МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Финансы и бухгалтерский учет»

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит» очной и заочной форм обучения

Могилев 2019

УДК 336.2
ББК 65.261.4
Ф 94

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Финансы и бухгалтерский учет» «23» апреля 2019 г., протокол № 14

Составитель канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Рецензент канд. экон. наук Т. Г. Нечаева

В методических рекомендациях представлены задачи к каждой лабораторной работе.

Учебно-методическое издание

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	М. С. Александрёнок
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.- изд. л. . Тираж 46 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Лабораторная работа № 1. Предмет финансовой математики

Цель работы – научиться распознавать и решать четыре типа задач на процентные вычисления, решать разобранные *типы задач* в *Excel*.

1.1 Методические указания

Процентом некоторой величины называется сотая доля этой величины. Такой величиной может быть месячный доход семьи, годовая прибыль фирмы, сумма государственного бюджета. Чтобы указать, что величина выражена в процентах, используется специальное обозначение: %. Термин «процент» произошёл от латинского *pRo centum* – на сотню, или за сто. Выражать доли величин в процентах принято в финансовых и статистических расчётах, а также во многих других областях.

Задача 1. Определить число, которое составляет n % от числа A.

Обозначим искомое число через x , воспользуемся определением процента:

$$x = \frac{n}{100} \cdot A.$$

Задача 2. Определить число, n % которого равны B.

Обозначим искомое число через x, воспользуемся определением процента:

$$B = \frac{n}{100} \cdot x,$$

откуда находим

$$x = \frac{100}{n} \cdot B.$$

Задача 3. Определить, сколько процентов от числа A составляет число B.

Обозначим искомое число процентов через x и запишем условие задачи в следующем виде:

$$\frac{A}{B} = \frac{100}{x},$$

откуда находим

$$x = \frac{100}{A} \cdot B.$$

Задача 4. Определить, сколько процентов от некоторого числа составляет число B, если n % этого числа равны A.

Обозначим искомое число процентов через x и запишем условие задачи следующем виде:

$$\frac{A}{B}=\frac{n}{x},$$

откуда   находим

$$x=\frac{n}{A}\cdot B.$$

1.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в EXCEL.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. В США применяется налог с продаж, величина которого меняется от штата к штату. В Калифорнии этот налог, как правило, составляет 8,75 %. Сумма налога не указывается в продажной цене товара, а начисляется при оплате покупок. Покупатель выбрал в «ВолМАРТ» товары на сумму 39,53 долл. без учёта налога с продаж. Какую сумму он заплатил в кассе?

Задача 2. В Республике Беларусь в продажную цену товара включается налог на добавленную стоимость (НДС). Его величина для большинства товаров составляет 20 %. Иногда он указывается отдельной строкой в кассовом чеке (это актуально для предпринимателей). При покупке товаров сумма НДС составила 48,66 р. Какова стоимость товара без НДС?

Задача 3. Покупатель приобрёл в магазине «Евроопт» товары на сумму 110,90 р. По дисконтной карте ему была предоставлена скидка, равная 7,50 р. Чему равна величина скидки в процентах от суммы покупки?

Задача 4. Господин Н. сначала владел 1000 акций компании «К», что составляло 2,5 % от общего числа акций этой компании. Чему стала равна его доля после покупки ещё 200 акций?

Задача 5. Господин Н., получив в наследство 65 000 долл., купил на них две квартиры: однокомнатную за 25 000 долл. и двухкомнатную за 40 000 долл. Через год он продал эти квартиры, получив от продажи однокомнатной квартиры 40 % прибыли, а от продажи двухкомнатной квартиры 30 % прибыли. Сколько процентов прибыли господин Н. получил от продажи двух квартир?

Задача 6. Вычислить, на сколько процентов прибыль, полученная от продажи двухкомнатной квартиры господином Н. из задачи 5, больше, чем прибыль, полученная им от продажи однокомнатной квартиры.

Задача 7. В Великобритании НДС для большинства товаров составляет 17,5 %. НДС входит в продажную цену товара. Какой процент составляет налог на добавленную стоимость в продажной цене?

Задача 8. Некоторый товар подорожал в январе на 10 % и в феврале ещё на 10 %. На сколько процентов подорожал товар за два месяца?

Контрольные вопросы

1 Перечислите основные задачи финансовой математики.
2 В чем выражается денежная оценка отсроченного потребления?
3 Какова обычная связь между риском и доходностью вложений?
4 Что такое процентная ставка?
5 Как найти процент от числа?
6 Как найти число по известному значению процента от числа

2 Лабораторная работа № 2. Расчет простых процентов

Цель работы – изучить сущность простых процентов и методики их начисления.

2.1 Методические указания

Простые проценты – это проценты, начисляемые на первоначальную сумму сделки; в этом случае начальная сумма долга не меняется.

Для записи формулы наращения простых процентов вводятся следующие обозначения:

I – проценты за весь срок ссуды;
P – первоначальная сумма долга;
S – наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока;
i – ставка наращения процентов (десятичная дробь);
n – срок ссуды.

Наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i).$$

Сумма начисленных процентов вычисляется по формуле

$$I = S - P = P \cdot (1 + n \cdot i) - P = P \cdot n \cdot i.$$

Коэффициент наращения показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной, и определяется по формуле

$$K_H = \frac{S}{p} = \frac{p \cdot (1 + i \cdot n)}{p} = 1 + i \cdot n.$$

Если ссуда предоставлена на D дней, то

$$n = \frac{d}{K},$$

где K – число дней в году.

Тогда наращенная сумма и коэффициент наращения

$$S = p \cdot \left(1 + i \cdot \frac{d}{K}\right);$$

$$K_н = 1 + i \cdot \frac{d}{K}.$$

В зависимости от определения D и K применяют следующие методики.

1 Точные проценты с точным числом дней ссуды (английская практика, АСТ/АСТ, 365/365). Точное количество дней определяется по календарю или специальным таблицам. При этом день выдачи кредита и возврата считается как один день. Число дней в году K = 365 или 366 дней для високосного года.

2 Банковский метод (французская практика, АСТ/360, 360/360). В этом методе D определяется снова как точное количество дней. Число дней в году принимается K = 360 дней. Метод дает финансовые преимущества банкам при выдаче кредита на срок более 360 дней.

3 Обыкновенные проценты с приближенным числом дней (германская практика, 360/360). В этом методе число дней в месяце принимается равным 30 дней. Количество дней в году K = 360. Применяется при частичном погашении ссуды.

В случае переменной процентной ставки наращенная сумма и коэффициент наращения определяются по формулам

$$S = p \cdot \left(1 + \sum i_k \cdot n_k\right);$$

$$K_н = 1 + \sum i_k \cdot n_k .$$

При начислении процентов при изменении величины депозита во времени проценты рассчитываются по формуле

$$I = R_j \cdot n_j \cdot i,$$

где R_j – остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств;

n_j – срок хранения денег до нового изменения остатка средств на счете.

