МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов всех специальностей заочной формы обучения

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Могилев 2019

УДК 517.5
ББК 22.161.5
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» мая 2019 г., протокол № 9

Составители: А. Г. Козлов;
Д. В. Роголев;
А. А. Романенко

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по теме «Интегральное исчисление функций одной и многих переменных», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл (НИ). В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную $f'(x)$ или дифференциал $df = f'(x)dx$. В интегральном исчислении решается обратная задача: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x)=f(x)$. Искомую функцию $F(x)$ называют **первообразной** для $f(x)$. Очевидно, что первообразной для $f(x)$ будет также функция $F(x)+C$, где $C=\text{const}$, поскольку $\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$. Точнее, $F(x)+C$ – это множество первообразных, поскольку постоянная C не определена. Например, для функции $f(x)=x$ множество первообразных есть $F(x)=x^2/2+C$, для функции $f(x)=x^2$ имеем $F(x)=x^3/3+C$, для $f(x)=\cos x$ имеем $F(x)=\sin x+C$ и т. д.

Множество всех первообразных $F(x)+C$ для $f(x)$ называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx$, т. е. $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$.

При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, dx – дифференциалом независимой переменной; символ $\int$ – знак неопределенного интеграла. Операцию нахождения НИ называют интегрированием.

Условие существования НИ. Всякая непрерывная на (a,b) функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную, т. е. неопределенный интеграл от нее существует.

Свойства НИ:

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;

2) $\int dF(x)=F(x)+C$ (НИ от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной);

3) $\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx$, где $a=\text{const}$ (постоянный множитель можно выносить за знак НИ);

4) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (НИ от суммы, разности двух функций равен сумме, разности НИ от этих функций);

5) если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ (формула НИ остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную). Это свойство называют свойством **неизменности (инвариантности)** формулы интегрирования.

Поскольку интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то можем записать таблицу НИ от основных элементарных функций путем обращения соответствующих формул таблицы производных.

Таблица НИ от основных элементарных функций:

1) $\int 0dx = C, \quad C = \mathrm{const}$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$.

В частности, при $\alpha = 0$ имеем $\int 1dx = x + C$, при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$, при $\alpha = -2$ имеем $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C$;

3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$. При $a = e$, $\int e^x dx = e^x + C$, поскольку $\ln e = 1$;

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\quad \int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$;

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, $\quad \int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$;

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\,x + C$, $\quad \int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}dx = \mathrm{th}\,x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}\,x + C$, $\quad \int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}dx = -\mathrm{cth}\,x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2}dx = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$.

В частности, при $a = 1$ имеем $\int \dfrac{1}{x^2+1}dx = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + C$;

10) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2}dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$.

В частности, при $a = 1$ имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$;

13) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

14) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$.

Примечание – Интегралы 1–11 называют табличными. Таблицу интегралов и свойства НИ следует **знать наизусть**.

Основные методы и приемы интегрирования. Суть всех методов и приемов интегрирования заключается в том, чтобы свести интеграл к табличному. В связи с этим актуальным является **знание наизусть свойств НИ и таблицы НИ** от основных элементарных функций, чтобы знать или предполагать, как и к какому(им) интегралу(ам) сводить. В интегральном исчислении нет универсальных правил отыскания первообразных. Рассмотрим основные методы и приемы интегрирования и дадим некоторые рекомендации. Результат интегрирования проверяется дифференцированием. Заметим, что интегрирование может быть осуществлено не единственным способом.

Непосредственное интегрирование. Под ним понимается приведение НИ к табличному или табличным путем преобразования подынтегральной функции и использования свойств НИ. Подробности на примерах.

Пример 1 – Найти НИ.

Решение:

1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)dx=$
$=\int 1dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C.$

Проверка: $\left(F(x)+C\right)'=\left(x-\cos x+C\right)'=1+\sin x=f(x);$

2) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot\left(3^2\right)^x dx=\int\left(2\cdot 3^2\right)^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C;$

3) $\int\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$
$=2\sqrt{x}+\ln x-\frac{x^{(-2/3)+1}}{(-2/3)+1}=2\sqrt{x}+\ln x-3\sqrt[3]{x}+C;$

4) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\left|\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\right|=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C;$

5) $\int\mathrm{tg}^2 x\,dx=\left|\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1\right|=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\mathrm{tg}\,x-x+C;$

6) $\int\frac{dx}{x^2+5}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$

Замечание – При интегрировании нескольких слагаемых появляются несколько произвольных постоянных, но в итоге записываем только одну, т. к. сумма постоянных есть постоянная.

Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Суть метода заключается во введении новой переменной, после чего интеграл с новой переменной может быть табличным или сводится к табличным. Пусть требуется найти НИ $\int f(x)dx$, который не является табличным. Переменную x заменяем на некоторую функцию $x=\varphi(t)$, которая должна быть строго монотонной и иметь непрерывную производную. Соответственно, $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$. В результате получаем формулу замены переменной в НИ:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \psi(t)dt.$$

После нахождения интеграла по переменной t следует вернуться к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$, т. е. найдя обратную функцию.

Замечание – Общих методов выбора подстановки нет. Умение выбирать подстановку приобретается многократными упражнениями, т. е. практикой.

Пример 2 – Найти НИ.

Решение:

1) $$\int \cos(2x+1)\,dx = \left| 2x+1=t,\ x=\frac{1}{2}(t-1),\ dx=\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)'_t dt = \frac{1}{2}dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = |t=2x+1| = \frac{1}{2}\sin(2x+1)+C.$$

Проверка: $\left(F(x)+C\right)' = \left(\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C\right)' = \cos(2x+1) = f(x)$;

2) $$\int \sqrt{x-3}dx = \left| x-3=t,\ x=t+3,\ dx=(t+3)'_t\,dt = dt \right| = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = |t=x-3| = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}+C;$$

3) $$\int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \frac{x}{4}=t,\quad x=4t,\quad dx=(4t)'_t\,dt = 4dt \right| = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C;$$

4) $$\int \frac{1}{9x^2+1}dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1}dx = \left| 3x=t,\quad x=\frac{t}{4},\quad dx=\left(\frac{t}{4}\right)'_t dt = \frac{1}{4}dt \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t = |\ t=3x| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \frac{1}{2x-5}dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$; 7) $\int \sin(3x+5)\,dx$; 10) $\int \frac{1}{\cos^2(x-3)}dx$;

2) $\int (3x+5)^{99}\,dx$; 5) $\int \frac{1}{(2x-1)^5}dx$; 8) $\int e^{2x+3}dx$; 11) $\int \frac{1}{4x^2+1}dx$;

3) $\int \frac{1}{(7x+1)^2}dx$; 6) $\int \sqrt[3]{5x+2}\,dx$; 9) $\int 2^{3x}dx$; 12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Прием интегрирования путем подведения подынтегральной функции или ее части под знак дифференциала. Напомним одно из свойств НИ, а именно свойство неизменности формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ табличный, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ – некоторая дифференцируемая функция x.

Пусть требуется найти интеграл $\int \psi(x)dx$, который не является табличным. Суть приема заключается в том, чтобы в подынтегральном выражении $\psi(x)dx$ в качестве множителя выделить дифференциал некоторой функции $u=\varphi(x)$, т. е. $du=\varphi'(x)dx$, и подынтегральное выражение $\psi(x)dx$ представить в виде $\psi(x)dx = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(u)du$, где $u=\varphi(x)$. После чего интеграл $\int f(u)du$ должен стать табличным или сводится к нему. Найдя первообразную $F(u)$, следует вернуться к переменной x по формуле $u=\varphi(x)$, т. е. получить $F(\varphi(x))$.

Замечание – При интегрировании путем подведения под знак дифференциала используют свойства дифференциала. Например:

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b),\quad xdx=\frac{1}{2}d(x^2),\quad x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3),\quad \frac{1}{x^2}dx=-d\left(\frac{1}{x}\right),\quad \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{1}{x}dx=d(\ln x),\quad \cos x\,dx=d(\sin x),\quad \sin x\,dx=-d(\cos x),\quad \frac{1}{\cos^2 x}dx=d(\operatorname{tg} x) \text{ и т. д.}$$

Пример 3 – Найти НИ.

Решение:

$$1)\ \int \cos(2x+1)\,dx = \left| dx=\frac{1}{2}d(2x+1) \right| = \int \cos(2x+1)\,\frac{1}{2}d(2x+1) = |2x+1=u| =$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C = |u=2x+1| = \frac{1}{2}\sin(2x+1)+C.$$

Видно, что в качестве функции u здесь выступает $u = 2x+1$. Этот интеграл мы нашли ранее методом замены переменной;

$$2)\ \int xe^{x^2}\,dx = \left| x\,dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) \right| = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 = \left|x^2 = u\right| = \frac{1}{2}\int e^u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C = \left|u = x^2\right| = \frac{1}{2}e^{x^2} + C;$$

$$3)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\left(\sqrt{x}\right) \right| = 2\int \sin\sqrt{x}\,d\left(\sqrt{x}\right) = -2\cos\sqrt{x} + C;$$

$$4)\ \int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = \left| \frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right) \right| = -\int \cos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x} + C;$$

$$5)\ \int e^{\cos x}\sin x\,dx = \left|\sin x\,dx = -d\left(\cos x\right)\right| = -\int e^{\cos x}\,d\left(\cos x\right) = \left|\cos x = u\right| =$$

$$= -\int e^u\,du = -e^u + C = \left|u = \cos x\right| = -e^{\cos x} + C;$$

$$6)\ \int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,dx = \left| x^2 dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{\cos^2 x^3}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + C;$$

$$7)\ \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}\,dx = \left| \frac{1}{1+x^2}dx = d\left(\operatorname{arctg} x\right) \right| = \int \operatorname{arctg}^5 x\,d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C;$$

$$8)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,\frac{1}{x}\,dx = \left| \frac{1}{x}dx = d\left(\ln x\right) \right| = \int \ln x\,d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^2 x}{2} + C;$$

$$9)\ \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left|\sin x\,dx = -d\left(\cos x\right)\right| = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\left(\cos x\right) = -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

Замечание – Из приведенных примеров видно, что замена переменной и прием подведения под знак дифференциала – эквивалентные операции. Но не всегда можно легко угадать подстановку, а подведение под знак дифференциала часто очевидно.

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$; 4) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 7) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$; 10) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; 11) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; 6) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; 9) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$; 12) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du .$$

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям. Она дает возможность нахождения интеграла $\int u dv$ свести к нахождению интеграла $\int v du$. Суть ее в том, что при удачном разбиении подынтегрального выражения на части u и dv второй интеграл должен быть проще.

Укажем некоторые часто встречающиеся типы интегралов, которые следует находить по частям, и дадим рекомендации по выбору u и dv.

