

УДК 621.833

С. Н. Хатетовский, канд. техн. наук, доц., Н. В. Коротун, А. А. Сидорский,
К. К. Гуляев

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЗУБЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОЛЕС ПРЕЦЕССИОННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Любая схема прецессионной передачи, основанной на цилиндрическом зацеплении, может быть получена комбинированием трех базовых схем. Наиболее перспективным методом проектирования зацепления колес прецессионной передачи является метод, основанный на компьютерном моделировании, который позволяет проводить проверку геометрии зацепления на наличие интерференции. Кроме этого, компьютерное моделирование зацепления колес может служить основой для использования различных САД систем для более эффективного проектирования прецессионной передачи.

Прецессионные передачи относятся к классу планетарных передач. В прецессионных передачах сателлит совершает сферическое движение. Одним из наиболее перспективных видов зацеплений для прецессионной передачи считается ци-

линдрическое зацепление [1]. При этом любая схема прецессионной передачи может быть получена как комбинация базовых схем трех типов, представленных на рис. 1.

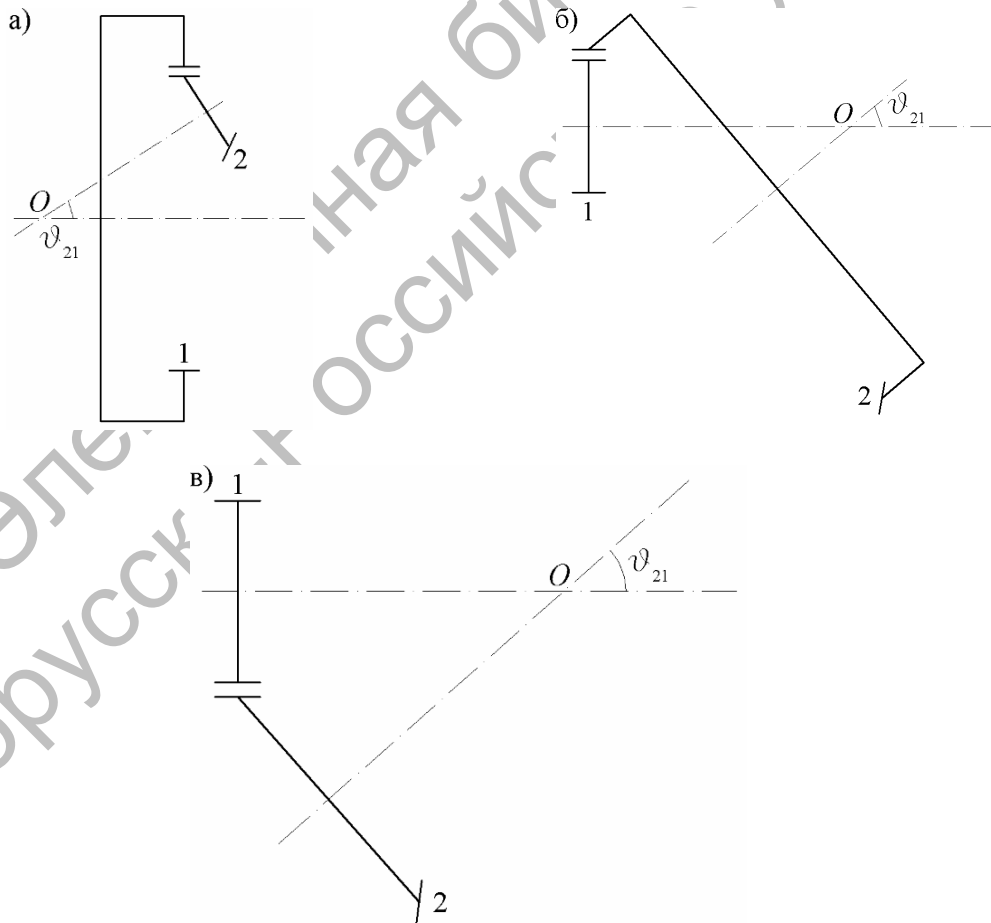


Рис. 1. Базовые схемы прецессионной передачи: а – тип I; б – тип II; в – тип III; 1 – цилиндрическое колесо; 2 – коническое колесо; O – точка пересечения осей колес; ϑ_{21} – угол нутации