В банковской практике может применяться метод, основанный на преобразовании. Для этого необходимо измерить интервалы между моментами изменений величины остатка на счете в днях, а процентную ставку выразить в процентах. Получаем

$$I = R_j \cdot n_j \cdot i = \frac{R_j \cdot t_j \cdot i}{K \cdot 100} = \frac{\frac{R_j \cdot t_j}{100}}{\frac{K}{i}},$$

где K – число дней в году;

t_j – срок в днях между последовательными изменениями остатков денег на счете;

$\frac{R_j \cdot t_j}{100}$ – процентное число;

$\frac{K}{i}$ – процентный (или постоянный) делитель.

Для коммерческих расчетов иногда требуется определить срок ссуды и процентную ставку.

Срок ссуды определяется по следующим формулам:

– в годах:

$$n = (S – p) / (p \cdot i);$$

– в днях:

$$D = (S – p) / (p \cdot i) \cdot K.$$

Величина процентной ставки определяется по формулам:

– в годах:

$$i = (S – p) / (p \cdot n);$$

– в днях:

$$i = (S – p) / (p \cdot D) \cdot K.$$

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P.

Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т. е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма S дисконтируется или учитывается, а сам процесс начисления процентов и их удержание называют дисконтированием или учетом, а удержанные проценты – дисконтом (*Discount*) или сидкой.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования – математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. В первом случае применяется ставка наращения, во втором – учетная ставка.

Математическое дисконтирование представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды. Задача в этом случае формулируется так: какую первоначальную сумму ссуды надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму S, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i?

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot i}.$$

Установленная таким путем величина P является современной величиной суммы S, которая будет выплачена спустя n лет Дробь $1/(1 + n \cdot i)$ называют дисконтным, или дисконтирующим, множителем.

При учете векселя применяется банковский, или коммерческий, учет. Согласно этому методу проценты D за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка $d_{уч}$.

$$D = S \cdot n \cdot d_{уч}.$$

$$P = S - S \cdot n \cdot d_{уч} = S \cdot (1 - n \cdot d_{уч}).$$

Дисконтный множитель здесь равен $(1 – n \cdot d_{уч})$.

2.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в *Excel*.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. Банк размещает средства физических лиц на депозит под 25 % годовых. Определить коэффициент наращения и наращенную сумму депозита в X тыс. р. Срок депозита 3 года. Проценты простые. Исходные данные представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1 200	1 850	2 100	2 220	1 950	2 830	2 400	3 100

Задача 2. Банк принимает депозиты на 3 месяца по ставке 30 % годовых, на 6 месяцев по ставке 35 % годовых и на год по ставке 40 % годовых. Определить сумму, которую получит владелец депозита в *X* тыс. р., и его доход во всех трех случаях. Исходные данные представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2 820	3 150	2 600	2 900	3 950	1 570	2 800	3 300

Задача 3. Определить по трем методикам коэффициент наращения, наращенную сумму, если вклад был размещен под простые проценты с 12 января по *X*-период. Годовая процентная ставка равняется 30 %. Первоначальная сумма вклада составляет 15 000 тыс. р. Год невисокосный. Исходные данные представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	25.02	15.06	02.05	13.04	26.04	30.05	31.07	14.06

Задача 4. Клиент положил в банк на депозит 15 тыс. р. на срок с 12 апреля по *X*-период с простой процентной ставкой 25 % годовых. Рассчитать доход клиента по трем методикам. Год невисокосный. Исходные данные представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	10.06	15.09	11.08	02.08	22.09	17.05	23.10	22.11

Задача 5. Организация взяла в коммерческом банке кредит на сумму 600 тыс. р. сроком на 4 года. Согласно договору за первый год процентная ставка составляла *X* % и с учетом инфляции каждый последующий год повышалась на 5 процентных пункта. Определить коэффициент наращения, наращенную сумму и доход банка. Год невисокосный. Исходные данные представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	10	15	11	12	14	20	25	30

Задача 6. Клиент внес с банк 30 тыс. р. Согласно условиям договора процентная ставка может быть изменена банком в одностороннем порядке. Вклад внесен 3 апреля под 20 % годовых. 22 апреля процентная ставка установлена

в 15 % годовых, а 20 мая – 10 % годовых. Вклад вместе с процентами получен *X* июня. Определить наращенную сумму, если расчет процентов производится по точным процентам с точным числом дней (*K* = 365). Исходные данные представлены в таблице 2.6.

Таблица 2.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	5	6	7	8	9	10	11	12

Задача 7. Сберегательный банк принимает вклады под процентную ставку 20 %. Проценты простые. В году 365 дней. Через сколько дней вклад в 45 тыс. р. нарастет до *X* тыс. р.? Исходные данные представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	48	50	52	49	54	59	63	60

Задача 8. На какой срок выдан кредит в 300 тыс. р. под процентную ставку 30 % годовых, если банк получил сумму от кредитора *X* тыс. р.? Методика расчета банковская. Исходные данные представлены в таблице 2.8.

Таблица 2.8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	350	380	390	400	410	420	430	450

Задача 9. Клиент вносит в банк денежную сумму 8 тыс. р. на 3 месяца с таким расчетом, чтобы наращенная сумма была не менее 10 тыс. р. Какой должна быть процентная ставка?

Задача 10. Определить, какую процентную ставку должен установить при кредите 2000 тыс. р. банк, чтобы при сроке кредита в 80 дней иметь прибыль не менее *X* тыс. р. Проценты обыкновенные с приближенным числом дней. Исходные данные представлены в таблице 2.9.

Таблица 2.9

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	100	110	120	130	140	150	160	170

Задача 11. Определить, какую процентную ставку должен установить при кредите 20 тыс. р. банк, чтобы при сроке кредита в 80 дней иметь прибыль не менее *X* тыс. р. Проценты обыкновенные с приближенным числом дней. Исходные данные представлены в таблице 2.10.

Таблица 2.10

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	100	110	120	130	140	150	160	170

Контрольные вопросы

1 Напишите формулу для вычисления наращенной суммы при начислении простых процентов.

2 Чем отличаются точные проценты от обыкновенных?

3 Назовите способы начисления простых процентов в зависимости от числа дней финансовой операции.

4 Напишите формулу для вычисления множителя наращения при переменных простых ставках процентов.

5 Что такое процентные деньги? Какова формула расчета процентных денег?

6 Что такое дисконт? Какова формула расчета дисконта?

7 Что называется множителем роста и какова его расчетная формула?

8 Какова формула расчета конечной суммы по переменной простой процентной ставке?

3 Лабораторная работа № 3. Расчет сложных процентов

Цель работы – изучить сущность сложных процентов и методики их начисления.

3.1 Методические указания

База для начисления сложных процентов, в отличие от простых, не остается постоянной — она увеличивается с каждым шагом во времени. Абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют капитализацией процентов.