1 В интегралах вида $\int P_n(x)\, e^{kx} dx$, $\int P_n(x) \cos kx\, dx$, $\int P_n(x) \sin kx\, dx$, где $P_n(x)$ – многочлен, k – число, в качестве u следует брать $P_n(x)$, а в качестве dv – все остальное, т. е.

$$u = P_n(x), \quad dv = e^{kx} dx,$$
$$dv = \cos kx\, dx,$$
$$dv = \sin kx\, dx.$$

При этом формулу интегрирования по частям необходимо применять n раз.

2 В интегралах вида $\int P_n(x) \arcsin x\, dx$, $\int P_n(x) \arccos x\, dx$, $\int P_n(x) \ln x\, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arc\,tg} x\, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arc\,ctg} x\, dx$ в качестве dv следует брать $P_n(x) dx$, а в качестве u – все остальное, т. е.

$$dv = P_n(x) dx, \quad u = \arcsin x,$$
$$u = \arccos x,$$
$$u = \ln x,$$
$$u = \operatorname{arc\,tg} x,$$
$$u = \operatorname{arc\,ctg} x.$$

3 В интегралах вида $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int e^{ax} \sin bx\, dx$, где a и b – числа, нет разницы, что брать качестве u, а что в качестве dv, т. е.

$$\text{или} \begin{cases} u = e^{ax}, & dv = \cos bx\, dx, \\ & dv = \sin bx\, dx, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} dv = e^{ax} dx, & u = \cos bx, \\ & u = \sin bx. \end{cases}$$

При этом формулу интегрирования по частям необходимо применять дважды. Подробности на примерах.

Пример 4 – Найти НИ.

Решение:

1) $\int (2x+5)e^{3x}\,dx$. Это интеграл первого вида. Применяем формулу интегрирования по частям $\int udv = u\cdot v - \int vdu$.

$$\int (2x+5)e^{3x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+5 & du = (2x+5)'\,dx = 2dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \otimes.$$

От функции u нашли дифференциал du, а от дифференциала dv нашли интеграл без добавления константы C. В результате получили интеграл $\int e^{3x}dx$, который проще исходного. Далее находим его и записываем:

$$\otimes = \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C = \frac{4}{9}(x+2)e^{3x} + C;$$

2) $\int \left(x^2+1\right)\cos 5x\,dx$. Опять имеем интеграл первого вида. Применяем формулу $\int udv = u\cdot v - \int vdu$.

$$\int \left(x^2+1\right)\cos 5x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1 & du = \left(x^2+1\right)'dx = 2xdx \\ dv = \cos 5xdx & v = \int \cos 5xdx = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^2+1\right)\sin 5x - \frac{2}{5}\int x\sin 5xdx = \otimes$$

В результате получили интеграл $\int x\sin 5xdx$, который проще исходного, его опять находим по частям:

$$\otimes = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin 5xdx & v = \int \sin 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}\left(x^2+1\right)\sin 5x -$$

$$-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}x\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5xdx\right) = \frac{1}{5}\left(x^2+1\right)\sin 5x + \frac{2}{25}\cos 5x - \frac{1}{125}\sin 5x + C;$$

3) $\int x\ln x\,dx$. Имеем интеграл второго вида. Находим его:

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}x^2dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C;$$

4) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$. Это интеграл третьего вида. Как указывалось выше, нет разницы, что брать в качестве u, а что в качестве dv. При этом формулу применяем дважды. При втором интегрировании получим равенство, содержащее исходный интеграл. Поэтому исходный интеграл обозначим буквой I.

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax} & du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bx\,dx & v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{vmatrix}=e^{ax}\frac{1}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=\otimes.$$

Для $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ снова применяем формулу интегрирования по частям.

$$\otimes=e^{ax}\frac{1}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax} & du=ae^{ax}dx \\ dv=\sin bx\,dx & v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{vmatrix}=$$

$$=e^{ax}\frac{1}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\left(-e^{ax}\frac{1}{b}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)=$$

$$=e^{ax}\frac{1}{b}\sin bx+e^{ax}\frac{a}{b^2}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{b^2}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)-\frac{a^2}{b^2}\cdot I.$$

В результате получили уравнение относительно I:

$$I=\frac{e^{ax}}{b^2}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)-\frac{a^2}{b^2}\cdot I.$$

Решаем его. $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)+C$.

Аналогично для $\int e^{ax}\sin bx\,dx=\ldots=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C$. Получить самостоятельно.

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int x^2e^x\,dx$; 3) $\int (x+1)\cos 2x\,dx$; 5) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

2) $\int \left(x^2+1\right)\sin x\,dx$; 4) $\int x^2\ln x\,dx$; 6) $\int \arcsin x\,dx$.

Примечание – Мы рассмотрели основные приемы и методы нахождения НИ, которые показывают, что операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования. В связи с этим отметим, что успехи в интегрировании зависят от знания рекомендованных приемов, сообразительности и тренированности, навыки приобретаются путем многократных упражнений. Далее рассмотрим конкретные типы интегралов и дадим рекомендации по их нахождению.

Интегрирование простейших правильных рациональных дробей. Напомним типы простейших правильных рациональных дробей:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\quad k \geq 2, k \in R$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k \geq 2, k \in N$ и дискриминант $D<0$.

Здесь A, a, M, N, p, q – числа. Эти дроби называют простейшими правильными рациональными дробями 1–4 типов. Интегралы от них:

1) $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\int \dfrac{1}{x-a}dx = A\int \dfrac{1}{x-a}d\left(x-a\right) = A \cdot \ln\left(x-a\right)+C$;

2) $\int \dfrac{A}{\left(x-a\right)^k}dx = A\int \dfrac{d\left(x-a\right)}{\left(x-a\right)^k} = A\int \left(x-a\right)^{-k} d\left(x-a\right) = A \cdot \dfrac{\left(x-a\right)^{-k+1}}{-k+1}+C$;

3) $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. Интеграл находится с помощью выделения полного квадрата в знаменателе, т. е. $x^2+px+q = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)$, с последующей подстановкой $t = x+\dfrac{p}{2}$, $x = t-\dfrac{p}{2}$, $dx = d\left(t-\dfrac{p}{2}\right) = dt$. Данный прием справедлив и в случае $D>0$.

Замечание – Интегралы от дробей 1-го и 2-го типов, как видно, находятся в общем виде с произвольными числами a, A. Интегралы от дробей типа 4 рассматривать не будем ввиду их громоздкости. При необходимости смотрим, например, [1]. Рассмотрим интегралы от дробей 3-го типа.

Пример 5 – Найти НИ.

Решение:

1) $\int \dfrac{1}{x^2+3x+5}dx$. Имеем интеграл от дроби 3-го типа, в котором $M=1$, $N=0$. Выделяем полный квадрат в знаменателе, используя формулу

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а именно $x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$.

Теперь продолжаем, делая замену:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+5}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}dx = \left| x+\frac{3}{2} = t,\, x = t-\frac{3}{2},\, dx = \left(t-\frac{3}{2}\right)' dt = dt \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{11}} + C = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{11}} + C = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C;$$

2) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx$. Имеем интеграл от дроби 3-го типа, в котором $M=3$, $N=1$. Выделяем полный квадрат в знаменателе $x^2+2x+10 = x^2+2\cdot 1\cdot x + 1 + 9 = = (x+1)^2 + 3^2$. Теперь продолжаем, делая замену:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+3^2}dx = \left| x+1 = t,\ x = t-1,\ dx = dt \right| =$$

$$= \int \frac{3t-2}{t^2+3^2}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+3^2} - 2\int \frac{1}{t^2+3^2}dt = \otimes.$$

Видно, что второй интеграл является табличным, а для первого воспользуемся приемом подведения под знак дифференциала, а именно $tdt = \frac{1}{2}d\left(t^2+3^2\right)$. В результате получаем

$$\otimes = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+3^2\right)}{t^2+3^2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+3^2\right) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C, \text{ где } t = x+1.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$; 4) $\int \frac{dx}{x^2+5x+10}$; 7) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2+6x+13}$; 10) $\int \frac{(x-1)dx}{-x^2-6x+7}$;

2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+3x+7}$; 8) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+6x-7}$; 11) $\int \frac{(x-1)dx}{-x^2-6x+7}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+7x+13}$; 9) $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2-5x+6}$; 12) $\int \frac{(2x+3)dx}{-x^2+5x-6}$.

Интегрирование дробно-рациональных функций (рациональных дробей). Это интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены соответственно n-й и m-й степеней. Для таких интегралов есть общее правило интегрирования.

1 Если дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильная, т. е. $n \geq m$, то ее следует представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной рациональной дроби с помощью деления многочленов углом.

2 В случаях, когда дробь правильная, но $m > 2$, то знаменатель дроби следует разложить на линейные $(x-a)$ и квадратичные $\left(x^2 + px + q\right)$ множители (для квадратичных множителей дискриминант < 0), а саму правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших правильных рациональных дробей 1–4 типов.

3 Проинтегрировать многочлен и сумму простейших дробей.

Замечание – Интегралы от дробно-рациональных функций находятся всегда. В связи с этим целью многих подстановок является сведения подынтегральной функции к дробно-рациональной, а саму процедуру называют рационализацией интеграла.

Пример 6 – Найти НИ.

Решение:

1) $\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x-2}dx$. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^4 - 5x + 9}{x-2}$ представляет собой неправильную рациональную дробь. Старшая степень x в числителе $n = 4$, а старшая степень x в знаменателе $m = 1$. Выделим целую часть и правильную рациональную дробь с помощью деления многочленов углом. Получим $f(x) = \frac{x^4 - 5x + 9}{x-2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x-2}$. Теперь проинтегрируем:

$$\int \frac{x^4 - 5x + 9}{x-2}dx = \int \left(x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x-2} \right) dx =$$

$$= \int x^3 dx + 2\int x^2 dx + 4\int x\, dx + 15\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3x + 15\ln(x-2) + C;$$

2) $\int \frac{x}{x^3 - 1}dx$. Дробь правильная, однако не является простейшей. Старшая степень знаменателя $m = 3 > 2$. Дробь следует разложить на сумму простейших правильных рациональных дробей. Для этого знаменатель представим в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{x^3-1^3}=\frac{x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.$$

Далее дробь представим в виде суммы простейших правильных дробей с неопределенными коэффициентами. Линейному множителю $(x-1)$ соответствует простейшая дробь 1-го типа, а квадратичному $\left(x^2+x+1\right)$ – дробь 3-го типа, т. е.