В данных схемах ось вращения центрального колеса неподвижна, а ось вращения сателлита составляет с ней угол ϑ_{21} нутации, кроме этого, ось сателлита имеет возможность вращаться вокруг оси центрального колеса таким образом, что точка O в течение всего времени движения остается неподвижной – так сателлит совершает сферическое движение. В указанных схемах каждое из колес может выполнять роль сателлита или центрального колеса. Во всех схемах цилиндрическое колесо образует с коническим колесом цилиндриконическое зацепление.

Примером прецессионной передачи может служить передача (рис. 2), имеющая схему редуктора Джемса, которая составлена из схем типов II и III, при этом роль сателлита выполняет цилиндрическое колесо.

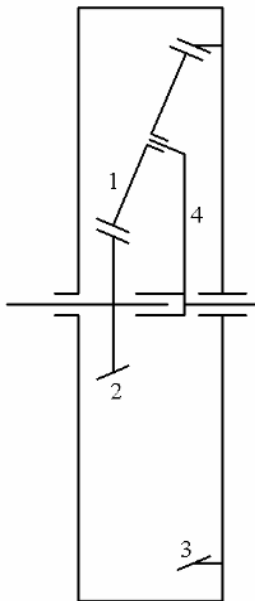


Рис. 2. Прецессионная передача со схемой редуктора Джемса: 1 – сателлит; 2 – центральное колесо; 3 – центральное колесо; 4 – кривошип

Входным звеном в прецессионном редукторе Джемса является центральное коническое колесо 2, которое передает вращение на кривошип 4 посредством цилиндрического сателлита 1, который также взаимодействует с коническим колесом 3.

Благодаря применению цилиндриконического зацепления прецессионные передачи обладают рядом положительных свойств: возможностью регулирования бокового зазора в зацеплении, повышенным по сравнению с цилиндрическими передачами коэффициентом перекрытия, компактностью и др. [2]. Однако существенным недостатком прецессионных передач в настоящее время является отсутствие инженерной методики ее проектирования. Это связано, в первую очередь, с проблемой расчета геометрии зубьев сателлита и цилиндриконического зацепления в целом. Указанная выше проблема может привести к нежелательным последствиям. Например, в неверно спроектированном зацеплении колес может иметь место интерференция.

Для того чтобы выяснить, имеет ли место в зацеплении колес интерференция, воспользуемся методом последовательных положений. Как известно, данный метод позволяет получить зубчатые поверхности колес передачи, которые заведомо не интерферируют, причем каждая из указанных поверхностей является огибающей последовательных положений другой. Однако те участки зубчатой поверхности формируемого колеса, которые на самом деле интерферируют с зубчатой поверхностью производящего колеса, будут иметь характерную форму, с изломами и резкими переходами. Для доказательства этого предположения реализуем метод последовательных положений для рассматриваемых типов прецессионных передач.

В соответствии с указанным методом одно из колес принимается производящим, а другое – формируемым. Примем, что производящее колесо – это цилиндрическое колесо с изначально заданной геометрией. Используя метод последовательных положений, получим зубчатую поверхность формируемого, т. е. конического колеса. Для упрощения дальнейших рассуждений примем, что оси колес неподвижны.

Для каждой из базовых схем прецессионной передачи (см. рис. 1) свяжем с цилиндрическим и коническим колеса-

ми неподвижные правые системы отсчета (рис. 3).

