МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов экономических специальностей очной и заочной форм обучения

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Могилев 2019

УДК 519.852
ББК 22.18
В16

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «26» сентября 2019 г., протокол № 8

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий;
канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова;
ст. преподаватель О. А. Маковецкая

Рецензент И. Д. Камчицкая

Даны задания для практических занятий по дисциплинам «Высшая математика», «Математические основы теории принятия решений», «Математическое программирование» в разделе «Линейное программирование», а также приведены методические указания по их выполнению, перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Задачи линейного программирования и их графическое решение

1.1 Теоретическая часть

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют **целевой** (*показателем эффективности* или *критерием оптимальности*). Экономические возможности формализуются в виде системы ограничений. Все это составляет математическую модель задачи – отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д.

Модель задачи математического программирования включает:

1) совокупность неизвестных величин $\boldsymbol{x}=\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right)$, действуя на которые систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи* (*вектором управления, решением, поведением* и т. д.);

2) *целевую функцию* (*функцию цели, показатель эффективности, критерий оптимальности* и т. д.), которая позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных. Этот вариант доставляет целевой функции экстремальное значение. Как правило, целевую функцию обозначают буквой Z $\left(Z=z\left(\boldsymbol{x}\right)\right)$;

3) условия (система ограничений), налагаемые на неизвестные величины. Эти условия следуют из ограниченности ресурсов, из условий производственных и технологических процессов. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств; их совокупность образует *область допустимых решений* (*область экономических возможностей*). Как правило, область допустимых решений обозначается Ω.

Из экономических или физических соображений на план задачи или некоторые его компоненты, как правило, налагаются условия неотрицательности $\left(x_j\geq 0\right)$, иногда – целочисленности. План $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым $\left(\boldsymbol{x}\in\Omega\right)$. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется оптимальным. Оптимальный план, как правило, обозначается $\boldsymbol{x}^*$, а экстремальное значение функции цели – $z\left(\boldsymbol{x}^*\right)=Z^*$.

Если целевая функция $Z=z\left(\boldsymbol{x}\right)$ и функции $\varphi_i\left(\boldsymbol{x}\right)\left(i=\overline{1,m}\right)$, входящие в систему ограничений, линейны (первой степени) относительно входящих в задачу неизвестных x_j, то такой раздел математического программирования называется линейным программированием (ЛП). Особенностью решения задач линейного программирования (ЗЛП) является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений.

Основные виды ЗЛП.

1 Задача о наилучшем распределении ресурсов.

2 Задача о выборе оптимальных технологий.

3 Задача о смесях (задача о диете).

4 Задача о раскрое материалов.

5 Задача о размещении заказа.

6 Транспортная задача.

Основные формы записи ЗЛП. Общей задачей линейного программирования называют задачу

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m_1); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2); \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = \overline{m_2 + 1, m}); \tag{4}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n_1} \right); \tag{5}$$

$$x_j \text{ – произвольные } \left(j = \overline{n_1 + 1, n} \right), \tag{6}$$

где c_j, a_{ji}, b_i – заданные действительные числа; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – план задачи.

(1) – целевая функция, (2)–(6) – ограничения.

Канонической формой записи ЗЛП называется задача

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}); \tag{8}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n} \right). \tag{9}$$

Геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП

Пусть дана задача

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2; \tag{10}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{11}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{12}$$

Каждое из ограничений (11), (12) задает на плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а их пересечение задает область допустимых значений ЗЛП (выпуклый многоугольник (рисунок 1, *а*), неограниченная выпуклая многоугольная область (рисунок 1, *б*), единственная точка (рисунок 1, *в*), прямая линия (рисунок 1, *г*), луч (рисунок 1, *д*), отрезок (рисунок 1, *е*), пустое множество (рисунок 1, *ж*)).

Пусть область допустимых решений ЗЛП – непустое множество, например, многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рисунок 2). Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$. Получим $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$. Это уравнение задает на плоскости прямую линию. В точках прямой *NM* целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0. Считая в равенстве (10) *Z* параметром, получим уравнение семейства параллельных прямых, называемых линиями уровня целевой функции. Для того чтобы установить направление возрастания (убывания) целевой функции, построим вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$, называемый **градиентом функции**, где $c_1 = \dfrac{\partial Z}{\partial x_1}$, $c_2 = \dfrac{\partial Z}{\partial x_2}$ – частные производные функции *Z*.

Вектор $-\boldsymbol{c}$ указывает направление наискорейшего убывания целевой функции и называется антиградиентом.

Вектор $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2)$ перпендикулярен к прямым *Z* = const семейства $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$.

Алгоритм графического решения ЗЛП

1 С учетом системы ограничений строим область допустимых решений Ω.

2 Строим вектор $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции – вектор градиентного направления.

3 Проводим произвольную линию уровня $Z = Z_0$ (как правило, проводят линию *Z* = 0), перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{c}$.

