УДК 517.925

КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА НА ОСНОВЕ ПРАВОСТОРОННЕЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А. Н. Бондарев
старший преподаватель
Белорусско-Российский университет, Могилев

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции коэффициентов. Разработан итерационный алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений построения решений.

Ключевые слова: матричное уравнение Ляпунова, многоточечная краевая задача, существование и единственность решения, алгоритм, сходимость.

Введение

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы.

В данной работе, являющейся продолжением [1, 2] и развитием [3], задача (1), (2) исследуется на основе расщепления (декомпозиции) матрицы $B(t)$ в виде

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t), \tag{3}$$

где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются определенным способом (например, согласно, [4, гл. 1]).

Случай, когда используется декомпозиция $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, изучен в [1]. Однако для определенного типа краевых задач результаты [1] могут оказаться неэффективными, при этом декомпозиция (3) для таких задач вполне приемлема, например, в смысле скорости сходимости соответствующего алгоритма. Очевидно, интерес для исследования представляет двойная декомпозиция, т. е. $A(t)$ и $B(t)$. В рамках настоящей работы этот случай не рассматривался.

Основная часть

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad \nu_i = \|V_i\|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

$$q = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha+\beta_2)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21], Φ – линейный матричный оператор типа [6], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dV}{dt} = VB_1(t). \tag{4}$$

Теорема. *Пусть оператор* Φ *обратим и выполнено условие*

$$q < 1. \tag{5}$$

Тогда задача (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение* $X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C \le \frac{N}{1-q}. \tag{6}$$

Доказательство. Сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). На основании (3) уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB_1(t) + XB_2(t) + F(t). \tag{7}$$

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). На основе (1), (4) имеем

$$X(t) = X(t_i)V^{-1}(t_i)V(t) + \int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V(t). \tag{8}$$

Из (8) получим

$$X(t_i) = X(t)V^{-1}(t)V_i - \int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (2), получим матричное интегральное уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t)V^{-1}(t)V_i = \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i. \tag{10}$$

Запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$\Phi\{X(t)V^{-1}(t)\} = \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i. \tag{11}$$

Поскольку оператор Φ обратим, то из (11) имеем сначала

$$X(t)V^{-1}(t) = \Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i\right\},$$

а затем

$$X(t)=\left[\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i\right\}\right]V(t). \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) удовлетворяет интегральному уравнению (12).

Теперь установим, что всякое непрерывное решение уравнения (12) является решением задачи (1), (2). Для этого рассмотрим уравнение (10) (либо (11)), эквивалентное уравнению (12).

Дифференцируя обе части тождества (10), получим последовательно

$$\sum_{i=1}^{k}M_i\left[\frac{dX(t)}{dt}-X(t)B_1(t)\right]V^{-1}(t)V_i=\sum_{i=1}^{k}M_i[A(t)X(t)+X(t)B_2(t)+F(t)]V^{-1}(t)V_i,$$

$$\sum_{i=1}^{k}M_i\left[\frac{dX(t)}{dt}-A(t)X(t)-X(t)B(t)-F(t)\right]V^{-1}(t)V_i=0,$$

$$\Phi\left\{\left[\frac{dX(t)}{dt}-A(t)X(t)-X(t)B(t)-F(t)\right]V^{-1}(t)\right\}=0.$$

Отсюда, используя обратимость оператора Φ, получим тождество

$$\frac{dX(t)}{dt}-A(t)X(t)-X(t)B(t)-F(t)=0. \quad (13)$$

Тем самым установлено, что матрица-функция $X(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Теперь докажем, что $X(t)$ удовлетворяет краевому условию (2). Из (13) имеем

$$[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]d\tau=dX(\tau)-X(\tau)B_1(\tau)d\tau. \quad (14)$$

Используя (14), запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{k}M_iX(t)V^{-1}(t)V_i=\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[dX(\tau)-X(\tau)B_1(\tau)d\tau]V^{-1}(\tau)V_i. \quad (15)$$

Выполнив интегрирование по частям в (15), получим после несложных выкладок

$$\sum_{i=1}^{k}M_iX(t)V^{-1}(t)V_i=\sum_{i=1}^{k}M_i\left[X(t)V^{-1}(t)V_i-X_i\right]$$

или

$$\Phi\left\{X(t)V^{-1}(t)\right\}=\Phi\left\{X(t)V^{-1}(t)\right\}-\sum_{i=1}^{k}M_iX_i.$$

Очевидно, условие (2) для решения $X(t)$ выполняется.

