаний, $\omega \cdot t - k \cdot x = \Phi$.

Выразим ω и k через заданные величины:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ и } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Тогда формула фазы примет вид:

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x. \qquad (42)$$

Определим длину волны λ:

$$\lambda = v \cdot T = 15 \cdot 2,4 = 36 \text{ м}$$

и фазу волны:

$$\Phi(t) = \frac{2\pi}{2,4} \cdot 4 - \frac{2\pi}{36} \cdot 45 = \frac{5\pi}{6}.$$

Теперь, подставив это значение фазы в формулу (41), определим искомое смещение:

$$S(x,t) = 7 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(5\pi / 6) = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример 20 – Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой 300 Гц. Скорость распространения колебаний в среде равна 1,5 км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода волн будет наблюдаться максимальное ослабление колебаний. Каков результат интерференции в точке, расположенной на расстоянии 20 м от первого источника и 30 м от второго?

Дано:	*Решение*
$\nu = 300$ Гц $v = 1,5 \cdot 10^3$ м/с $x_1 = 20$ м $x_2 = 30$ м	Для решения задачи используем условие усиления
$\Delta x_{\min}$ – ?	

$$\Delta x = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (43)$$

и ослабления когерентных волн при их наложении

$$\Delta x = \pm(2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \qquad (44)$$

где $m = 0, 1, 2,...$

λ – длина волны.

Найдем искомую разность хода.

Из (44) следует, что волны будут ослаблять друг друга, если в точку наложения они приходят с разностью хода Δx, равной *нечетному числу полуволн*. Минимальной разности хода соответствует $m = 0$.

Поэтому

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2}. \qquad (45)$$

По формуле найдем длину волн:

$$\lambda = v \cdot T = v / \nu = 1500 / 300 = 5 \text{ м}.$$

По формуле (44) для $\Delta x_{\min}$ получим

$$\Delta x_{\min} = 5 / 2 = 2{,}5 \text{ м}.$$

Найдем результат наложения волн в заданной точке, для которой разность хода

$$x_2 - x_1 = 30 - 20 = 10 \text{ м}.$$

Из формул (43) и (44) видно, что результат наложения волн зависит от того, четному или нечетному числу $\lambda / 2$ равна разность хода.

Поделив заданную разность хода на $\lambda / 2$, получим

$$\frac{\Delta x}{\lambda / 2} = \frac{10}{2{,}5} = 4.$$

Число полуволн получилось четным. Это значит, что в заданной точке будет происходить усиление волн.

Список литературы

1 **Трофимова, Т. И.** Курс физики: учебное пособие для втузов / Т. И. Трофимова. – Москва: Академия, 2007. – 560 с.

2 **Детлаф, А. А.** Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – Москва: Высшая школа, 2001. – 718 с.

3 **Трофимова, Т. И.** Курс физики. Задачи и решения: учебное пособие для втузов / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – Москва: Академия, 2004. – 592 с.

4 **Волькенштейн, В. С.** Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – Москва: Наука, 2003.– 328 с.

5 **Чертов, А. Г.** Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Москва: Высшая школа 1981. – 430 с.

6 **Сена, Л. А.** Единицы физических величин и их размерность / Л. А. Сена. – Москва: Наука, 1988. – 432 с.

Приложение А
(справочное)

Значения некоторых физических величин и постоянных

Таблица А.1 – Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	γ	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с
Атомная единица массы	*а. е. м.*	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Таблица А.2 – Плотность твердых тел

Твердое тело	Плотность, кг/м^3	Твердое тело	Плотность, кг/м^3
Алюминий	$2{,}70 \cdot 10^3$	Медь	$8{,}93 \cdot 10^3$
Барий	$3{,}50 \cdot 10^3$	Никель	$8{,}90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6{,}02 \cdot 10^3$	Свинец	$11{,}3 \cdot 10^3$
Висмут	$9{,}80 \cdot 10^3$	Серебро	$10{,}5 \cdot 10^3$
Железо	$7{,}88 \cdot 10^3$	Цезий	$1{,}90 \cdot 10^3$
Литий	$0{,}53 \cdot 10^3$	Цинк	$7{,}15 \cdot 10^3$

Таблица А.3 – Диэлектрическая проницаемость

Диэлектрик	ε	Диэлектрик	ε
Вода	81	Слюда	7,5
Воздух	1,00058	Спирт	26
Воск	7,8	Стекло	6,0
Керосин	2,0	Фарфор	6,0
Парафин	2,0	Эбонит	2,7
Плексиглас	3,5	Масло трансформаторное	2,2
Полиэтилен	2,3		

Таблица А.4 – Удельные сопротивления проводников и изоляторов

Проводник	Удельное сопротивление (при 20°С) ρ, 10^{-9} Ом·м	Температурный коэффициент α, кК$^{-1}$	Изолятор	Удельное сопротивление ρ, Ом·м
Алюминий	25	4,5	Бумага	10^{10}
Вольфрам	50	4,8	Парафин	10^{15}
Железо	98	6,5	Слюда	10^{13}
Золото	20	4,0	Фарфор	10^{13}
Медь	17	4,3	Шеллак	10^{14}
Свинец	190	4,2	Эбонит	10^{14}
Серебро	16	4,1	Янтарь	10^{17}

Таблица А.5 – Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетик	$\mu - 1,\ 10^{-6}$	Диамагнетик	$\mu - 1,\ 10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	–0,063
Воздух	0,38	Бензол	–7,5
Кислород	1,9	Вода	–9,0
Эбонит	14	Медь	–10,3
Алюминий	23	Стекло	–12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	–12,6
Платина	360	Кварц	–15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	–176

Таблица А.6 – Энергия ионизации

Вещество	E_i, Дж	E_i, эВ
Водород	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3{,}94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1{,}21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1{,}66 \cdot 10^{-18}$	10,4

Таблица А.7 – Подвижность ионов в газах

Газ	Положительный ион	Отрицательный ион
Азот	$1{,}27 \cdot 10^{-4}$	$1{,}81 \cdot 10^{-4}$
Водород	$5{,}4 \cdot 10^{-4}$	$7{,}4 \cdot 10^{-4}$
Воздух	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	$1{,}9 \cdot 10^{-4}$