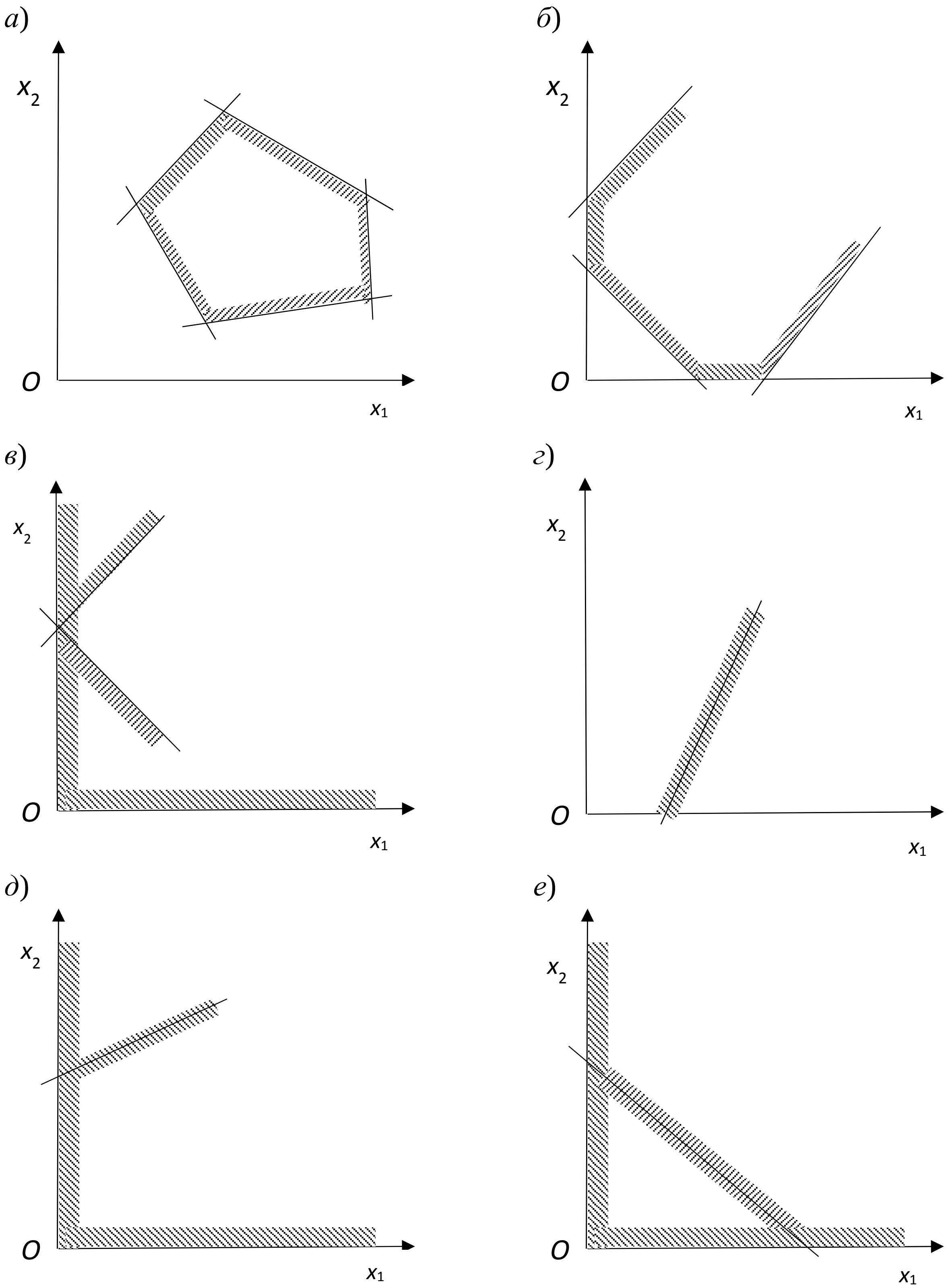
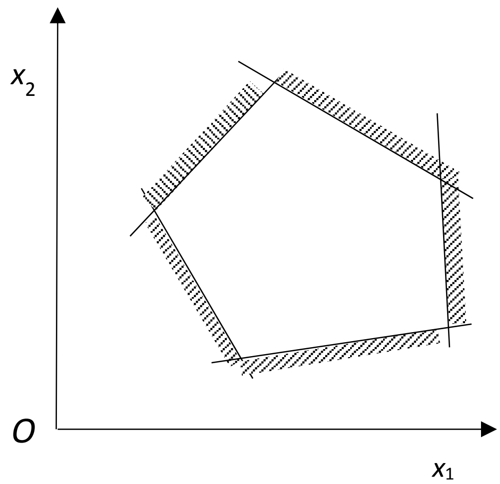


Рисунок 1

ж)



Окончание рисунка 1

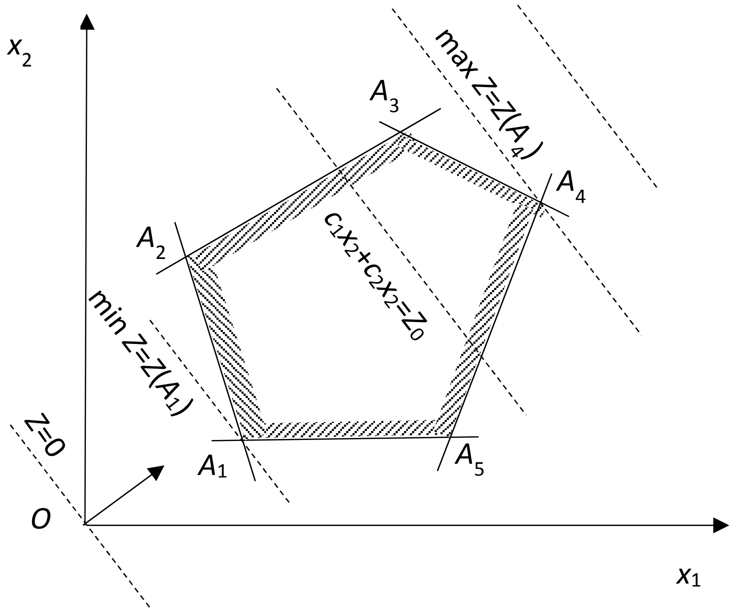


Рисунок 2

4 При решении задачи на максимум перемещаем линию уровня $Z = Z_0$ в направлении вектора $\boldsymbol{c}$ таким образом, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении (крайней точке) (на рисунке 2 – до точки A_4). В случае решения задачи на минимум линию уровня $Z = Z_0$ перемещаем в антиградиентном направлении (на рисунке 2 – до точки A_2).