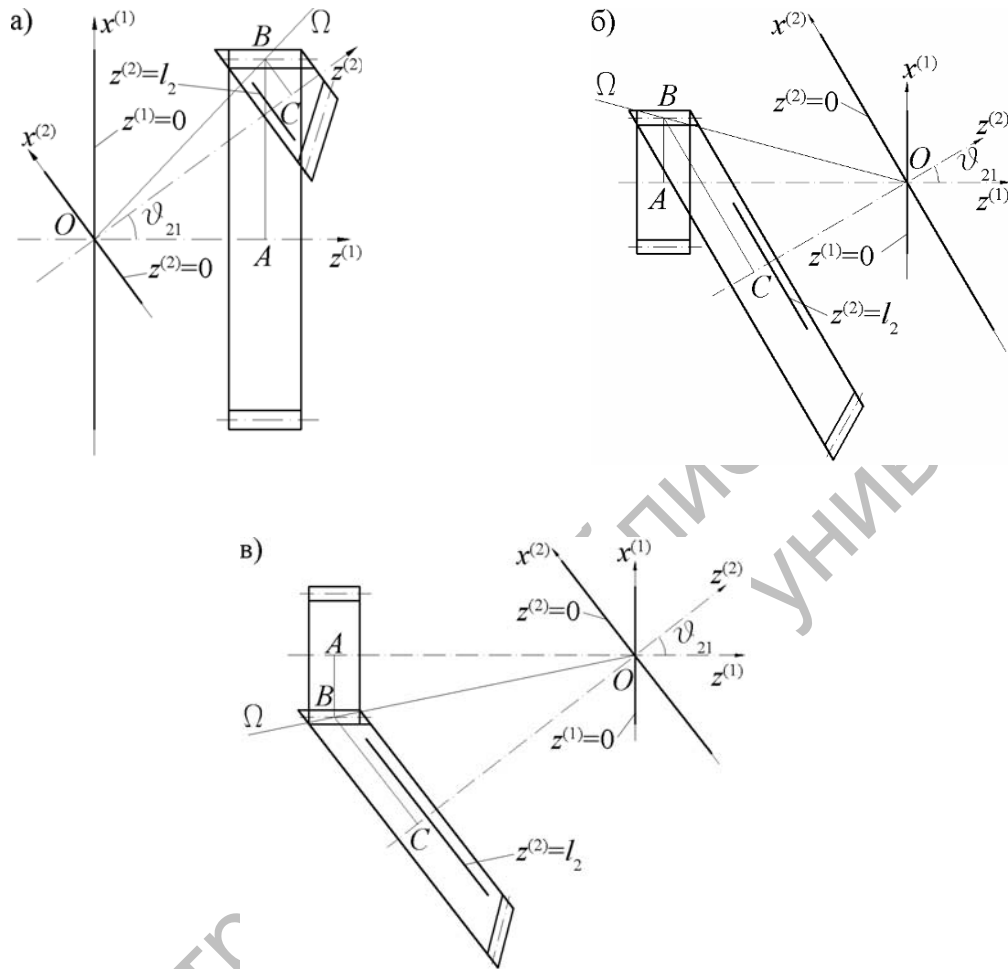


Рис. 3. Геометрические параметры зацепления колес прецессионной передачи: а – схема типа I; б – схема типа II; в – схема типа III

Обозначим систему отсчета, связанную с цилиндрическим колесом как $Ox^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$, а с коническим колесом – $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$. Примем, что ось зацепления $O\Omega$ проходит через точку, лежащую на окружности среднего радиуса AB цилиндрического колеса и находящуюся на равных расстояниях от его торцов. При этом данный средний радиус будет являться также начальным радиусом r_{w1} . Начальный радиус конического колеса, соответствующий начальному радиусу r_{w1} , обо-

значим $r_{w2} = BC$. Определим расстояния $|l_{w1}| = OA$ и $|l_{w2}| = OC$ от точки O до плоскостей, в которых расположены указанные начальные окружности цилиндрических и конических колес соответственно. Для схем типов I и II имеем

$$l_{w1} = r_{w1} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} g_{21}} - \frac{1}{\frac{r_{w1}}{r_{w2}} \cdot \sin g_{21}} \right). \quad (1)$$

