

УДК 517.927.4

## ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

**В. Н. ЛАПТИНСКИЙ**

доктор физико-математических наук, профессор  
Институт технологии металлов НАН Беларуси

**И. И. МАКОВЕЦКИЙ**

кандидат физико-математических наук, доцент  
Белорусско-Российский университет, г. Могилев

*Получены достаточные конструктивные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова с параметром. Разработан итерационный алгоритм построения решения.*

**Ключевые слова:** матричное дифференциальное уравнение, двухточечная краевая задача, однозначная разрешимость, построение решения

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F_0(t, X) + \lambda F_1(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

где  $A, B \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $F_i (i=0,1) \in C(D_\rho, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $I = [0, \omega]$ ,  $D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \rho\}$ ,  $F_i(t, X)$ . Предположим, что функции  $F_i(t, X)$  удовлетворяют в  $D_\rho$  относительно  $X$  условию Липшица (локально);  $F_i(t, 0) \neq 0$ .

В конечномерной банаховой алгебре  $\mathcal{B}(n)$  непрерывных матриц-функций с нормой  $\|X\|_c = \max_t \|X(t)\|$  будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0, \lambda) + NX(\omega, \lambda) = 0, \quad (2)$$

где  $\|\bullet\|$  – подходящая норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из норм, приведенных в [1, с. 21],  $M, N$  – вещественные  $(n \times n)$ -матрицы.

Данная работа является продолжением и развитием [2, 3 (см. также [4, § 1.1])]. С помощью метода [5] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \\ \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M, \quad Q = -V(\omega), \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m = \max\{\|P\|, \|Q\|\},$$

© Лаптинский В. Н., 2019

© Маковецкий И. И., 2019



$$h_i = \max_t \|F_i(t, 0)\|, \quad q = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega L, \quad p = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega h, \quad F(t, X, \lambda) = F_0(t, X) + \lambda F_1(t, X),$$

$$L = L_0 + \varepsilon L_1, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

где  $t \in I$ ,  $0 < \rho < \tilde{\rho}$ ,  $\lambda_0 = \lambda_1 \lambda_2$ ,  $\mu_0 = \mu_1 \mu_2$ ,  $\Phi$  – линейный оператор,  $\Phi X = PX - XQ$ ,  $L_i = L_i(\rho) > 0$  – постоянные Липшица для  $F_i(t, X)$  в  $D_\rho$ .

**Лемма.** Пусть выполнены условия:

- 1)  $\det N \neq 0$ ;
- 2) матрицы  $P, Q$  не имеют общих характеристических чисел;
- 3)  $q < 1$ ;
- 4)  $p / (1 - q) \leq \rho$ .

Тогда в области  $D_\rho$  решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка  $\|X\|_c \leq p / (1 - q)$ .

**Доказательство.** Сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). Пусть  $X = X(t, \lambda)$  – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = U(t)X(0)V(t) + U(t) \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(t), \quad (3)$$

где  $U(t), V(t)$  – соответственно решения уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U, \quad \frac{dV}{dt} = VB(t),$$

при этом  $U(0) = V(0) = E$  – единичная матрица; для компактности изложения формул вместо  $X(t, \lambda)$  принимаем  $X(t)$ .

Из (3) имеем

$$X(0) = U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - \int_0^t U^{-1}F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$X(\omega) = U(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) +$$

$$+ U(\omega) \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega). \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в левую часть условия (2), получим

$$MX(0) + NX(\omega) = MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - M \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau +$$

$$+ NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) + NU(\omega) \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega).$$

Отсюда имеем на основании (2)

$$\begin{aligned} MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) + NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) = \\ = M \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau - \\ - NU(\omega) \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega) \end{aligned}$$



и далее на основании условия 1)

$$\begin{aligned} & U^{-1}(\omega)N^{-1}MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) + U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) = \\ & = U^{-1}(\omega)N^{-1}M \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau - \\ & \quad - \int_0^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом принятых обозначений из (6) имеем

$$\begin{aligned} & PU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)Q = \\ & = P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q, \end{aligned}$$