5 Определяем оптимальный план $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*; x_2^*\right)$ и экстремальное значение целевой функции $\boldsymbol{Z}^* = Z\left(\boldsymbol{x}^*\right)$.

При этом возможны следующие случаи, представленные на рисунке 3:

1) оптимальный план единственный: линия уровня и область допустимых решений Ω в разрешающем положении имеют одну общую точку (см. рисунок 3, *а*);

2) оптимальных планов бесконечное множество: в разрешающем положе-

нии линия уровня проходит через сторону области допустимых решений (см. рисунок 3, *б*);

3) область допустимых решений состоит из единственной точки, где целевая функция достигает одновременно и максимального, и минимального значений (см. рисунок 3, *в*);

4) целевая функция не ограничена: линия уровня, сколько бы ее не перемещали, не может занять разрешающего положения (см. рисунок 3, *г*);

5) задача не имеет решения: область допустимых решений – пустое множество, т. е. система ограничений задачи несовместна (см. рисунок 3, *д*).

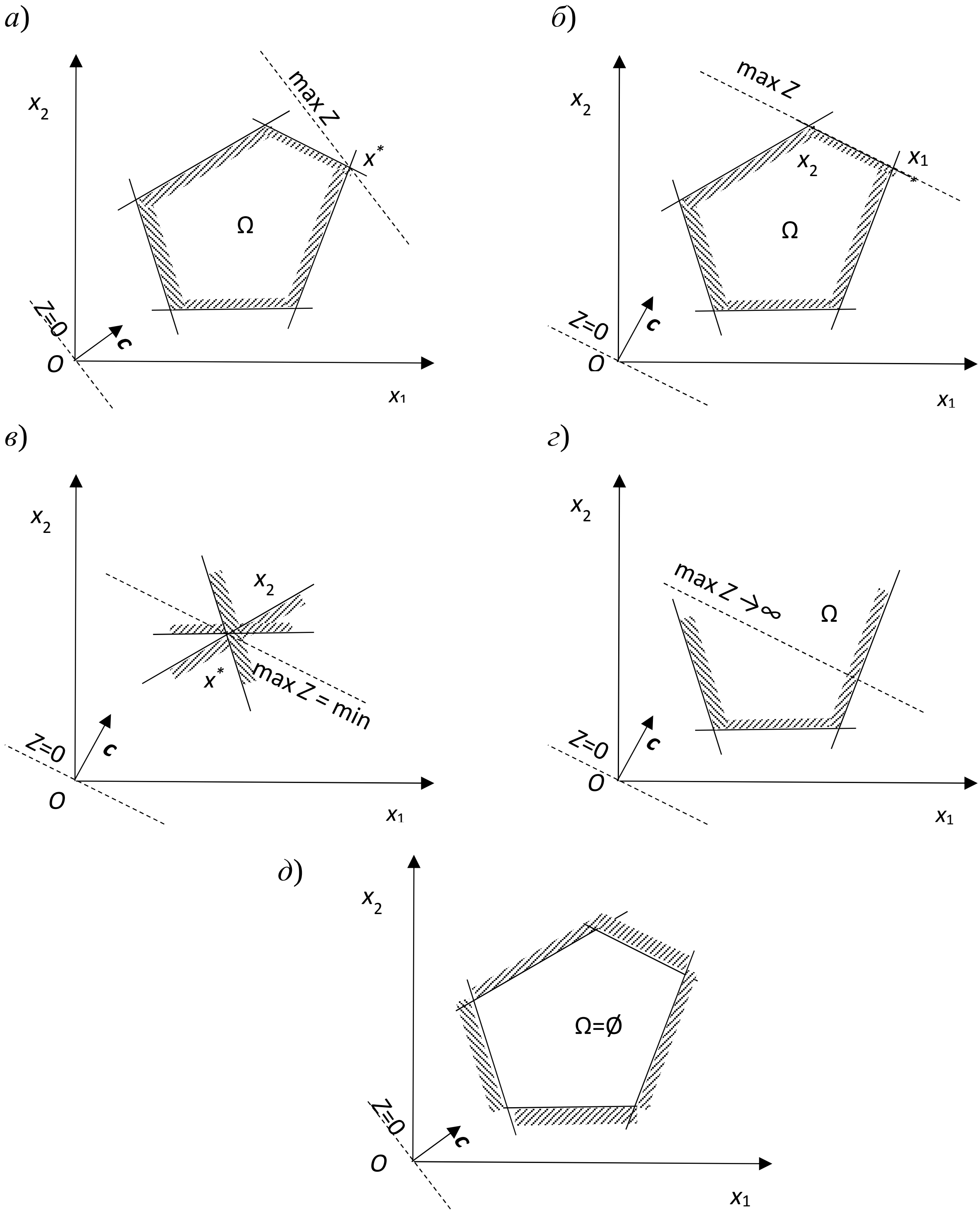


Рисунок 3

1.2 Практическая часть

Составление математической модели.

Пример 1 – Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида. Нормы расхода a_{ij} полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов b_i и прибыль c_j от единицы каждой продукции представлены в таблице 1. Определить план производства, доставляющий максимум прибыли.

Требуется составить математическую модель данной задачи (записать систему ограничений и целевую функцию).

Таблица 1

Полуфабрикат	Норма затрат на единицу продукции		Объем полуфабриката
	П1	П2	
I	1	2	800
II	6	2	2400
Прибыль, ден. ед.	10	35	–

Решение

Составим математическую модель задачи. Для этого по таблице запишем ограничения на полуфабрикаты:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 800; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 2400. \end{cases}$$

Так как по условию задачи на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида, то математически это требование выражается неравенством $2x_1 \ge x_2$.