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Здесь величины A, B и C – неопределенные коэффициенты (числа). Найдем их следующим образом. Правую часть последней дроби приведем к общему знаменателю и получим равенство

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.$$

Получили, что две дроби равны, в них равны знаменатели, а следовательно, должны быть равны и числители, т. е.

$$x=A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1).$$

Раскроем скобки в правой части, собирая коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).$$

Получили равенство двух многочленов. А, как известно, два многочлена тождественно равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях. Из этого условия получим систему линейных алгебраических уравнений относительно A, B и C, т. е.

$$\begin{cases} A+B \qquad\;\; =0, \\ A-B+C=1, \\ A \qquad\; -C=0. \end{cases}$$

Ее решение: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$. В результате разложили правильную дробь на суммы простейших правильных рациональных дробей:

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1},$$

интегралы, от которых находятся с помощью рассмотренных выше приемов:

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \ldots =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \frac{x^3+2x^2-7}{x-5}dx$; 3) $\int \frac{x}{x^3+1}dx$; 5) $\int \frac{x+2}{x^3+x}dx$; 7) $\int \frac{2x+3}{x\left(x^2-5x+6\right)}dx$;

2) $\int \frac{x^7}{x^2+1}dx$; 4) $\int \frac{x+1}{x^3-8}dx$; 6) $\int \frac{x}{x^3+8}dx$; 8) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$.

Интегрирование некоторых тригонометрических выражений. Нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Функцию R переменных $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление), принято обозначать $R(\sin x, \cos x)$ и называть рациональной функцией тригонометрических аргументов. При этом буква R означает рациональную функцию. Находить такие интегралы можно по-разному. Все зависит от вида подынтегральной функции: преобразовать подынтегральное выражение с использованием известных тригонометрических формул, применить прием подведения под знак дифференциала, метод подстановки, метод интегрирования по частям или несколько приемов и методов последовательно.

Пример 7 – Найти НИ.

Решение:

1) $$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x \, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C;$$

2) $$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C;$$

3) $$\int \sin 8x \cos 2x \, dx = \left|\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 6x + \sin 10x)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{10}\cos 10x\right) + C;$$

4) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, d(\sin x) =$

$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) = |\sin x = t| = \int t^2 (1 - t^2)\, dt = \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C,$

где $t = \sin x$.

Однако для нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ существует общая универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, которая нахождение интеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводит к нахождению интеграла от рациональной функции обычной переменной, например t. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В результате $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R(t)dt$, где $R(t)$ – рациональная функция переменной t. Способ громоздок, но всегда приводит к успеху. Подстановка особенно эффективна (в смысле простоты) при нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Пример 8 – Найти НИ.

Решение

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{dt}{(t + 1/2)^2 + 7/4} =$$

$$= \int \frac{d(t + 1/2)}{(t+1/2)^2 + \left(\sqrt{7}/2\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\left(\operatorname{tg}(x/2) + 1/2\right)}{\sqrt{7}/2} + C.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$; 3) $\int \cos^3 x\, dx$; 5) $\int \frac{1}{5 + 4\sin x}dx$; 7) $\int \frac{1}{\cos x - 3\sin x}dx$;

2) $\int \sin^2 x\, dx$; 4) $\int \cos^2 x\, \sin^3 x\, dx$; 6) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$; 8) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

Далее кратко приведем некоторые типы интегралов и приемы их нахождения, которые встречаются в инженерных приложениях.

1 Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x\,dx$ $(n \in N, n > 1)$ рационализируются с помощью подстановок $\mathrm{tg}\,x = t$, $\mathrm{ctg}\,x = t$ соответственно.

2 Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{(mx+n)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ называют НИ от квадратичных иррациональностей. Они находятся с помощью выделения полного квадрата под знаком радикала, т. е. $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$, и подстановки $t = x + \frac{b}{2a}$.

3 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_r]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_r}}\right)dx$ рационализируются с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\lambda$, где λ – НОК чисел $\{n_i\}$.

4 Интегралы вида

$$а)\ \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ б)\ \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ в)\ \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

приводятся к интегралам от функций рационально зависящих от тригонометрических функций с помощью подстановок, для *а*) $x = a\sin t$, для *б*) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, для *в*) $x = \frac{a}{\sin t}$. Примеры двух таких интегралов, которые наиболее часто встречаются в приложениях, приведены в таблице НИ (интегралы 12, 13, 14).

Пример 9 – Найти НИ:

Решение:

1) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}\,x = t, \\ x = \mathrm{arctg}\,t,\ \ dx = \frac{1}{1+t^2}dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^2dt}{1+t^2} = \ldots$ – рационализовали НИ;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C$,

где $t = x+2$;

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x+2}} = \left| \begin{matrix} x+2=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5}{t^2-t^3}dt = 6\int \frac{t^3}{1-t}dt = \ldots$$ – рационализовали НИ;

4) $$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{matrix} \frac{1-x}{1+x}=t^2, & x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}, & dx=-\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)^2} \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C;$$

5) $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos t\, dt \end{matrix} \right| = \ldots = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 t}dt - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C, \text{ где } t = \arcsin\frac{x}{2}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти НИ:

1) $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

5) $\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$;

6) $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$;

7) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}dx$;

8) $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Примечание – Более подробную информацию о типах интегралов и рекомендации по их нахождению можно найти в [1–5]. Для наиболее часто встречающихся интегралов составлены справочники (см., например, [6, 7]), которые можно найти в библиотеках и сети Интернет.

Известно, что условием существования НИ является непрерывность подынтегральной функции. Если первообразная найдена в виде элементарной функции, то говорят, что интеграл «берется». Однако существуют интегралы, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. В таких случаях говорят, что интеграл «не берется», и его называют «неберущимся». Приведем примеры некоторых «неберущихся» интегралов, которые часто встречаются в различных приложениях:

$$\int e^{\pm x^2}dx;\ \int \cos x^2 dx;\ \int \sin x^2 dx;\ \int \frac{\sin x}{x}dx;\ \int \frac{\cos x}{x}dx;\ \int \frac{e^x}{x}dx;\ \int \frac{1}{\ln x}dx;\ \int \sqrt{\sin x}\,dx \text{ и др.}$$

Определенный интеграл (ОИ). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Выполним следующие действия.

1 С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ отрезок $[a,b]$ произвольным образом разобьем на n частей (рисунок 1).

2 На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольным образом выберем точку c_i, вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$, умножим это значение на длину частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, т. е. $f(c_i)\cdot\Delta x_i$, и составим сумму всех таких произведений $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$, которую называют интегральной.

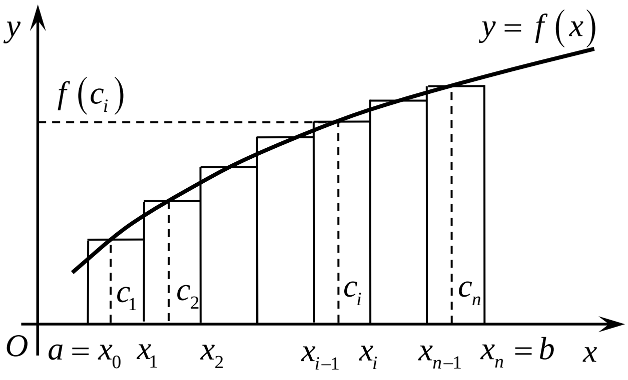

Рисунок 1

3 Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка, т. е. $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$, и вычислим предел интегральной суммы при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные, ни от выбора точек c_i в них, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i .$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно, а отрезок $[a,b]$ – областью интегрирования. Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода, то ОИ существует.

Геометрический смысл ОИ. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, называют криволинейной трапецией (см. рисунок 1). Из определения ОИ следует, что если $f(x) > 0$, то произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ есть площадь i-го частичного прямоугольника, а сумма всех таких произведений равна площади ступенчатой фигуры (см. рисунок 1) и приблизительно равна площади криволинейной трапеции. В пределе при $n \to \infty$ $(\lambda \to 0)$ площадь ступенчатой фигуры становится равной площади криволинейной трапеции, т. е. $\int_a^b f(x)dx = S$, в этом состоит геометрический смысл ОИ.

Основные свойства ОИ:

1) если $a = b$, то $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b (c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x))dx = c_1\int\limits_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int\limits_a^b f_2(x)dx$, где $c_1, c_2 = \text{const}$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (свойство аддитивности ОИ). При этом расположение точек a, b и c может быть любым.

Вычисление ОИ. Формула Ньютона–Лейбница. Вычисление ОИ по определению (через предел интегральной суммы) представляет собой достаточно сложную задачу. В связи с этим для вычисления ОИ доказана теорема, которая позволяет существенно упростить вычисление ОИ.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эту формулу называют формулой **Ньютона–Лейбница**, и она считается основной формулой интегрального исчисления. Она дает возможность избавиться от вычисления ОИ как предела интегральной суммы и задачу вычисления ОИ свести к задаче нахождения одной из первообразных и вычислению разности значений этой первообразной на концах области интегрирования.

Основные методы вычисления ОИ. Если первообразная находится непосредственно, то вычисление ОИ осуществляется непосредственно по формуле Ньютона–Лейбница.

Пример 10 – Вычислить ОИ.

Решение:

1) $\int\limits_0^1 \left(x^2 + 5x - 7\right)dx = \int\limits_0^1 x^2 dx + 5\int\limits_0^1 xdx - 7\int\limits_0^1 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + 5\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - 7x\Big|_0^1 =$

$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + 5\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 7\cdot 1 - 0 = -\frac{25}{6}$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -(0 - 1) = 1$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0\right) = (1 - 0) = 1.$

Замена переменной в ОИ (интегрирование подстановкой). Пусть при нахождении первообразной $F(x)$ сделана подстановка $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)-$ монотонная и дифференцируемая функция на $[\alpha,\beta]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где значения α и β находятся из решения системы $\begin{cases} a=\varphi(\alpha), \\ b=\varphi(\beta). \end{cases}$

Замечание – Можно не переходить к пределам интегрирования по t, т. е. к α и β. Найдя первообразную $F(t)$ для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и возвращаясь к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$, т. е. найдя обратную функцию, используем пределы по x, т. е. a и b.

Пример 11 – Вычислить ОИ.

Решение:

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx=\left|2x-1=t,\quad x=\frac{1}{2}(t+1),\quad dx=d\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)=\frac{1}{2}dt\right|=\otimes.$

Найдем новые пределы $\begin{cases} 2\cdot 1-1=\alpha \\ 2\cdot 2-1=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=3 \end{cases}$. Следовательно,

$$\otimes=\int_1^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^3=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3, \text{ поскольку } \ln 1=0.$$

Иначе, не изменяя пределы интегрирования,

$$\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx=\ldots=\frac{1}{2}\ln t\Big|=|t=2x-1|=\frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Как видно, результат не изменился.