С учетом того, что отношение $\frac{r_{w1}}{r_{w2}}$

в формуле (1) представляет собой передаточное отношение u_{21} , которое может быть выражено так же, как

$$u_{21} = \frac{z_1}{z_2}, \quad (2)$$

где z_1 – количество зубьев цилиндрического колеса; z_2 – количество зубьев конического колеса, получаем

$$l_{w1} = r_{w1} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_{21}} - \frac{1}{u_{21} \cdot \sin \vartheta_{21}} \right). \quad (3)$$

Рассчитанное по формуле (3) значение l_{w1} для схемы типа I положительно, а для схемы типа II – отрицательно.

Для указанных типов схем определим расстояние l_{w2} следующим образом:

$$l_{w2} = (l_{w1} + r_{w1} \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}) \cdot \cos \vartheta_{21}. \quad (4)$$

В отношении знака величина l_{w2} ведет себя так же, как и величина l_{w1} .

Для схемы типа III имеем

$$l_{w1} = r_{w1} \cdot \left(\frac{1}{u_{21} \cdot \sin \vartheta_{21}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_{21}} \right), \quad (5)$$

где

$$u_{21} = -\frac{r_{w1}}{r_{w2}} \quad (6)$$

или

$$u_{21} = -\frac{z_1}{z_2}. \quad (7)$$

Для схемы типа III определим также расстояние l_{w2} :

$$l_{w2} = (l_{w1} - r_{w1} \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}) \cdot \cos \vartheta_{21}. \quad (8)$$

Для схемы типа III величины l_{w1} и l_{w2} отрицательны.

Итак, зацепление цилиндрического и конического колес осуществляется в области точки B касания начальных окружностей радиусами r_{w1} и r_{w2} соответственно, плоскости которых расположены от точки O пересечения осей указанных колес на

расстояниях l_{w1} и l_{w2} соответственно.

Зубчатую поверхность конического колеса представим в виде совокупности плоских кривых, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к его оси. Рассмотрим одну из этих плоскостей. Для остальных плоскостей рассуждения будут аналогичными.

Обозначим расстояние от точки O до рассматриваемой плоскости l_2 . Таким образом, уравнение этой плоскости будет иметь вид $z^{(2)} = l_2$ (см. рис. 3). Примем, что

$$l_{w2} - \frac{b_2}{2} \leq l_2 \leq l_{w2} + \frac{b_2}{2},$$

где b_2 – ширина зубчатого венца конического колеса.

Указанная плоскость пересекает цилиндрическую зубчатую поверхность производящего колеса под углом θ_{21} . Кривая, полученная в результате этого пересечения, содержит точки, принадлежащие одновременно и цилиндрическому, и коническому колесам. Очевидно, что эти точки являются точками контакта зубчатых колес для данного относительного их положения.

Полученные при различных относительных положениях колес точки контакта формируют плоскую кривую, принадлежащую коническому колесу.

Для получения этой плоской кривой необходимо иметь геометрические параметры производящего колеса, в качестве которых примем множество точек, принадлежащих зубчатому профилю цилиндрического колеса (рис. 4). Указанные точки опишем в виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $x_i^{(1)}$, $y_i^{(1)}$ – декартовы координаты i -й точки, заданные в системе отсчета цилиндрического колеса; n – количество точек.