Так как x_1 и x_2 – единицы продукции, то они не могут быть отрицательными, значит, $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$.

Функция прибыли (целевая функция) будет иметь вид $Z = 10x_1 + 35x_2$. Так как нужно определить план производства, доставляющий максимум прибыли, то данная задача – задача на максимум.

Таким образом, математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\max Z = 10x_1 + 35x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 800; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 2400; \\ 2x_1 \ge x_2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Пример 2 (самостоятельно) – Цех выпускает два вида продукции P_1, P_2, используя три вида сырья S_1, S_2, S_3. Запасы каждого вида сырья ограничены и составляют соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц. При заданной технологии количество сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, записано в таблице 2.

Таблица 2

Сырье	Продукция		Запас сырья
	P_1	P_2	
S_1	1	1	8
S_2	1	4	20
S_3	1	0	5
Прибыль, ден. ед.	1	2	-

В последней строке таблицы 2 указаны значения прибыли, выраженной в условных денежных единицах и получаемой предприятием от реализации единицы каждого вида продукции. Требуется составить такой план выпуска продукции видов P_1, P_2, при котором прибыль от реализации всей продукции была бы максимальной.

Решение ЗЛП графическим методом

Пример 3 – Найти значения переменных x_1 и x_2, при которых функция $Z = 3x_1 + 4x_2$ принимает экстремальные (максимальное и минимальное) значения при условии, что

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3; \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97; \\ x_1 + 7x_2 \ge 74; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Решение

Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2 и будем решать данную задачу в соответствии с алгоритмом графического решения ЗЛП.

1 С учетом системы ограничений построим область допустимых решений Ω. Для этого на плоскости Ox_1x_2 построим граничные прямые, соответствующие трем неравенствам системы ограничений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 = 97; \\ x_1 + 7x_2 = 74 \end{cases} \qquad (13)$$

(например, по точкам их пересечения с координатными осями), а затем определим соответствующие полуплоскости.

Найдем точки пересечения прямой $-x_1 + x_2 = 3$ с осями Ox_1 и Ox_2. Пусть $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 3$; получим точку с координатами (0; 3). Пусть $x_2 = 0$, тогда $x_1 = -3$; получим точку с координатами (–3; 0).

Отметим эти точки на координатной плоскости Ox_1x_2.

Для того чтобы определить, какая часть плоскости удовлетворяет неравенству $-x_1 + x_2 \le 3$, выясним, удовлетворяют ли ему координаты точки $O(0;0)$:

$$-0 + 0 \le 3.$$

Получили верное неравенство, значит, та полуплоскость, в которой лежит точка $O(0;0)$, удовлетворяет данному неравенству. Значит, решением данного неравенства является та часть плоскости Ox_1x_2, которая лежит ниже прямой $-x_1 + x_2 = 3$.

Найдем точки пересечения прямой $5x_1 + 3x_2 = 97$ с осями Ox_1 и Ox_2. Пусть $x_1 = 0$, тогда $3x_2 = 97 \Rightarrow x_2 = \frac{97}{3} = 32\frac{1}{3}$; получим точку с координатами $\left(0; 32\frac{1}{3}\right)$. Пусть $x_2 = 0$, тогда $5x_1 = 97 \Rightarrow x_1 = \frac{97}{5} = 19\frac{2}{5}$; получим точку с координатами $\left(19\frac{2}{5}; 0\right)$.

Отметим эти точки на координатной плоскости Ox_1x_2.

Для того чтобы определить, какая часть плоскости удовлетворяет неравенству $5x_1 + 3x_2 \le 97$, выясним, удовлетворяют ли ему координаты точки $O(0;0)$:

$$5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \le 97.$$

Получили верное неравенство, значит, та полуплоскость, в которой лежит точка $O(0;0)$, удовлетворяет данному неравенству. Значит, решением данного неравенства является та часть плоскости Ox_1x_2, которая лежит ниже прямой $5x_1 + 3x_2 = 97$.

Найдем точки пересечения прямой $x_1 + 7x_2 = 74$ с осями Ox_1 и Ox_2. Пусть

$x_1 = 0$, тогда $7x_2 = 74 \Rightarrow x_2 = \frac{74}{7} = 10\frac{4}{7}$; получим точку с координатами $\left(0;10\frac{4}{7}\right)$. Пусть $x_1 = 4$, тогда $x_2 = \frac{74 - x_1}{7} = \frac{74-4}{7} = 10$; получим точку с координатами (4; 10).

Отметим эти точки на координатной плоскости Ox_1x_2 Ox_1x_2.

Для того чтобы определить, какая часть плоскости удовлетворяет неравенству $x_1 + 7x_2 \geq 74$, выясним, удовлетворяют ли ему координаты точки $O(0;0)$:

$$0 + 7 \cdot 0 \geq 74.$$

Получили неверное неравенство, значит, та полуплоскость, в которой лежит точка $O(0;0)$, не удовлетворяет данному неравенству. Значит, решением данного неравенства является та часть плоскости Ox_1x_2, которая лежит выше прямой $x_1 + 7x_2 = 74$.

На плоскости Ox_1x_2 область допустимых решений выглядит следующим образом (рисунок 4).

