МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов всех специальностей заочной формы обучения

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Могилев 2019

УДК 517.5
ББК 22.161.5
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» мая 2019 г., протокол № 9

Составители: А. Г. Козлов;
Д. В. Роголев;
А. А. Романенко

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по теме «Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев
Технический редактор А. А. Подошевко
Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Производная функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b). Выполним следующие действия:

– произвольной точке с координатой $x \in (a,b)$ придадим приращения Δx, получим точку $x + \Delta x \in (a,b)$;

– вычислим значения функции в этих точках и найдем разность $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, которую называют приращением функции (рисунок 1);

– составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и найдем его предел при $\Delta x \to 0$.

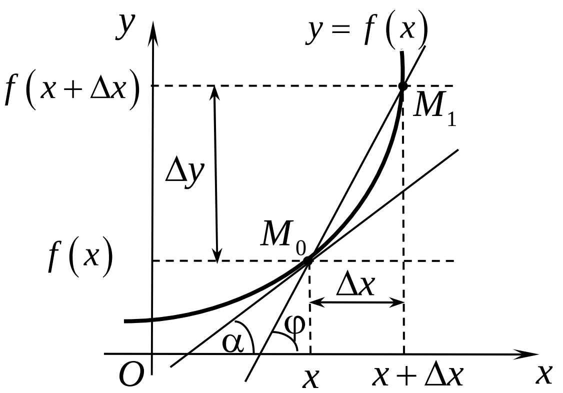


Рисунок 1

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (приращения функции Δy к приращению аргумента Δx), когда $\Delta x \to 0$, то его называют производной функции $f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$ или $\dfrac{df}{dx}$, $y'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$, т. е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Эта формула справедлива для любой точки x из области определения функции. Значение производной в точке, например, x_0, обозначают $f'(x_0)$ или $f'(x)\big|_{x_0}$; $y'(x_0)$ или $y'(x)\big|_{x_0}$. Операцию нахождения производной называют дифференцированием, а функцию, имеющую производную, дифференцируемой. Нахождение производной по определению называют непосредственным дифференцированием. На примере некоторых функции найдем производную по определению, т. е. непосредственно.

Пример 1 – Найти производную функций по определению.

Решение:

1) $y = x^3$. Функция определена на всей оси. Возьмем произвольные точки x и $x_1 = x + \Delta x$, где Δx – приращение аргумента. Найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = x_1^3 - x^3 = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x_0^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Теперь найдем предел $\left(x^3\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2$.

Доказано, что в общем случае для любой действительной степени x (натуральной, дробной и отрицательной) производная от степенной функции находится по формуле $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Так, например, при $n = -1$ имеем $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1x_0^{-1-1} = -x_0^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, при $n = 1$ имеем $x' = \left(x^1\right)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

при $n = \frac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $y = \sin x$. Функция определена на всей оси. Возьмем произвольные точки x и $x_1 = x + \Delta x$. Найдем приращение функции Δy и соответствующий предел.

$$\Delta y = \sin x_1 - \sin x = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\cos\left(x + \Delta x/2\right)\sin\left(\Delta x/2\right).$$

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cos\left(x + \Delta x/2\right)\sin\left(\Delta x/2\right)}{\Delta x} = 2\cos\left(x\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= 2\cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{2\cdot\left(\Delta x/2\right)} = \cos x.$$

Для справки: $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\left(\Delta x/2\right)} = 1$ – первый замечательный предел.

Получили $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

На основании определения производной найдены производные **от основных элементарных функций** и составлена таблица таких производных (таблица 1), а нахождение производных от функций, полученных с помощью конечного числа алгебраических операций над **основными элементарными функциями**, основано на свойствах производной, которые называют **правилами дифференцирования** (они также приведены ниже). Уделим внимание сложной функции.

Производная сложной функции. Сложная функция – это функция от функции (вложение функций), например $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$. Ее можно записать в виде цепочки $y = f\left(u\right)$, а $u = \varphi\left(x\right)$, где $f\left(u\right)$ и $\varphi\left(x\right)$– основные элементарные функции, производные от которых есть в таблице производных. В результате если функция $u = \varphi\left(x\right)$ имеет производную u_x' в точке x_0, а функция $y = f\left(u\right)$ имеет производную f_u' в точке $u_0 = \varphi\left(x_0\right)$, то сложная функция $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ имеет производную по x, которая находится по формуле $y_x' = f_u' \cdot u_x'$.

Заметим, что таких вложений может быть больше двух.

Таблица 1

Таблица производных основных элементарных функций (простейший случай)	Таблица производных в более общем случае сложных функций. Пусть $u = u(x)$
Степенная функция	
$\left(x^a\right)' = a\,x^{a-1} \qquad (a \in R)$ В частности: при $a=-1$ имеем $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, при $a=\frac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(u^a\right)' = a\,u^{a-1}\cdot u_x'$ В частности: при $a=-1$ имеем $\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u_x'$, при $a=\frac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u_x'$
Показательная функция	
$\left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a \quad (a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a\cdot u_x'$
В частности, при $a=e$ (экспонента)	
$\left(e^x\right)' = e^x$, т. к. $\ln e = 1$	$\left(e^u\right)' = e^u\cdot u_x'$
Логарифмическая функция	
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} \quad (a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u_x'$
В частности, при $a=e$ (натуральный логарифм)	
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$, т. к. $\ln e = 1$	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}\cdot u_x'$
Тригонометрические и обратно-тригонометрические функции	
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u_x'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u_x'$
$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\operatorname{tg} u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u_x'$
$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u_x'$
$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x'$
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x'$
$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u_x'$
$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u_x'$

Окончание таблицы 1

Таблица производных основных элементарных функций (простейший случай)	Таблица производных в более общем случае сложных функций. Пусть $u=u(x)$
Гиперболические функции	
$(\operatorname{sh} x)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\operatorname{ch} x$	$(\operatorname{sh} u)'=\operatorname{ch} u\cdot u_x'$
$(\operatorname{ch} x)'=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\operatorname{sh} x$	$(\operatorname{sh} u)'=\operatorname{ch} u\cdot u_x'$
$(\operatorname{th} x)'=\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{th} u)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u_x'$
$(\operatorname{cth} x)'=\left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(\operatorname{cth} u)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\cdot u_x'$

Правила дифференцирования (суммы, разности, произведения и частного).

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $C=\text{const}$, $v(x)\neq 0$. Тогда:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ – справедливо для любого конечного числа слагаемых;

2) $(uv)'=u'v+uv'$, в частности, $(Cu)'=Cu'$ – постоянный множитель можно выносить за знак производной;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2}$.

Производная сложной функции. Пусть $y=f(\varphi(x))$, т. е. $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$, тогда $y_x'=f_u'\cdot u_x'$.

Примечание – Таблицу производных и правила дифференцирования следует **знать наизусть**.

Рассмотрим примеры по нахождению производных от функций, используя таблицу производных (см. таблицу 1) и правила дифференцирования.

Пример 2 – Найти производные функции.

Решение:

1) $y=3x^2-4x+7$. Дифференцируем, используя правило суммы (разности):

$$y'=(3x^2-4x+7)'=(3x^2)'-(4x)'+(7)'=3(x^2)'-4(x)'+(7)'=6x-4;$$

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}$. Имеем степенные функции, которые следует преобразовать к виду x^{α}, чтобы найти производные. Для этого воспользуется свойствами

степенной функции, которые приведём в качестве справки:

а) $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$; б) $x^n\cdot x^m=x^{n+m}$; в) $\left(x^n\right)^m=x^{n\cdot m}$; г) $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$, где $n,m\in Z$.

Преобразуем заданную функцию:

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+x\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{3}}+x^{1+\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}.$$

Теперь дифференцируем, используя правило суммы (разности):

$$y'=\left(x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{3}{2}\sqrt{x};$$

3) $y=x^3\cdot\text{ctg}\,x$. Дифференцируем по правилу произведения:

$$y'=\left(x^3\cdot\text{ctg}\,x\right)'=\left(x^3\right)'\text{ctg}\,x+x^3(\text{ctg}\,x)'=3x^2\text{ctg}\,x-\frac{x^3}{\sin^2 x};$$

4) $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$. Дифференцируем по правилу частного:

$$y'=\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)'=\frac{(\ln x)'\,x^3-\ln x\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}=\frac{1-3\ln x}{x^3};$$

5) $y=\sin x^3$. В данном случае имеем сложную функцию, которую представим в виде цепочки основных элементарных функций, производные от которых есть в таблице производных, т. е. $y=\sin u$, а $u=x^3$. Дифференцируем по правилу сложной функции:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=(\sin u)'_u\cdot\left(x^3\right)'_x=\cos u\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3;$$

6) $y=\sin^3 x$. Опять имеем сложную функцию $y=\sin^3 x=(\sin x)^3$. Представим ее в виде цепочки основных элементарных функций $y=u^3$, а $u=\sin x$. Дифференцируем:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=\left(u^3\right)'_u\cdot(\sin x)'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y=x\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x}+5$;
2) $y=x^2\cdot 2^x$;
3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$;
4) $y=\text{arctg}\sqrt{x}$;
5) $y=\cos^2 x$;
6) $y=\cos x^2$;
7) $y=\sqrt{4x^3-x^2+5}$;
8) $y=x\sqrt{x-1}$;
9) $y=e^{\cos x}$;
10) $y=\ln\sin x$;
11) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;
12) $y=\ln\cos\text{arctg}\,x$.

Геометрический смысл производной. Из рисунка 1 видно, что отношение $\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \varphi$ представляет собой тангенс угла наклона секущей $M_0 M_1$, его называют угловым коэффициентом секущей.

Касательная к кривой в точке M_0 есть предельное положение секущей $M_0 M_1$, проходящей через точку M_0, когда точка M_1 неограниченно приближается к M_0, т. е. когда $\Delta x \to 0$.

Поскольку $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$, то $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\varphi \to \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$ есть угловой коэффициент касательной к кривой в точке M_0, где угол α есть угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox (см. рисунок 1).

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с координатами $M_0(x_0, y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной.

Выводы. Поскольку $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$, то можно заключить, что:

– для возрастающих функций касательная образует острый угол с осью Ox, т. е. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и производная $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k > 0$ положительна;

– для убывающих функций касательная образует тупой угол с осью Ox, т. е. $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и производная $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k < 0$ отрицательна;

– для неизменяющихся функций $f(x) = \text{const}$ касательная параллельна оси Ox, т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, а производная $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k = 0$ равна нулю. Верны также и обратные утверждения. Наглядно графически изображено на рисунке 2.

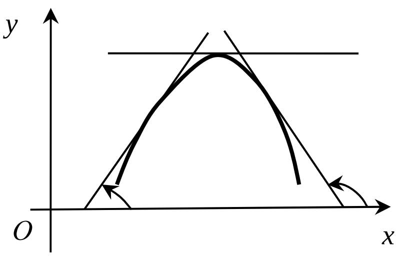


Рисунок 2

Общефизический смысл производной. Если функция $y = f(t)$ описывает какой-либо физический процесс, то отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ характеризует среднюю скорость протекания этого процесса за промежуток Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t)$ есть мгновенная скорость протекания этого процесса в момент времени t. Из этих слов вытекают конкретные смыслы производной (механический, химический, экономический и т. д.). Так, например, если функция $S(t)$ описывает закон движения материальной точки, то отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ характеризует среднюю скорость этого движения за промежуток времени Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t(t) = v(t)$ есть мгновенная скорость материальной точки в момент времени t (показания спидометра автомобиля).

Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной, проведенная через точку касания, называется нормалью. Ее уравнение $y = y_0 - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Пример 3 – Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение

Неизвестными в искомых уравнениях являются значения $y_0 = f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Найдем их.

$$y_0 = f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1; \qquad f'(x) = (x^2)' = 2x; \qquad f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Подставляем найденные значения в уравнения и получаем

$y = 1 + 2(x - 1)$ или $y = 2x - 1$ – уравнение касательной;

$y = 1 - \dfrac{1}{2}(x - 1)$ или $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ – уравнение нормали.

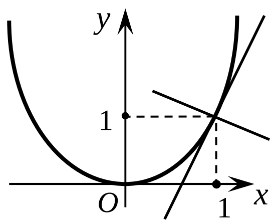


Рисунок 3

График функции, касательная и нормаль изображены на рисунке 3.

Примеры для самостоятельной работы

Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$;
2) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
4) $y = \ln x$, $x_0 = 1$;
5) $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$;
6) $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = 0$.

Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства. Величина dy, изображенная на рисунке 4, является линейной (главной) частью приращения Δy функции $y = f(x)$, ее называют дифференциалом функции, или дифференциалом первого порядка. Из рисунка 4 видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{\Delta x}$, а поскольку $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, то можем записать $dy = f'(x)\Delta x$. Принято величину Δx называть дифференциалом независимой переменной и обозначать $dx = \Delta x$. В результате формула для дифференциала принимает вид:

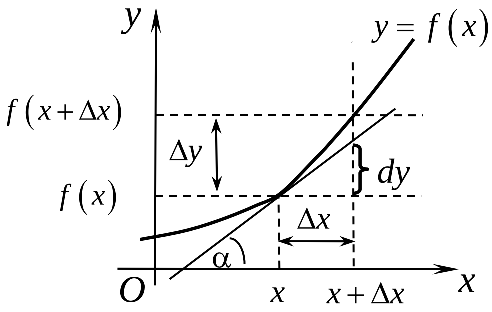


Рисунок 4

$$dy = f'(x)dx.$$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в некоторой точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции, когда x получает приращение $\Delta x = dx$. В этом состоит его геометрический смысл. Из определения дифференциала следует, что его свойства аналогичны свойствам производной.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \text{const}$, $v(x) \neq 0$. Тогда:

1) $d(C) = C'dx = 0$;

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$, в частности, $d(u \pm C) = du \pm dC = du$ – константу можно добавлять (вычитать) в выражении под знаком дифференциала;

3) $d(uv) = vdu + u\,dv$, в частности, $d(Cu) = C\,du$ – постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала или подносить;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\dfrac{C}{v}\right) = -\dfrac{C\,dv}{v^2}$.

Пример 4 – Записать дифференциал функции $y = \sin x - x\cos x + 4$.

Решение

Находим производную:

$$y' = f'(x) = (\sin x - x\cos x + 4)' = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x.$$

Следовательно, $dy = f'(x)dx = x\sin x\,dx$.

Примеры для самостоятельной работы

Записать дифференциал функций:

1) $y = \ln x - x + 1$;	4) $y = e^{\cos x}$;	7) $y = xe^{x^2}$;
2) $y = x^2 \cdot \arcsin x$;	5) $y = \sqrt{1 + x^2}$;	8) $y = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
3) $y = \dfrac{\lg x}{x}$;	6) $y = \ln\sqrt{1 - x^3}$;	9) $y = \operatorname{tg}^2 x$.

Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$, ее также называют производной первого порядка, или первой производной. А поскольку она также является функцией, то от нее снова можно брать производную. Эту производную называют производной второго порядка, или второй производной, и обозначают $y''=\left(y'\right)'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Выражение $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ следует читать «*дэ два у по дэ х в квадрате*». Аналогично $y'''=\left(y''\right)'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ – производная третьего порядка, или третья производная. И т. д.

Пример 5 – Найти производную второго порядка.

Решение:

1) $y=e^{3x}$. Находим первую производную: $y'=\left(e^{3x}\right)'=e^{3x}\left(3x\right)'=3e^{3x}$. Находим вторую производную: $y''=\left(3e^{3x}\right)'=3\left(e^{3x}\right)'=9e^{3x}$;

2) $y=x\ln x$. Находим первую производную по правилу произведения: $y'=\left(x\ln x\right)'=x'\ln x+x\left(\ln x\right)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$. Находим вторую производную: $y''=\left(\ln x+1\right)'=\left(\ln x\right)'+\left(1\right)'=\dfrac{1}{x}$;

3) $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$. Находим первую производную:
$y'=1\cdot\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x$. Находим вторую производную: $y''=\left(y'\right)'=\left(\operatorname{arctg}x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти производную второго порядка от функций:

1) $y=\cos^2 x$;	4) $y=\ln\left(x-1\right)$;	7) $y=x\,e^x$;
2) $y=\operatorname{arctg}x^2$;	5) $y=x^2\ln x$;	8) $y=\sqrt{x}$;
3) $y=e^{-x^2}$;	6) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;	9) $y=x\sqrt{x}$.

Применение производной к раскрытию неопределенностей при нахождении пределов. Правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности некоторой точки x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\overset{\text{если}}{=}\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{то}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\overset{\text{если}}{=}\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{то}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}\ \text{и т. д.}$$

Для раскрытия неопределенностей $(0\cdot\infty),(\infty-\infty)$ их следует преобразовать к основным $(0/0)$ или (∞/∞), а затем применить правило Лопиталя.

Рассмотрим примеры по использованию правила Лопиталя.

Пример 6 – Найти пределы.

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x+1}=\dfrac{1}{\ln 1+1}=1$, поскольку $\ln 1=0$;

2) $$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim\limits_{x\to+0}\frac{(x\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1;$$

3) $$\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1/x}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=-\lim\limits_{x\to+0}x=0;$$

4) $$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=$$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot1-0}=0.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+3x+1}{x^3+2x^2+4x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$;

8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

1.1 Применение производной к исследованию функций

Возрастание и убывание функций. На основании геометрического смысла производной было показано, что если функция на (a,b) возрастает, то $f'(x)>0$, а если убывает, то $f'(x)<0$. Верно и обратное. При этом если функция $f(x)$ возрастает или убывает на (a,b), то ее называют монотонной.

Локальный максимум и минимум функций. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции, если существует δ окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ в этой окрестности выполняются условия $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$ (рисунок 5). Значения функции в точках максимума (минимума) функции называют **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум функции называют одним словом – **экстремум**.

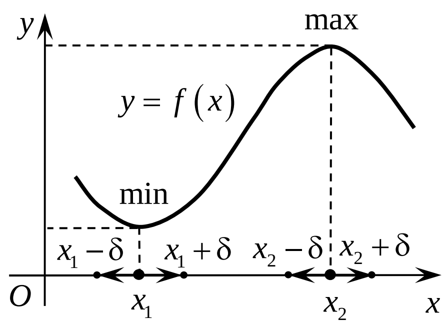


Рисунок 5

Необходимые условия существования экстремума. Из рисунка 5 видно, что смена характера поведения функции с возрастания на убывание или наоборот приводит к изменению знака производной. Это означает, что если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_i, то производная в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_i) = 0$, а касательная параллельна оси Ox. **Однако обратное не всегда верно,** т. е. если $f'(x_i) = 0$, то это не означает, что в точке x_i экстремум. В этой точке экстремум может быть, а может и не быть. Кроме того, в точке экстремум может быть, а производная не существует $(\nexists)$ (функция не дифференцируемая) или равна $\pm\infty$. Так, например, для функций $f(x) = x^3$. Имеем $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$. Однако, как видно из графика (рисунок 6, *а*), точка $x = 0$ не является точкой экстремума. Для функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ экстремум есть минимум (рисунок 6, *б*), а функция $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ не имеет производной, поскольку через точку с координатой $x = 0$ можно провести бесконечно много касательных. Пример с $f'(x) = \pm\infty$ приведем ниже.

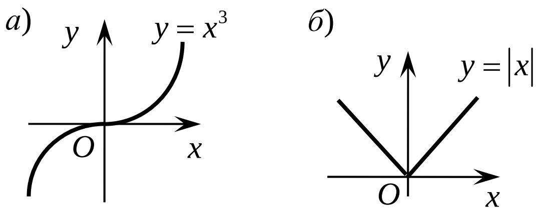


Рисунок 6

Вывод: непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или бесконечности либо она не существует. Эти точки называют критическими точками первого рода, или просто критическими, т. е. точками возможного экстремума.

Для однозначного определения наличия экстремума в критических точках формулируются так называемые достаточные условия, которые позволяют ответить на вопрос о его существовании и характере.

Достаточное условие существования экстремума. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_i и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак с «–» на

«+», то x_i – точка минимума, если с «+» на «–», то x_i – точка максимума. Наглядное геометрическое доказательство видно из рисунка 7.

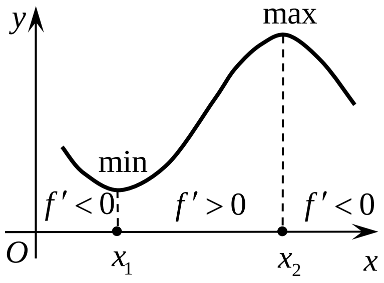


Рисунок 7

Из изложенного следуют ***правила исследования функции на экстремум, промежутки возрастания и убывания***.

1 Из необходимых условий $f'(x) = 0, \pm\infty, \nexists$ найти критические точки.

2 Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из найденных критических точек.

3 В соответствии с достаточными условиями установить наличие экстремума и его характер (min, max).

4 Вычислить значения функции в найденных критических точках и схематически построить график функции.

Пример 7 – Найти промежутки возрастания, убывания и экстремумы функций.

Решение:

1) $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$. Функция определена на всей числовой оси. Найдём производную и преобразуем её:

$$y' = \left(\frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(\frac{x}{3} - x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ищем точки, в которых $y' = 0$, т. е. $\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 8$.

Ищем точки, в которых $y' = \infty$, т. е. $\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Точки, в которых производная не существует, отсутствуют.

Имеем две критические точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 8$. Отмечаем их на числовой оси (рисунок 8). Точки разбивают область определения на три интервала $(-\infty, 0), (0, 8), (8, \infty)$. Исследуем знак первой производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из критических точек. Для этого возьмём по одному значению x из каждого интервала, подставим в выражение для производной и определим ее знак.

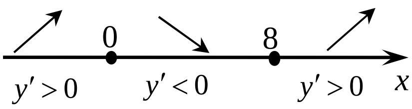


Рисунок 8

Для интервала $(-\infty, 0)$. Пусть $x = -1$, тогда $y'(-1) > 0$. Следовательно, функция в интервале $(-\infty, 0)$ возрастает.

Для интервала $(0,8)$. Пусть $x=2$, тогда $y'(2)<0$. Следовательно, функция в интервале $(0,8)$ убывает.

Производная при переходе точки $x_1=0$ слева направо меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x_1=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=0$.

Для интервала $(8,\infty)$. Пусть $x=27$, тогда $y'(27)>0$. Следовательно, функция в интервале $(8,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_2=8$ слева направо меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x_2=8$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(8)=8/3-\sqrt[3]{8^2}=-4/3$. Схематически строим график (рисунок 9);

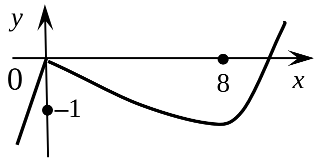


Рисунок 9

2) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}$. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную: $y'=\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}\right)'=x^3-x$. Ищем точки, в которых $y'=0$, т. е. $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,\quad x=\pm1$. Точек, в которых $y'=\infty$ или y' не существует, нет.

Имеем три критические точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Отмечаем их на числовой оси (рисунок 10). Точки разбивают область определения на четыре интервала: $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,\infty)$. Исследуем знак первой производной $y'(x)$ слева и справа от каждой из критических точек.