Уравнение (10) (или (12)) относится к типу уравнений [6, 7] и представляет собой весьма непростой объект для конструктивного исследования ввиду отсутствия явного представления оператора Φ^{-1}. Случай $k=2$ в научной литературе достаточно хорошо изучен. В общем случае в работе [6] предложены два формальных способа построения Φ^{-1}: в одном из них используется алгебраический аппарат, другой фактически основан на методе малого параметра.

Замечание 1. Матричное уравнение $\Phi Z=H$ с $(n\times n)$-матрицами M_i и $(m\times m)$-матрицей V равносильно обычному векторно-матричному уравнению $\tilde{\Phi}\tilde{Z}=\tilde{H}$, где $\tilde{\Phi}$ – квадратная матрица порядка nm, $\tilde{Z}$, $\tilde{H}$ – nm-векторы, определяемые на основе матриц Z, H. Очевидно, в случае $\det\tilde{\Phi}\neq 0$ оператор Φ однозначно обратим; это подразумевается в данной работе.

Исследуем разрешимость уравнения (12) с помощью принципа сжимающих отображений, согласно которому применим метод последовательных приближений с классической вычислительной схемой [8, 9]:

$$X_p(t)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X_{p-1}(\tau)+X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)+\right.\right.$$

$$+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau V_i\Big\}\Big)V(t), \quad p=1,2,\ldots \tag{16}$$

В качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t)\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times m}\right)$. Очевидно, алгоритм (16) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_0^\infty\subset\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times m}\right)$, при этом $\{X_p(t)\}_1^\infty\subset\mathbb{C}^1\left(I,\mathbb{R}^{n\times m}\right)$.

Сначала докажем, что функции $X_p(t)$ удовлетворяют краевому условию (2). На основании (16) имеем

$$\frac{dX_p(t)}{dt}=X_p(t)B_1(t)+$$

$$+\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i\left[A(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)\right]V^{-1}(t)V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=X_p(t)B_1(t)+\left(\Phi^{-1}\left\{\Phi\left[A(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)\right]V^{-1}(t)\right\}\right)V(t)=$$

$$=X_p(t)B_1(t)+\left[A(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)\right]V^{-1}(t)V(t)=$$

$$=X_p(t)B_1(t)+\left[A(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)\right].$$

Таким образом, получили соотношение

$$\frac{dX_p(t)}{dt}=X_p(t)B_1(t)+\left[A(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)\right]. \tag{17}$$

Из (17) имеем

$$\left[A(\tau)X_{p-1}(\tau)+X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)\right]d\tau=dX_p(\tau)-X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau. \tag{18}$$

Используя (18), соотношение (16) запишем в следующем виде:

$$X_p(t)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i\int_{t_i}^t\left[dX_p(\tau)-X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau\right]V^{-1}(\tau)V_i\right\}\right)V(t). \tag{19}$$

Выполнив в (19) интегрирование по частям, получим последовательно

$$X_p(t)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i\int_{t_i}^t\left[dX_p(\tau)-X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau\right]V^{-1}(\tau)V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i\int_{t_i}^t\left(dX_p(\tau)\right)V^{-1}(\tau)V_i-\sum_{i=1}^k M_i\int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i\left(X_p(\tau)V^{-1}(\tau)\Big|_{t_i}^t+\int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\right)V_i-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^k M_i\int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i\left(X_p(t)V^{-1}(t)-X_p(t_i)V^{-1}(t_i)+\int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\right)V_i-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^k M_i\int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left(M_iX_p(t)V^{-1}(t)V_i-M_iX_p(t_i)+M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t)V^{-1}(t)V_i-\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)+\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t)V^{-1}(t)V_i-\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\Phi\left[X_p(t)V^{-1}(t)\right]-\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right\}\right)V(t)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\Phi\left[X_p(t)V^{-1}(t)\right]-\Phi^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right)V(t)=$$

$$=\left(X_p(t)V^{-1}(t)-\Phi^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right)V(t)=$$

$$=X_p(t)-\left(\Phi^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right)V(t).$$

Отсюда имеем соотношение

$$\left(\Phi^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right)V(t)=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)=0. \tag{20}$$

Стало быть, все члены последовательности $\{X_p(t)\}_1^{\infty}$ удовлетворяют краевому условию (2).