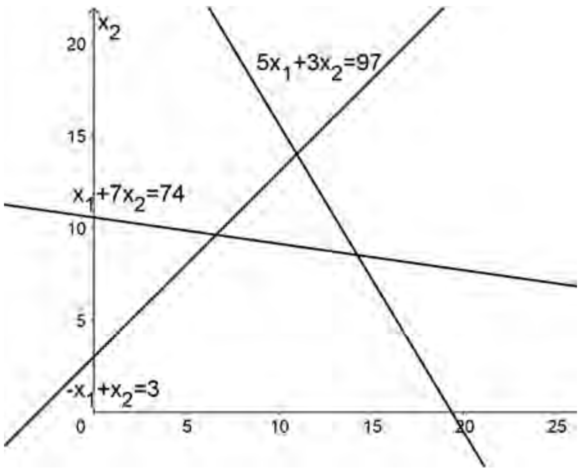


Рисунок 4

2 Построим вектор $\boldsymbol{c} = (c_1;c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции – вектор градиентного направления, где $c_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1}$; $c_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2}$ – частные производные целевой функции Z.

В данном случае $c_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1} = (3x_1 + 4x_2)'_{x_1} = 3$; $c_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2} = (3x_1 + 4x_2)'_{x_2} = 4$.

Значит, вектор наискорейшего возрастания целевой функции имеет координаты $\boldsymbol{c} = (3;4)$.

Построим его на рисунке 5.

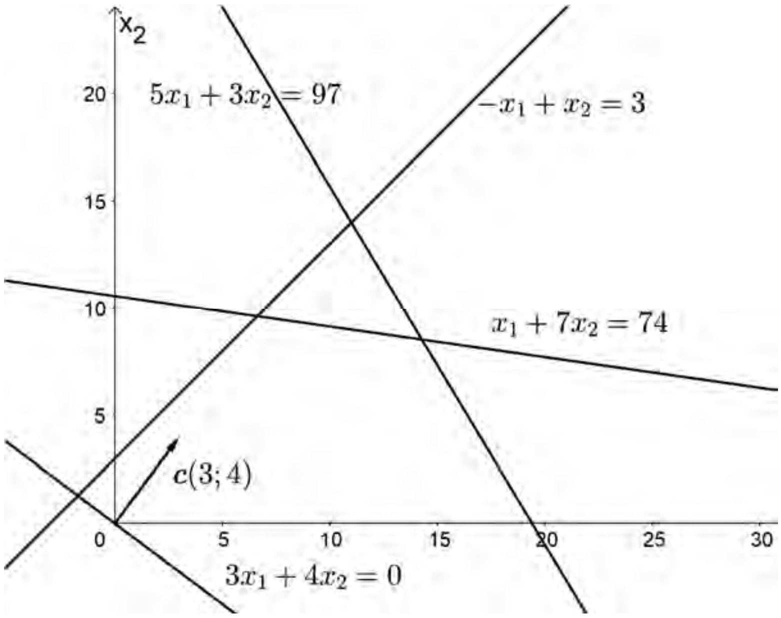


Рисунок 5

3 Проведем произвольную линию уровня $Z = Z_0$ (как правило, проводят линию $Z = 0$), перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{c} = (3;4)$.

На рисунке проведем линию $3x_1 + 4x_2 = 0$. Она будет пересекать оси координат в точке $(0;0)$ и проходить через точку $\left(1;-\frac{3}{4}\right)$.

4 При решении задачи на максимум переместим линию уровня $Z = 0$ по направлению вектора $\boldsymbol{c}$ таким образом, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем положении (крайней точке). Такой точкой в данном случае является точка *B*. Таким образом, максимального значения целевая функция достигает в точке *B*. Координаты этой точки определяются как пересечение прямых, определяемых первым и вторым уравнениями системы (13), т. е. координаты точки *B* можно найти как решение системы

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 = 97. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 5x_1 + 3(3 + x_1 = 97) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 5x_1 + 9 + 3x_1 = 97 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 9 + 8x_1 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 8x_1 = 97 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 8x_1 = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ x_1 = 11. \end{cases}$$

Таким образом, точка *B* имеет координаты $(11;14)$. Значит, целевая функция принимает максимальное значение при $x_1 = 11$ и $x_2 = 14$.

Подставим эти значения в целевую функцию и найдем ее значение: $Z_{\max} = Z(11;14) = 3\cdot 11 + 4\cdot 14 = 89$.

Для того чтобы найти минимальное значение, которое принимает целевая функция, будем перемещать линию уровня в направлении, противоположном направлению вектора ***c*** таким образом, чтобы она также касалась области допустимых решений в ее крайней точке. В данном случае этой точкой будет точка *A*.

Таким образом, минимального значения целевая функция достигает в точке *A*. Координаты этой точки определяются как пересечение прямых, определяемых первым и третьим уравнениями системы (13), т. е. координаты точки *A* можно найти как решение системы

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 + 7x_2 = 74. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 + 7x_4 = 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ x_1 + 7(3 + x_1) = 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ x_1 + 21 + 7x_1 = 74 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 21 + 8x_1 = 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 8x_1 = 74 - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ 8x_1 = 53 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + x_1; \\ x_1 = 6{,}625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + 6{,}625; \\ x_1 = 6{,}625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 9{,}625; \\ x_1 = 6{,}625. \end{cases}$$

Таким образом, точка *A* имеет координаты $(6{,}625; 9{,}625)$. Значит, целевая функция принимает минимальное значение при $x_1 = 6{,}625$ и $x_2 = 9{,}625$.

Подставим эти значения в целевую функцию и найдем ее значение: $Z_{\min} = Z(6{,}625; 9{,}625) = 3\cdot 6{,}625 + 4\cdot 9{,}625 = 58{,}375$.

Ответ. Целевая функция принимает свое максимальное значение $Z_{\max} = Z(11;14) = 89$ и минимальное значение $Z_{\min} = Z(6{,}625; 9{,}625) = 58{,}375$.