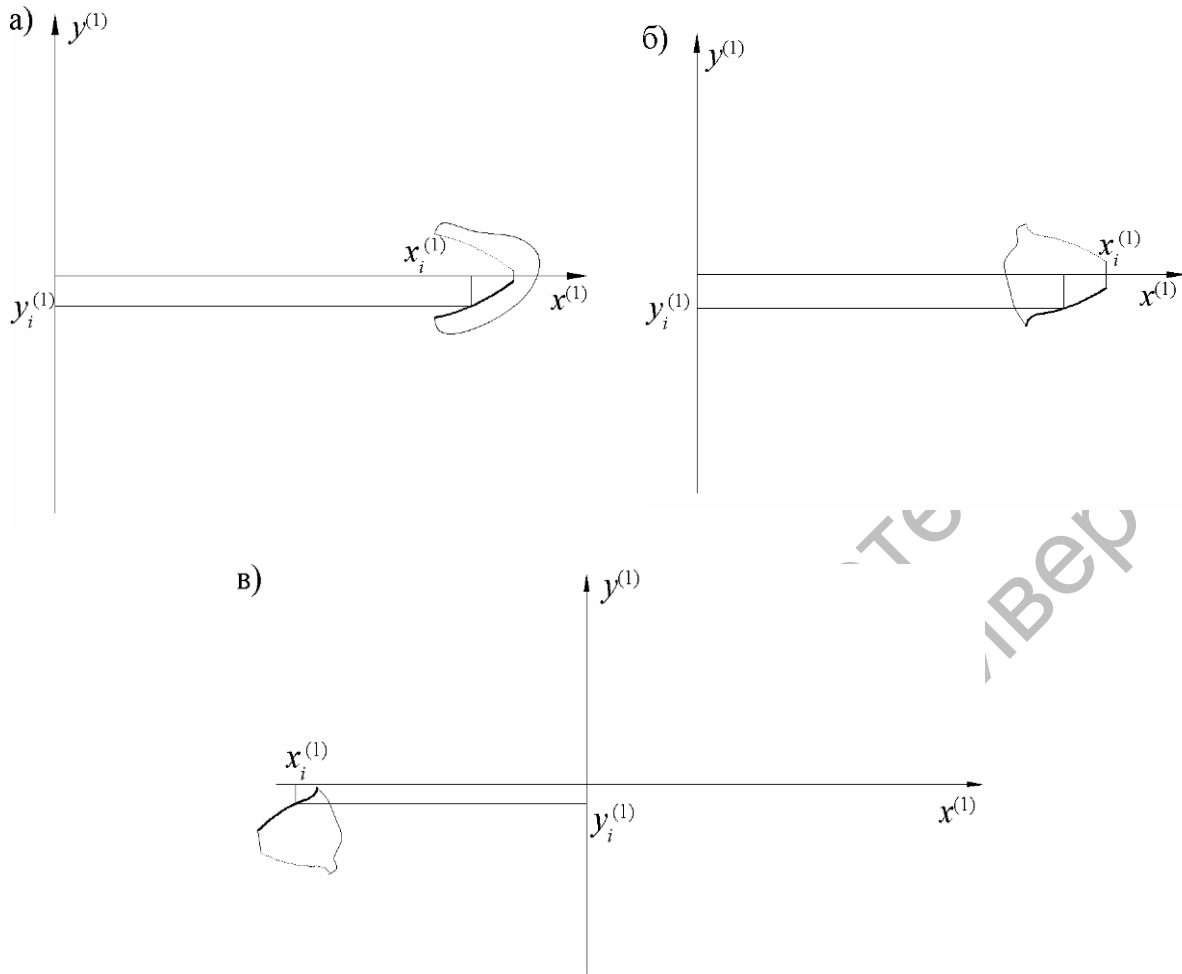


Рис. 4. Точки профиля цилиндрического колеса: а – схема типа I; б – схема типа II; в – схема типа III

Фактически в матрице (9) описаны точки профиля цилиндрического колеса, находящиеся в плоскости, описываемой уравнением $z^{(1)} = 0$ (см. рис. 3).

Зададим положение цилиндрического колеса, т. е. повернем его точки относительно его оси вращения на некоторый угол φ_1 . С этой целью произведем пересчет координат точек, описанных в матрице (9), для чего используем следующее матричное выражение:

$$A^I = R_{z, \varphi_1} \times A, \quad (10)$$

где A^I – первый промежуточный результат – матрица, содержащая координаты точек в системе цилиндрического колеса;

$$R_{z, \varphi_1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

матрица оператора поворота вокруг оси $Oz^{(1)}$.