Замечание 2. По-видимому, более наглядным является следующий способ получения соотношения (20). Запишем (16) в виде

$$\Phi\left(X_p(t)V^{-1}(t)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[A(\tau)X_{p-1}(\tau)+X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)\right]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i. \tag{21}$$

Дифференцируя обе части соотношения (21), получим с учетом перестановочности оператора дифференцирования и оператора Φ:

$$\Phi\left(\frac{dX_p(t)}{dt}V^{-1}(t)-X_p(t)B_1(t)V^{-1}(t)\right)=$$

$$=\Phi\left(\left[A(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B_2(t)+F(t)\right]V^{-1}(t)\right). \tag{22}$$

На основании обратимости оператора Φ из (22) имеем (17).

Далее в (21) воспользуемся (18), а затем выполним интегрирование по частям

$$\Phi\left(X_p(t)V^{-1}(t)\right)=\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[dX_p(\tau)-X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau\right]V^{-1}(\tau)V_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left(dX_p(\tau)\right)V^{-1}(\tau)V_i-\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}M_i\left[X_p(\tau)V^{-1}(\tau)\Big|_{t_i}^{t}+\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\right]V_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}M_i\left[X_p(t)V^{-1}(t)-X_p(t_i)V^{-1}(t_i)\right]V_i+\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t)V^{-1}(t)V_i-\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)=\Phi\left(X_p(t)V^{-1}(t)\right)-\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i).$$

Отсюда имеем (20).

Изучим вопрос сходимости построенной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [8, 9]), этот вопрос заменим вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+\left(X_1(t)-X_0(t)\right)+\ldots+\left(X_p(t)-X_{p-1}(t)\right)+\ldots \qquad (23)$$

и докажем его равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость путем построения соответствующего мажорантного сходящегося числового ряда.

Из (16) имеем

$$X_{p+1}(t)-X_p(t)=\mathfrak{L}\left(X_p\right)-\mathfrak{L}\left(X_{p-1}\right),\quad p=1,2,\ldots, \qquad (24)$$

где

$$\mathfrak{L}(Y)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t).$$

Выполним оценки по норме в (24):

$$\left\|X_{p+1}(t)-X_p(t)\right\|=\left\|\mathfrak{L}\left(X_p\right)-\mathfrak{L}\left(X_{p-1}\right)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[A(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B_2(\tau)\right]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right\|\left\|V(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\right\|\left\|\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[A(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B_2(\tau)\right]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\|\left\|V(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{k}\left\|M_i\int_{t_i}^{t}\left[A(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B_2(\tau)\right]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\|\left\|V(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{k}\left\|M_i\right\|\left\|\int_{t_i}^{t}\left[A(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B_2(\tau)\right]V^{-1}(\tau)d\tau\right\|\left\|V_i\right\|\left\|V(t)\right\|\le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \|[A(\tau)(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))+\right.$$

$$\left.+(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))B_2(\tau)]V^{-1}(\tau)\|d\tau \right| \|V_i\| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \|A(\tau)(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))+\right.$$

$$\left.+(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))B_2(\tau)\| \|V^{-1}(\tau)\|d\tau \right| \|V_i\| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \|V(t)\| \int_{0}^{\omega} [\|A(\tau)\| + \|B_2(\tau)\|] \|X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\| \|V^{-1}(\tau)\| d\tau \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \|V(t)\| \int_{0}^{\omega} [\|A(\tau)\| + \|B_2(\tau)\|] \|V^{-1}(\tau)\| d\tau \|X_p - X_{p-1}\|_C \le$$

$$\le \gamma \sum_{i=1}^{k} m_i v_i \mu_1 \mu_2 (\alpha+\beta_2)\omega \|X_p - X_{p-1}\|_C = q\|X_p - X_{p-1}\|_C .$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_{p+1} - X_p\|_C \le q\|X_p - X_{p-1}\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

На основе (25) имеем явную оценку

$$\|X_p - X_{p-1}\|_C \le q^p \|X_1 - X_0\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя (26), можно доказать с помощью соответствующей методики (например, [8, 9]), что ряд (23), а значит и последовательность $\{X_r\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (12), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \le \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

На основе (26) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (16):

$$\|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \tag{28}$$

Очевидно, из (28) при $X_0 \equiv 0$ следует оценка (6), при этом

$$\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C .$$

Получим оценку для $\|\mathfrak{L}(0)\|$:

$$\|\mathfrak{L}(0)\| = \left\| \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\} \right) V(t) \right\| \le$$

$$\le \left\| \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\} \right\| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \left\| \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \left\| M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \left\| \int_{t_i}^{t} F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau \right\| \|V_i\| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \left\|F(\tau)V^{-1}(\tau)\right\| d\tau \right| \|V(t)\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \int_{0}^{\omega} \left\|F(\tau)V^{-1}(\tau)\right\| d\tau \|V(t)\| \le \gamma \sum_{i=1}^{k} m_i v_i \mu_1 \mu_2 \omega h = N.$$

Очевидно, из (28) следует оценка (6). Теорема полностью доказана.