Пример 4 (самостоятельно) – Решить графически ЗЛП, составленную в примере 2.

1.3 Задачи для самостоятельного решения

1 $z = 2x_1 + 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 8; \\ -4x_1 + 2x_2 \ge 5; \\ -2x_1 + 2x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2 $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_2 \le 4; \\ 2x_1 - 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 4x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3 $z = 2x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 \le 6; \\ -x_1 + 3x_2 \le 5; \\ 3x_1 - x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4 $z = -3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \ge 5; \\ 3x_1 + x_2 \le 5; \\ 4x_1 + x_2 \ge 4; \\ -4x_1 + 4x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5 $z = x_1 + 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \ge 6; \\ -3x_2 \le 4; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 0; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6 $z = 3x_1 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 4; \\ 4x_1 + 3x_2 \le 5; \\ 2x_1 - x_2 \le 4; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7 $z = -3x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 6; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 4; \\ 4x_1 + 4x_2 \le 0; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8 $z = 4x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_2 \le 5; \\ 2x_1 + 4x_2 \le 0; \\ 2x_1 \le 3; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9 $z = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 4; \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10 $z = 2_1 + 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1 + 2x_2 \le 5; \\ x_1 + 3x_2 \ge 0; \\ 2x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11 $z = x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5; \\ 4x_1 + 4x_2 \ge 4; \\ -x_1 + x_2 \le 6; \\ 4x_1 \le 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12 $z = -4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 5; \\ -3x_2 \ge 8; \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

13 $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_2 \ge 5; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 7; \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 8; \\ -3x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

14 $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_2 \le 8; \\ 4x_1 - x_2 \le 5; \\ 3x_1 - 3x_2 \le 5; \\ 4x_1 - 2x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15 $z = -3x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 5; \\ 4x_1 - 4x_2 \le 6; \\ 4x_1 - x_2 \le 6; \\ x_1 + 3x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

16 $z = x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 \le 6; \\ x_1 + 4x_2 \le 6; \\ x_1 - 3x_2 \le 5; \\ -2x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

17 $z = -4x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3; \\ 3x_1 - 4x_2 \le 4; \\ -3x_1 + 2x_2 \ge 7; \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 0; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

18 $z = -4x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_2 \le 4; \\ x_1 + 3x_2 \le 3; \\ 4x_1 - 2x_2 \le 7; \\ x_1 + 3x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

19 $z = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 4; \\ -x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 \le 6; \\ x_1 + 3x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20 $z = 2x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_2 \le 2; \\ -x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 3x_1 - 4x_2 \le 8; \\ x_1 - 3x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21 $z = 2x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 \le 8; \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6; \\ -2x_1 + 3x_2 \le 0; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

22 $z = -4x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4; \\ -x_1 + 4x_2 \le 7; \\ 4x_1 + 4x_2 \ge 7; \\ x_1 + 4x_2 \le 8; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

23 $z = -x_1 + 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 0; \\ x_1 - 3x_2 \le 6; \\ 4x_1 + 4x_2 \le 4; \\ x_1 + 3x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24 $z = -3x_1 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ -4x_1 + 3x_2 \le 4; \\ -3x_1 + x_2 \ge 0; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25 $z = x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 3x_1 - x_2 \le 6; \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6; \\ -3x_1 + 3x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

26 $z = -2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8; \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 3; \\ -2x_1 + x_2 \le 6; \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 0; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

27 $z = -3x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 8; \\ x_1 + 4x_2 \le 6; \\ 3x_2 \le 5; \\ 3x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

28 $z = 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 0; \\ 4x_1 - 3x_2 \le 8; \\ 4x_1 + 2x_2 \ge 5; \\ -3x_1 + 3x_2 \ge 8; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

29 $z = -x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \ge 6; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 7; \\ 2x_1 - x_2 \le 3; \\ 3x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

30 $z = x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 \le 7; \\ 4x_1 - x_2 \le 8; \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 7; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

2.1 Теоретическая часть

Свойства решений ЗЛП.

Пусть ЗЛП представлена в следующем виде:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n; \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k; \end{cases}; \tag{15}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{16}$$

Для того чтобы данная задача имела решение, ее система ограничений (15) должна быть совместной. Это возможно, если ранг r системы (число линейно независимых уравнений) не больше числа неизвестных n. При $r = n$ система имеет единственное решение, которое и будет при $x_i \ge 0$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ оптимальным. Пусть $r < n$. В этом случае система векторов $\left(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}\right)$, $\left(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k2}\right)$, …, $\left(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn}\right)$ содержит базис – максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как ее линейная комбинация; этот базис состоит точно из r векторов. Переменные ЗЛП, соответствующие r векторам базиса, называются *базисными* и обозначаются БП. Остальные $n - r$ переменных называются *свободными* и обозначаются СП. Таким образом, будем считать, что базис составляют первые m векторов $\left(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}\right)$, $\left(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k2}\right)$, …, $\left(a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{km}\right)$. Этому базису соответствуют базисные переменные $x_1, x_2, \ldots x_m$, а свободными будут переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

Если свободные переменные приравнять к нулю, то базисные переменные при этом примут неотрицательные значения. Полученное частное решение системы (15) называется **опорным решением** (планом).

Симплексный метод

Использование симплексного метода (метода последовательного улучшения опорного плана) предполагает выполнение следующих шагов:

– построение начального опорного плана;
– нахождение признака оптимальности опорного плана;
– переход к нехудшему опорному плану.

Построение начального опорного плана.

Если каждое ограничение-равенство ЗЛП в каноническом виде содержит переменную, входящую в левую часть с коэффициентом, равным единице, а во все остальные с коэффициентом, равным нулю (при неотрицательности правых частей), то говорят, что система ограничений представлена в **предпочтительном виде**. В этом случает ее опорное решение находится следующим образом: *все свободные переменные приравниваются к нулю и тогда базисные переменные будут равны свободным членам*.