Наращенная сумма сделки (кредита или депозита) при сложных процентах определяется по формулам

$$S = p \cdot (1 + j)^n;$$

$$S = p \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

где j – годовая ставка сложных процентов

m – число периодов начисления процентов в году.

Коэффициент наращения вычисляется по формуле

$$K_н = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Пусть процентная ставка меняется по годам. Первые n_1 лет она равна j_1, n_2 равна j_2 и т. д. Тогда

$$K_н = (1 + j_1)^{n_1} \cdot (1 + j_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1 + j_k)^{n_k};$$

$$K_н = \left(1 + \frac{j_1}{m}\right)^{mn_1} \cdot \left(1 + \frac{j_2}{m}\right)^{mn_2} \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{j_k}{m}\right)^{mn_k}.$$

Среди предложений банков по кредитным операциям со сложными процентами можно ориентироваться, если их пересчитать на эффективную годовую ставку.

При номинальной ставке j, начислении процентов m раз в году и сроке кредита n лет наращенная сумма

$$S = p \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Если S и p одинаковы, то при одинаковом n и процентной ставке j, обеспечивающей ту же доходность при начислении процентов один раз в году,

$$S = p \cdot (1 + j_{эф})^n.$$

Тогда

$$p \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = p \cdot (1 + j_{эф})^n;$$

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = 1 + j_{эф};$$

$$j_{эф} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1.$$

Срок кредита для случая сложных процентов определяется по формуле

$$n = \frac{\lg \frac{S}{p}}{m \cdot \lg\left(1 + \frac{j}{m}\right)}.$$

Номинальная процентная ставка вычисляется по формуле

$$j = m \cdot \left[\left(\frac{S}{p} \right)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right].$$

При дисконтировании по сложной учетной ставке используется следующая формула:

$$p = S \cdot (1 - d_{уч})^n .$$

Если дисконтирование происходит m раз в году, то расчет ведется по формуле

$$p = S \cdot \left(1 - \frac{d_{уч}}{m} \right)^{mn} .$$

3.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в *Excel*.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. Банк принимает вклады физических лиц по номинальной процентной ставке 30 %. Клиент внес X тыс. р. Определить коэффициент наращения, наращенную сумму при сроке вклада 12 месяцев. Проценты сложные и начисляются:

а) один раз в год;
б) по полугодиям;
в) поквартально;
г) ежемесячно.

Исходные данные представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	950	800	700	830	560	480	910	1000

Задача 2. Для строительства завода банк предоставил организации кредит в 200 тыс. р. сроком на 5 лет из расчета X % годовых. Определить коэффициент

наращения, сумму начисленных процентов и стоимость кредита на конец каждого года. Исходные данные представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	10	11	12	13	14	15	16	17

Задача 3. Предприятие получило кредит в 9 тыс. р. сроком на 3 года. Проценты – сложные. Процентная ставка за первый год *X* % и каждый последующий год увеличивается на 3 процентных пункта. Определить сумму возврата кредита. Исходные данные представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	10	11	12	13	14	15	16	17

Задача 4. Три коммерческих банка предложили возможным клиентам следующие условия: первый банк предлагает на валютные вклады простые проценты из расчета 15 % годовых, второй – по номинальной ставке 12 % при ежемесячном начислении процентов, третий – по номинальной ставке 10 % и поквартальном начислении процентов. В какой банк клиенту выгоднее вкладывать деньги?

Задача 5. Клиент разместил вклад в *X* тыс. р. на срочный депозит сроком 8 месяцев. Начисление процентов ежемесячное под номинальную процентную ставку 16 % годовых. Определить наращенную сумму и эффективную процентную ставку. Исходные данные представлены в таблице 3.4.

Задача 6. Для совершения сделки через три месяца клиенту необходимо иметь 5 тыс. р. В наличии у него 4,5 тыс. р. Какой должна быть минимальная номинальная процентная ставка, чтобы наращенная сумма была не менее 5 тыс. р. к указанному периоду? Начисление процентов ежемесячное.

Задача 7. Вексель на сумму *X* тыс. р. и сроком погашения 2 года учтен банком по учетной ставке 20 % годовых. Дисконтирование ежемесячное. Сколько получил владелец векселя и каков дисконт банка при расчете по простой и сложной учетной ставке? Сравнить результаты и сделайте выводы. Исходные данные представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	220	240	260	280	300	320	340	360

Таблица 3.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	150	250	350	450	550	650	750	850

Контрольные вопросы

1 В чем причина ограниченности применения простых процентных ставок?
2 Какова формула роста по сложным процентам?
3 Какова смешанная формула роста?
4 Какова формула роста по переменной сложной процентной ставке?

4 Лабораторная работа № 4. Расчет средних процентных ставок. Определение эквивалентности ставок

Цель работы – изучить методику расчета средних процентных ставок, сущность эквивалентных финансовых операций, порядок расчета эквивалентных ставок.

4.1 Методические указания

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней. Замена всех усредняемых значений ставок на среднюю процентную ставку по определению не изменяет результатов наращения или дисконтирования.

Простые проценты. Пусть за последовательные периоды n_1, n_2, …, n_k начисляются простые проценты по ставкам i_1, i_2, …, i_k. Искомые средние получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$1 + N \cdot i_{cp} = 1 + \sum n_k \cdot i_k \, .$$

Отсюда

$$i_{cp} = \frac{\sum n_k \cdot i_k}{N},$$

где N – общий срок наращения процентов, $N = \sum n_k$.

Найденный показатель представляет собой среднюю арифметическую взвешенную с весами, равными продолжительности отдельных периодов.

При расчете по сложным процентам средняя процентная ставка также получается посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$(1+j_{cp})^N = (1+j_1)^{n_1} \cdot (1+j_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+j_k)^{n_k} .$$

Отсюда

$$1+j_{cp} = \sqrt[N]{(1+j_1)^{n_1} \cdot (1+j_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+j_k)^{n_k}} ;$$

$$j_{cp} = \sqrt[N]{(1+j_1)^{n_1} \cdot (1+j_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+j_k)^{n_k}} - 1.$$

Достаточно часто в практике возникает ситуация, когда необходимо произвести между собой сравнение по выгодности условий различных финансовых операций и коммерческих сделок. Условия финансово-коммерческих операций могут быть весьма разнообразными и напрямую несопоставимыми. Для сопоставления альтернативных вариантов ставки, используемые в условиях контрактов, приводят к единообразному показателю.

Различные финансовые схемы можно считать эквивалентными в том случае, если они приводят к одному и тому же финансовому результату.

Эквивалентная процентная ставка – это ставка, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат (наращенную сумму), что и применяемая в этой операции ставка.

Две ставки называют эквивалентными, если две соответствующие им финансовые операции характеризуются одинаковыми значениями начальной и конечной сумм и имеют одинаковую продолжительность.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получаются исходя из равенства взятых попарно множителей наращения.