или в форме с оператором  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} & \Phi\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\} = \\ & = P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \\ & \quad + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как матрицы  $P, Q$  не имеют общих характеристических чисел (см. условие 2) данной леммы), то, согласно [6, с. 207], оператор  $\Phi$  однозначно обратим, при этом оператор  $\Phi^{-1}$  является линейным и ограниченным. На основании обратимости оператора  $\Phi$  от уравнения (7) приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} X(t) = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[ P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q \right] \right\} V(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Установим обратное: всякое непрерывное решение интегрального уравнения (8) является решением задачи (1), (2). Дифференцируя по  $t$  обе части (8), получим с учетом перестановочности операторов дифференцирования и  $\Phi^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \frac{dU(t)}{dt} \left\{ \Phi^{-1} \left[ P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q \right] \right\} V(t) + \\ & + U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[ PU^{-1}(t)F(t, X(t), \lambda)V^{-1}(t) - U^{-1}(t)F(t, X(t), \lambda)V^{-1}(t)Q \right] \right\} V(t) + \\ & + U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[ P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q \right] \right\} \frac{dV(t)}{dt} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= A(t)U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t) + \\
&\quad + U(t)\left\{\Phi^{-1}\Phi\left[U^{-1}(t)F(t, X(t), \lambda)V^{-1}(t)\right]\right\}V(t) + \\
&\quad + U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t)B(t).
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (8) получим тождество

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t), \lambda).$$

Докажем, что решение уравнения (8) удовлетворяет краевому условию (2). Для этого вместо (8) рассмотрим эквивалентное ему уравнение (7) с учетом полученного тождества

$$\begin{aligned}
&\Phi\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\} = \\
&= P\left[\int_0^t U^{-1}(\tau)(dX(\tau))V^{-1}(\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)(dX(\tau))V^{-1}(\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^\omega U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]Q. \tag{9}
\end{aligned}$$

Выполнив в (9) интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned}
&\Phi\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\} = \\
&= P[U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - X(0) - \\
&\quad - \int_0^t \left(\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau}X(\tau)V^{-1}(\tau) + U^{-1}(\tau)X(\tau)\frac{dV^{-1}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau - \\
&\quad - \int_0^t U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau] + \\
&\quad + [U^{-1}(\omega)X(\omega)V^{-1}(\omega) - U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - \\
&\quad - \int_t^\omega \left(\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau}X(\tau)V^{-1}(\tau) + U^{-1}(\tau)X(\tau)\frac{dV^{-1}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau - \\
&\quad - \int_t^\omega U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau]Q.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем соотношение

$$-PX(0) + U^{-1}(\omega)X(\omega)V^{-1}(\tau)Q = 0, \tag{10}$$

эквивалентное условию (2).



Для исследования разрешимости уравнения (8) воспользуемся принципом Банаха – Каччиопполи [7, с. 605] сжимающих отображений. Запишем уравнение (8) в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (11)$$

где через  $\mathcal{L}$  обозначен нелинейный интегральный оператор, определяемый правой частью уравнения (8). Для произвольной матрицы  $X(t)$ , принадлежащей шару  $\|X\|_C \leq \rho$ , имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| \leq & \|U(t)\| \|\Phi^{-1}\| \left[ \|P\| \int_0^t \|U^{-1}(\tau) F(\tau, X(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau + \right. \\ & \left. + \int_t^\infty \|U^{-1}(\tau) F(\tau, X(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|Q\| \right] \|V(t)\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку  $\|F_i(t, X)\| \leq L_i \|X\| + h_i$ , то, продолжая оценки в (12), получим с использованием принятых обозначений