Например. Пусть дана система ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 10; \\ 5x_1 + x_3 + 3x_5 = 80; \\ -5x_1 + x_4 + 2x_5 = 32; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right).$$

Так как в данную систему ограничений с коэффициентом, равным единице, входят переменные x_2, x_3 и x_4, то они являются предпочтительными (базисными). Тогда свободными будут переменные x_1 и x_5. Приравняем свободные переменные x_1 и x_5 к нулю, тогда базисные переменные примут значения $x_2 = 10$, $x_3 = 80$, $x_4 = 32$. Таким образом, получаем план $\boldsymbol{x} = (0;10;80;32;0)$.

Признак оптимальности опорного плана

Решение ЗЛП при помощи симплекс-метода заключается в выполнении ряда шагов (*итераций*), на каждом из которых от данного базиса переходят к другому, новому базису с таким расчетом, чтобы значение целевой функции улучшалось, т. е. увеличивалось (по крайней мере, не уменьшалось), если исходная задача решается на максимум, и уменьшалось (по крайней мере, не увеличивалось), если исходная задача решалась на минимум. Для перехода к новому базису из старого базиса выводится одна переменная и вместо нее вводится другая из числа небазисных. После конечного числа шагов находится некоторый базис, на котором достигается искомый максимум (минимум) целевой функции, а соответствующее базисное решение является оптимальным, либо выясняется, что задача не имеет решения.

Практическая реализация симплекс-метода основывается на построении симплекс-таблиц, в которых отражается очередная каноническая форма записи исходной задачи, а также содержится проверка условия оптимальности соответствующего опорного плана.

Рассмотрим на примере решения конкретной задачи алгоритм симплекс-метода.

2.2 Примеры решения задач

Задача 1. Решить ЗЛП

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 12; \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 \le 18; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$$

Преобразуем неравенства в равенства, введя новые неотрицательные переменные x_4 и x_5. Получим новую систему ограничений, и ЗЛП примет вид:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 18; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0;\ \ x_3 \ge 0;\ \ x_4 \ge 0;\ \ x_5 \ge 0.$$

Так как переменная x_4 входит с единичным коэффициентом только в первое уравнение, а переменная x_5 входит с единичным коэффициентом только во второе уравнение, то эти переменные составляют базис задачи (являются базисными переменными). Целевая функция выражена только через небазисные (свободные) переменные. Значит, имеем каноническую форму представления ЗЛП.

Составим первую симплексную таблицу, учитывая, что если решается задача на минимум, то в последней (*индексной*) строке записываются коэффициенты целевой функции, а если решается задача на максимум, то записываются коэффициенты целевой функции, взятые с противоположным знаком.

В данном случае требуется решить задачу на максимум $(\max Z)$, поэтому в последней строке записываем коэффициенты целевой функции $(Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5)$, взятые с противоположным знаком. Получим таблицу 3.

Таблица 3

БП	Переменные					Свободные члены	Симплекс-отношения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_4	2	5	2	1	0	12	
x_5	7	1	2	0	1	18	
Z	–3	–4	–6	0	0		

Данной симплекс-таблице соответствует опорный план $\boldsymbol{x}_0 = (0;0;0;12;18)$.

Условие оптимальности опорного плана состоит в следующем:

– если исходная задача решается на максимум и для некоторого опорного плана все элементы индексной строки неотрицательны, то этот опорный план является оптимальным;

– если исходная задача решается на минимум и для некоторого опорного плана все элементы индексной строки неположительны, то этот опорный план является оптимальным.

В данном случае решается задача на максимум, но в индексной строке есть отрицательные элементы, значит, опорный план $x_0^* = (0;0;0;12;18)$ не является оптимальным.

Значит, нужно перейти к новому опорному плану и построить новую симплекс-таблицу. Для этого воспользуемся алгоритмом симплекс-метода.

1 В индексной строке исходной симплекс-таблицы выберем наименьший отрицательный элемент. Столбец, соответствующий этому элементу, называется ведущим, он определяет переменную, которая будет введена в базис на данном этапе. В данном случае наименьшим отрицательным элементом индексной строки является число –6, соответствующее переменной x_3. Значит, переменную x_3 введем в базис.

2 Вычислим отношения свободных членов к элементам ведущего столбца (находим симплекс-отношения). Из всех найденных симплекс-отношений выберем наименьшее положительное, которое соответствует ведущей строке, определяющей переменную, выводимую из базиса. Если все симплекс-отношения окажутся отрицательными, то задача не имеет решений. В данном случае наименьшее из симплексных отношений $\frac{12}{2} = 6$ и $\frac{18}{2} = 9$ соответствует переменной x_4. Значит, переменную x_4 выведем из базиса.

3 На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий (разрешающий) элемент. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выберем любое из них. То же самое относится к отрицательным элементам индекс-строки. В данном случае на пересечении столбца x_3 и строки x_4 находится элемент 2, который и будет разрешающим.

После выполнения шага симплекс-метода симплекс-таблица примет вид, представленный в виде таблицы 4.

4 После нахождения ведущего элемента перейдем к следующей симплекс-таблице. Для этого вначале заполним первый столбец, записывая новые базисные переменные. В данном случае новыми базисными переменными будут переменные x_3 и x_5.

5 Все элементы ведущей строки исходной симплекс-таблицы (за исключением симплекс-отношения) разделим на ведущий элемент. В данном случае – делим на число 2.

После выполнения шагов 4 и 5 симплекс-таблица примет следующий вид, представленный в виде таблицы 5.