4.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в *EXCEL*.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. Контракт предусматривает переменную по периодам ставку простых процентов 20, 22 и 25 %. Продолжительность последовательных периодов начисления процентов: два, три и пять месяцев. Найти среднюю процентную ставку, проверить результаты традиционным методом.

Задача 2. Для первых двух лет кредита применяется ставка, равная 15 %, для следующих трех лет она составляет 20 %. Определить среднюю ставку кредита при расчете по сложным процентам, проверить результаты традиционным методом.

Задача 3. По условиям договора первый год наращения суммы идет по ставке 8 % в месяц, затем еще полгода по ставке 6 % в месяц, а потом еще полгода по ставке 4 % в месяц. Определить, до какой суммы за 2 года вырастет первоначальный вклад размером 200 тыс. р.

Задача 4. Ставка процента за период 3,5 месяца равна 20 %. Найти эквивалентную ей ставку за период 6 месяцев.

Задача 5. В таблице 4.1 представлены цепные темпы роста цен за 1 год (в числовом формате).

Таблица 4.1

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Цепной темп прироста	0,150	0,100	0,079	0,087	0,085	0,080	0,075	0,050	0,078	0,090	0,095	0,100

Рассчитать основные характеристики инфляции по этим данным.

Задача 6. Номинальная годовая ставка равна 40 %. Определить коэффициент наращения для промежутка времени, равного полугодию, на основе относительных ставок для разных периодов начисления.

Задача 7. Определить соотношение эквивалентности между простой учетной ставкой $d_{уч}$ и сложной ставкой наращения j. Вывести формулы расчета $d_{уч}$ и j исходя из равенства множителей наращения

$$\frac{p}{1-n\cdot d_{уч}}=p\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Задача 8. Определить соотношение эквивалентности между сложной учетной ставкой $d_{уч}$ и сложной ставкой наращения j. Вывести формулы расчета $d_{уч}$ и j исходя из равенства множителей наращения

$$\frac{p}{(1-d_{уч})^{n}}=p\cdot(1+m)^{n}.$$

Задача 9. Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15 %. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки?

Задача 10. Найти величину учетной ставки, эквивалентной годовой процентной ставке 40 % (K = 365), при условии, что срок учета равен 255 дням.

Задача 11. Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18 % (K = 365), не изменяя условий финансовых обязательств? Срок операции 580 дней.

Задача 12. При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 24 % годовых. Какой должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно, поквартально?

Задача 13. Два платежа 1 0000 и 5000 р. со сроками уплаты соответственно 150 и 220 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Стороны согласились на применении при конверсии простой ставки, равной 20 %. Сколько составит консолидированная сумма долга?

Задача 14. Платежи в 10000 и 2000 тыс. р. и сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20 %. Сколько составит консолидированная сумма долга?

Контрольные вопросы

1 Какова связь средней процентной ставки и средневзвешенной геометрической величины?

2 При каких условиях средневзвешенная геометрическая переходит в обычную среднюю геометрическую?

3 Как связаны друг с другом темп и индекс инфляции?

4 Как по месячным темпам инфляции рассчитать квартальный и годовой темп?

5 Как по годовому темпу инфляции рассчитать среднемесячный темп инфляции?

6 Как по отдельным месячным темпам рассчитать среднемесячный темп инфляции?

7 В чем различие между уравновешенными и относительными процентными ставками?

8 Что такое эффективная процентная ставка?

9 Как рассчитать эффективную ставку?

10 Как соотносятся друг с другом рост по простым и по сложным процентам?

5 Лабораторная работа № 5. Потоки платежей и аннуитеты

Цель работы – изучить сущность и виды аннуитетов, порядок расчета аннуитетов пренумерандо и постнумерандо.

5.1 Методические указания

Потоком платежей называется последовательность денежных сумм, приуроченных к определенным моментам времени. Отдельные денежные суммы, являющиеся членами последовательности, называются членами потока.

Потоки возникают, например, при реализации инвестиционного проекта, при погашении задолженности в рассрочку, при получении доходов по акциям или другим ценным бумагам, при выплате пенсий и т. д.

Денежные потоки, генерируемые в рамках одного временного периода, имеют место либо в его начале, либо в его конце. В первом случае поток называется потоком пренумерандо, во втором – потоком постнумерандо. В своем большинстве финансовые операции носят не разовый характер, а характер последовательного поступления денег в течение определенного периода. Такая последовательность называется потоком платежей или аннуитетами (финансовой рентой).

К основным параметрам, характеризующим ренту, относятся:

- член ренты – размер отдельного платежа;
- период ренты – длина интервала времени между соседними платежами;
- срок ренты – длина промежутка времени от начала первого периода до конца последнего периода;
- процентная ставка – та величина процентной ставки, на основе которой проводится анализ ренты.

Аннуитет (R) – ежегодный платеж (*annuity*) или денежный поток с равными поступлениями в течение ограниченного промежутка времени. Примерами аннуитета могут быть регулярные взносы в пенсионный фонд, погашение долгосрочного кредита, выплата процентов по ценным бумагам.

Рассмотрим последовательность из n одинаковых платежей размером R каждый. Общий срок ренты составляет n лет. Очередной платеж совершается в конце года. Процентная ставка – i. Первый платеж происходит в конце первого года, последний – в конце n-го года. Конец общего срока ренты совпадает с моментом последнего платежа.

Определим наращенную конечную стоимость ренты FV (*Future Value*), т. е. стоимость ренты на конец ее срока. Формула конечной наращенной суммы постоянной n-членной ренты постнумерандо.

$$FV = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Современная стоимость ренты PV (*Present Value*), соответствующей приведению к начальному моменту срока ренты, может быть вычислена по формуле

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Полученные формулы позволяют рассчитать параметры ренты R и n через ее итоговые приведенные характеристики PV и FV. Простые преобразования приводят к формулам для члена ренты R:

$$R = FV\frac{i}{(1+i)^n - 1},$$

а также

$$R = PV\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Формула для срока ренты n, выраженного через наращенную сумму FV, имеет вид:

$$n = \frac{\ln\left(1+\frac{FV\cdot i}{R}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Аналогичная формула для срока ренты n, выраженного через современную стоимость ренты PV,

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{PV\cdot i}{R}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Отметим, что числитель в последней формуле отрицателен (подлогарифмическое выражение меньше единицы), так что знак «минус» перед формулой возвращает положительное значение n.

Рента пренумерандо при приведении к концу срока отличается от ренты постнумерандо сдвигом на один период времени от конца назад. Поэтому все ее члены при приведении следует дополнительно умножить на одну и ту же величину $(1 + i)$. В результате формула наращенной суммы ренты пренумерандо примет вид:

$$FV = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i).$$

Аналогично изменится и формула современной стоимости ренты:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i).$$

Соответствующие изменения произойдут в формулах, определяющих величину постоянного члена и продолжительность для ренты пренумерандо:

$$R = FV\frac{i}{\left((1+i)^n - 1\right)(1+i)},$$

а также

$$R = PV\frac{i}{\left(1-\left(1+i\right)^{-n}\right)\left(1+i\right)}.$$

Полученные формулы можно рассматривать как формулы для ренты постнумерандо, но с новой оценкой приведенной стоимости (оценкой *FV* или *PV*), уменьшенной в (1+ *i*) раз.