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| \leq & \lambda_1 \mu_1 \gamma m \omega \lambda_2 \mu_2 [L \|X\|_C + h] = \gamma \lambda_0 \mu_0 m \omega (L \|X\|_C + h) \leq \\ & \leq q\rho + p \leq q\rho + (1 - q)\rho = \rho. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}(X)\|_C \leq \rho. \quad (14)$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора  $\mathcal{L}$  в шаре  $\|X\|_C \leq \rho$ . Из (8) имеем для всех  $X, Y$  таких, что  $\|X\|_C \leq \rho$ ,  $\|Y\|_C \leq \rho$ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) = \\ & = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[ P \int_0^t U^{-1}(\tau) (F(\tau, X(\tau), \lambda) - F(\tau, Y(\tau), \lambda)) V^{-1}(\tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^\infty U^{-1}(\tau) (F(\tau, X(\tau), \lambda) - F(\tau, Y(\tau), \lambda)) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Выполнив оценки по норме в (15), аналогичные (12), (13), получим

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \leq \gamma \lambda_0 \mu_0 m \omega L \|X - Y\|_C = q \|X - Y\|_C.$$

Отсюда следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\|_C \leq q \|X - Y\|_C. \quad (16)$$

Соотношения (14), (16) являются условиями принципа Банаха – Каччиопполи применительно к (11) в шаре  $\|X\|_C \leq \rho$ . На основании этого принципа заключаем: уравнение (8) однозначно разрешимо в области  $D_\rho$ . Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Изучим вопрос отыскания решения уравнения (8). Для построения этого решения воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [7, с. 605]). Применительно к (8) имеем

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = & U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[ P \int_0^t U^{-1}(\tau) F(\tau, X_k(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^\infty U^{-1}(\tau) F(\tau, X_k(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$



где  $X_0(t)$  – произвольная матрица класса  $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ , принадлежащая шару  $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ . Тогда, согласно (14),  $\|X_i\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$  ( $i=1, 2, \dots$ ). Это нетрудно установить индукцией по  $k$  и на основании условия 4).

С помощью несложных выкладок установим (без использования свойств функций Грина), что все приближения, построенные согласно алгоритму (7), удовлетворяют краевому условию (2). Сначала продифференцируем по  $t$  обе части формулы (17):

$$dX_{k+1}(t) = [A(t)X_{k+1}(t) + X_{k+1}(t)B(t) + F(t, X_k(t), \lambda)]dt. \quad (18)$$

Соотношение (18) запишем в виде

$$F(t, X_k(t), \lambda)dt = dX_{k+1}(t) - [A(t)X_{k+1}(t) + X_{k+1}(t)B(t)]dt. \quad (19)$$

При  $t = \omega$  из (17) следует

$$X_{k+1}(\omega) = U(\omega)\Phi^{-1} \left\{ P \int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau, X_k(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau \right\} V(\omega). \quad (20)$$

Запишем теперь (20) в следующем виде:

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) = P \int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau, X_k(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (21) и выполняя интегрирование по частям с использованием тождеств  $dU^{-1}/dt = -U^{-1}A(t)$ ,  $dV^{-1}/dt = -B(t)V^{-1}$ , получим

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) = P[U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) - X_{k+1}(0)]. \quad (22)$$

Используя явный вид левой части (22), придем к равенству

$$MX_{k+1}(0) + NX_{k+1}(\omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Справедливость равенства (23) позволяет строить приближенные решения задачи (1), (2) в классе допустимых функций. Это свойство алгоритма (17) делает его достаточно удобным для возможных приложений.

Используя (16), получим рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а затем на ее основе

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

На основании условий 3), 4) последовательность  $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$  сходится равномерно по  $t \in I$  к решению  $X(t) \in D_{\rho}$  уравнения (8).