Замечание – При вычислении ОИ для нахождения первообразной справедливы все рекомендации и приемы, изложенные выше, в частности, прием подведения под знак дифференциала;

2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx=\left|xdx=\frac{1}{2}dx^2\right|=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1);$

3) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\left|\frac{1}{x}dx=d(\ln x)\right|=\int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{e^2}=-\left(\frac{1}{\ln e^2}-\frac{1}{\ln e}\right)=\frac{1}{2};$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\left(\sqrt{x}\right)\right|=2\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\cos\sqrt{x}\,d\left(\sqrt{x}\right)=2\sin\sqrt{x}\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}=2(1-0)=2.$

Интегрирование по частям в ОИ. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, имеющие на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Замечание – Типы интегралов, для которых следует применять формулу интегрирования по частям, т. е. находить первообразные, описаны выше.

Пример 12 – Вычислить ОИ.

Решение:

1) $\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin x dx & v=-\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$;

2) $\int_1^e x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e xdx = \left(\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e = \dfrac{1}{4}(e^2+1)$;

3) $\int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx$. Применяем полученную ранее формулу для неопределенного интеграла $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$. В данном случае $a=1,\ b=2$. Следовательно,

$$\int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx = \frac{e^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x)\Big|_0^\pi = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить ОИ:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

3) $\int_0^1 xe^x dx$;

4) $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

5) $\int_2^3 \dfrac{1}{x^2-4x+5} dx$;

6) $\int_0^\pi x\cos x\, dx$;

7) $\int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx$;

8) $\int_4^{12} \sqrt{x-3}\, dx$;

9) $\int_{1/2}^{e/2} \ln 2x dx$.

Несобственные интегралы. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования $[a,b]$ конечный, а $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ функция, называется собственным. Несобственные интегралы – это ОИ:

– от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл 1-го рода);

– от разрывной функции (бесконечный скачок), но с конечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл 2-го рода).

Рассмотрим только несобственные интегралы 1-го рода. Это интегралы вида а) $\int_a^{\infty} f(x)dx$, б) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, в) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. При этом если $f(x) \geq 0$ на промежутке интегрирования, то геометрически эти интегралы определяют площади бесконечных криволинейных трапеций (рисунок 2).

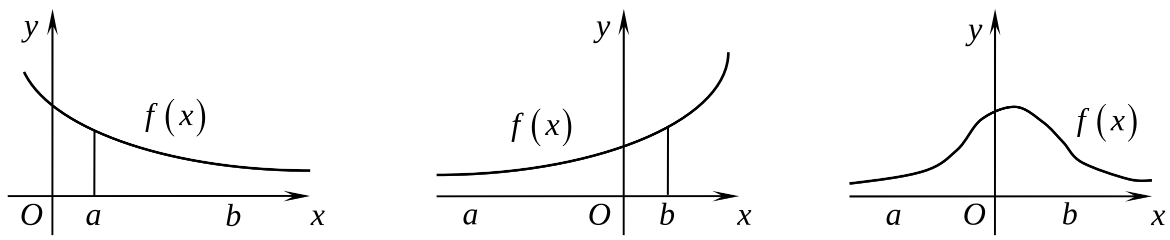

Рисунок 2

Определение. Несобственным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом интегрирования называется предел при $b \to \infty$, т. е.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если указанный предел **существует и конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если указанный **предел не существует или равен бесконечности**, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**. Аналогично определяются несобственные интегралы вида б и в, а именно:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx.$$

Эти интегралы сходятся, если существуют и конечны соответствующие пределы. Вычисление несобственных интегралов основано на данных определениях. Для сокращения записей при вычислениях несобственных интегралов 1-го рода можно непосредственно применять формулу Ньютона–Лейбница в виде $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$, где $F(\infty) = \lim\limits_{b\to\infty} F(b)$.

Пример 13 – Установить сходимость (расходимость) несобственных интегралов 1-го рода.

Решение:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$,

интеграл сходится, его значение равно $\frac{\pi}{2}$;

2) $\int\limits_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = \left|2xdx = d\left(x^2+1\right)\right| = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{\infty} = \ln\left(\infty^2+1\right) - \ln 1 = \infty$,

интеграл расходится;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = \ln\left(x^2+1\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \ln\left(\infty^2+1\right) - \ln\left(\left(-\infty\right)^2+1\right) =$

$= \ln\frac{\left(\infty^2+1\right)}{\left(\infty^2+1\right)} = \ln 1 = 0$, интеграл сходится;

4) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \left|xdx = \frac{1}{2}dx^2\right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$,

интеграл сходится;

5) $\int\limits_0^{\infty} \sin x\, dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \sin x dx = \lim\limits_{b\to\infty} \cos x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\cos b - \cos 0\right) = \lim\limits_{b\to\infty} \cos b - 1$, интеграл расходится, поскольку $\lim\limits_{b\to\infty} \cos b$ не существует.

Примеры для самостоятельной работы

Установить сходимость (расходимость) несобственных интегралов 1-го рода:

1) $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+29}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$;

3) $\int\limits_0^{\infty} xe^{x^2}dx$;

4) $\int\limits_0^{\infty} \cos x\, dx$;

5) $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3}$;

6) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$;

7) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$;

8) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

1.1 Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в декартовых координатах. Из геометрического смысла ОИ следует, что если $f(x) \geq 0$ (рисунок 3, *а*), то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

т. е. ОИ равен площади этой криволинейной трапеции, а если $f(x) \leq 0$ (рисунок 3, *б*), то $\int_a^b f(x)dx < 0$, а площадь криволинейной трапеции будет

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Если требуется вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ и $f(x) \geq g(x)$ (рисунок 3, *в*), то, рассматривая эту площадь как разность площадей соответствующих криволинейных трапеций, можем записать

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx,$$

где $f(x) - g(x) \geq 0$.

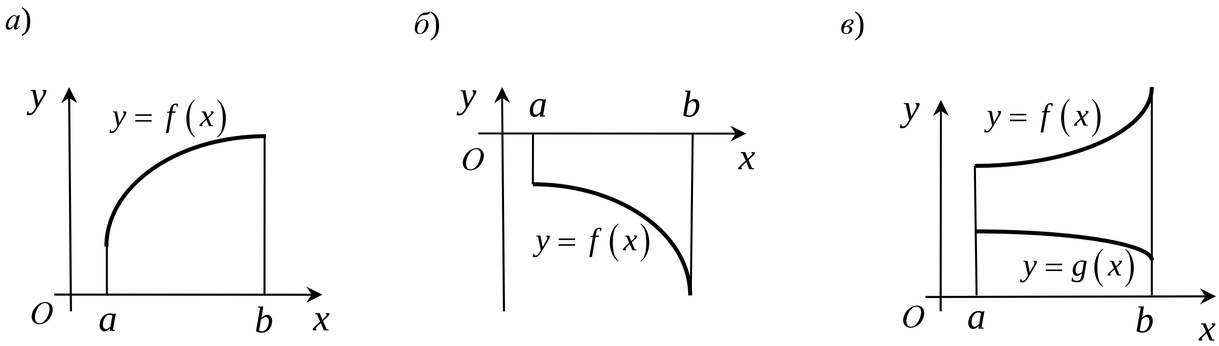

Рисунок 3

Последняя формула остается справедливой и для $g(x) \leq 0$. Кроме того, если обе функции отрицательные, т. е. $f(x) \leq 0$ и $g(x) \leq 0$, то их место в подынтегральном выражении должно быть таким, чтобы их разность была положительной (ясно почему).

Пример 14 – Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Решение:

1) $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$. Сделаем рисунок фигуры (см. рисунок 4). Найдем площадь:

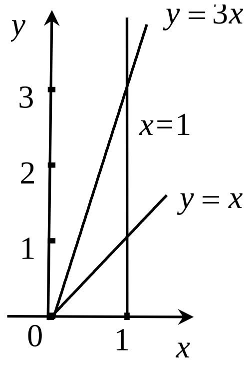

Рисунок 4

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_0^1 \left(3x - x \right) dx = 2\int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

В правильности ответа легко убедиться, используя формулу для вычисления площади треугольника (сообрази и проверь);

2) $y = x^2$, $y = x + 2$. Сделаем рисунок фигуры (рисунок 5). Для установления пределов интегрирования найдем координаты концевых точек проекции фигуры на ось Ox, которые являются координатами точек пересечения кривых, описывающих эту фигуру. Для нахождения точек пересечения кривых необходимо решить систему уравнений, описывающих эти кривые, т. е.

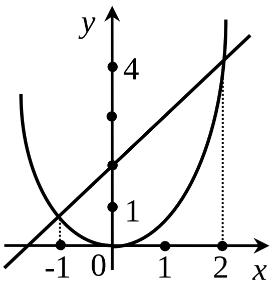

Рисунок 5

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \ y = 1; \\ x = 2, \quad y = 4. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-1}^2 \left(x + 2 - x^2 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^2 = \frac{9}{2};$$

3) получим формулу для вычисления площади круга радиусом R (рисунок 6). Пусть центр круга находится в начале координат, тогда уравнение окружности, которая его ограничивает, имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Возьмем только четверть окружности, а результат умножим на четыре. Для первой четверти $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$. Следовательно,

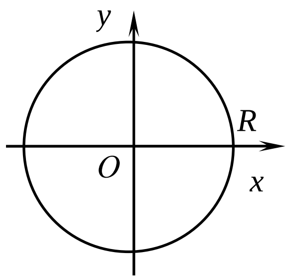

Рисунок 6

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} \right)\Bigg|_0^R =$$

$$= 4\left(\left(\frac{R}{2}\sqrt{R^2 - R^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{R}{R} \right) - \left(\frac{0}{2}\sqrt{R^2 - 0^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{0}{R} \right) \right) = \pi R^2.$$

При нахождении первообразной воспользовались таблицей неопределенных интегралов (см. интеграл 13).

Вычисление площадей плоских фигур, заданных параметрически. В инженерных приложениях часто приходится иметь дело с параметрическим заданием линий в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t – дополнительная переменная, связывающая текущие декартовые координаты (x, y) точек линии, ее называют параметром. Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной в параметрической форме $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \geq 0 \end{cases}$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь S вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x_t'(t)dt$, которая основана на формуле замены переменной, а именно: $f(x) = y(t)$, а $dx = x_t'(t)dt$. Пределы интегрирования t_1 и t_2 находятся из решения уравнений $x(t_1) = a,\ x(t_2) = b$.

Пример 15 – Найти площадь эллипса, используя его параметрические уравнения $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Параметр t имеет смысл угла (рисунок 7) и изменяется в пределах $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение

Ввиду симметрии эллипса достаточно вычислить площадь его четвертой части, расположенной в первом квадранте, а результат умножить на четыре.