Формула для срока ренты *n*, выраженного через наращенную сумму *FV*, имеет вид:

$$n = \frac{\ln\left(1+\dfrac{FV\cdot i}{R\left(1+i\right)}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Аналогичная формула для срока ренты *n*, выраженного через современную стоимость ренты *PV*,

$$n = -\frac{\ln\left(1-\dfrac{PV\cdot i}{R\left(1+i\right)}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Полученные формулы соответствуют формулам для ренты постнумерандо, но с новой величиной члена ренты *R*, увеличенной в (1+ *i*) раз.

Группу функций *Microsoft EXcel*, предназначенную для автоматизации расчетов характеристик аннуитетов, составляют функции БС(), КПЕР(), НОРМА(), ПЗ(), к которым добавляется функция определения периодического платежа – ПЛТ().

Пример 1 – Иванов в конце каждого месяца переводит 1 000 тыс. р. на счет в банк, начисляющий ежемесячно сложные проценты по номинальной ставке 10 % годовых. Какая сумма накопится на счете за два года при сохранении на это время всех указанных условий без изменения?

В зависимости от выбора пользователем из полного списка аргументов встроенной функции БС() (рисунок 1) подмножества тех аргументов, значения которых известны в задаче, можно с помощью одной и той же функции посчитать и наращенную сумму вклада, и будущую стоимость аннуитета, причем с переключением формул между типами потоков платежей постнумерандо и пренумерандо.

Рассмотрим возможные варианты:

1) 1,61 р. = БС (0,1; 5; 0; –1; 0) – будущая стоимость одного вложенного рубля (нз = –1) после 5 раз (число_периодов = 5) присоединения к нему процентных денег, начисляемых в конце периода по ставке сложных процентов 10 % (норма = 0,1) без дополнительных поступлений и выплат (выплата = 0, тип = 0);

2) 6,11 р. = БС (0,1; 5; –1; 0; 0) – будущая стоимость потока пяти периодических платежей (число_периодов = 5) единичного размера, вносимых (выпла0та = –1) регулярно в конце периода (потоку постнумерандо соответствует тип = 0, значение используется по умолчанию) при начислении 10 % сложных (норма = 0,1) за период между моментами внесения платежей на поступившие ранее средства;

3) 6,72 р. = БС (0,1; 5; –1; 0; 1) – будущая стоимость потока пяти периодических платежей (число_периодов = 5) единичного размера (выплата = –1), поступающих в начале периода (потоку пренумерандо соответствует тип = 1) при начислении за каждый период между платежами 10 % сложных (норма = 0,1).

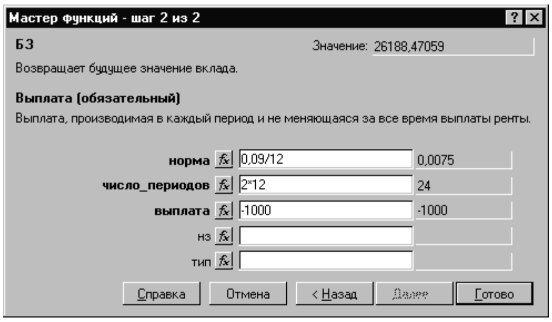

Рисунок 1 – Применение функции БС() для расчета будущей стоимости аннуитета

Функция ПЛТ (ставка; кпер; пс; бс; тип) – возвращает сумму периодического платежа для аннуитета на основе постоянства сумм платежей и постоянства процентной ставки.

Пример 2 **–** Требуется определить размер периодического платежа при заданной будущей величине фонда в 46 410 тыс. р., процентной ставке в 10 % годовых при ежемесячном начислении процентов. Период анализа 4 года.

Воспользуемся функцией ПЛТ, учитывая, что условиями данной операции наличие первоначальной суммы на депозите в момент времени t = 0 не предусмотрено, поэтому значение параметра «пс» равно нулю.

ПЛТ(0,1/12; 4·12; 0; –46 410) = 791 тыс. р.

Пример 3 **–** Финансовая компания создает фонд для погашения обязательств путем помещения в банк суммы в 50 тыс. р., с последующим ежегодным пополнением суммами по 10 тыс. р. Ставка по депозиту равна 10 % годовых. Какова будет величина фонда к концу 4-го года?

БС(0,1; 4; –10 000; –50 000) = 119 615 тыс. р.

Соответственно изменится и формат функции для определения величины ежегодного платежа:

ПЛТ(0,1; 4; –50 000; –119 615) = –10 000 тыс. р.

Необходимо отметить, что начисление процентов в начале каждого периода всегда приводит к большему значению будущей величины аннуитета за тот же срок.

5.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в *EXCEL*.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. Предприятие должно погасить через пять лет облигации на сумму 10 млрд р. Определить размер ежегодных отчислений для формирования выкупного фонда, если данные средства до момента погашения облигаций инвестируются под 15 % годовых.

Задача 2. Заемщик берет кредит на 5 лет в размере 1000 тыс. р. под 30 % годовых с условием погашения его равными суммами в конце каждого года. Определить величину ежегодной выплаты по кредиту.

Задача 3. Инвестор в течение четырех лет в конце каждого года получает сумму 1 тыс. р. и размещает каждый платеж под 15 % до окончания четырехлетнего периода. Определить будущую стоимость аннуитета.

Задача 4. Проведя усовершенствование технологического процесса, предприятие в течение пяти последующих лет планирует получение ежегодного денежного дохода в размере 10 000 тыс. р. Эти деньги оно собирается немедленно вкладывать под 10 % годовых, желая через 5 лет накопить сумму для приобретения нового оборудования. Какую сумму денег предприятие получит через 5 лет?

Задача 5. Предприятие располагает 160 000 тыс. р. и предполагает вложить их в собственное производство, получая в течение четырех последующих лет ежегодно 50 000 тыс. р. В то же время предприятие может купить на эту сумму акции одной организации, приносящие 12 % годовых (проценты сложные). Какой вариант вам представляется более приемлемым, если считать, что более выгодной возможностью вложения денег (чем под 12 % годовых) предприятие не располагает?

Задача 6. Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо; т. е. поступление денежных средств осуществляется в начале соответствующего временного интервала.

План 1: вносится вклад на депозит 500 тыс. р. каждые полгода при условии, что банк начисляет 8 % годовых с полугодовым начислением процентов.

План 2: делается ежегодный вклад в размере 1 000 тыс. р. на условиях 9 % годовых при ежегодном начислении процентов.

Определить, какая сумма будет на счету через 10 лет при реализации каждого плана. Какой план более предпочтителен? Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет снижена до 8,5 %?

Задача 7. Организация планирует ежегодные отчисления в размере 100 тыс. р. для создания пенсионного фонда, процентная ставка 10 %. Какова будет величина фонда через:

а) 5 лет;

б) 10 лет;

в) 15 лет?