На основе оценки (24) нетрудно получить оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (17)

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leq q^k \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Полагая в (25)  $k=0$ ,  $X_0=0$ , получим

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}. \quad (26)$$

Выведем явную, т. е. по исходным данным задачи, оценку для  $\|X\|_{\mathbb{C}}$ . При  $k=0$ ,  $X_0=0$  из (17) имеем



$$X_1(t) = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[ P \int_0^t U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau + \int_t^{\omega} U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t). \quad (27)$$

Выполнив последовательно оценки по норме в (27), получим

$$\begin{aligned} \|X_1(t)\| &\leq \|U(t)\| \|\Phi^{-1}\| \left[ \|P\| \int_0^t \|U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\omega} \|U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|Q\| \right] \|V(t)\| \leq \\ &\leq \lambda_1 \mu_1 \gamma t \omega \int_0^{\omega} \|U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau \leq \gamma \lambda_0 \mu_0 \omega h = p. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_1\|_C \leq p. \quad (28)$$

Используя (28), имеем из (26)

$$\|X\|_C \leq \frac{\|X_1\|_C}{1-q} \leq \frac{p}{1-q} \leq \rho. \quad (29)$$

Теперь получим априорную оценку для  $\|X\|_C$  на основе уравнения (8), рассматривая его как тождество при  $X = X(t, \lambda)$ . Производя оценки по норме в (8), получим с учетом (13)

$$\|X\|_C \leq q \|X\|_C + p.$$

Отсюда на основании условия 3) имеем

$$\|X\|_C \leq \frac{p}{1-q}. \quad (30)$$

Легко видеть, что оценка (29) предпочтительнее оценки (30).

Далее рассмотрим задачу (1), (2) с точки зрения теории возмущений.

Используемый метод позволяет получить в явном виде по исходным данным задачи оценку допустимых возмущений задачи, т. е. возмущений, сохраняющих условия ее однозначной разрешимости, а также оценить влияние этих возмущений на решение невозмущенной задачи; другими словами, дать оценку величины  $\|X(t, \lambda) - X(t, 0)\|$ . Такие оценки являются важными для решения ряда прикладных задач.

Наряду с принятыми обозначениями введем следующие:

$$a_0 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega L_0, \quad a_1 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega L_1, \quad b_0 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega h_0, \quad b_1 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega h_1,$$

$$\varepsilon_1 = (1 - a_0) / a_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho(1 - a_0) - b_0}{\rho a_1 + b_1}.$$

**Теорема.** Пусть выполнены предположения 1), 2) леммы, а также неравенства

$$a_0 < 1, \quad (31)$$

$$\frac{b_0}{1 - a_0} < \rho. \quad (32)$$

Тогда в области  $D = D_\rho \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$  задача (1), (2) однозначно разрешима. Решение  $X(t, \lambda)$  представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (17), при этом справедливы оценки



$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{p}{1-q}, \quad (33)$$

$$\|X(t, \lambda) - X(t, 0)\| \leq \frac{\varepsilon(a_1 \|X_0\|_C + b_1)}{1-q}. \quad (34)$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что условия (31), (32) обеспечивают в области  $D_\rho$  существование и единственность решения интегрального уравнения (8) при отсутствии возмущения, т. е. при  $F_1(t, X) \equiv 0$ .

Оценим область значений параметра  $\lambda$ , позволяющую сохранить область локализации решения возмущенной задачи. Для этого воспользуемся доказанной леммой. Сначала отметим справедливость почти очевидного соотношения  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ . Далее на основе условия 3) имеем при  $|\lambda| \leq \varepsilon_2 < \varepsilon_1$

$$a_0 + \varepsilon a_1 \leq a_0 + \varepsilon_2 a_1 < a_0 + \varepsilon_1 a_1 < 1. \quad (35)$$

Для значений  $\lambda$ , определяемых согласно (35), должно выполняться условие 4). Очевидно, при  $|\lambda| \leq \varepsilon_2$  имеем соотношение

$$\frac{c_0 + \varepsilon c_1}{1 - a_0 - \varepsilon a_1} \leq \frac{c_0 + \varepsilon_2 c_1}{1 - a_0 - \varepsilon_2 a_1}. \quad (36)$$