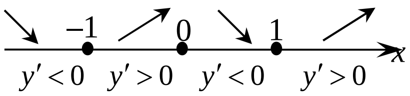


Рисунок 10

Для интервала $(-\infty,-1)$. Пусть $x=-2$, тогда $y'(-2)<0$. Функция в интервале $(-\infty,-1)$ убывает.

Для интервала $(-1,0)$. Пусть $x=-0,5$, тогда $y'(-0,5)>0$. Функция в интервале $(-1,0)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_1=-1$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(-1)=-0,25$.

Для интервала $(0,1)$. Пусть $x=0,5$, тогда $y'(0,5)<0$. Следовательно, функция в интервале $(0,1)$ убывает.

Производная при переходе точки $x_2=0$ слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, в точке $x_2=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=0$.

Для интервала $(1,\infty)$. Пусть $x=2$, тогда $y'(2)>0$. Функция в интервале $(1,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_3 = 1$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_3 = 1$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min} = f(1) = -0,25$. Схематически строим график (рисунок 11);

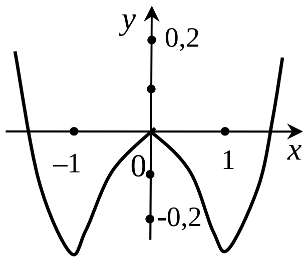
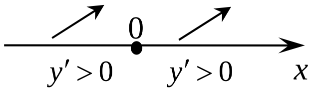


Рисунок 11

3) $y = x - \operatorname{arctg} x$. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y' = \left(x - \operatorname{arctg} x\right)' = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$. Ищем точки, в которых $y' = 0$, т. е. $1 - \dfrac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 1 \Rightarrow x = 0$. Точек, в которых $y' = \infty$ или в которых производная не существует, нет. Имеем одну критическую точку $x_0 = 0$.



Отметим ее на числовой оси. Точка разбивает область определения функции на два интервала $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Исследуем знак производной $y'(x)$ слева и справа от нее.

Для интервала $(-\infty, 0)$. Пусть $x = -1$, тогда $y'(-1) > 0$. Функция в интервале $(-\infty, 0)$ возрастает.

Для интервала $(0, \infty)$. Пусть $x = 1$, тогда $y'(1) > 0$. Функция в интервале $(0, \infty)$ возрастает.

Производная **не** меняет знак. Следовательно, в точке $x_0 = 0$ экстремума **нет**, т. е. функция монотонно возрастает во всей области определения.

Замечание – Если при переходе через критическую точку производная меняет знак, а функция в этой точке не определена, то расположение экстремума также не определено. Самостоятельно рассмотреть пример $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функций:

1) $y = xe^{x^2}$;
2) $y = x - 2\sin x$;
3) $y = x\ln^2 x$;
4) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;
5) $y = \dfrac{e^x}{x}$;
6) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$;
7) $y = x - 2\ln x$;
8) $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$;
9) $y = -3x^4 + 6x^2$;
10) $y = x\sqrt{1 - x^2}$;
11) $y = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$;
12) $y = x + \operatorname{arcctg} x$.

Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функции на отрезке. До сих пор мы исследовали функцию на экстремум, а именно локальный экстремум. А, как известно, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принимать либо во внутренних точках отрезка $x_i \in (a,b)$, либо на концах отрезка, т. е. в точках $x=a$, $x=b$, и их называют глобальными экстремумами. При этом очевидно, что точки $x_i \in (a,b)$ будут критическими точками.

Из изложенного следуют правила нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a,b]$:

– найти критические точки функции, принадлежащие (a,b);

– вычислить значения функции в найденных критических точках без определения характера экстремума;

– вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x=a$, $x=b$;

– среди найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Эта задача имеет большое практическое значение в физике, технике, экономике и других областях научно-технической деятельности.

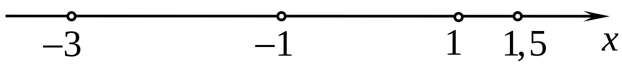
Пример 8 – Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-6x+5$ на отрезке $[-3;1,5]$.

Решение

Определим критические точки (точки, в которых первая производная обращается в ноль, $\pm\infty$ или не существует), входящие в заданный отрезок:

$$y'=6x^2-6 \quad \Rightarrow \quad 6x^2-6=0;$$
$$x_1=-1\in[-3;1,5]; \qquad x_2=1\in[-3;1,5].$$

Точек, в которых производная равна $\pm\infty$ или не существует, нет. Имеем четыре точки, две критические $x_{1,2}=\pm1\in[-3;1,5]$ и две концевые $x=-3$ и $x=1,5$.



Найдём значения функции в этих точках.

$$y(-3)=-31; \qquad y(-1)=9; \qquad y(1)=1; \qquad y(1,5)=2,75.$$

Из полученных значений выбираем наименьшее и наибольшее. Эти значения и будут решением данной задачи:

$$y_{наим}=y(-3)=-31; \qquad y_{наиб}=y(-1)=9.$$

Вывод. Наименьшее значение функции находится на левом конце отрезка, т. е. в точке $x=-3$, а наибольшее в критической точке $x_1=-1$.

Пример 9 – Из полубревна радиусом R вырезать прямоугольный брус, имеющий максимальное поперечное сечение (минимизация отходов).

Решение

Сделаем рисунок. Ширину бруса AB обозначим через x, а высоту BC через y. Тогда площадь поперечного сечения будет функцией x и y, т. е. $S = xy$. Но, как видно из рисунка 12, переменные x и y связаны соотношением $y = \sqrt{R^2 - (x/2)^2}$. В результате можем записать $S = x\sqrt{R^2 - (x/2)^2}$, т. е. получили функцию одной переменной x, изменяемой в пределах $0 \le x \le 2R$. Таким образом, пришли к задаче поиска наибольшего и наименьшего значений функции $S = x\sqrt{R^2 - (x/2)^2}$ на отрезке $[0, 2R]$, которые могут находиться внутри отрезка, в критических точках или на его концах. Находим производную

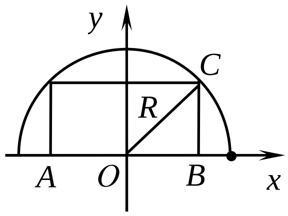


Рисунок 12

$$S'_x = \frac{R^2 - x^2/2}{\sqrt{R^2 - (x/2)^2}}$$

и критические точки из условий $S'_x = 0$ и $S'_x = \infty$. Из условия $S'_x = 0$ следует $x = \sqrt{2}R \in [0, 2R]$, а из условия $S'_x = \infty$ следует $x = 2R$, т. е. конец отрезка, значение функции на котором мы и так будем вычислять. Вычисляем значения функции $S = x\sqrt{R^2 - (x/2)^2}$ на концах отрезка и в полученной критической точке. Для $x = 0$ и $x = 2R$ получаем $S = 0$, т. е. наименьшее значение, а для $x = \sqrt{2}R$ получаем $S = R^2$, т. е. наибольшее значение. Следовательно, размеры прямоугольного бруса имеющего максимальное поперечное сечение будут: ширина $AB = x = \sqrt{2}R$, а высота $BC = y = \sqrt{2}R/2$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

а) $f(x) = 3x - x^3$, $x \in [-2,3]$;
б) $f(x) = (x-1)/(x+1)$, $x \in [0,4]$;
в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-1,5]$;
г) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $[-2,1]$.

2 Из эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ вырезать прямоугольник, имеющий наибольшую площадь. Каковы должны быть его размеры ширина и высота?

3 Из шара радиусом R выточить цилиндр наибольшего объёма. Каковы должны быть его размеры высота h и радиус r основания цилиндра?

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (выпуклым вверх) на интервале, если он расположен ниже любой касательной на этом интервале.

График функции $y = f(x)$ называется вогнутым (выпуклым вниз) на интервале, если он расположен выше любой касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая ее части разной выпуклости, называется точкой перегиба. Точка M – точка перегиба (рисунок 13).

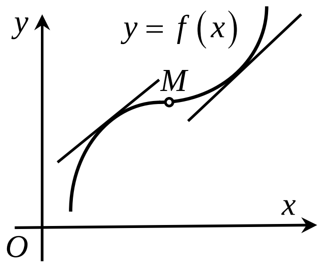


Рисунок 13

Промежутки выпуклости и вогнутости находят с помощью теоремы, которую называют **достаточным условием выпуклости, вогнутости графика функции:** если функция $y = f(x)$ на интервале (a,b) имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то на этом интервале график функции выпуклый, а если $f''(x) > 0$ на (a,b), то график функции вогнутый.

Проиллюстрируем изложенное на графиках функций $f(x) = x^3$ и $f(x) = \dfrac{1}{x}$ с ярко выраженной выпуклостью и вогнутостью (рисунок 14).

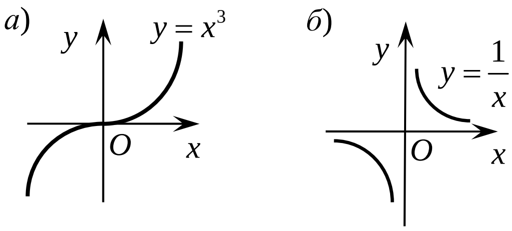


Рисунок 14

Для функции $f(x) = x^3$ вторая производная равна $f''(x) = 6x$ и, соответственно, $f''(x) < 0$ для $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для $x > 0$. При этом $f''(0) = 0$ и $f(0) = 0$. Следовательно, $(0;0)$ – точка перегиба.

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ вторая производная $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f''(x) < 0$ для $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для $x > 0$. При этом $f''(\mp 0) = \mp\infty$ и функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не определена, следовательно, положение точки перегиба не определено.

Точки, в которых $f''(x_0) = 0$, или $f''(x_0) = \pm\infty$, или $f''(x_0)$ не существует, называют критическими точками второго рода, или точками возможного перегиба графика функции.

Для нахождения точек перегиба используется теорема, которую называют **достаточным условием существования точек перегиба:** если вторая производная $f''(x)$ при переходе через критическую точку второго рода, например, x_0 меняет знак и функция в этой точке определена, то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Замечание – Из изложенного очевидны правила нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба. Из условий $f''(x) = 0, = \infty, \nexists$ найти критические точки второго рода, исследовать знак второй производной промежутках между критическими точками и на основании приведенных теорем определить выпуклость, вогнутость графика функции и наличие точек перегиба. Подробности на примерах.

Пример 10 – Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

Решение:

1) $y = x^5 - x + 5$. Функция определена на всей числовой оси. Находим $y' = 5x^4 - 1$ и $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует также на всей числовой оси и при $x = 0$ равна нулю, т. е. $y''(0) = 0$, следовательно, $x = 0$ – критическая точка второго рода. Видно, что при $x < 0$, $y'' < 0$ график выпуклый, а при $x > 0$, $y'' > 0$ график вогнутый. Вторая производная при переходе через точку $x = 0$ меняет знак. При этом $y(0) = 5$, следовательно, точка $(0;5)$ является точкой перегиба;

2) $y = \sqrt[3]{x}$. Функция определена на всей числовой оси. Находим $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ и $y'' = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$. Вторая производная не определена при $x = 0$, т. е. $y''(0) = \infty$, следовательно, $x = 0$ – критическая точка второго рода. При $x < 0$, $y'' > 0$ график вогнутый, а при $x > 0$, $y'' < 0$ график выпуклый. Вторая производная при переходе точки $x = 0$ меняет знак. При этом $y(0) = 0$, следовательно, $(0;0)$ – точка перегиба;

3) $y = \frac{1}{x-1}$. Функция определена на всей числовой оси исключением точки $x = 1$. Находим $y' = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ и $y'' = \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3}$. При $x = 1$ $y''(1) = \infty$, следовательно, $x = 1$ – критическая точка второго рода. Для $x < 1$ $y'' < 0$ график выпуклый, а для $x > 1$ $y'' < 0$ график вогнутый. Вторая производная при переходе точки $x = 1$ меняет знак. А поскольку в точке $x = 1$ функция не определена, то расположение точки перегиба не определено.