Задача 8. Пенсионный фонд через 10 лет должен аккумулировать 1 млрд р. Определить размер ежегодных взносов в пенсионный фонд, если до истечения указанного периода они инвестируются под 10 % годовых.

Задача 9. Организация планирует через 5 лет осуществить замену оборудования. Предполагаемые инвестиционные затраты составляют 2 110 тыс. р. Чтобы накопить необходимую сумму денег, предприятие из чистой прибыли ежегодно перечисляет средства на депозитный счет банка. Требуется определить величину ежегодных отчислений на проведение капиталовложений, если ставка по банковским депозитам составляет 24 % (с начислением раз в квартал) и 28 % (с начислением раз в год).

Задача 10. Гражданин инвестировал 700 000 долл. в пенсионный контракт. На основе анализа таблиц смертности страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно в течение 20 лет исходя из ставки 15 % годовых. Какую сумму будет получать ежегодно гражданин?

К моменту выхода на пенсию, т. е. через 8 лет, гражданин желает иметь на счете 30 000 долл. Для этого он намерен делать ежегодный взнос в банк по схеме пренумерандо. Определить размер взноса, если банк предлагает 7 % годовых.

Контрольные вопросы

1 Определите понятие потока платежей.

2 Какой поток платежей называется финансовой рентой?

3 Чем различаются постоянные и переменные финансовые ренты?

4 Чем различаются ренты постнумерандо и пренумерандо?

5 Что такое приведенная стоимость потока платежей?

6 Какова формула конечной стоимости постоянной ренты?

7 Какова формула начальной стоимости постоянной ренты?

8 Как связаны друг с другом начальная и конечная стоимости ренты?

9 Какова формула члена постоянной ренты?

10 Какова формула срока постоянной ренты?

11 Как связаны друг с другом формулы для ренты постнумерандо и ренты пренумерандо?

6 Лабораторная работа № 6. Операции с облигациями

Цель работы – изучить понятие и основные параметры облигации, методику расчета доходности операций с облигациями.

6.1 Методические указания

Под облигацией понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги.

Основные параметры облигации: номинальная цена или номинальная выкупная цена или правило определения, если она отличается от номинала, дата погашения, норма доходности или купонная процентная ставка, даты выплат процентов. В современней практике выкуп по номиналу является преобладающим.

Курс облигации рассчитывается по формуле

$$p_k = \frac{p}{N},$$

где N – номинальная стоимость облигации;

p – цена продажи облигации.

Расчет доходности покупки облигаций без выплаты процентов будет следующий.

Прибыль от сделки представляет собой разницу между номинальной стоимостью облигации и ее ценой и рассчитывается по формуле

$$D = N - p = N - p_k \cdot N = N \cdot (1 - p_k).$$

У таких облигаций обычно короткий срок погашения (до года). Определим доходность покупки облигации, используя эффективную ставку простых процентов $i_{эф}$.

Наращенная сумма S и прибыль от сделки D за срок D/K, на который выпущена облигация,

$$S = p \cdot \left(1 + \frac{d}{K} \cdot i_{эф}\right) = p_k \cdot N \cdot \left(1 + \frac{d}{K} \cdot i_{эф}\right);$$

$$D = S - p = p_k \cdot N\left(1 + \frac{d}{K} \cdot i_{эф}\right) - p_k \cdot N = p_k \cdot N \cdot \frac{d}{K} \cdot i_{эф}.$$

По определению уравнение эквивалентности можно записать:

$$D = N \cdot (1 - p_k) = p_k \cdot N \cdot \frac{d}{k} \cdot i_{эф},$$

откуда

$$i_{эф} = \frac{1 - p_k}{p_k \cdot d} \cdot K.$$

Если доходность покупки такой облигации определять по ставке сложных процентов, то методика расчета будет следующая:

$$S = p \cdot \left(1 + i_{эф}\right)^{\frac{d}{K}} = p_k \cdot N \cdot \left(1 + i_{эф}\right)^{\frac{d}{K}};$$

$$D = S - p = p_k \cdot N \cdot \left(1 + i_{эф}\right)^{\frac{d}{K}} - p_k \cdot N = p_k \cdot N \cdot \left(\left(1 + i_{эф}\right)^{\frac{d}{K}} - 1\right).$$

По определению уравнение эквивалентности можно записать:

$$D = N \cdot (1 - p_k) = p_k \cdot N \cdot \left(\left(1 + i_{эф}\right)^{\frac{d}{K}} - 1\right),$$

откуда

$$i_{эф} = \left(\frac{1}{p_k}\right)^{\frac{K}{d}} - 1.$$

Расчет доходности покупки облигаций с выплатой процентов будет следующий.

Прибыль от покупки облигации складывается из двух частей:

1) разницы между номинальной стоимостью облигации и ее ценой;

2) суммы начисленных процентов за весь период размещения средств в облигации.

$$D = N - p + N \cdot (1 + j)^n - N;$$

$$p = p_k \cdot N;$$

$$D = N - p_k \cdot N + N \cdot (1 + j)^n - N = N \cdot (1 + j)^n - p_k \cdot N = N \cdot \left[(1 + j)^n - p_k\right];$$

$$D = N \cdot \left[(1 + j)^n - p_k\right].$$

Эффективная годовая ставка сложных процентов $i_{эф}$ рассчитывается с помощью уравнения эквивалентности

$$D = S - p = p \cdot (1 + i_{эф})^n - p = N \cdot \left[(1 + j)^n - p_k\right],$$

откуда

$$i_{эф} = \frac{1 + j}{\left(p_k\right)^{\frac{1}{n}}} - 1.$$

Расчет доходности покупки облигаций с периодической выплатой процентов будет следующий.

Прибыль от покупки облигации складывается из двух частей:

1) разницы между номинальной стоимостью облигации и ее ценой;

2) суммы начисленных процентов за весь период размещения средств в облигации с учетом их реинвестирования.

$$D = N - p + D\% .$$

Пусть платежи по облигациям происходят k раз в год с размером платежа $N{\cdot}i/k$ (где i – годовая ставка сложных процентов).

Процентные деньги вновь инвестируются по номинальной процентной ставке j с начислением процентов m раз в год, и такой процесс продолжается n лет.

Коэффициент наращения вычисляется по формуле

$$K_H = \frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{k}} - 1}.$$

Тогда

$$S = K_H \cdot \frac{N \cdot i}{k}.$$

Эффективная процентная ставка сделки $i_{эф}$ определяется по формуле

$$i_{эф} = \left[\frac{D\% + N}{p_k \cdot N}\right]^{\frac{1}{n}} - 1.$$

6.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.

2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.

3 Решить задачу в *EXCEL*.

4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.

5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. Номинальная стоимость облигации 2 тыс. р. Продается она по цене 1,8 тыс. р. Определить курс облигации.