С помощью несложных элементарных выкладок можно установить справедливость равенства

$$\frac{c_0 + \varepsilon_2 c_1}{1 - a_0 - \varepsilon_2 a_1} = \rho. \quad (37)$$

На основании (37) имеем из (36)

$$\frac{c_0 + \varepsilon c_1}{1 - a_0 - \varepsilon a_1} \leq \rho \quad (|\lambda| \leq \varepsilon_2). \quad (38)$$

Соотношения (35), (38) являются условиями принципа сжимающих отображений для интегральной задачи (8) в области  $D = D_\rho \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$ . Таким образом, в этой области возмущенная краевая задача однозначно разрешима.

Справедливость оценки (33), очевидно, следует из леммы. Получим оценку (34). Возмущенное и невозмущенное уравнения запишем соответственно в виде

$$X_\lambda = \tilde{\mathcal{L}}(F_\lambda), \quad (39)$$

$$X_0 = \tilde{\mathcal{L}}(F_0), \quad (40)$$

где  $F_\lambda = F(t, X, \lambda)$ ,  $F_0 = F_0(t, X)$ ,  $X_\lambda = X(t, \lambda)$ ,  $X_0 = X(t, 0)$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}$  – соответствующий линейный интегральный оператор. Из (39), (40) имеем

$$X_\lambda - X_0 = \tilde{\mathcal{L}}(F_\lambda - F_0). \quad (41)$$

Выполнив оценки по норме в (41) с использованием явного вида уравнений (39), (40), получим на основании (16)

$$\begin{aligned} \|X_\lambda - X_0\| &\leq (a_0 + \varepsilon a_1) \|X_\lambda - X_0\|_C + \varepsilon (a_1 \|X_0\|_C + b_1) = \\ &= q \|X_\lambda - X_0\|_C + \varepsilon (a_1 \|X_0\|_C + b_1). \end{aligned}$$

Отсюда, на основании условия 3), имеем оценку (34). Теорема полностью доказана.

**Замечание.** Очевидно, вместо оценки (34) можно принять более грубую, но явную оценку

$$\|X(t, \lambda) - X(t, 0)\| \leq \frac{\varepsilon(a_1 \rho + b_1)}{1-q}.$$





**Замечание 1.2.** При дополнительных предположениях о характеристических числах матриц  $P, Q$  для оператора  $\Phi^{-1}$  имеют место различные явные представления (см., например, [8–11]), на основе которых для  $\|\Phi^{-1}\|$  можно получить конструктивные оценки.

**Замечание 1.3.** Отметим, что используемый в работе [11] подход к качественному исследованию задачи (1), (2) приводит к системе двух матричных уравнений относительно  $X(t)$ ,  $X(0)$  и таким же алгоритмам построения решения. Конструктивный метод из [5], как видим, дает одно соотношение (8), (17).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472с.
2. Лаптинский В. Н. К вопросу о разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 2-3(15). – С. 176–181.
3. Лаптинский, В. Н. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 994–996.
4. Лаптинский В. Н. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев : БРУ, 2012. – 167 с.
5. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300с.
6. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука. 1977. – 744 с.
8. Абдикасова, П. А., К. Г. Валеев // Математическая физика. – 1976. – Вып. 19. – С. 3–10.
9. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
10. Параев, Ю. И. Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск : Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
11. Murty K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505–515.

Поступила в редакцию 14.01.2019 г.

Контакты: lavani@tut.by (Лаптинский Валерий Николаевич)

imi.makzi@gmail.com (Маковецкий Илья Иванович)

#### Laptinsky V., Makovetsky I. BILATERAL REGULARIZATION OF NON-LINEARLY PERTURBED TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION WITH PARAMETER.

*Constructive sufficient conditions of one-valued resolvability of a two-point boundary value problem for a nonlinear Lyapunov equation with parameter are obtained. The iterative algorithm for solution construction is developed.*

**Keywords:** matrix differential equation, two-point boundary value problem, one-valued resolvability, solution construction.