Теперь рассмотрим краевую задачу с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dX}{dt} = (A_0(t) + \lambda A_1(t))X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{30}$$

дополнив принятые выше обозначения

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha_i = \max_t \left\|A_i(t)\right\| (i = 0,1), \quad q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon q_1,$$

где

$$q_0 = \gamma \mu_1 \mu_2 (\alpha_0 + \beta_2) \omega \sum_{i=1}^{k} m_i v_i, \quad q_1 = \gamma \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \omega \sum_{i=1}^{k} m_i v_i.$$

Следствие. *Пусть оператор* Φ *обратим и*

$$q_0 < 1. \tag{31}$$

Тогда в области (значений параметра λ*)*

$$|\lambda| < (1 - q_0)/q_1 \tag{32}$$

задача (29), (30) однозначно разрешима; ее решение $X(t,\lambda)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением типа (16) и удовлетворяющих условию (30), при этом справедлива оценка*

$$\|X(t,\lambda)\| \le \frac{N}{1 - q(\varepsilon)}. \tag{33}$$

Доказательство. Согласно методу, используемому при доказательстве теоремы, имеем эквивалентное интегральное уравнение

$$X(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} \left[\left(A_0(\tau) + \lambda A_1(\tau) \right) X(\tau,\lambda) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + X(\tau,\lambda) B_2(\tau) + F(\tau) \right] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t). \tag{34}$$

По доказаной теореме, уравнение (34) однозначно разрешимо при выполнении условия $q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon q_1 < 1$. Отсюда на основании (31) получим соотношение (32). Оценка (33) следует из оценки (6). Таким образом, следствие доказано.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим задачу (1), (2) в случае $n = 2$, $k = 4$, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0{,}02 \cdot t & 0 \\ 0 & -0{,}02 \cdot t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0{,}03 \cdot t^2 & 0 \\ 0 & 0{,}03 \cdot t^2 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{7}{10}, \quad t_4 = 1.$$

Примем следующую норму матриц: $\|A\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.

Применительно к этой задаче имеем

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0,03 \cdot t^2 & 0 \\ 0 & 0,03 \cdot t^2 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} e^{0,01 \cdot t^3} & 0 \\ 0 & e^{0,01 \cdot t^3} \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1,0006402048436978 \\ -1,010050167084168 & 1,0034358891813724 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 0,02, \quad \beta_2 = 0, \quad h = 1,5, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = 1,$$

$$\gamma = 0,9979730589745677, \quad \mu_1 = 1,010050167084168, \quad \mu_2 = 1, \quad \nu_1 = 1,$$

$$\nu_2 = 1,0006402048436978, \quad \nu_3 = 1,0034358891813724, \quad \nu_4 = 1,010050167084168,$$

$$\det\Phi = 2,0141326952748853, \quad q = 0,08092501462758205.$$

Алгоритм построения решения данной задачи имеет вид

$$X_p(t) = V(t)\Phi^{-1} \sum_{i=1}^{4} M_i \int_{t_i}^{t} \left[A(\tau) X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau) B_2(\tau) + F(\tau) \right] V^{-1}(\tau) \, d\tau V_i, \tag{35}$$

$$p = 1, 2, \ldots$$

По формуле (35) получены приближенные решения $X_1(t)$, $X_2(t)$, которые здесь не приведены ввиду их громоздкости. В качестве начального приближения $X_0(t)$ принята нулевая матрица второго порядка. Вычислено приближенное решение $X_2(t)$ в точках $t_i = 0,1 \cdot i \; (i = 0, 1, 2, \ldots, 10)$. Результаты приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1 – Элементы $X_{2(11)}(t), X_{2(12)}(t)$ приближенного решения

t_i	$X_{2(11)}(t_i)$	$X_{2(12)}(t_i)$
0	– 0,10179388782334228	– 0,5838894000199764
0,1	– 0,0968046871534001	– 0,4839460877569011
0,2	– 0,08183731975426259	– 0,3841038540449341
0,3	– 0,05688440696723698	– 0,28433079811881606
0,4	– 0,02192538144399908	– 0,18457708667219275
0,5	0,02307713816593243	– 0,08477491750304711
0,6	0,07818101961212265	0,01516158634196249
0,7	0,14346836234729732	0,1153365683907367
0,8	0,21904934644363855	0,215872733422614
0,9	0,3050662209655689	0,31691176252671405
1	0,40169747313432796	0,4186148669733551