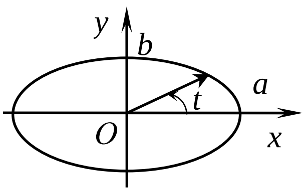

Рисунок 7

$S = 4\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x_t'(t)dt$. Находим $x_t'(t) = (a\cos t)' = -a\sin t$ и пределы интегрирования t_1 и t_2. При $x = 0$ из равенства $0 = a\cos t_1$ получаем $t_1 = \frac{\pi}{2}$, а если $x = a$, то $t_2 = 0$. Теперь записываем расчетную формулу и находим площадь:

$$S = 4\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x_t'(t)dt = -4ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt = -4ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \pi ab.$$

При $a = b = R$ получаем формулу для площади круга $S = \pi R^2$.

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в полярных координатах. Напомним связь координат точек в декартовой и полярной системах координат и уравнения, описывающие кривые в этих системах.

В декартовой системе координат положение точки M на плоскости описывается с помощью двух чисел (x, y), которые являются проекциями радиуса точки, а именно вектора $\overrightarrow{OM}$ (рисунок 8, *а*) на координатные оси. Эти числа называют координатами точки и записывают $M(x, y)$.

Полярная система координат задается точкой O, называемой полюсом, лучом Op, называемым полярной осью, и единичным вектором $\vec{e}$ того же направления, что и луч Op. В полярной системе координат положение точки описывается также с помощью двух чисел (ρ, φ), которые имеют смысл: $\rho -$ расстояние от полюса O до точки M, $\varphi -$ угол, отсчитанный от полярной оси Op до радиуса вектора этой точки, т. е. $\overrightarrow{OM}$, – и записывается $M(\rho, \varphi)$ (рисунок 8, *б*).

Для того чтобы связать координаты одной и той же точки в полярной и декартовой системах координат, эти системы надо совместить. Поступают следующим образом: полюс полярной системы помешают в начало декартовой, полярную ось Op совмещают с осью Ox декартовой и выбирают одинаковые масштабы по полярной оси Op и оси Ox (рисунок 8, *в*).

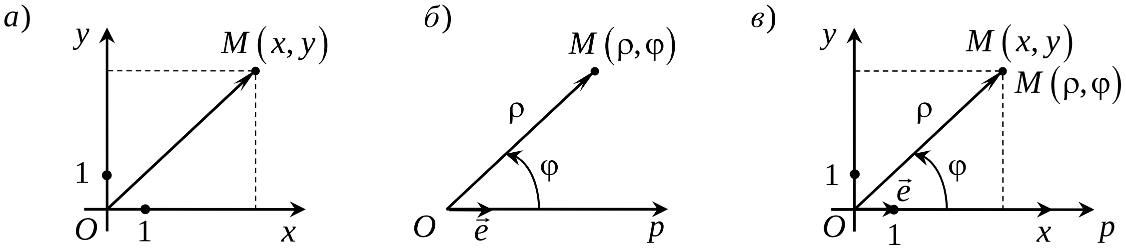

Рисунок 8

Если $M(x, y)-$ декартовы координаты точки, а $M(\rho, \varphi)-$ полярные, то, как видно из рисунка 8, *в*, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ – выражение декартовых координат точки через полярные, а $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ – выражение полярных координат через декартовы. Соответственно, уравнение $y = y(x)$ есть уравнение линии в декартовой системе, а уравнение $\rho = \rho(\varphi)$ – уравнение линии в полярной системе. Переход в полярные координаты целесообразен, когда криволинейная трапеция имеет вид криволинейного сектора (рисунок 9), ограниченного непрерывной линией $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, выходящими из полюса. Площадь такой фигуры вычисляется по формуле

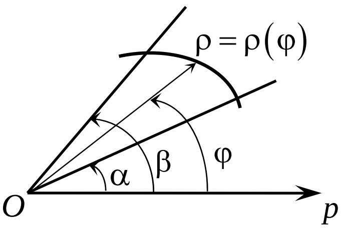

Рисунок 9

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 16 – Вычислить площадь трехлепестковой «ромашки», заданной в полярных координатах $\rho = a\cos 3\varphi$ (рисунок 10).

Решение

Ввиду симметрии фигуры вычислим площадь ее шестой части (см. рисунок 10), а результат умножим на шесть, т. е.

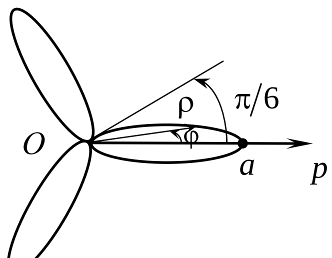

Рисунок 10

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi = 3\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пределы α и β найдем из уравнения линии $\rho = a\cos 3\varphi$. При $\rho = a$, $\varphi = \alpha$ из уравнения $a = a\cos 3\alpha$ получим $1 = \cos 3\alpha$, т. е. $\alpha = 0$, а если $\rho = 0$, то $\varphi = \beta$ и из уравнения $0 = a\cos 3\beta$ получим $\beta = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислим площадь:

$$S = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(a\cos 3\varphi)^2 d\varphi = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\, d\varphi = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi = \ldots = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Замечание – В случаях, когда криволинейная трапеция ограничена сверху и снизу линиями, заданными параметрически или в полярных координатах, то, рассматривая ее площадь как разность площадей соответствующих криволинейных трапеций, на основании свойств ОИ получают формулы для расчета этих площадей, как и в случае линий, заданных в декартовых координатах (сообрази, нарисуй графики и запиши расчетные формулы).

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$;
2) $y = x^3$, $y = x$;
3) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$;
4) $y = x^2$, $y = -x$;
5) $y = x^3$, $y = x^2$;
6) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;
7) $y = x^2$, $y = 1$, $x \ge 0$;
8) $y = x^2$, $y = 2x + 3$;
9) $\begin{cases} x = t - \sin t, & (0 \le t \le 2\pi), \\ y = 1 - \cos t, & y = 0; \end{cases}$
10) $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$;
11) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.

Вычисление длины дуги плоской кривой в декартовых координатах. Если $y = f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то длина дуги AB (рисунок 11) находится по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

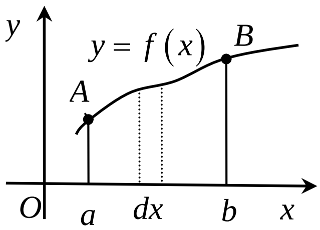

Рисунок 11

Пример 17 – Получить формулу для вычисления длины дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$ радиусом R (см. рисунок 6).

Решение

Возьмем четверть окружности $0 \le x \le R$, а результат умножим на четыре. Для первой четверти $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Следовательно,

$$L = 4\int\limits_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = 4R\int\limits_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 4R\,\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R = 2\pi R.$$

Вычисление объема и площади поверхности тела вращения в декартовых координатах. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рисунок 12).

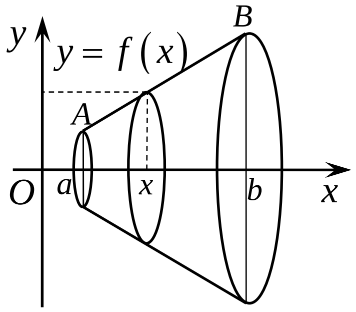

Рисунок 12

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

а площадь поверхности вращения по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

если $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Доказательства справедливости формул приведем на известных примерах.

Пример 18 – Получить формулу для вычисления объема и площади поверхности шара, полученного вращением верхней дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox.

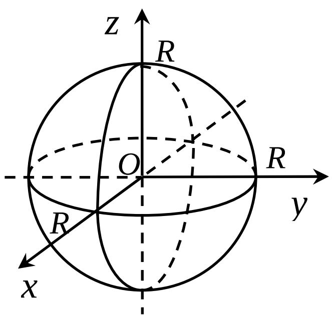

Рисунок 13

Решение

Сделаем схематический рисунок (рисунок 13). Возьмем только четверть окружности, а результат удвоим. Найдем объем. Для этого выразим $y^2 = R^2 - x^2$. Следовательно,

$$V = \pi \int_0^R y^2 dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Найдем площадь поверхности. Для этого выразим $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ – верхняя полуокружность и найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. В результате

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \ldots = 4\pi R \int_0^R dx = 4\pi R\, x\Big|_0^R = 4\pi R^2.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$; 3) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$; 5) $y = x/3$, $x = 3$, $y = 0$;
2) $y = 2x$, $x = 2$, $y = 0$; 4) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$; 6) $y = x^2$, $y = x$.

1.2 Физические приложения определенного интеграла

Вычисление работы переменной силы на прямолинейном участке. Пусть материальная точка M (рисунок 14) перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси.

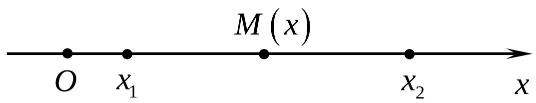

Рисунок 14

Работа, произведенная силой $F(x)$ при перемещении точки M из положения x_1 в положение x_2, определяется формулой

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx.$$

Пример 19 – Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на $0{,}05$ м, если сила 100 Н растягивает пружину на $0{,}01$ м?

Решение

По закону Гука $F = k\,x$, где x – растяжение пружины, k – коэффициент пропорциональности (жесткости пружины), который неизвестен. Найдем его. Согласно условию задачи

$$100\,\text{Н} = k \cdot 0{,}01\ \text{м}.$$

Отсюда

$$k = 10^4\ \text{Н/м}.$$

Следовательно, $F(x) = k\,x = 10^4 x$, а искомая работа есть

$$A = \int_0^{0{,}05} 10^4\, x\,dx = 10^4 \int_0^{0{,}05} x\,dx = 10^4\, \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{0{,}05} = 5 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 12{,}5\ \text{Дж}.$$

Вычисление пути, пройденного материальной точкой. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t_0 до t_1. Из физического смысла производной известно, что мгновенная скорость $v(t)$ прямолинейно движущейся точки есть производная пути $S(t)$ по времени t, т. е. $v(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}$. Отсюда $dS(t) = v(t)\,dt$. Интегрируя данное равенство по времени от t_0 до t_1, получаем искомый путь S:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt\,.$$

Пример 20 – Найти путь, пройденный материальной точкой за 1 с от начала движения $t_0 = 0$, если $v(t) = (10t + 5)$ м/с.

Решение

$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int_0^1 (10t + 5)\,dt = \left(5t^2 + 5t\right)\Big|_0^1 = 10 \text{ м}.$$

Вычисление работы электродвигателя переменной мощности. Известно, что при постоянной мощности N электродвигателя его работа за промежуток времени Δt равна $A = N \cdot \Delta t$. А если его мощность изменяется во времени и описывается функцией от времени $N(t)$, т. е. известна мгновенная мощность (мощность в момент времени t), то работа, совершаемая электродвигателем за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, вычисляется по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt\,.$$

Пример 21 – Вычислить работу и среднюю мощность переменного синусоидального тока $I = I_0 \sin \omega t$ за один период T, где I_0 – максимальное значение тока, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – круговая частота, t – время, а сопротивление цепи равно R.