Примеры для самостоятельной работы

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции:

1) $y = xe^x$;	4) $y = x + \operatorname{arcctg} x$;	7) $y = e^{-x^2}$;	10) $y = (1 + x^2)e^x$;
2) $y = \frac{1}{x^2}$;	5) $y = \frac{e^x}{x}$;	8) $y = \frac{1}{1+x^2}$;	11) $y = \sqrt[3]{x-1}$;
3) $y = \ln\left(1 + x^2\right)$;	6) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$;	9) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$;	12) $y = \frac{2x^2}{2x-1}$.

Асимптоты графика функции. Асимптотой кривой, т. е. графика функции $y = f(x)$, называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на этой кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f\left(x\right)$, если хотя бы один из односторонних пределов для этой функции при $x \to x_0 \pm 0$ равен бесконечности, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f\left(x\right) = \pm\infty$$

(рисунок 15). Вертикальные асимптоты проходят через точки, в окрестности которых функция неограниченно возрастает, это точки разрыва второго рода, точки в которых функция не определена (знаменатель обращается в ноль).

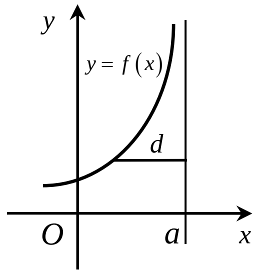


Рисунок 15

Наклонные асимптоты. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$, где параметры k и b определяются по формулам $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ (рисунок 16). Если k или b равны бесконечности, то график не имеет наклонных асимптот.

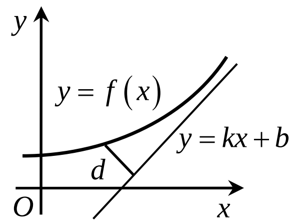


Рисунок 16

Горизонтальные асимптоты. Если $k = 0$, то уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$ принимает вид $y = b$, и ее называют горизонтальной асимптотой.

Замечание – Наклонные и горизонтальные асимптоты могут иметь разные уравнения при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. Это следует учитывать при их нахождении.

Пример 11 – Найти асимптоты графика функции.

Решение:

1) $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$.

Найдем вертикальные асимптоты. Функция не определена в точке $x = 1$, и, как видно, она является точкой разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x^2 + x}{x - 1} = \pm\infty$. Следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Запишем уравнение асимптоты $y = kx + b$ и найдем неизвестные параметры k и b.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + x}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f\left(x\right) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x - 1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + x - x^2 + x}{x - 1}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x}{x - 1}\right) = 2.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x + 2$. Поскольку $k \neq 0$, то горизонтальных асимптот нет;

2) $y = xe^x$.

Функция определена на всей числовой оси, а, следовательно, не имеет точек разрыва второго рода. Это означает, что функция не имеет вертикальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты. Запишем уравнение асимптоты $y = kx + b$ и найдем неизвестные параметры k и b. Видно, что следует рассмотреть соответствующие пределы отдельно для $x \to +\infty$ и для $x \to -\infty$.

Найдем пределы при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = e^\infty = +\infty.$$

Следовательно, график функции при $x \to +\infty$ не имеет наклонной асимптоты.

Найдем теперь пределы при $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{-e^{-x}} \right) = 0.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ получили горизонтальную асимптоту $y = 0$ (для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ воспользовались правилом Лопиталя).

Примеры для самостоятельной работы

Найти асимптоты графика функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; 3) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$; 5) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 7) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$;

2) $y = \dfrac{2x^2}{2x - 1}$; 4) $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x + 2}$; 6) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 8) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$.

Примечание – Мы детально (поэтапно) рассмотрели вопросы, связанные с применением производных к исследованию функций. Теперь подведём итог и запишем общую схему исследования функций и построения их графиков, в которой укажем, в какой последовательности целесообразно проводить исследования.

Общая схема исследования функций и построения графиков (*курсивом в скобках написана подсказка*)

1 Найти область определения функции $D(f): x \in \ldots$

2 Исследовать функцию на четность (нечетность) $\left(f(-x) = \begin{cases} f(x) & -\text{четная} \\ -f(x) & -\text{нечетная} \end{cases} \right)$ и периодичность $\left(f(x) = f(x+T) \right)$. (*График четной функции симметричен относительно оси* Oy, *нечетной – относительно начала координат. Если функция обладает свойством четности* (*нечетности*), *то достаточно исследовать ее на полуоси и график отобразить соответственно зеркально. Если функция периодическая, то исследования провести в пределах одного периода и распространить на всю числовую ось*).

3 Найти точки пересечения графика функции с осями координат и нанести их на координатную сетку. (*Из условий* $\{x=0,\ y=f(0)=\ldots\}$ *и* $\{y=0,$ *решая уравнение* $f(x)=0$, *найти значения* $x=\ldots\}$).

4 Исследовать функцию на непрерывность. (*Все элементарные функции непрерывны в своих естественных областях определения. В точках, где функция не определена, установить характер разрыва. Для этого найти пределы слева и справа в точках разрыва*). На координатной сетке отметить поведение графика функции в окрестности точек разрыва.

5 Найти уравнения вертикальных, наклонных и горизонтальных асимптот и построить их. (*Уравнение вертикальной* $x=x_0$, *где* x_0 – *точка, в которой функция не определена и* $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x) = \pm\infty$. *Уравнение наклонной* $y=kx+b$, *где* $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$, *при* $k=0$ *имеем* $y=b$ – *горизонтальную асимптоту. Если* $k=\infty$ *или* $b=\infty$, *то график не имеет указанных асимптот*). На координатной сетке отметить поведение графика функции в окрестности найденных асимптот.

6 Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремумов функции. (*Для этого найти критические точки 1-го рода из условия* $f'(x)=0, =\infty, \nexists$, *отметить их на числовой оси и определить знак первой производной в найденных промежутках. Если в промежутке* $f'(x)>0$, *то* $f(x)$ *возрастает, а если* $f'(x)<0$, *то* $f(x)$ *убывает. Если в критической точке* $f(x)$ *определена и при переходе через нее* $f'(x)$ *меняет знак с «+» на «–», то в критической точке* – max, *если с «–» на «+», то* – min). Вычислить значения функции в критических точках и нанести их на координатную сетку.

7 Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. (*Для этого найти критические точки 2-го рода из условия* $f''(x)=0, =\infty, \nexists$, *отметить их на числовой оси и установить знак второй производной в отмеченных промежутках. Если в промежутке* $f''(x)<0$, *то график* $f(x)$ *выпуклый, а если* $f''(x)>0$, *то вогнутый. Если при переходе через критическую точку* $f''(x)$ *меняет знак и в этой точке функция определена, то график имеет точку перегиба*). Вычислить значения функции в точках перегиба и нанести их на координатную сетку.

8 По полученным данным, соединяя отмеченные точки и учитывая рост (спад), выпуклость (вогнутость) и асимптоты, схематически построить график.

Пример 12 – Применяя вышеприведенную схему провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение

1 Найдем область определения функции $D(y)$: $x \in R, \ x \neq 1$.

2 Установим четность, нечетность, периодичность. Проверяем условие

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x) + 1}{(-x) - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{-x - 1} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases}.$$

Функция не имеет свойства чётности, нечётности, т. е. является функцией общего вида. График не имеет осей и точек симметрии. Функция не периодическая.

3 Находим точки пересечения с осями координат.

С осью Oy: $x = 0, \ y = \dfrac{0^2 - 0 + 1}{0 - 1} = -1$. Точка $(0; -1)$ – точка пересечения с осью Oy. Отмечаем ее на координатной сетке (рисунок 17).

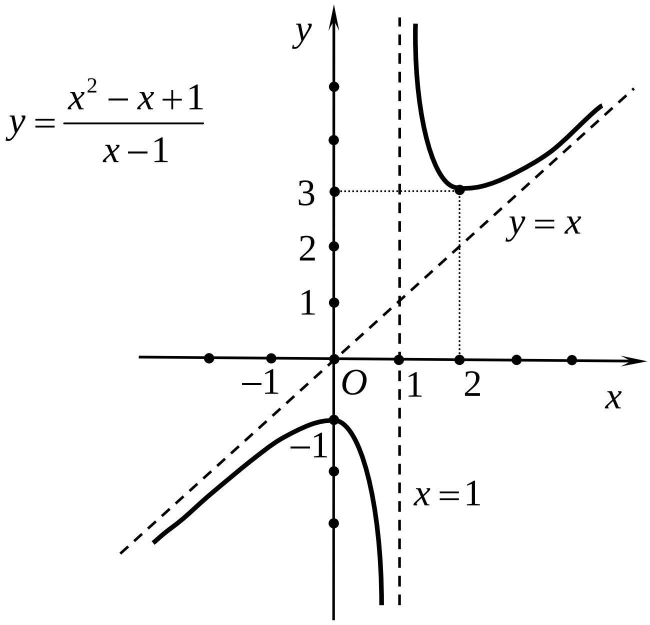


Рисунок 17

С осью Ox: $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Однако, как видно, дискриминант квадратного уравнения отрицательный, т. е. действительных корней нет, а, следовательно, нет точек пересечения с осью Ox.

4 Исследуем функцию на непрерывность.

Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x = 1$. Следовательно, функция непрерывна на всей числовой оси за исключением точки $x = 1$. Установим характер разрыва в точке $x = 1$, для этого найдем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty.$$

Оба предела равны бесконечности, следовательно, в точке $x=1$ разрыв второго рода.

5 Найдем уравнения асимптот.

Вертикальные. В точке $x=1$ функция не определена и испытывает разрыв второго рода. Следовательно, $x=1$ – уравнение вертикальной асимптоты. Строим ее на координатной сетке (штриховая вертикальная линия) и отмечаем поведение графика функции при $x\to 1\pm 0$ на основании предыдущего пункта (см. рисунок 17).

Наклонные асимптоты ищем в виде $y=kx+b$. Находим k и b.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y=x$. Это биссектриса первой и третьей координатных четвертей (штриховая наклонная линия) (см. рисунок 17).

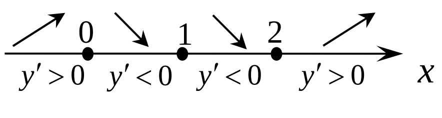
6 Исследуем функцию на экстремумы, промежутки возрастания и убывания функции. Для этого найдем критические точки первого рода. Находим первую производную:

$$y'=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Условие $y'=0$ дает $x^2-2x=0$, из которого получаем две критические точки $x_1=0\in D(y)$ и $x_3=2\in D(y)$.

Условие $y'=\infty$ дает $x-1=0$, из которого следует $x_2=1\notin D(y)$.

В результате получили три критические точки, которые разбивают область определения на четыре интервала $(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,\infty)$. Критические точки изобразим на числовой оси и исследуем знак первой производной слева и справа от каждой них. Для этого возьмём по одному значению x из каждого интервала, подставим в выражение для первой производной и определим ее знак.



Для интервала $(-\infty;0)$. Пусть $x=-1$, тогда $y'(-1)>0$. Функция в этом интервале возрастает.

Для интервала $(0;1)$. Пусть $x=0,5$, тогда $y'(0,5)<0$. Функция в этом интервале убывает.

Производная при переходе точки $x_1=0$ слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, в точке $x_1=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max} = f(0) = -1$. Отмечаем точку $(0;-1)$ на координатной сетке (см. рисунок 17).

Для интервала $(1;2)$. Пусть $x = 1{,}5$, тогда $y'(1{,}5) < 0$. Функция в этом интервале убывает.