Задача 2. Оцените текущую стоимость облигации номиналом 1 тыс. долл., купонной ставкой X % годовых и сроком погашения через 3 года, если рыночная норма прибыли равна 7 %. Исходные данные представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	5	6	7	8	4	3	9	10

Задача 3. Облигация номиналом X тыс. р. с полугодовым начислением процентов и купонной ставкой 10 % годовых будет погашена через 6 лет. Какова ее текущая цена, если рыночная норма прибыли:

а) 8 %;

б) 10 %;

в) 12 %?

Исходные данные представлены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	3	4	5	6	7	8	9

Задача 4. 10 апреля состоялся аукцион по первичному размещению государственных краткосрочных облигаций со сроком обращения 36 дней. Минимальная цена продажи – 93,92 % от номинала. K = 365 дней. Определить доходность покупки облигаций по минимальной цене.

Задача 5. Организация купила 30 облигаций номинальной стоимостью 1 тыс. р. по курсу 95 %. Срок погашения – 4 месяца. Определить эффективную ставку прибыли по простым и сложным процентам и прибыль от сделки.

Задача 6. Организация купила 30 облигаций номиналом по 2 тыс. р. сроком погашения 5 лет. Облигации приобретены по курсу 0,97, выпущены под процентную ставку сложных процентов 7 % годовых.

Определите прибыль от покупки и эффективную ставку сложных процентов.

Задача 7. Банк разместил облигации номинальной стоимостью 10 и 5 тыс. р. сроком на 1 год по процентной ставке 102,87 % годовых. Выплата процентов – 4 раза в год. Клиент купил четыре облигации номинальной стоимостью 5 тыс. р. по курсу 99 %. Процентные деньги вновь инвестируются:

а) по номинальной процентной ставке 16 % годовых с начислением процентов 1 раз в год;

б) по номинальной процентной ставке 16 % годовых с начислением процентов 4 раза в год.

Определить прибыль и эффективную процентную ставку.

Контрольные вопросы

1 Что собой представляет облигация?
2 Классификация облигаций.
3 Механизм образования дохода облигаций.
4 Как определить рыночную стоимость дисконтных и процентных облигаций?
5 Как определить доходность от операций с облигациями?
6 Как определить конечную доходность операций с облигациями?

7 Лабораторная работа № 7 Расчет доходности финансово-банковских операций

Цель работы – изучить понятие полной доходности финансово-банковских операций, методик измерения доходности купли-продажи отдельных финансовых инструментов.

7.1 Методические указания

За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые заметно повышают доходность операций, т. к. сумма фактически выданного кредита сокращается.

Пусть кредит в размере D выдан на срок n. При его выдаче удерживаются комиссионные в размере G. Фактически выданный кредит равен $D – G$.

Рассмотрим вариант начисления простых процентов по ставке i. При определении доходности этой операции в виде годовой ставки сложных процентов $j_э$ исходят из того, что наращение величины $D – G$ по данной ставке должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке i.

По определению уравнение эквивалентности можно записать как

$$(D - G) \cdot (1 + j_э)^n = D \cdot (1 + n \cdot i).$$

Пусть

$$(D - G) = D \cdot (1 - g),$$

где g – относительная величина комиссионных в сумме кредита.

Тогда

$$j_э = \sqrt[n]{\frac{1 + n \cdot i}{1 - g}} - 1.$$

Если ссуда выдается под сложные проценты по ставке j, то исходное уравнение для определения $j_э$ имеет вид:

$$(D-G)\cdot(1+j_э)^n = D\cdot(1+i)^n .$$

Тогда

$$j_э = \frac{1+j}{\sqrt[n]{(1-g)}} - 1 .$$

Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке, то эффективность сделки без удержания комиссионных определяется по формуле эквивалентной ставки.

При удержании комиссионных и дисконта заемщик получает сумму

$$D - Dd_{уч} - G \text{ или } D\cdot(1 - nd_{уч} - G).$$

Уравнение эквивалентности в данном случае имеет вид:

$$D\cdot(1-n\cdot d_{уч}-g)\cdot(1+j_э)^n = D .$$

Тогда

$$j_э = \sqrt[n]{\frac{1}{1-n\cdot d_{уч}-g}} - 1.$$

7.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в *EXCEL*.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. При выдаче кредита на *X* дней под 8 % годовых (простые проценты) кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5 % суммы кредита. Методика 365/365. Какова эффективность кредитной операции в виде годовой ставки сложных процентов? Исходные данные представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	90	110	125	130	140	145	150	155

Задача 2. В какой мере удержание комиссионных из расчета 1 % от суммы кредита увеличивает эффективность данного кредита для кредитора при пяти- и десятилетнем сроке?

Задача 3. Вексель учтен по ставке 10 % за X дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5 %. Определить доходность данной операции. Исходные данные представлены в таблице 7.2.

Таблица 7.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	190	110	125	130	140	145	150	155

Задача 4. При вложении капитала в мероприятие «А» в 20 случаях из 200 была получена прибыль в 25 тыс. р., в 80 случаях – 30 тыс. р., в 100 случаях – 40 тыс. р. При вложении капитала в мероприятие «Б» в 144 случаях из 240 была получена прибыль 30 тыс. р., в 72 случаях – 35 тыс. р., в 24 случаях – 45 тыс. р. Выбрать вариант вложения капитала:

1) по критерию средней прибыли;

2) по критерию колеблемости прибыли.

Задача 5. Инвестор выбирает между двумя акциями «А» и «Б». Каждая из них по-своему откликается на возможные рыночные ситуации, достигая с известными вероятностями определенных значений доходности. Исходные данные представлены в таблице 7.3.

Таблица 7.3

Акция	Вероятность 1	Доходность 1, %	Вероятность 2	Доходность 2, %
А	0,2	5	0,8	6
Б	0,2	-1	0,8	9

Определить:

1) ожидаемые доходности и риски (стандартные отклонения) этих акций;

2) коэффициент корреляции между доходностями;

3) какую акцию выберет инвестор, максимизирующий вероятность неразорения, учитывая, что инвестируемые заемные средства взяты под ставку 1,5 %;

4) как распределить вложения, чтобы получить безрисковую комбинацию этих акций – портфель с независящей от исхода эффективностью.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте общий принцип доходности.
2 Дайте определение полной доходности при оценке облигаций.
3 Дайте определение внутренней норме доходности.
4 Для чего составляют уравнение эквивалентности?
5 Как определяется доходность ссудных операций с удержанием комиссионных?

8 Лабораторная работа № 8. Расчет показателей эффективности инвестиционного проекта

Цель работы – изучить показатели оценки эффективности инвестиционного проекта, выбор оптимального инвестиционного портфеля.

8.1 Методические указания

К показателям оценки эффективности инвестиционного проекта относятся срок окупаемости (простой и дисконтированный), чистая дисконтированная стоимость, индекс рентабельности инвестиций, внутренняя норма доходности.