Таблица 2 – Элементы $X_{2(21)}(t), X_{2(22)}(t)$ приближенного решения

t_i	$X_{2(21)}(t_i)$	$X_{2(22)}(t_i)$
0	– 0,2982596385986007	0,6644909739602713
0,1	– 0,19823859888148043	0,6594316126087342
0,2	– 0,09820507239546045	0,6442822518533989
0,3	0,00181005644474786	0,6190871825696718
0,4	0,10179388782334212	0,5838894000199765
0,5	0,2017514645811606	0,538727002118997
0,6	0,30170572597991074	0,48362961890278755
0,7	0,401697473134328	0,41861486697335504
0,8	0,501785361965581	0,34368481827528063
0,9	0,6020459394613651	0,2588224681881494
1	0,7025737390337498	0,16398818355686567

Точное решение данной задачи имеет вид

$$X(t)=U(t)X(0)V(t)+U(t)\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V(t),$$

где

$$U(t)=\begin{pmatrix} e^{0,01t^2} & 0 \\ 0 & e^{-0,01t^2} \end{pmatrix},\quad V(t)=\begin{pmatrix} e^{0,01t^3} & 0 \\ 0 & e^{0,01t^3} \end{pmatrix},$$

$$X(0)=\begin{pmatrix} -0,10179095066151522 & -0,5838825176210544 \\ -0,2982606622859577 & 0,6644868488044693 \end{pmatrix}.$$

Достаточно точное численное решение в точках $t_i=0,1\cdot i\,(i=0,1,2,\ldots,10)$ приведено в таблицах 3, 4.

Таблица 3 – Элементы $X_{11}(t), X_{12}(t)$ точного численного решения

t_i	$X_{11}(t_i)$	$X_{12}(t_i)$
0	– 0,10179095066151522	– 0,5838825176210544
0,1	– 0,09680186827157113	– 0,48393933123572014
0,2	– 0,08183486123693787	– 0,3840975024903627
0,3	– 0,05688256473759989	– 0,2843251955677172
0,4	– 0,02192442480916995	– 0,18457264870389334
0,5	0,02307694179671822	– 0,08477210621080478
0,6	0,07817944092047348	0,01516231907437127
0,7	0,1434652734616924	0,11533486961579609
0,8	0,2190448179909899	0,2158684705051872
0,9	0,30506065977249996	0,316905178257176
1	0,40169180812604094	0,41860677005676594

Таблица 4 – Элементы $X_{21}(t), X_{22}(t)$ точного численного решения

t_i	$X_{21}(t_i)$	$X_{22}(t_i)$
0	– 0,2982606622859577	0,6644868488044693
0,1	– 0,19823973648939586	0,6594272676726507
0,2	– 0,0982065622657202	0,6442772867156984
0,3	0,00180796205332806	0,6190813113345198
0,4	0,10179095066151528	0,5838825176210544
0,5	0,20174752022050518	0,5387192356804867
0,6	0,30170077567366616	0,4836213584840102
0,7	0,40169180812604083	0,41860677005676605
0,8	0,5017797209780046	0,3436777822982678
0,9	0,6020417005358595	0,2588175652424226
1	0,7025731474363291	0,1639865510591174

Для сравнения полученного приближенного решения с точным приведены таблицы 5, 6.

Таблица 5 – Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$\lvert X_{11}(t_i)-X_{2(11)}(t_i)\rvert$	$\lvert X_{12}(t_i)-X_{2(12)}(t_i)\rvert$
0	$2,937161827060164\cdot 10^{-6}$	$6,882398921992383\cdot 10^{-6}$
0,1	$2,818881828972608\cdot 10^{-6}$	$6,75652118098391\cdot 10^{-6}$
0,2	$2,4585173247215764\cdot 10^{-6}$	$6,35155457140435\cdot 10^{-6}$
0,3	$1,84222963709596\cdot 10^{-6}$	$5,602551098882191\cdot 10^{-6}$
0,4	$9,566348291301097\cdot 10^{-7}$	$4,437968299408901\cdot 10^{-6}$
0,5	$1,9636921420873588\cdot 10^{-7}$	$2,8112922423328968\cdot 10^{-6}$
0,6	$1,5786916491705716\cdot 10^{-6}$	$7,327324087758047\cdot 10^{-7}$
0,7	$3,0888856049071656\cdot 10^{-6}$	$1,698774940606107\cdot 10^{-6}$