Определим в системе отсчета конического колеса координаты точек пересечения плоскости, заданной уравнением $z^{(2)} = 0$ и параллельной рассматриваемой плоскости (см. рис. 3):

$$A^{II} = S_{x,k} \times A^I, \quad (12)$$

где A^{II} – второй промежуточный результат;

$$S_{x,k} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \quad (13)$$

матрица оператора масштабирования, где

$$k = \frac{1}{\cos \vartheta_{21}} - \quad (14)$$

коэффициент масштабирования.

Переместим полученные на предыдущем шаге точки на расстояние l_2 вдоль оси $Oz^{(2)}$ и на расстояние $-l_2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}$ вдоль оси $Ox^{(2)}$:

$$A^{III} = T_{\vec{r}} \times A^{II}, \quad (15)$$

где A^{III} – третий промежуточный результат – матрица, содержащая координаты точек в системе конического колеса;

$$T_{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_x^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 & r_y^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & r_z^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \quad (16)$$

матрица оператора переноса в соответствии с вектором перемещения $\vec{r}(r_x^{(2)}, r_y^{(2)}, r_z^{(2)})$, где $r_x^{(2)} = -l_2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}$, $r_y^{(2)} = 0$, $r_z^{(2)} = l_2$ – координаты вектора перемещения.

Повернем коническое колесо в его системе отсчета вокруг оси $Oz^{(2)}$:

$$A^{IV} = R_{z,\varphi_2} \times A^{III}, \quad (17)$$

где A^{IV} – окончательный результат преобразований – матрица, содержащая координаты точек в системе конического колеса;

$$\varphi_2 = -u_{21} \cdot \varphi_1 - \quad (18)$$

угол поворота конического колеса.

Описанные выше преобразования можно представить в следующей компактной форме:

$$A^{IV} = (R_{z,\varphi_2} \times T_{\vec{r}} \times S_{x,k} \times R_{z,\varphi_1}) \times A. \quad (19)$$

При изменении угла φ_1 от $-\pi$ до π получим совокупность точек, огибающая которых и будет являться искомым плоской кривой, принадлежащей зубчатой поверхности конического колеса (рис. 5). Границы области поиска огибающей кривой относительно оси $Ox^{(2)}$ для схем типов I и II определим следующим образом:

$$x_{\min}^{(2)} = \frac{r_{\min 1}}{\cos \vartheta_{21}} - l_2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}; \quad (20)$$

$$x_{\max}^{(2)} = \frac{r_{\max 1}}{\cos \vartheta_{21}} - l_2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}, \quad (21)$$

где $r_{\min 1}$ – минимальный радиус зубчатого профиля цилиндрического колеса; $r_{\max 1}$ – максимальный радиус зубчатого профиля цилиндрического колеса.

Для схемы типа III указанные границы находим по следующим формулам:

$$x_{\min}^{(2)} = -\frac{r_{\max 1}}{\cos \vartheta_{21}} - l_2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}; \quad (22)$$

$$x_{\max}^{(2)} = -\frac{r_{\min 1}}{\cos \vartheta_{21}} - l_2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_{21}. \quad (23)$$

Величины $r_{\min 1}$ и $r_{\max 1}$ считаем известными.

Интервал $x_{\min}^{(2)} \dots x_{\max}^{(2)}$ разделим на малые интервалы длиной Δx . В каждом таком малом интервале для схем типов I и III найдем точку с наименьшим значением координаты $y^{(2)}$, а для схемы типа II – с наибольшим. Занесем координаты найденных точек в матрицу

$$B = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_m^{(2)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_m^{(2)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & \dots & z_m^{(2)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где $z_i^{(2)}$ – абсцисса i -й точки, которая равна величине l_2 для рассматриваемой плоскости.