Решение

Известно, что мощность постоянного тока выражается формулой $N = I^2 R$. Соответственно, мгновенная мощность переменного тока будет $N(t) = I^2(t) R$, а работа переменного тока за промежуток времени $\Delta t = T$ есть

$$A = \int_0^T N(t)\,dt = R\int_0^T I^2(t)\,dt = RI_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t\,dt = RI_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\,dt = \frac{RI_0^2 T}{2} \text{ Дж}.$$

Соответственно, средняя мощность за период T есть $N_{ср} = \dfrac{A}{T} = \dfrac{RI_0^2}{2}$ Вт.

Вычисление силы давления жидкости. Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давления P жидкости на эту пластинку равна весу столба жидкости, основанием которого является пластинка, а высотой – глубина h, и определяется как

$$P = mg = \rho V g = \rho h S g\,,$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2; ρ – плотность жидкости; S – площадь пластинки.

Если пластинка погружена в жидкость вертикально, то давление жидкости (сила давления на единицу площади) изменяется с глубиной погружения. По закону Паскаля давление в жидкости одинаково по всем направлениям на любой глубине и, как видно из изложенного выше, зависит от глубины.

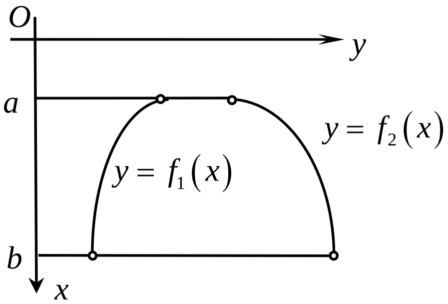

Рисунок 15

Если пластинка имеет вид криволинейной трапеции и погружена в жидкость вертикально, а ее боковые стороны (нижняя и верхняя) параллельны поверхности жидкости и находятся на глубинах $x = a$ и $x = b$ (рисунок 15), то сила давления на боковую поверхность пластинки вычисляется по формуле

$$P = \rho g \int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

Пример 22 – Определить силу давления жидкости на плотину в форме полукруга, если его радиус R, а центр O находится на свободной поверхности жидкости (рисунок 16).

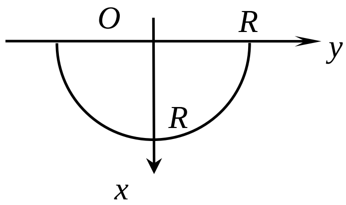

Рисунок 16

Решение

Воспользуемся формулой для нахождения силы давления жидкости на вертикальную пластину. В данном случае пластина (плотина) ограничена линиями $y = f_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y = f_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. В результате получим

$$P = \rho g \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right) x dx = 2\rho g \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x dx =$$

$$= 2\rho g \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - x^2\right) = -\rho g \left.\frac{\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{1/2 + 1}\right|_0^R = -\frac{2}{3}\rho g\left(0 - R^3\right) = \frac{2}{3}\rho g R^3.$$

Подставляя в полученную формулу числовые значения для радиуса пластины (плотины) и плотности жидкости, вычислим силу давления (в ньютонах).

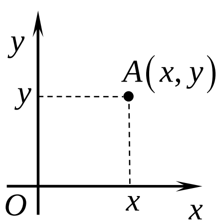

Рисунок 17

Вычисление статических моментов и координат центра масс плоских материальных фигур. Статическим моментом материальной точки $A(x, y)$, имеющей координаты (x, y) и массу m, относительно оси Ox (оси Oy) (рисунок 17) называется величина, численно равная произведению массы этой точки на координаты этой точки, а именно:

$$M_x = my, \qquad M_y = mx.$$

Если дана система, состоящая из n материальных точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, имеющих массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты такой системы находятся суммированием статических моментов отдельных точек, т. е.

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Центром масс системы материальных точек называется точка $C(x_c, y_c)$, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, то статические моменты этой точки $M_{xc} = m \cdot y_c$, $M_{yc} = m \cdot x_c$ равны статическим моментам системы материальных точек, т. е.

$$m \cdot y_c = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad m \cdot x_c = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Из этих формул получаем координаты центра масс (центра тяжести) системы материальных точек, а именно:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \qquad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}.$$

В случаях плоских материальных пластин, например, криволинейных трапеций (рисунок 18), имеющих площадь $S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x) \big) dx$, которые можно представить себе как непрерывное множество материальных точек, формулы для расчета рассматриваемых величин имеют вид:

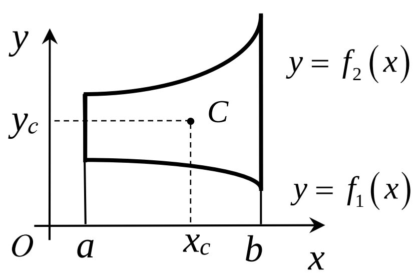

Рисунок 18

$$M_x = \frac{1}{2} \sigma \int_a^b \big(f_2^2(x) - f_1^2(x) \big) dx,$$

$$M_y = \sigma \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x) \big) x\, dx,$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad m = \sigma S.$$

Величина $\sigma = \dfrac{m}{S}$ определяет поверхностную плотность материальной пластины, как правило, считается постоянной и изначально задается.

Примечание – Для фигур, имеющих центральную или осевую симметрию, центр тяжести расположен в центре или на оси симметрии.

Пример 23 – Найти статические моменты и координаты центра тяжести четверти материального круга $x^2 + y^2 \le R^2$, расположенного в первой четверти $x \ge 0,\ y \ge 0$, имеющего поверхностную плотность σ (рисунок 19).

Решение

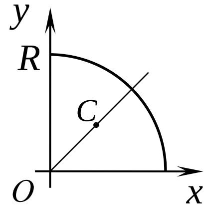

Рисунок 19

Для первой четверти $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Находим статические моменты:

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma\int_a^b f^2(x)dx = \frac{1}{2}\sigma\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{1}{2}\sigma\frac{2}{3}R^3 = \frac{1}{3}\sigma R^3;$$

$$M_y = \sigma\int_a^b f(x)\,xdx = \sigma\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\;x\,dx = \left|xdx = -\frac{1}{2}d\left(R^2 - x^2\right)\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,d\left(R^2 - x^2\right) = -\frac{1}{2}\sigma\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{1}{3}\sigma R^3.$$

Площадь четверти круга $S = \dfrac{\pi R^2}{4}$, масса $m = \sigma S = \sigma\dfrac{\pi R^2}{4}$. Следовательно, координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Определить силу давления жидкости на плотину в форме полуэллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, погруженную вертикально в жидкость так, что одна из его полуосей $2a$ лежит на поверхности.

2 Найти статические моменты и координаты центра тяжести материальных фигур, изображенных на рисунке 20.

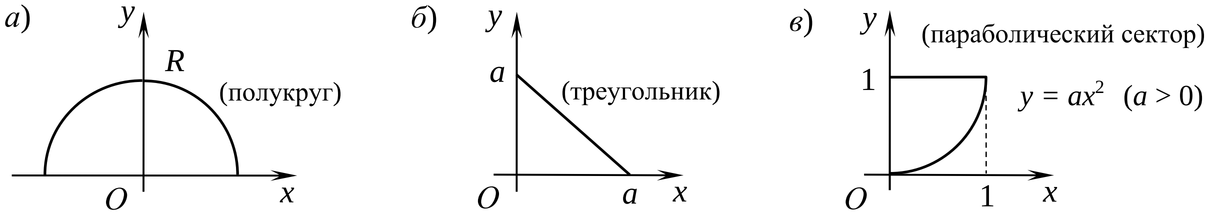

Рисунок 20

2 Интегральное исчисление функции многих переменных

Двойной интеграл (ДИ). Обобщением определенного интеграла на случай функции двух переменных является так называемый двойной интеграл. Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy задана непрерывная ограниченная функция $z=f(x,y)$ (рисунок 21). Сеткой параллельных кривых разобьём область D на n элементарных областей D_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$, площади которых обозначим через ΔS_i. Наибольшее расстояние между точками на границе в каждой частичной области D_i обозначим через d_i. Пусть $\Delta=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$ – наибольший из диаметров всех областей. В каждой области D_i выберем произвольным образом точку $M_i(x_i,y_i)$, найдем значение функции в ней, т. е. $f(M_i)$, и умножим его на площадь этой ячейки ΔS_i. Составим сумму таких произведений, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, которую называют интегральной, и рассмотрим ее предел при $n\to\infty$ $(\Delta\to 0)$.

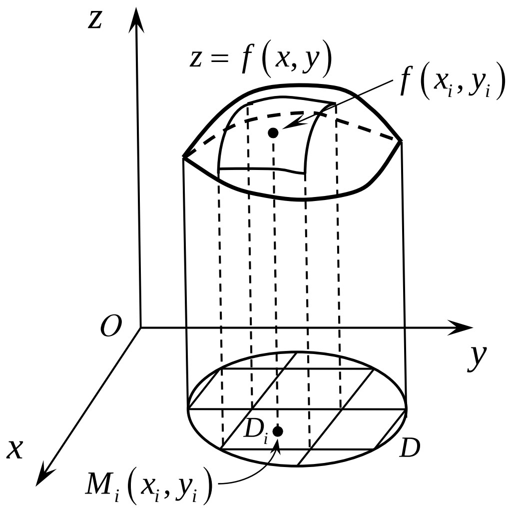

Рисунок 21

Если существует конечный предел интегральной суммы, который не зависит от способа разбиения области D на частичные D_i и от выбора точек $M_i(x_i,y_i)$ в них, то он называется двойным интегралом от функции $z=f(x,y)$ по области D и обозначается как

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i,$$

где dS – элемент площади области D.

В определении ДИ речь идет о произвольном разбиении области D на элементарные D_i. Поэтому разбив область D на элементарные D_i сеткой прямых, параллельных координатным осям, для элемента площади dS можем записать $dS=dxdy$, а двойной интеграл – в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

При этом $f(x,y)$ называют подынтегральной функцией, D– областью интегрирования, x и y – переменными интегрирования. Если функция $z=f(x,y)$ ограничена в замкнутой области D и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно-гладких линий, то **двойной интеграл существует**.

Геометрический смысл двойного интеграла. Из определения ДИ можно заключить, что если $z = f(x,y) \geq 0$, то двойной интеграл от такой функции численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – замкнутой областью D плоскости Oxy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D, т. е. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V$; в этом и состоит **геометрический смысл ДИ** (см. рисунок 21). В случае $z = f(x,y) \leq 0$ смысл **ДИ** не меняется, а изменяется только формула: $V = -\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|$.

Основные свойства ДИ (аналогично свойствам ОИ)

Наиболее важные из них.