Производная при переходе точки $x_2 = 1$ слева направо не меняет знак. Следовательно, в точке $x_2 = 1$ экстремума нет.

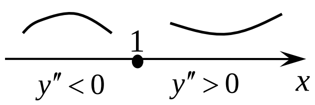
Для интервала $(2;\infty)$. Пусть $x = 3$, тогда $y'(3) > 0$. Функция в этом интервале возрастает.

Производная при переходе точки $x_3 = 2$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_3 = 2$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min} = f(2) = 3$. Отмечаем точку $(2;3)$ на координатной сетке (см. рисунок 17).

7 Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Для этого находим критические точки второго рода. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная $y'' = \infty$ при $x = 1 \notin D(y)$. Следовательно, имеем одну критическую точку второго рода. Отметим ее на числовой оси и исследуем знак второй производной слева и справа от нее.



Для интервала $(-\infty,1)$. Пусть $x = 0$, тогда $y''(0) < 0$. График функции в интервале $(-\infty,1)$ выпуклый.

Для интервала $(1,\infty)$. Пусть $x = 2$, тогда $y''(2) > 0$. График функции в интервале $(1,\infty)$ вогнутый.

Вторая производная при переходе через критическую точку второго рода меняет знак, а поскольку в этой точке функция не определена, т. е. $y(1 \mp 0) = \mp\infty$, то расположение точки перегиба не определено.

8 По полученным данным, соединяя отмеченные точки и учитывая рост (спад), выпуклость (вогнутость) и асимптоты, схематически строим график (см. рисунок 17).

Примеры для самостоятельной работы

Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$; 3) $y = \dfrac{2x^2}{2x-1}$; 5) $y = xe^{-x^2}$; 7) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;

2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; 4) $y = e^{-x^2}$; 6) $y = x^2e^{-x}$; 8) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Не все зависимости, существующие в природе, науке, технике и т. д., могут быть описаны функцией одной переменной $y = f(x)$. Так, например, в физике для описания состояния идеальных газов в замкнутых сосудах используется уравнение Менделеева–Клайперона $PV = \gamma T$, в которое входит три характеристики газов: $P-$ давление, $V-$ объем, $T-$ температура. Выразив одну из них через две другие, например, $P = \gamma \frac{T}{V}$, получаем, что давление зависит от температуры и объема, независимое изменение которых приводит к изменению давления, т. е. одна переменная зависит от двух. Это яркий пример функции двух переменных. Опуская строгое определение функции двух переменных (см., например, [5]), формально запишем $z = f(x, y)$, где $x, y-$ независимые переменные, $z-$ функция. Множество значений независимых переменных $\{x, y\}$, для которых можно вычислить z, называют естественной областью определения функции и обозначают $D = D(f)$, а множество значений $\{z\}$ – областью значений функции и обозначают $E = E(f)$. Аналогично – для функций трех и более, т. е. многих переменных (ФМП) $u = f(x, y, z, \ldots)$. Для простоты и наглядности все особенности ФМП будем рассматривать на примере функции двух переменных.

Областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ в простейших случаях является плоскость Oxy либо ее часть, ограниченная или не ограниченная некоторой кривой. Линию, ограничивающую область D, называют границей области. Точки области, не лежащие на границе, называют внутренними точками области определения. Область, состоящая только из внутренних точек, называется открытой. Область с присоединенной границей называют закрытой (замкнутой). Области могут быть полуоткрытые (полузамкнутые). Если граница области или ее часть расположена на $\pm\infty$, то такую область называют неограниченной. В противном случае – ограниченной.

Самым **распространенным способом задания ФМП** является аналитический, т. е. соответствие f задается формулой. Например, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Областью определения этой функции является множество точек плоскости Oxy, удовлетворяющих условию $D(z): \{1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$, иначе $x^2 + y^2 \leq 1$ – это круг радиусом $r = 1$ с центром в точке $O(0,0)$.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ в общем случае является некоторая поверхность, т. е. множество точек пространства R^3 с координатами (x, y, z). Так, например, графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя часть сферы (полусфера) с центром в начале координат (рисунок 18). График функции трех и более переменных наглядно не представим (это математическая

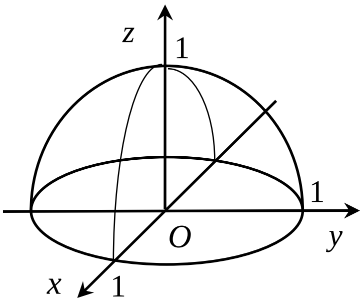


Рисунок 18

абстракция), его называют гиперповерхностью, а, в частности, областью определения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ является некоторая пространственная область с координатами (x, y, z).

Важной характеристикой функций является понятие ее непрерывности, т. е. график этой функции – непрерывная линия, поверхность и т. д. Опуская строгие определения непрерывности, кратко отметим важное положение: **все элементарные функции непрерывны в своих естественных областях определения**.

Примеры для самостоятельной работы

Найти область определения функций:

1) $z = \sqrt{xy}$; 3) $z = \ln(x + y)$; 5) $z = x + \arcsin y$;

2) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$; 4) $z = \sqrt{\ln(1 - x^2 - y^2)}$; 6) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

Частные производные первого порядка. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ и ее окрестности. Частным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по переменной x называется величина $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, при этом переменная y не изменяется. Аналогично $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ – частное приращение по переменной y, переменная x не изменяется. Здесь $\Delta x, \Delta y$ – частные приращения независимых переменных (рисунок 19). Если существует предел

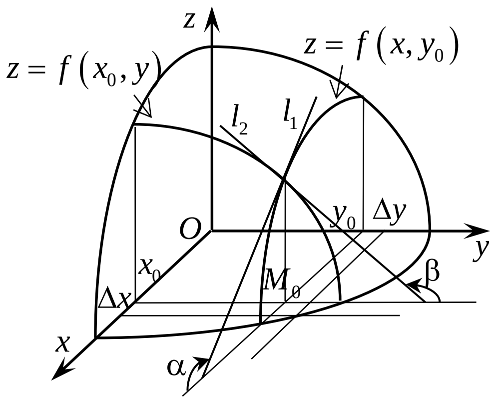


Рисунок 19

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то его называют **частной производной** первого порядка функции $z = f(x, y)$ по переменной x и обозначают $z'_x, \dfrac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Значения частной производной в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $z'_x(x_0, y_0)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$ или $f'_x(x_0, y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}$. Аналогично определяется и обозначается частная производная по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что, например, z'_x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении другой переменной, т. е. $y=\text{const}$. Аналогично z'_y при $x=\text{const}$. Из изложенного следует правило нахождения частных производных: частные производные ФМП находятся по формулам и правилам нахождения производных функции одной переменной при условии, что при нахождении производной по одной из переменных все остальные переменные считаются постоянными. Для краткости слова «*первого порядка*» опускают.

Геометрический смысл частных производных. По аналогии с геометрическим смыслом производной функции одной переменной можем записать

$$z'_x\left(x_0,y_0\right)=\operatorname{tg}\alpha=k_1,$$

т. е. частная производная по переменной x в точке $\left(x_0,y_0\right)$ равна угловому коэффициенту касательной l_1, проведенной к кривой $z=f\left(x,y_0\right)$, в точке с координатами $\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$. Здесь, где $\alpha-$ угол, образованный положительным направлением прямой, параллельной оси Ox, и касательной l_1 (см. рисунок 19).

Аналогично $z'_y\left(x_0,y_0\right)=\operatorname{tg}\beta=k_2$ (см. рисунок 19).

Общефизический смысл частных производных. Частная производная функции двух (или более) переменных, например, по переменной x, т. е. z'_x есть скорость изменения этой функции вдоль направления, параллельного оси Ox. Аналогично по переменной y. Если функция $z=f\left(x,y\right)$ описывает какой-либо процесс, то $z'_x\left(x_0,y_0\right)$, $z'_y\left(x_0,y_0\right)$ будут, соответственно, мгновенными скоростями протекания этих процессов по переменным x и y в точке $\left(x_0,y_0\right)$.

Пример 1 – Найти частные производные функций.

Решение:

1) $z=x^2y^3+x+\dfrac{1}{y}$.

$$z'_x=\left(x^2y^3+x+\frac{1}{y}\right)'_x=\left(x^2y^3\right)'_x+\left(x\right)'_x+\left(\frac{1}{y}\right)'_x=y^3\left(x^2\right)'_x+1+0=2xy^3+1,$$

$$z'_y=\left(x^2y^3+\frac{1}{y}+x\right)'_y=\left(x^2y^3\right)'_y+\left(\frac{1}{y}\right)'_y+\left(x\right)'_y=x^2\left(y^3\right)'_y-\frac{1}{y^2}+0=3y^2x^2-\frac{1}{y^2};$$

2) $z=x^y$.

$$z'_x=\left(x^y\right)'_x=\left|\begin{matrix}y=\alpha=\text{const}\\ \left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}\end{matrix}\right|=yx^{y-1},\quad z'_y=\left(x^y\right)'_y=\left|\begin{matrix}x=a=\text{const}\\ \left(a^y\right)'=a^y\ln a\end{matrix}\right|=x^y\ln x;$$

3) $z=\dfrac{xy}{x-y}$.

$$z'_x=\left(\frac{xy}{x-y}\right)'_x=\frac{(xy)'_x(x-y)-(xy)(x-y)'_x}{(x-y)^2}=-\frac{y^2}{(x-y)^2},$$

$$z'_y=\left(\frac{xy}{x-y}\right)'_y=\frac{(xy)'_y(x-y)-(xy)(x-y)'_y}{(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x-y)^2};$$

4) $z=e^{xy}$.

$$z'_x=\left(e^{xy}\right)'_x=e^{xy}(xy)'_x=ye^{xy},\qquad z'_y=\left(e^{xy}\right)'_y=e^{xy}(xy)'_y=xe^{xy}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти частные производные функций:

1) $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$;

2) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$;

3) $z=x\ln y+\arcsin y$;

4) $z=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

5) $z=y^{\sin x}$;

6) $z=\ln\sqrt{x^2+y+1}$;

7) $z=e^{x^3y^2}$;

8) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

9) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

10) $z=\ln\cos(xy)$;

11) $z=e^{\sin\left(x^3y^2+1\right)}$;

12) $u=x^{\frac{y}{z}}$.

Производная сложной функции. Полная производная. Сложная функция – это функция, аргументы которой сами являются функциями других переменных.

Если $z=f(x,y)$, а $x=x(t)$, $y=y(t)$, то производная такой сложной функции $z=f(x(t),y(t))$ находится по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Эту формулу называют формулой полной производной, поскольку в итоге имеем $z=f(t)$ – функцию одной переменой t. В связи с этим используются обозначения $\dfrac{dz}{dt}$ обыкновенной производной функции одной переменной.

Если $z=f(x,y)$, а $y=y(x)$, т. е. $z=f(x,y(x))$, то полная производная по x находится по формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Общий случай. Если $z=f\left(x,y\right)$, а $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \end{cases}$ то частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пример 2 – Найти полную производную функции $z=e^{3x+2y}$, где $x=\cos t,\ \ y=t^2$.