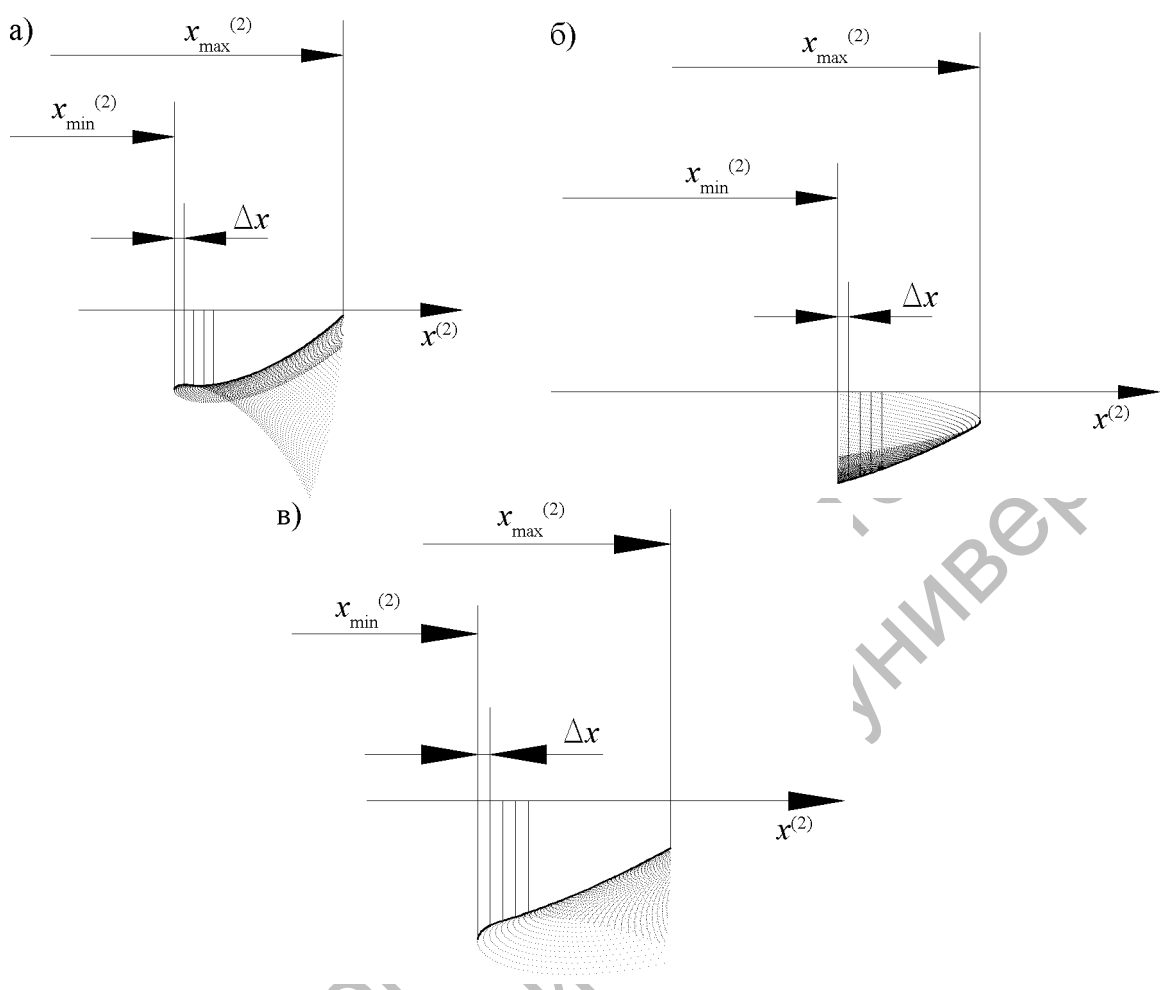


Рис. 5. Огибающая последовательных положений: а – схема типа I; б – схема типа II; в – схема типа III