Срок окупаемости инвестиций ($T_{ок}$) – это количество лет, в течение которых инвестиции возвратятся в виде чистого дохода. Алгоритм расчета срока окупаемости зависит от равномерности распределения планируемых доходов, получаемых от реализации проекта.

Если доход от инвестиций IC по годам распределяется неравномерно, то срок окупаемости рассчитывается прямым подсчетом числа лет, в течение которых инвестиции будут погашены кумулятивным доходом $T = n$, при котором

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \geq IC \ .$$

Также срок окупаемости можно рассчитывать по формуле

$$T_{ок} = \frac{\sum IC_k}{\dfrac{\sum P_k}{t}},$$

где IC_k – инвестиции в k-м периоде;
P_k – денежный доход в k-м периоде.

Рассчитывается также дисконтированный срок окупаемости инвестиций – время, необходимое для того, чтобы сумма дисконтированных денежных потоков покрывала сумму дисконтированных инвестиционных затрат.

Дисконтированный срок окупаемости можно рассчитывать по формуле

$$T_{ок} = \frac{\sum IC_k \cdot K_{Дk}}{\frac{\sum P_k \cdot K_{Дk}}{t}},$$

где IC_k – инвестиции в k-м периоде;

P_k – денежный доход в k-м периоде;

$K_{Дk}$ – коэффициент дисконтирования.

Чистая дисконтированная стоимость (NPV) определяется по формуле

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC.$$

Если:

1) $NPV > 0$, то проект следует принять;
2) $NPV < 0$, то проект следует отвергнуть;
3) $NPV = 0$, то проект ни прибыльный, ни убыточный.

Индекс рентабельности инвестиций (PI) рассчитывается по формуле

$$PI = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k}}{IC}.$$

Если:

1) $PI > 1$, то проект следует принять;
2) $PI < 1$, то проект следует отклонить;
3) $PI = 1$, то проект ни прибыльный, ни убыточный.

Под внутренней нормой прибыли IRR понимают значение коэффициента дисконтирования, при котором NPV проекта равно нулю:

$$IRR = r, \text{ при } NPV = f(r) = 0;$$

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} - IC = 0.$$

Инвестиция эффективна, если IRR превышает заданную ставку дисконта или равна ей. Если это условие выдерживается, инвестор может принять проект. IRR можно найти по формуле

$$IRR = r_a + (r_b - r_a) \cdot \frac{NPV_a}{NPV_a - NPV_b},$$

где r_a – ставка дисконта, при которой NPV имеет положительное значение;

r_b – ставка дисконта, при которой NPV имеет отрицательное значение.

При этом должны соблюдаться неравенства

$$r_a < IRR < r_b\,;$$

$$NPV_a > 0 > NPV_b\,.$$

8.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить индивидуальное задание у преподавателя.
3 Решить задачу в *Excel*.
4 Подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Составить отчет.

Задачи к решению

Задача 1. Определить для проекта срок окупаемости *PP*, чистый приведенный эффект *NPV*, внутреннюю доходность *IRR*, индекс рентабельности *PI* по нижепредставленным данным (таблица 8.1).

Таблица 8.1

Вариант	Начальные инвестиции, млн р.	Цена капитала, %	Поступление денег, млн р.		
			1-й год	2-й год	3-й год
1	2000	8	700	800	1000
2	1500	11	800	700	400
3	1000	10	900	300	400
4	4000	12	2500	2000	1500
5	2500	9	2000	1100	1000
6	3000	7	2000	1500	3000
7	1700	15	1000	800	2000
8	1800	14	1200	500	2000
9	2200	9	1200	1000	5000
10	3200	10	1000	2000	2000
11	2000	10	800	1000	1200
12	4000	14	1800	1500	1100
13	3800	15	4000	1000	1000
14	3500	16	1600	1900	1200
15	4200	10	1700	1800	2000
16	5000	12	1800	1900	2000

Задача 2. Изучается предложение о вложении средств в некоторый трехлетний инвестиционный проект, в котором предполагается получить доход за первый год 20 млн р., за второй – 30 млн р., за третий – 50 млн р. Поступления доходов происходят в конце соответствующего года, а процентная ставка прогнозируется на первый год – 10 %, на второй – 15 % и на третий – 20 %.

Является ли это предложение выгодным, если в проект требуется сделать начальные капитальные вложения в размере:

1) 30 млн р.;

2) 70 млн р.;

3) 80 млн р.

Вывод сделать на основе расчета *NPV* и *PI*.

Задача 3. Организация рассматривает инвестиционный проект, который предполагает единовременные капитальные вложения в сумме 30 млн р. Денежные поступления предусматриваются в следующих размерах: 8, 10, 12 и 21 млн р. Вычислить значения внутренней нормы доходности. Процентные ставки для исчисления *IRR* равны 10 и 22 %.

Задача 4. Рассматриваются два альтернативных проекта «А» и «Б», данные по которым представлены в таблице 8.2. Выбрать наиболее выгодный проект, используя расчет точки Фишера.

Таблица 8.2

Проект	Величина инвестиций	Денежный поток			*IRR*, %
		1-й год	2-й год	3-й год	
А	–100	9X	45	9	30
Б	–100	1X	50	100	20,4

Контрольные вопросы

1 Каковы методы оценки эффективности инвестиционных проектов?

2 Как определяется чистый приведенный доход инвестированного капитала?

3 Какие показатели определяют средневзвешенную стоимость инвестированного капитала?

4 Что отражает индекс рентабельности инвестированного капитала?

5 Что значит «срок окупаемости инвестиций» и как его определяют?

6 С какой целью и каким образом определяют внутреннюю норму рентабельности инвестиционного проекта?

Список литературы

1 Финансовая математика: учебное пособие для магистров / П. Н. Брусов, Т. В. Филатова. – Москва: ИНФРА-М, 2014. – 480 с.

2 **Малыхин, В. И.** Финансовая математика: учебное пособие / В. И. Малыхин. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. – 237 с.

3 **Чуйко, А. С.** Финансовая математика: учебное пособие / А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев. – Москва: ИНФРА-М, 2020. –160 с.

4 **Печенежская, И. А**. Финансовая математика. Сборник задач: учебное пособие для вузов / И. А. Печенежская. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 188 с.

5 **Половников, В. А.** Финансовая математика. Математическое моделирование финансовых операций: учебное пособие для вузов / В. А. Половников, А. И. Пилипенко; под ред. В. А. Половникова. – Москва: Вузовский учебник, 2010. – 360 с.

6 **Фомин, Г. П.** Финансовая математика: 300 примеров и задач: учебное пособие / Г. П. Фомин. – Москва: Гном-Пресс, 2000. – 120 с.

7 **Четыркин, Е. М.** Финансовая математика: учебник / Е. М. Четыркин. – Москва: Дело, 2002. – 400 с.

8 **Чусавитина, Г. Н**. Основы финансовой математики: учебное пособие для вузов / Г. Н. Чусавитина. – 2-е изд. – Москва: Флинта; МПСИ, 2010. – 176 с.