Решение

Видно, что имеем $z=z(t)$, т. е. функцию одной переменной. Полную производную находим по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\left(e^{3x+2y}\right)'_x\cdot\left(\cos t\right)'_t+\left(e^{3x+2y}\right)'_y\cdot\left(t^2\right)'_t=$$

$$=e^{3x+2y}\cdot 3\cdot\left(-\sin t\right)+e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t=e^{3x+2y}\cdot\left(4t-3\sin t\right)=e^{3\cos t+2t^2}\cdot\left(4t-3\sin t\right)$$

В случаях достаточно простых функций $x=x\left(t\right)$ и $y=y\left(t\right)$ можно непосредственно подставить $x=x\left(t\right)$ и $y=y\left(t\right)$ в $z=f\left(x,y\right)$ и найти производную по t как производную сложной функции одной переменной. Так, для рассмотренного примера $z=e^{3x+2y}=e^{3\cos t+2t^2}$, а

$$\frac{dz}{dt}=\left(e^{3\cos t+2t^2}\right)'_t=e^{3\cos t+2t^2}\cdot\left(3\cos t+2t^2\right)'_t=e^{3\cos\,t+2t^2}\left(4t-3\sin t\right).$$

Пример 3 – Найти полную производную функции $z=\operatorname{arctg}\left(xy\right)$, где $y=e^x$.

Решение

Используем формулу

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(\operatorname{arctg}\left(xy\right)\right)'_x+\left(\operatorname{arctg}\left(xy\right)\right)'_y\cdot\left(e^x\right)'_x=$$

$$=\frac{y}{1+\left(xy\right)^2}+\frac{x}{1+\left(xy\right)^2}e^x=\frac{y+xe^x}{1+\left(xy\right)^2}=\frac{\left(1+x\right)e^x}{1+x^2e^{2x}}.$$

Как и в предыдущем примере, можно непосредственно записать $z=\operatorname{arctg}\left(xe^x\right)$ и найти производную по x (убедится самостоятельно).

Пример 4 – Продифференцировать сложную функцию $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.

Решение

Имеем случай $z=f\left(x,y\right)$, где $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v). \end{cases}$ Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ находим по формулам: $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$. Для этого находим соответствующие производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2+x^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\sin v;\quad \frac{\partial x}{\partial v}=u\cos v;\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\cos v;\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-u\sin v.$$

Теперь можем записать

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\sin v-\frac{x}{y^2+x^2}\cdot\cos v=\frac{u\cos v\cdot\sin v}{(u\cos v)^2+(\sin v)^2}-\frac{u\cos v\cdot\sin v}{(u\cos v)^2+(\sin v)^2}=0,$$

$$\frac{dz}{dv}=\frac{y}{y^2+x^2}\cdot u\cos v+\frac{x}{y^2+x^2}\cdot u\sin v=\frac{\left(u\cos v\right)^2+\left(u\sin v\right)^2}{\left(u\cos v\right)^2+\left(u\sin v\right)^2}=1.$$

В данном примере частные производные оказались числами. В общем случае это функции переменных u и v.

Примеры для самостоятельной работы

Найти частные производные сложных функций $z=f\left(x,y\right)$:

1) $z=\dfrac{y}{x}$, где $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$;
2) $z=\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$, где $y=3x+1$;
3) $z=\operatorname{arctg}\left(xy\right)$, где $y=e^x$;
4) $z=x\sin u\cos v$, где $u=\ln 2x$, $v=\sqrt{1-x^2}$;
5) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, где $x=uv$, $y=\dfrac{u}{v}$;
6) $z=x^2y$, где $x=u-2v$, $y=2u+v$.

Дифференцирование неявно заданных функций. Функция $z=f\left(x,y\right)$ называется неявно заданной, если она задана уравнением $F\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=0$, т. е. уравнением, неразрешенным относительно z.

Дифференцируя обе части равенства $F\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=0$ по x и по y, по правилам дифференцирования сложной функции нетрудно получить формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x\left(x,y=\text{const},z=\text{const}\right)}{F'_z\left(x=\text{const},y=\text{const},z\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_x\left(x=\text{const},y,z=\text{const}\right)}{F'_z\left(x=\text{const},y=\text{const},z\right)}\quad \left(F'_z\neq 0\right).$$

Из них следует, что при нахождении производных F'_x, F'_y, F'_z по одной из переменных все остальные переменные считаем const. Напомним, для неявно заданной функции одной переменной $F\left(x,y(x)\right)=0$, аналогично

$$y'_x=-\frac{F'_x\left(x,y=\text{const}\right)}{F'_y\left(x=\text{const},y\right)}\qquad \left(F'_y\neq 0\right).$$

Пример 5 – Продифференцировать функции $z=f\left(x,y\right)$, заданные неявно.

Решение:

1) $xz^3-yz+x^2y-3x+4=0$. Используя формулы, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(xz^3-yz+x^2y-3x+4\right)'_x}{\left(xz^3-yz+x^2y-3x+4\right)'_z}=-\frac{z^3+2xy-3}{3xz^2-y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\left(xz^3-yz+x^2y-3x+4\right)'_y}{\left(xz^3-yz+x^2y-3x+4\right)'_z}=\frac{z-x^2}{3xz^2-y};$$

2) $e^z+x^2y+z+5=0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{e^z+1};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{e^z+1}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти частные производные функций $z=f\left(x,y\right)$, заданных неявно:

1) $x+y+z=e^z$;
2) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$;
3) $xyz-x^2y+z^2y^2-z^3x=0$;
4) $2\sin\left(x+2y-3z\right)=x+2y-3z$;
5) $1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0$;
6) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

Частные и полный дифференциалы первого порядка и их геометрический смысл. Используя геометрический смысл частных производных (см. рисунок 19), можно заключить, что для функции $z=f\left(x,y\right)$

$$\Delta_x z=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)\simeq \text{tg}\alpha\,\Delta x=z'_x\left(x,y\right)\Delta x,$$
$$\Delta_y z=f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)\simeq \text{tg}\beta\,\Delta y=z'_y\left(x,y\right)\Delta y.$$

Правые части этих формул представляют собой **линейные (главные)** части приращения функции по переменным x и y. Их называют частными дифференциалами первого порядка переменным x, y и обозначают

$$\partial z = z'_x(x,y)dx, \qquad \partial z = z'_y(x,y)dy.$$

Здесь $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ – частные приращения или частные дифференциалы независимых переменных x и y. Выражение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ представляет собой полное приращение функции и

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \simeq z'_x(x,y)\Delta x + z'_y(x,y)\Delta y,$$

а правую часть этой формулы называют **полным дифференциалом** первого порядка и обозначают

$$dz = z'_x(x,y)dx + z'_y(x,y)dy.$$

Таким образом, dz есть **линейная (главная)** часть полного приращения функции по переменным x и y (в этом состоит геометрический смысл полного дифференциала). Для краткости слова «*первого порядка*» опускают.

Пример 6 – Найти полный дифференциал функции $z = e^{xy}$.

Решение

Находим частные производные: $z'_x = \left(e^{xy}\right)'_x = ye^{xy}$, $z'_y = \left(e^{xy}\right)'_y = xe^{xy}$.

Теперь можем записать

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти полный дифференциал функций:

1) $z = 2y + e^{x^2-y} + 1$;
4) $z = x^y$;
7) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{x^2-1}$;
2) $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;
5) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;
8) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$;
3) $z = \ln(2y-x)$;
6) $z = \ln\cos(xy)$;
9) $z = e^{\sin\left(x^3y^2+1\right)}$.

Производные высших порядков. Частные производные первого порядка z'_x, z'_y для функции $z = f(x,y)$ сами являются функциями (x,y). От них также можно брать производные. Производная от производной первого порядка есть производная второго порядка. В частности, для функции двух переменных имеем четыре производных второго порядка. Их обозначают следующим образом:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \; \left(z'_y\right)'_y = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

При этом $z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют смешанными производными. Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Пример 7 – Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Решение

Находим первые производные:

$$z'_x = \left(x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1\right)'_x = 4x^3 - 4xy^3, \quad z'_x = \left(x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1\right)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4.$$

Находим вторые производные:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_x = 12x^2 - 4y^3,$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_y = -12x^2y + 20y^3,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, $z''_{xy} = z''_{yx}$. Этот результат не случаен.

Теорема Шварца. Если частные производные высших порядков непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Примеры для самостоятельной работы

Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$;
2) $z = e^{xy}$;
3) $z = e^x\left(\cos y + x\sin y\right)$;
4) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;
5) $z = x^y$;
6) $z = \ln\left(y^2/x\right)$;
7) $z = e^{x^3y^2}$;
8) $z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$;
9) $z = \ln\cos(xy)$;
10) $z = \operatorname{arctg}(y/x)$;
11) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$;
12) $z = \arccos(2x + y)$.

Скалярное поле. Линии уровня. В физике скалярную функцию многих переменных принято называть скалярным полем. При этом если задана функция двух переменных $z = f(x, y)$, то поле называют плоским, если трех переменных $u = f(x, y, z)$ – объемным.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ **называется геометрическое место точек плоскости** Oxy**, для которых** $z = C = \text{const}$. Линия уровня представляет собой проекцию линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = C = \text{const}$. Так, для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ при $z = |C| < 1$ имеем $C = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, или $x^2 + y^2 = 1 - C^2$, или $x^2 + y^2 = r^2$, т. е. линии уровня есть семейство концентрических окружностей радиусом $r = \sqrt{1 - C^2}$ с центром в точке $O(0,0)$.

Примечание – Линии уровня используются в физике (изотермы, изобары и т. д.), в картографии при составлении геодезических и синоптических карт.

Производная по направлению. Для функции $z = f(x, y)$ частные производные z'_x, z'_y характеризуют скорость ее изменения вдоль направлений, параллельных координатным осям Ox, Oy соответственно. Для характеристики скорости изменения этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению к произвольной точке $M(x, y)$, т. е. вдоль некоторого вектора $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0) = \vec{l}(l_x, l_y)$, вводится понятие производной по направлению.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D и имеет частные производные z'_x, z'_y.

Если существует предел отношения приращения функции к полному приращению аргументов, т. е.

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\Delta l},$$

где $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ – расстояние между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ (рисунок 20), то его называют производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению к точке $M(x, y)$, т. е. вдоль направления вектора $\vec{l}(l_x, l_y) = \overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$, ее обозначение и расчетная формула имеют вид:

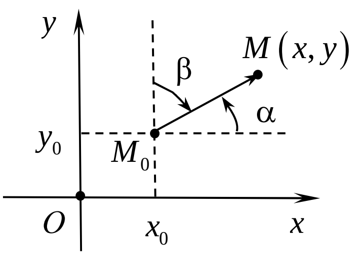


Рисунок 20

$$z'_l(M_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta,$$

где $z'_x(M_0)$, $z'_y(M_0)$ – значения частных производных в точке M_0, а $\cos\alpha = \frac{l_x}{\vec{l}}$, $\cos\beta = \frac{l_y}{\vec{l}}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}(l_x, l_y)$, $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$.

Напомним, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ – основное свойство направляющих косинусов.

Замечание – Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных. Действительно, при $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ имеем $z_l'(M_0) = z_x'(M_0)$, при $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$ имеем $z_l'(M_0) = z_y'(M_0)$.

Поскольку производная по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению $\vec{l}$, то:

– если $z_l'(M_0) > 0$, то функция в этом направлении возрастает;

– если $z_l'(M_0) < 0$, то функция в этом направлении убывает;

– если $z_l'(M_0) = 0$, то функция в этом направлении не изменяется.

Градиент скалярного поля. Поскольку производная по направлению характеризует скорость изменения функции в этом направлении, то можно задать вопрос: а в каком направлении эта скорость имеет наибольшее значение? **Направление, или вектор, вдоль которого** $z_l'(M_0) - \max$**, называют *градиентом и* обозначают** $\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \operatorname{grad} z(M_0)$. Над ним не принято ставить стрелку. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ он определяется по формуле

$$\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \operatorname{grad} z(M_0) = z_x'(M_0) i + z_y'(M_0) j,$$

где i, j – единичные векторы декартового базиса, $\{z_x'(M_0), z_y'(M_0)\}$ – координаты градиента.