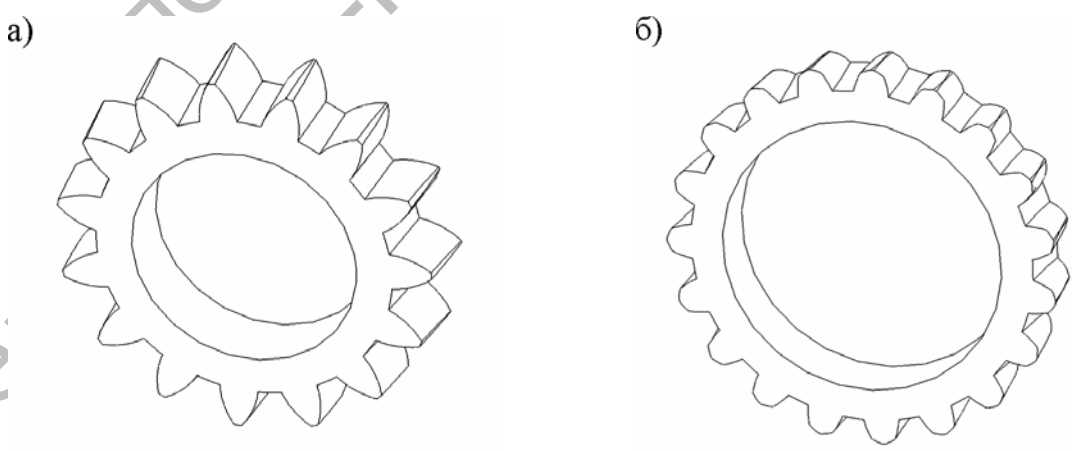


Рис. 6. Модели зуба конического колеса: а – без интерференции; б – с интерференцией

В матрицу (23) занесем координаты точек, лежащих во всех рассмотренных плоскостях, перпендикулярных оси вращения конического колеса.

Разработанная методика нахождения зубчатой поверхности конического колеса была реализована на ЭВМ. На языке программирования C+ было создано соответствующее программное обеспечение. Для визуализации зубчатой поверхности конического колеса использовалась CAD система SolidWorks. На языке VBA была создана другая программа, которая в среде указанной CAD системы позволяет на экране монитора отобразить трехмерные модели цилиндрического и конического колес. При этом SolidWorks позволяет определить наличие интерференции в зацеплении цилиндрического и конического колес прецессионной передачи. На рис. 6, а представлен зуб конического колеса, полученный без интерференции, а на рис. 6, б – с интерференцией.

В результате проведенных исследований было установлено, что любая схема

прецессионной передачи, основанной на цилиндроконическом зацеплении, может быть получена комбинацией трех базовых схем; проектирование зацепления прецессионной передачи может быть осуществлено методом последовательных положений с применением одних и тех же аффинных преобразований; по виду формируемой зубчатой поверхности можно установить, имеет ли место в зацеплении интерференция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопатин, Б. А. Способы формирования рабочих поверхностей зубчатых передач с малым межосевым углом / Б. А. Лопатин, О. Н. Цуканов // *Gearing and Transmissions*. – 1997. – № 2. – С. 38–48.
2. Планетарные прецессионные передачи (ППП). Кинематический, силовой и технологический аспекты их создания / П. Н. Громыко [и др.]; под общ. ред. А. Т. Скойбеды. – Минск : БГПА, 2000. – 252 с.

Белорусско-Российский университет
Могилевский государственный университет продовольствия
Материал поступил 15.01.2007

S. N. Khatetovski, N. V. Korotun,
A. A. Sidorski, K. K. Guliaev
**Interference of tooth surfaces
of precession transmission gears**
Belarusian-Russian University
Mogilev State University of Food

Any scheme of precession transmission based on cylindrical-conic gearing could be obtained by means of 3 base schemes combination. The CAD method to model precession transmission gears is the most perspective one. It allows to check the gears geometry interaction by the interference criterion. Besides gears modeling could be employed to model various CAD systems most effectively.