Окончание таблицы 5

t_i	$\lvert X_{11}(t_i)-X_{2(11)}(t_i)\rvert$	$\lvert X_{12}(t_i)-X_{2(12)}(t_i)\rvert$
0,8	$4{,}528452648644432\cdot10^{-6}$	$4{,}262917426806068\cdot10^{-6}$
0,9	$5{,}561193068936987\cdot10^{-6}$	$6{,}584269538034704\cdot10^{-6}$
1	$5{,}665008287025763\cdot10^{-6}$	$8{,}096916589150904\cdot10^{-6}$

Таблица 6 – Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$\lvert X_{21}(t_i)-X_{2(21)}(t_i)\rvert$	$\lvert X_{22}(t_i)-X_{2(22)}(t_i)\rvert$
0	$1{,}0236873569935412\cdot10^{-6}$	$4{,}12515580205941\cdot10^{-6}$
0,1	$1{,}13760791542461\cdot10^{-6}$	$4{,}344936083477968\cdot10^{-6}$
0,2	$1{,}4898702597465618\cdot10^{-6}$	$4{,}965137700541078\cdot10^{-6}$
0,3	$2{,}0943914198004454\cdot10^{-6}$	$5{,}871235151944099\cdot10^{-6}$
0,4	$2{,}9371618268381194\cdot10^{-6}$	$6{,}882398922103405\cdot10^{-6}$
0,5	$3{,}9443606554279143\cdot10^{-6}$	$7{,}766438510303786\cdot10^{-6}$
0,6	$4{,}950306244588809\cdot10^{-6}$	$8{,}260418777328304\cdot10^{-6}$
0,7	$5{,}665008287192297\cdot10^{-6}$	$8{,}09691658898437\cdot10^{-6}$
0,8	$5{,}640987576382983\cdot10^{-6}$	$7{,}0359770128480825\cdot10^{-6}$
0,9	$4{,}238925505606339\cdot10^{-6}$	$4{,}902945726803498\cdot10^{-6}$
1	$5{,}91597420607215\cdot10^{-7}$	$1{,}6324977482606862\cdot10^{-6}$

Оценка погрешностей вычислений, полученная на основании подробных таблиц типа 5, 6, имеет вид

$$\|X(t)-X_2(t)\| \le 8{,}29216543374312\cdot10^{-6}.$$

Заметим, что соответствующая оценка, полученная на основе теоретической оценки (27), грубее этой оценки, а именно

$$\|X(t)-X_2(t)\| \le 0{,}00685218192745706.$$

Заключение

Анализ полученных теоретических результатов с учетом выполненых расчетов для модельной задачи показывает, что они могут быть достаточно эффективно использованы при решении соответствующих прикладных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Бондарев, А. Н.*** Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе конструктивного метода регуляризации / А. Н. Бондарев // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2011. – № 1(37). – С. 19–30.
2. ***Bondarev, A. N.*** Multipoint Boundary Value Problem for the Linear Matrix Lyapunov Equation with Parameter / A. N. Bondarev // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations “ QUALITDE – 2015”: abstracts, Tbilisi, 27–29 Dec. 2015 / A. Razmadze Mathem. Inst. ; ed.: I. Kiguradze [et al.]. – Tbilisi, 2015. – P. 32–35.
3. ***Бондарев, А. Н.*** Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 776–784.
4. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
5. ***Демидович, Б. П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.
6. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
7. ***Зубов, В. И.*** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
8. ***Канторович, Л. В.*** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

9. ***Бибиков, Ю. Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – Москва : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 28.02.2018 г.
Контакты: alex-bondarev@tut.by (Бондарев Александр Николаевич)

Bondarev A. CONSTRUCTIVE ANALYSIS OF THE MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION BASED ON THE RIGHT-SIDED DECOMPOSITION.

Constructive sufficient conditions for one-valued solvability of the multipoint boundary value problem for the Lyapunov matrix equation are obtained on the basis of the right-sided decomposition of coefficients. The iterative algorithm with a computational scheme of the classical method of successive approximations of solution construction is developed.

Keywords: Lyapunov matrix equation, multipoint boundary value problem, existence and uniqueness of solution, algorithm, convergence.