1 Если $f(x,y) = 1$ в D, то $\iint\limits_D dxdy = S_D$, т. е. ДИ равен площади области D.

2 $\iint\limits_D \left(c_1 f_1(x,y) \pm c_2 f_2(x,y)\right)dxdy = c_1\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm c_2\iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$.

3 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ (свойство аддитивности), где $D = D_1 + D_2$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Пусть область D на плоскости Oxy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную сверху линией $y = \varphi_2(x)$, снизу линией $y = \varphi_1(x)$ (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны) и с боков прямыми $x = a$ и $x = b$. Область D называется простой (правильной) в направлении оси Oy, если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках (вход в область и выход) (рисунок 22). Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1)$$

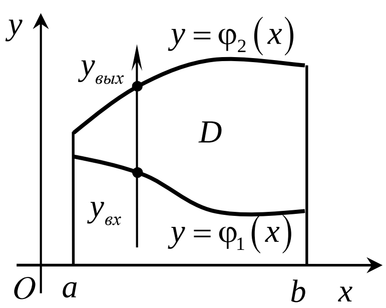

Рисунок 22

Правую часть этой формулы называют двукратным (или повторным) интегралом по области D от функции $f(x,y)$. Интеграл $\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ называют внутренним, а $\int\limits_a^b dx$ – внешним.

При вычислении ДИ по формуле (1) сначала берем внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянной, а затем – внешний по переменной x.

Если же область D ограничена справа линией $x=\psi_2(y)$, слева линией $x=\psi_1(y)$ (функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны), снизу прямой $y=c$ и сверху прямой $y=d$ и D является простой (правильной) в направлении оси Ox (рисунок 23), то двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

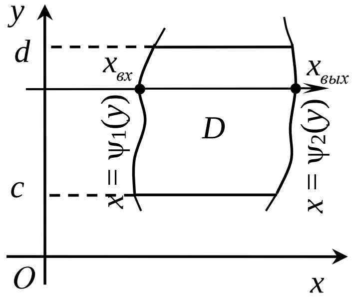

Рисунок 23

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

При вычислениях ДИ по формуле (2) сначала берем внутренний интеграл по переменной x, считая y постоянной, а затем – внешний по переменой y.

Наиболее простой вид формулы (1) и (2) принимают в случае прямоугольной области D. Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (3)$$

Замечания

1 Если область D правильная в обоих направлениях, то ДИ можно вычислять как по формуле (1), так и по формуле (2), а если D неправильная по Ox или по Oy, то для сведения ДИ к повторному ее следует разбить на сумму областей, правильных в направлении оси Ox или Oy, а затем воспользоваться свойством аддитивности ДИ.

2 В случаях, если область D является правильной в каком-либо направлении, однако или линия входа в область, или линия выхода из области описывается не одним аналитическим выражением, то область D разбивают на сумму областей прямыми, параллельными соответствующим координатным осям, проходящими через точки стыка аналитических выражений, и используют свойство аддитивности ДИ.

Пример 1 – Вычислить $\iint_D (x+y^3)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=2$.

Решение

Область прямоугольная (рисунок 24). Применим формулу (3).

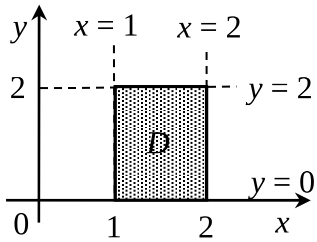

Рисунок 24

$$\iint_D (x+y^3)\,dxdy = \int_1^2 dx \int_0^2 (x+y^3)\,dy = \int_1^2 \left(xy + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \int_1^2 (2x+4)\,dx = \left(x^2+4x\right)\Big|_1^2 = 7.$$

Иначе, изменив порядок интегрирования, получим

$$\iint_D \left(x+y^3\right)dxdy=\int_0^2 dy\int_1^2\left(x+y^3\right)dx=\int_0^2\left(\left.\left(\frac{x^2}{2}+y^3x\right)\right|_{x=1}^{x=2}\right)dy=$$

$$=\int_0^2\left(2+2y^3-\left(\frac{1}{2}+y^3\right)\right)dy=\int_0^2\left(y^3+\frac{3}{2}\right)dy=\left.\left(\frac{1}{4}y^4+\frac{3}{2}y\right)\right|_0^2=7.$$

Как видно, независимо от порядка интегрирования результат не меняется.

Пример 2 – Вычислить $\iint_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=-x+2$, $y=0$, $x=0$.

Решение

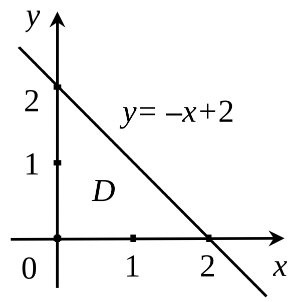

Рисунок 25

Построим область D (рисунок 25). Она является простой относительно осей Ox и Oy. Следовательно, можем вычислять интеграл как по формуле (1), так и по формуле (2). Вычислим по формуле (1):

$$\iint_D (x+2y)dxdy=\int_0^2 dx\int_{y=0}^{y=-x+2}(x+2y)dy=\int_0^2\left.\left(xy+y^2\right)\right|_{y=0}^{y=-x+2}=$$

$$=\int_0^2\left(x(-x+2)+(-x+2)^2-0\right)dx=\int_0^2\left(-x^2+2x+x^2-4x+4\right)dx=$$

$$=\int_0^2(-2x+4)dx=\left.\left(-x^2+4x\right)\right|_0^2=-4+8-0=4.$$

Вычислим по формуле (2):

$$\iint_D (x+2y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{x=0}^{x=-y+2}(x+2y)dx=\int_0^2\left.\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\right|_{x=0}^{x=-y+2}=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{(-y+2)^2}{2}+2y(-y+2))-0\right)dy=\int_0^2\left(\frac{y^2-4y+4}{2}-2y^2+4y\right)dy=$$

$$=\int_0^2\left(-\frac{3y^2}{2}+2y+2-0\right)dy=\left.\left(-\frac{y^3}{2}+y^2+2y\right)\right|_0^2=-4+4+4-0=4.$$

Как видно, результат не зависит от порядка интегрирования.

Пример 3 – Вычислить $\iint_D (2x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=2x$, $y=x$, $x=2$.

Решение

Построим область D (рисунок 26). Область D является простой относительно осей Ox и Oy. Рассчитаем интеграл по формуле (1):

$$\iint_D (2x+y)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_{y=x}^{y=2x} (2x+y)\,dy = \int_0^2 dx\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2x} =$$

$$=\int_0^1\left(4x^2+2x^2-\left(2x^2+\frac{x^2}{2}\right)\right)dx = \frac{7}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{7}{6}\cdot x^3\Big|_0^2 = \frac{28}{3}.$$

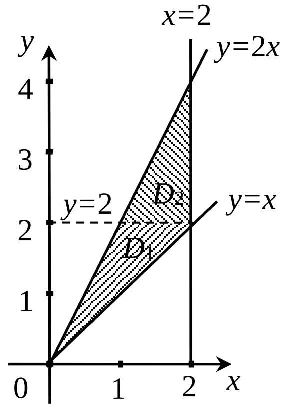

Рисунок 26

Изменим порядок интегрирования, т. е. вычислим интеграл по формуле (2). Видно, что выход из области интегрирования по x происходит на линиях, заданных различными аналитическими выражениями, а именно $x=y$ и $x=2$. Следовательно, область D следует разбить на две прямой $y=2$ и воспользоваться свойством аддитивности.

$$\iint_D (2x+y)\,dxdy = \iint_{D_1} (2x+y)\,dxdy + \iint_{D_2} (2x+y)\,dxdy =$$

$$=\int_0^2 dy \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=y} (2x+y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=2} (2x+y)\,dx = \int_0^2 dy\left(x^2+xy\right)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=y} + \int_2^4 dy\left(x^2+xy\right)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=2} =$$

$$=\int_0^2 dy\left(y^2+2y^2-\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y^2}{2}\right)\right)+\int_2^4 dy\left(4+2y-\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y^2}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\int_0^2 y^2dy+\int_2^4\left(-\frac{3}{4}y^2+2y+4\right)dy = \frac{5}{4}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2+\left(-\frac{1}{4}y^3+y^2+4y\right)\Bigg|_2^4=\frac{28}{3}.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями:

1) $f(x,y)=x+y$ $\quad D$: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$;
2) $f(x,y)=x-y$, $\quad D$: $y=x^2$, $y=2$;
3) $f(x,y)=x^2+y$, $\quad D$: $y=x^2$, $y=2$;
4) $f(x,y)=x$, $\quad D$: $y=x^3$, $x+y=2$, $x=0$;
5) $f(x,y)=3x+y$, $\quad D$: $y=x^2$, $y=2x$;
6) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, $\quad D$: $x=2$, $y=x$, $xy=1$;
7) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$, $\quad D$: $x=y^2$, $y=1$, $x=0$.

Двойной интеграл в полярных координатах. Часто вычисление двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ значительно проще проводить в полярных координатах. Формула перехода в двойном интеграле от декартовых координат к полярным имеет следующий вид:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi.$$

При этом $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ – формула преобразования дифференциалов при переходе от декартовых к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (см. рисунок 8), которая представляет собой выражение для элементов площадей в декартовой $dS = dxdy$ и полярной $dS^* = \rho d\rho d\varphi$ системах $(dS = dS^*)$, а D^* – область в полярной системе, соответствующая области D в декартовой.

Замечание – Переход в полярные координаты целесообразен, когда область интегрирования D есть круг, кольцо или часть таковых, а подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$ – в идеальном случае – или виды $f(y/x)$, $f(x/y)$ и др.

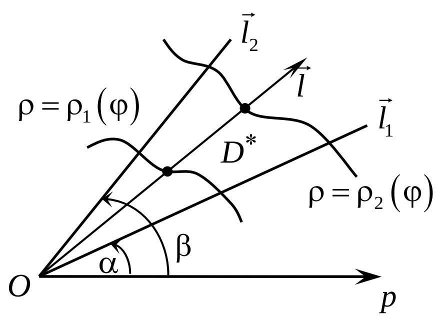

Рисунок 27

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Применяют то же правило сведения его к двукратному (повторному). Пусть область интегрирования D^* представляет собой криволинейный сектор (рисунок 27), ограниченный кривыми $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho = \rho_1(\varphi)$ и лучами $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, проходящими через полюс, и является правильной в направлении луча $\vec{l}$, выходящего из полюса. Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho.$$

При этом сначала берут внутренний интеграл по переменной ρ, считая переменную φ константой, а затем внешний по переменной φ.

Пример 4 – Вычислить $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=8x$, $x^2+y^2=4x$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=x$.