Таким образом, **градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции, в этом состоит его физический смысл,** а наибольшая скорость этого роста равна модулю градиента, т. е.

$$\max(z_l'(M_0)) = \left|\operatorname{grad} z(M_0)\right| = \sqrt{(z_x'(M_0))^2 + (z_y'(M_0))^2}.$$

Замечание – Поскольку функция не изменяется вдоль линий уровня, то можно заключить, что производная по направлению, касательному к линии уровня, равна нулю. Доказано, что градиент направлен по нормали к линиям уровня, а в направлении, противоположном градиенту, т. е. $-\operatorname{grad} z(M_0)$, функция $z = f(x, y)$ убывает наиболее быстро.

Изложенное, с учетом замечания, продемонстрируем на примере.

Пример 8 – Для функции $z = x^2 + y^2$ найти:

1) уравнение линии уровня при $z = 2$;

2) производную в точке $M_0(1{,}1)$ по направлению к точкам $M_1(1{,}0)$, $M_2(2{,}0)$, $M_3(2{,}1)$, $M_4(2{,}2)$, $M_5(1{,}2)$, $M_6(0{,}2)$, $M_7(0{,}1)$, $M_8(0{,}0)$;

3) вектор, в направлении которого функция в точке M_0 возрастает наиболее быстро (т. е. градиент), и значение скорости роста функции по этому направлению.

Решение

Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости Oxy, а графиком ее является поверхность, которая представляет собой параболоид вращения с осью симметрии Oz (рисунок 21, *а*).

1 Подставляем $z = 2$ в функцию $z = x^2 + y^2$, получаем уравнение $2 = x^2 + y^2$, которое является уравнением окружности $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ на плоскости Oxy с центром в начале координат радиусом $R = \sqrt{2}$. Линия уровня (окружность) и указанные в условии направления изображены на рисунке 21, *б*.

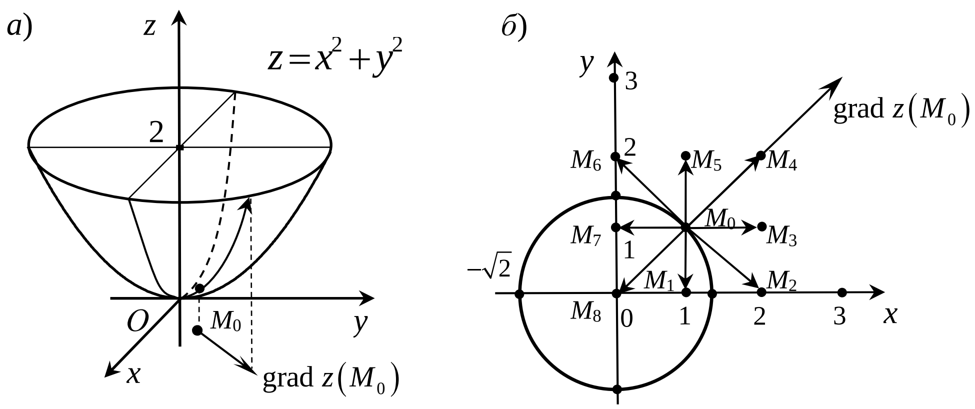


Рисунок 21

2 Запишем расчетную формулу для производной по направлению:

$$z'_{l_i}(M_0) = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta .$$

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(1,1)$:

$$z'_x = \left(x^2 + y^2\right)'_x = 2x; \qquad z'_x(M_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2\right)'_y = 2y; \qquad z'_y(M_0) = 2y_0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы.

$\vec{l}_1 = \overrightarrow{M_0M_1}(1-1, 0-1) = \overrightarrow{M_0M_1}(0, -1)$, $\quad |\vec{l}_1| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$, $\quad \cos\alpha = 0/1 = 0$, $\cos\beta = -1/1 = -1$. Найденные величины подставляем в расчетную формулу и получаем $z'_{l_1}(M_0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2 < 0$. Поскольку производная отрицательна, то функция в направлении $\overrightarrow{M_0M_1}$ убывает.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_2}$ и его направляющие косинусы.

$\vec{l}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}(2-1, 0-1) = \overrightarrow{M_0M_2}(1, -1)$, $\quad |\vec{l}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\quad \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$,

$\cos\beta = -1/\sqrt{2}$. Найденные величины подставляем в расчетную формулу и получаем $z'_{l_2}(M_0) = 2\cdot 1/\sqrt{2} + 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) = 0$. Поскольку производная равна нулю, то функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_2$ не изменяется.

Поступаем аналогично для остальных направлений.

Для $\vec{l}_3 = \overrightarrow{M_0M_3}(2-1, 1-1) = \overrightarrow{M_0M_3}(1,0)$, $\left|\vec{l}_3\right| = \sqrt{1^2 + (0)^2} = 1$, $\cos\alpha = 1/1 = 1$, $\cos\beta = 0/1 = 0$. $z'_{l_3}(M_0) = 2\cdot 1 + 2\cdot 0 = 2 > 0$. Производная положительна, следовательно, функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_3$ возрастает.

Для $\vec{l}_4 = \overrightarrow{M_0M_4}(2-1, 2-1) = \overrightarrow{M_0M_4}(1,1)$, $\left|\vec{l}_4\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{2}$. $z'_{l_4}(M_0) = 2\cdot 1/\sqrt{2} + 2\cdot 1/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} > 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_4$ возрастает.

Для $\vec{l}_5 = \overrightarrow{M_0M_5}(1-1, 2-1) = \overrightarrow{M_0M_5}(0,1)$, $\left|\vec{l}_5\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\cos\alpha = 0/1 = 0$, $\cos\beta = 1/1 = 1$. $z'_{l_5}(M_0) = 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 > 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_5$ возрастает.

Для $\vec{l}_6 = \overrightarrow{M_0M_6}(0-1, 2-1) = \overrightarrow{M_0M_6}(-1,1)$, $\left|\vec{l}_6\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = -1/\sqrt{2}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{2}$. $z'_{l_6}(M_0) = 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) + 2\cdot 1/\sqrt{2} = 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_6$ не изменяется.

Для $\vec{l}_7 = \overrightarrow{M_0M_7}(0-1, 1-1) = \overrightarrow{M_0M_7}(-1,0)$, $\left|\vec{l}_7\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\cos\alpha = -1/1 = -1$, $\cos\beta = 0/1 = 0$. $z'_{l_7}(M_0) = 2\cdot(-1) + 2\cdot 0 = -2 < 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_7$ убывает.

Для $\vec{l}_8 = \overrightarrow{M_0M_8}(0-1, 0-1) = \overrightarrow{M_0M_8}(-1,-1)$, $\left|\vec{l}_7\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = \cos\beta = -1/\sqrt{2}$. $z'_{l_8}(M_0) = 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) + 2\cdot\left(-1/\sqrt{2}\right) = -4/\sqrt{2} = -2\sqrt{2} < 0$. Функция в направлении $\overrightarrow{M_0M}_8$ убывает.

3 Запишем расчетную формулу для градиента

$$\operatorname{grad} z(M_0) = z'_x(M_0)i + z'_y(M_0)j.$$

Поскольку значения частных производных найдены, то подставляем их в расчетную формулу для градиента, получаем

$$\operatorname{grad} z(M_0) = 2i + 2j.$$

Максимальное значение скорости роста функции в этом направлении из точки M_0

$$\max\left(z'_{\text{grad}}(M_0)\right) = \left|\operatorname{grad} z(M_0)\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Выводы. Из приведенных расчетов и рисунка 21, *б* видно, что направления $\vec{l}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}(1,-1)$ и $\vec{l}_6 = \overrightarrow{M_0M_6}(-1,1)$ являются направлениями, касательными к линии уровня, и производная вдоль них равна нулю. Направление $\vec{l}_4 = \overrightarrow{M_0M_4}(1,1)$ совпадает с направлением градиента, производная вдоль него максимальна и равна модулю градиента, функция в этом направлении возрастает наиболее быстро, в чем можно убедиться на основании рисунка 21, *а*. Видно также, что градиент направлен по нормали к линии уровня. Направление $\vec{l}_8 = \overrightarrow{M_0M_8}(-1,-1)$ противоположно направлению градиента, производная отрицательна и по модулю равна модулю градиента (функция в этом направлении убывает наиболее быстро).

Примеры для самостоятельной работы

Для функции $z = f(x,y)$ найти:

1) производную в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$;

2) вектор, в направлении которого функция в точке M_0 возрастает наиболее быстро (т. е. градиент) и значение скорости роста функции по этому направлению:

а) $z = x^3y + 5x^2 - y^4 + 3xy - 4$, $\quad M_0(1;1)$, $\quad M_1(3;2)$;

б) $z = 2x^3y^3 + 5x^2y - 2y^4 + 5y - 3x$, $\quad M_0(1;2)$, $\quad M_1(3;-2)$;

в) $z = 2y + 5x^2 - y^4 + 3x^3y - 4xy$, $\quad M_0(0;1)$, $\quad M_1(1;2)$;

г) $z = x^2y + x^2 - y^4 - 2xy - 5y + 1$, $\quad M_0(1;-2)$, $\quad M_1(3;2)$;

д) $z = x^3y + 5x^2 - y^4 + 3xy - 4x^2y^3$, $\quad M_0(0;-1)$, $\quad M_1(4;2)$;

е) $z = 3x^3y^3 - x^4 - 3y^4 - y + 2$, $\quad M_0(-1;1)$, $\quad M_1(-3;2)$;

ж) $z = x^4y - x^2 - y^4 + 3xy^3 + 2x$, $\quad M_0(1;1)$, $\quad M_1(3;2)$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. На основании геометрического смысла частных производных и рисунка 20, можно заключить, что касательные l_1 и l_2 определяют некоторую плоскость P, которая касается графика функции $z = f(x,y)$, т. е. поверхности в единственной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Эту плоскость называют **касательной** плоскостью. В случае явного задания функции $z = f(x,y)$ ее уравнение имеет вид:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0, \tag{1}$$

а в случае неявного задания функции, т. е. $F(x,y,z(x,y)) = 0$,

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{2}$$

Прямая L, проходящая через точку касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная касательной плоскости, называется **нормалью**. В случае явного задания функции $z = f(x, y)$ ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \tag{3}$$

а в случае неяного задания функции, т. е. $F(x, y, z(x, y)) = 0$,

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{4}$$

В этих уравнениях значения частных производных функции в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ являются координатами нормального вектора плоскости и направляющего вектора нормали.

Пример 9 – Записать уравнения касательной плоскости нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение:

1) $z = x^2 + y^2$, $M_0(1, -1, 2)$.

Поверхность задана явно. Следовательно, будем использовать уравнения (1), (3). Неизвестными в этих уравнениях являются значения частных производных в точке M_0. Найдем производные и их значения в точке M_0.

$$z'_x = \left(x^2 + y^2\right)'_x = 2x, \quad z'_x(M_0) = z'_x(x_0, y_0) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2\right)'_y = 2y, \quad z'_y(M_0) = z'_y(x_0, y_0) = 2y_0 = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Найденные значения $z'_x(x_0, y_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$ и координаты точки $M_0(1, -1, 2)$ подставляем в уравнения. После преобразований получаем искомые уравнения:

$2x - 2y - z - 2 = 0$ – уравнение касательной плоскости;

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ – уравнение нормали;

2) $x^2y^2 + x^2yz - xyz - xz^2 + 8 = 0$, $M_0(2, 1, 3)$.

Поверхность задана неявно. Следовательно, будем использовать уравнения (2), (4). Неизвестными в них являются значения частных производных в точке M_0. Найдем производные и их значения в M_0.

$$F'_x = \left(x^2y^2 + x^2yz - xyz - xz^2 + 8\right)'_x = 2xy^2 + 2xyz - yz - z^2,$$

$$F'_x(M_0) = 2x_0y_0^2 + 2x_0y_0z_0 - y_0z_0 - z_0^2 = 4.$$

$$F'_y = \left(x^2y^2 + x^2yz - xyz - xz^2 + 8\right)'_y = 2x^2y + x^2z - xz,$$

$$F'_y(M_0) = 2x_0^2y_0 + x_0^2z_0 - x_0z_0 = 14.$$

$$F'_z = \left(x^2y^2 + x^2yz - xyz - xz^2 + 8\right)'_z = x^2y - xy - 2xz,$$

$$F'_x(M_0) = x_0^2y_0 - x_0y_0 - 2x_0z_0 = -10.$$

Найденные значения производных и координаты точки M_0 подставляем в уравнения (2), (4). После преобразований получаем искомое уравнение касательной плоскости

$$2x + 7y - 5z + 4 = 0$$

и уравнение нормали

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-5}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1) $z = x^2 - 4y^2 + 2xy$, $M_0(-2;1;-4)$;
2) $z = 2x^2 + y^2$, $M_0(1;-1;3)$;
3) $z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y$, $M_0(1;1;1)$;
4) $z = 1 + x^2 + y^2 + 2xy$, $M_0(1;1;5)$;
5) $x^2 - 4y^2 + z^2 + 2xy = 0$, $M_0(-2;1;2)$;
6) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $M_0(1;2;-1)$;
7) $yz - x^2 + 2xy + 1 = 0$, $M_0(3;-2;2)$;
8) $2x^2 + y^2 - z = 0$, $M_0(1;-1;3)$.

2.1 Применение частных производных к исследованию функций

Локальные экстремумы функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области D. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $z = f(x, y)$, если для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности, отличных от $M_0(x_0, y_0)$, выполняются неравенства $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $\left(f(x, y) > f(x_0, y_0)\right)$ (рисунок 22).

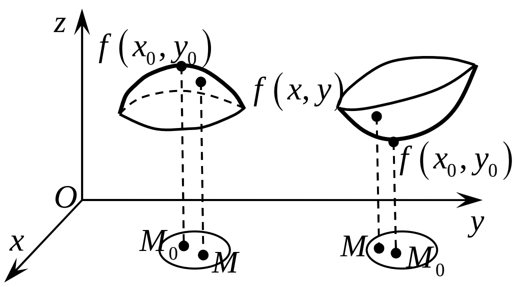


Рисунок 22

Значения функции в точках максимума (минимума) называют максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум называют одним словом – экстремум.

Необходимые условия существования экстремума. Как и в случае функции одной переменной, если дифференцируемая функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, а касательная плоскость параллельна плоскости Oxy. **Обратное не всегда верно**, т. е. если $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, то это не означает, что $(x_0 y_0)$ – точка экстремума, в этой точке экстремум может быть, а может и не быть. Кроме того, в точке экстремум может быть, а производные (или хотя бы одна из них) не существуют или равны бесконечности.

Точки, в которых частные производные $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ или хотя бы одна из них не существует или равна $\pm\infty$, называются критическими точками (точками возможного экстремума). Для однозначного установления экстремума и его характера в критических точках используют так называемые достаточные условия его существования.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть в критической точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{xy}(x_0, y_0)$ – значения частных производных второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$ и $\Delta = AB - C^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум есть, причем если $A < 0$ $(B < 0)$, то максимум, а если $A > 0$ $(B > 0)$ – минимум;

2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть, а может и не быть. В этих случаях требуются дополнительные исследования поведения функции в окрестности критической точки.

Из приведенного очевиден ***алгоритм нахождения экстремумов:***

1 Из необходимых условий $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \pm\infty, \nexists, \\ f'_y(x, y) = 0, \pm\infty, \nexists, \end{cases}$ решая систему, находим критические точки. Выбираем из них те, которые принадлежат области определения.

2 На основании достаточных условий определяем знак и значение Δ в каждой из найденных критических точек и устанавливаем наличие экстремума и его характер.

3 Если в какой-то из найденных точек экстремум существует, то вычисляем значение функции в них.

Пример 10 – Найти экстремумы функции.

Решение:

1) $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

$D(z)\in R^2$, т. е. вся плоскость Oxy. Найдем частные производные $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Из необходимых условий

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 3x^2 = 0, \\ z'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases}$$

решая систему, находим критические точки. Заметим, что первые производные в области определения существуют и конечны, поэтому производные приравниваем только нулю. Система нелинейная, однако легко решается.

Из второго уравнения выражаем $3x^2 = 4y^3$ и подставляем в первое $4y^3 - 6xy = 0$. Выносим $2y$ за скобки и получаем $2y\left(3x - 2y^2\right) = 0$. Отсюда $y = 0$, а следовательно, и $x = 0$, далее $3x - 2y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2}{3}y^2$, подставляем во второе уравнение рассматриваемой системы и получаем $3\left(\dfrac{2}{3}y^2\right)^2 - 4y^3 = 0$, т. е. $\dfrac{4}{3}y^4 - 4y^3 = 0$ или $y^3(y-3) = 0$. Опять имеем произведение двух множителей, из которого следует, что $y = 0$ или $y = 3$. Для $y = 0$ получаем $x = 0$ – это решение мы уже имеем, а для $y = 3$ получаем $x = \dfrac{2}{3}3^2 = 6$.

Таким образом, получили решение системы: $(x_1 = 6,\ y_1 = 3)$, $(x_2 = 0,\ y_2 = 0)$, т. е. две критические точки: $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$.

Для определения наличия и характера экстремума в критических точках находим вторые производные:

$$z''_{xx} = 6y - 6x, \quad z''_{yy} = -12y^2, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 6x,$$

и в соответствии с достаточными условиями вычисляем их значения в критических точках и величину Δ.

Для $M_1(6,3)$: $A = z''_{xx}(6,3) = -18$, $B = z''_{yy}(6,3) = -108$, $C = z''_{xy}(6,3) = 36$ и $\Delta = AB - C^2 = 648 > 0$. Следовательно, в точке $M_1(6,3)$ экстремум есть, а поскольку $A = -18 < 0$ $(B = -108 < 0)$, то в точке M_1 локальный максимум и $z_{\max} = z(6,3) = 27$.

Для $M_2(0,0)$: $A = z''_{xx}(0,0) = 0$, $B = z''_{yy}(0,0) = 0$, $C = z''_{xy}(0,0) = 0$ и $\Delta = AB - C^2 = 0$. Следовательно, в точке $M_2(0,0)$ экстремум может быть, а может и не быть. Проводим дополнительные исследования поведения функции в окрестности этой точки.

Значение функции в точке $M_2(0,0)$ равно $z(0,0) = 0$. Далее, например, при $x = 0$, $y \neq 0$ имеем $z = -y^4 < 0$ для любых y, а при $x \neq 0$, $y = 0$ имеем

$z=-x^3=\begin{cases}<0 \text{ при } x>0\\ >0 \text{ при } x<0\end{cases}$, т. е. в окрестности точки $M_2(0,0)$ вдоль оси Ox функция знакопеременна. Значит, в точке M_2 экстремума нет;

2) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

$D(z)\in R^2$, т. е. вся плоскость Oxy. Найдем частные производные $z'_x=2x-y+9$, $z'_y=-x+2y-6$. Из необходимых условий

$$\begin{cases}z'_x=2x-y+9=0,\\ z'_y=-x+2y-6=0,\end{cases}$$

решая систему, находим критические точки. Первые производные в области определения существуют и конечны, поэтому производные приравниваем только нулю. Система линейная и имеет единственное решение: $x=-4,\ y=1$. Получили одну критическую точку $M_0(-4,1)$. Находим вторые производные:

$$z''_{xx}=2,\quad z''_{yy}=2,\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-1.$$

Вторые производные являются постоянными во всей области определения, а следовательно, и в критической точке $M_0(-4,1)$, т. е. $A=z''_{xx}(-4,1)=2$, $B=z''_{yy}(-4,1)=2$, $C=z''_{xy}(-4,1)=-1$. Вычисляем $\Delta=AB-C^2=3>0$. Следовательно, в точке $M_0(-4,1)$ экстремум есть, а поскольку $A=2>0$ $(B=2>0)$, то в точке $M_0(-4,1)$ локальный минимум и $z_{\min}=z(-4,1)=-1$;

3) $z=x^4+y^4$.

$D(z)\in R^2$, т. е. вся плоскость Oxy. Найдем частные производные $z'_x=4x^3$, $z'_y=4y^3$. Из необходимых условий

$$\begin{cases}z'_x=4x^3=0,\\ z'_y=4y^3=0,\end{cases}$$

решая систему, находим критические точки. Первые производные в области определения существуют и конечны, поэтому производные приравниваем только нулю. Система имеет единственное решение $x=0,\ y=0$. Получили одну критическую точку $M_0(0,0)$. Находим вторые производные:

$$z''_{xx}=12x^2,\quad z''_{yy}=12y^2,\quad z''_{xy}=z''_{yx}=0.$$

Вычисляем их значения в критической точке $M_0(0,0)$, т. е. $A=z''_{xx}(0,0)=0$, $B=z''_{yy}(0,0)=0$, $C=z''_{xy}(0,0)=0$ и величину $\Delta=AB-C^2=0$. Следовательно, в точке $M_0(0,0)$ экстремум может быть, а может и не быть. Проводим дополнительные исследования поведения функции в окрестности этой точки.

Значение функции в точке $M_0(0,0)$ равно $z(0,0)=0$. Далее, например, при $x=0$, $y\neq 0$ имеем $z=y^4>0$ для любых y, а при $x\neq 0$, $y=0$ имеем $z=x^4>0$ для любых x, т. е. в окрестности точки $M_0(0,0)$ вдоль координатных осей Ox и Oy, а также в четвертях плоскости Oxy функция знакоположительна. Значит, в точке $M_0(0,0)$ экстремум есть, а именно локальный минимум и $z_{\min}=z(0,0)=0$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти локальные экстремумы функции двух переменных:

1) $z=2x^3+xy^2-5x^2+y^2$;
2) $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$;
3) $z=2xy-3x^2-2y^2+1$;
4) $z=x^2+8y^3-4xy+1$;
5) $z=x^3+8y^3-6xy+1$;
6) $z=x^2+xy-y^2+x-y+1$;
7) $z=x^3+12xy+3y^2+6$;
8) $z=3-2x^3-6xy-y^2$;
9) $z=x^2+3xy+y^3-x$;
10) $z=3x+64-x^2-xy-y^2$;
11) $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;
12) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

2.2 Примерный перечень задач к аудиторной контрольной работе по дифференциальному исчислению функций одной и многих переменных

1 Найти производные функций $y=7x^3+\dfrac{3}{x^2}-\sqrt[7]{x^3}-\dfrac{5}{x}$, $y=x^4\ln x$, $y=\dfrac{\cos x}{x^3}$, $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^3+2x+6}$.

2 Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3$ в точке с $x_0=1$.

3 Найти пределы $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7x}$.

4 Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $y=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x+1$.

5 Найти частные производные второго порядка функции $z=\ln(xy)$.

6 Найти:

а) производную функции $z=x^3y+5x^2-y^4+3xy-4$ в точке $M_0(1,1)$ по направлению к точке $M_1(3,2)$;

б) градиент и скорость наибыстрейшего возрастания функции из точки M_0.

7 Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 2y^2$ в точке $M_0(1,1,3)$.

8 Найти локальные экстремумы функции двух переменных $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

Замечание – В реальной аудиторной контрольной работе четыре задачи из приведенного перечня.

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математический анализ: справочное пособие в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика : в 2 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1992. – Ч. 1.

3 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике: учебное пособие в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие в 4 ч. / Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Высшая школа, 1990. – Ч. 1–2.