Решение

Сделаем рисунок области интегрирования. Первые две линии – это окружности. Для построения окружностей целесообразно привести их уравнения к каноническому виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, где (x_0, y_0) – центр окружности, R – радиус.

Для окружности $x^2+y^2-8x=0$.

$$x^2-8x+y^2=\left(x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2\right)-4^2+y^2=\left(x-4\right)^2+y^2-4^2=0.$$

Получили $\left(x-4\right)^2+y^2=4^2$ – каноническое уравнение окружности с центром в точке $\left(4,0\right)$ и радиусом $R=4$. Строим окружность (рисунок 28).

Аналогично для второй окружности $x^2+y^2=4x$; получим $\left(x-2\right)^2+y^2=2^2$. Центр в точке $\left(2,0\right)$, $R=2$. Строим ее (см. рисунок 28).

Линии $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=x$ – прямые, проходящие через начало координат.

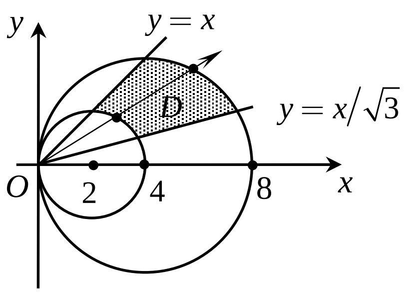

Рисунок 28

В результате область D принимает вид криволинейного сектора (см. рисунок 28) ограниченного двумя окружностями и двумя лучами, является правильной в направлении луча, выходящего из полюса O. При этом подынтегральная функция зависит от $\left(x^2+y^2\right)$. Для вычисления двойного интеграла целесообразно перейти в полярные координаты. Записываем уравнения линий, ограничивающих область D, и подынтегральную функцию в полярных координатах. Для этого воспользуемся формулами перехода $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Для подынтегральной функции

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\rho\cos\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\varphi\right)^2}=\sqrt{\rho^2}=\rho.$$

Для окружности $x^2+y^2=8x$ имеем $\left(\rho\cos\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\varphi\right)^2=8\rho\cos\varphi$. После преобразований получим уравнение окружности в полярных координатах $\rho=8\cos\varphi$.

Поступая аналогично, для второй окружности $x^2+y^2=4x$ получим $\rho=4\cos\varphi$.

Теперь для прямых линий:

1) для $y=x$: $\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi$ или $\operatorname{tg}\varphi=1$, т. е. имеем луч $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$;

2) для $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$: $\rho\sin\varphi=\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. имеем луч $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

Учитывая формулы преобразования дифференциалов $dxdy=\rho d\rho d\varphi$, записываем интеграл в полярных координатах и вычисляем его.

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{D*}\frac{1}{\rho}\rho d\rho d\varphi=\iint\limits_{D*}d\rho d\varphi=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{\rho=4\cos\varphi}^{\rho=8\cos\varphi}d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}d\varphi\,\rho\Big|_{\rho=4\cos\varphi}^{\rho=8\cos\varphi}=$$

$$=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}d\varphi\left(8\cos\varphi-4\cos\varphi\right)=4\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos\varphi d\varphi=4\sin\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=4\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Как видно, переход к полярным координатам занял некоторое время, а вычисление интеграла – элементарно.

Пример 5 – Вычислить $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, если область D ограничена полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$ и осью Ox.

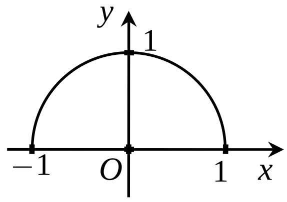

Рисунок 29

Решение

Переход в полярные координаты очевиден. Изобразим область D (рисунок 29). Используя формулы перехода $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим уравнение окружности в полярной системе координат $\rho=R=1$, при этом ρ и φ изменяются в пределах $0\le\rho\le1$, $0\le\varphi\le\pi$. Следовательно,

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}=\iint\limits_{D'}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^2+1}=\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^1\frac{\rho d\rho}{\rho^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^1\frac{d(\rho^2+1)}{\rho^2+1}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi d\varphi \ln\left(\rho^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(\ln2-\ln1)d\varphi=\frac{1}{2}\ln2\int\limits_0^\pi d\varphi=\frac{\pi}{2}\ln2.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, где D – часть кольца, ограниченная линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, $y=x$. (Ответ: $\frac{3}{64}\pi^2$).

2 Вычислить $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$. (Ответ: 24π).

3 Вычислить $\iint\limits_D(4-x-y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2x$. (Ответ: 3π).

4 Вычислить $\iint\limits_D\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy$, если область D – кольцо, ограниченное окружностями с центром в начале координат и радиусами e и 1. (Ответ: 2π).

2.1 Некоторые геометрические приложения двойного интеграла

Вычисления объемов тел и площадей плоских фигур. Из геометрического смысла ДИ следует, что если $z = f(x,y) \ge 0$, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = V$ численно равен объему цилиндрического тела (см. рисунок 21). А если $f(x,y)=1$ в области интегрирования D, то $\iint\limits_D dxdy = S_D$ численно равен площади области D. Если цилиндрическое тело ограничено сверху и снизу некоторыми поверхностями, например, сверху поверхностью $z = f_2(x,y)$, а снизу поверхностью $z = f_1(x,y)$, то, рассматривая его объем как разность объемов соответствующих тел, на основании свойств ДИ можем записать

$$V = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right) dxdy,$$

при этом всегда должно быть $f_2(x,y) - f_1(x,y) \ge 0$.

Пример 6 – Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$.

Решение

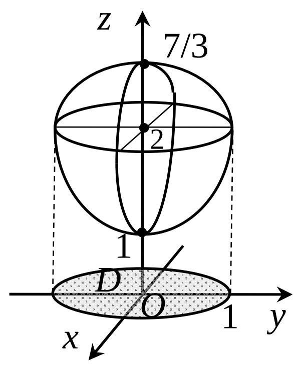

Рисунок 30

Данное тело ограничено сверху параболоидом $z = \frac{1}{3}\left(-x^2 - y^2 + 7\right)$, снизу параболоидом $z = x^2 + y^2 + 1$ (рисунок 30). Для нахождения объема этого тела с помощью двойного интеграла следует определить область интегрирования D. Как видно из рисунка 30, она представляет собой область, ограниченную проекцией на плоскость Oxy линии пересечения параболоидов. Определим уравнение этой линии. Для нахождения точек или линий пересечения геометрических объектов необходимо решить систему уравнений, описывающих эти объекты. В данном случае имеем систему

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \\ z = \frac{1}{3}\left(-x^2 - y^2 + 7\right), \end{cases}$$

из которой следует $x^2 + y^2 = 1$, а $z = 2$. Получили, что линией пересечения является окружность радиусом $R = 1$, с центром, лежащим на оси Oz, а условие $z = 2$ определяет плоскость, в которой лежит эта окружность (см. рисунок 30). Следовательно, областью интегрирования D на плоскости Oxy является круг $x^2 + y^2 \le 1$. Теперь можем записать

$$V = \iint\limits_D \left(\frac{1}{3}\left(-x^2 - y^2 + 7\right) - \left(x^2 + y^2 + 1\right)\right) dxdy = -\frac{4}{3}\iint\limits_D \left(x^2 + y^2 - 1\right) dxdy.$$

По виду подынтегральной функции и области интегрирования можно заключить, что для вычисления интеграла целесообразно перейти в полярные координаты. Используя формулы перехода, получаем

$$V=-\frac{4}{3}\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy=-\frac{4}{3}\iint\limits_{D^*}\left(\rho^2-1\right)\rho d\rho d\varphi=-\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\rho=0}^{\rho=1}\left(\rho^2-1\right)\rho d\rho=\frac{2\pi}{3}.$$

Пример 7 – Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2-2y=0$ и $x^2+y^2-4y=0$ (рисунок 31).

Решение

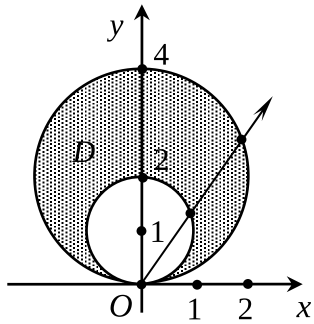

Рисунок 31

Фигура представляет собой криволинейный сектор, ограниченный двумя окружностями, и является правильной в направлении луча, выходящего из начала координат. Очевидно, вычисление площади сектора следует провести в полярных координатах. Для этого запишем уравнения окружностей в полярных координатах. Для окружности $x^2+y^2-2y=0$ имеем ее полярное уравнение $\rho=2\sin\varphi$. Для окружности $x^2+y^2-4y=0$ – полярное уравнение $\rho=4\sin\varphi$. Теперь для вычисления площади сектора можем записать

$$S_D=\iint\limits_{D}dxdy=\iint\limits_{D^*}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi\int\limits_{\rho=4\sin\varphi}^{\rho=4\sin\varphi}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi\rho^2\Big|_{\rho=2\sin\varphi}^{\rho=4\sin\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}d\varphi\left(16\sin^2\varphi-4\sin^2\varphi\right)=6\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=3\int\limits_{0}^{\pi}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi=3\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=3\pi.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить объёмы тел, ограниченных указанными поверхностями:

а) параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=4$;

б) цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0$, $z=x+y+10$;

в) параболоидом $z=1+x^2+y^2$, плоскостью $z=0$ и цилиндром $x^2+y^2=4$;

г) параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостями $x=0, y=0, z=0, y+x=1$.

2 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$;

б) $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4y$;

в) $x^2+y^2=4y$, $x^2+y^2=6y$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$;

г) $\rho=\sin 2\varphi$.

2.2 Примерный перечень задач для аудиторной контрольной работы по интегральному исчислению функций одной и многих переменных

1 Найти неопределенные интегралы и вычислить определенный интеграл:
$\int\left(5x^2+\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}-2\right)dx$, $\int\sin(3x+4)dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-8}}dx$, $\int_3^5\frac{13}{x-2}dx$.

2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2$, $y=-1$.

3 Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, которая ограничена линиями $y=x^2$, $x=1$, $y=0$.

4 Найти статические моменты и координаты центра тяжести материальной фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+1$, $y=0$.

5 Вычислить $\iint\limits_D(x-3y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=x$, $x=2$, $y=0$.

6 Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

7 Вычислить объём тела, ограниченного параболоидом $z=1-x^2-y^2$ и плоскостью $z=0$.

8 С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=2\cos\varphi$.

Замечание – В реальной аудиторной контрольной работе четыре задачи из приведенного перечня.

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математический анализ: справочное пособие в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 2 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1992. – Ч.1.

3 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике: учебное пособие в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие в 4 ч. / Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1–2.

6 **Двайт, Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – Москва: Наука, 1978.

7 **Воднев, В. Т.** Основные математические формулы: справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск: Вышэйшая школа, 1988.