Таблица 4

БП	Переменные					Свободные члены	Симплекс-отношения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	2	5	2	1	0	12	$\frac{12}{6}=2$
x_5	7	1	2	0	1	18	$\frac{18}{2}=9$
Z	–3	–4	–6	0	0		

Таблица 5

БП	Переменные					Свободные члены	Симплекс-отношения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	$\frac{2}{2}=1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{2}=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{12}{2}=6$	
x_5	7	1	2	0	1	18	
Z	–3	–-4	–6	0	0		

6 Все элементы ведущего столбца, кроме ведущего элемента, делаем равными нулю.

7 Оставшиеся элементы симплекс-таблицы вычислим по ***правилу прямоугольника***: в исходной симплекс-таблице мысленно вычеркнем прямоугольник, одна вершина которого совпадает с ведущим элементом, вторая – с элементом, образ которого мы ищем, а две оставшиеся вершины определяются однозначно. Тогда искомый элемент в новой симплекс-таблице равен соответствующему элементу исходной таблицы минус дробь, в знаменателе которой стоит ведущий элемент, а в числителе – произведение элементов их двух оставшихся вершин прямоугольника.

После выполнения шагов 6 и 7 получим следующую симплексную таблицу (таблица 6).

Таблица 6

БП	Переменные					Свободные члены	Симплекс-отношения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	1	2,5	1	0,5	0	6	
x_5	$7-\frac{2\cdot 2}{2}$	$1-\frac{2\cdot 5}{2}$	0	$0-\frac{2\cdot 1}{2}$	$1-\frac{2\cdot 0}{2}$	$18-\frac{2\cdot 12}{2}$	
Z	$-3-\frac{-6\cdot 2}{2}$	$-4-\frac{-6\cdot 5}{2}$	0	$0-\frac{-6\cdot 1}{2}$	$0-\frac{-6\cdot 0}{2}$		

Выполнив подсчеты в таблице 7, получим таблицу 8.

Таблица 8

БП	Переменные					Свободные члены	Симплекс-отношения
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	1	2,5	1	0,5	0	6	
x_5	5	–4	0	–1	1	6	
Z	3	11	0	3	0		

Полученной таблице 8 соответствует опорный план $\mathbf{x}_1 = (0;0;6;0;6)$.

Проверим условие оптимальности полученного плана: в индексной строке симплекс-таблицы 8 все элементы неотрицательны. Значит, найденный опорный план оптимален.

Чтобы получить оптимальный план исходной, стандартной, задачи, нужно оставить только первые три элемента (соответствующие переменным x_1, x_2, x_3) полученного опорного плана: $x^* = (0;0;6)$.

Вычислим оптимальное значение целевой функции:

$$Z^* = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 6 = 36.$$

2.3 Задания для самостоятельной работы

1
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 50; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 40; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \le 40; \end{cases}$$
$$\max F(X) = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4.$$

2
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 60; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 80\ ; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x) = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4.$$

3
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 50; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30; \end{cases}$$
$$\max F(x) = 7x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4.$$

4
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 50; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 40; \\ 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x) = 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4.$$

5
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 60; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 40;; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 40 \end{cases}$$
$$\max F(X) = 6x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 8x_4.$$

6
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 60; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 40; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x) = 6x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 8x_4.$$

7
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 40; \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 80; \end{cases}$$
$$\max F(x) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4.$$

8
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 60; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 40; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x) = 6x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 8x_4.$$

9
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3+3x_4\le 50; \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 20; \\ 2x_1+4x_2+2x_3+3x_4\le 30; \end{cases}$$
$$\max F(x)=6x_1+8x_2+7x_3+5x_4.$$

10
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4\le 60; \\ 2x_1+4x_2+6x_3+4x_4\le 80; \\ 5x_1+6x_2+2x_3+2x_4\le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x)=4x_1+5x_2+4x_3+6x_4.$$

11
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3+3x_4\le 50; \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 20; \\ 3x_1+2x_2+3x_3+2x_4\le 30; \end{cases}$$
$$\max F(x)=7x_1+8x_2+6x_3+5x_4.$$

12
$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+5x_3+6x_4\le 60; \\ 4x_1+6x_2+2x_3+4x_4\le 80; \\ 4x_1+3x_2+x_3+2x_4\le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x)=6x_1+4x_2+4x_3+5x_4.$$

13
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_4\le 50; \\ 2x_1+2x_2+4x_3+3x_4\le 40; \\ x_1+4x_2+2x_3+2x_4\le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x)=3x_1+5x_2+8x_3+6x_4.$$

14
$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+2x_4\le 60; \\ 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4\le 40; \\ 4x_1+2x_2+x_3+5x_4\le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x)=6x_1+9x_2+6x_3+8x_4.$$

15
$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+4x_4\le 50; \\ 3x_1+4x_2+2x_3+2x_4\le 40; \\ 5x_1+2x_3+3x_4\le 40; \end{cases}$$
$$\max F(x)=6x_1+8x_2+3x_3+5x_4.$$

3 Транспортная задача

3.1 Теоретическая часть

В общей постановке транспортная задача состоит в отыскании оптимального плана перевозок некоторого однородного груза с m баз A_1, A_2, …, A_m n потребителям B_1, B_2, …, B_n.

Обозначим количество груза, имеющегося на каждой из m баз (запасы), соответственно a_1, a_2, …, a_m, а общее количество имеющегося в наличии груза – a:

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_m,$$

заказы каждого из потребителей (потребности) обозначим соответственно b_1, b_2, …, b_n, а общее количество потребителей b:

$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Тогда при условии $a = b$ мы имеем закрытую модель, а при условии $a \neq b$ – открытую модель транспортной задачи.

В случае открытой модели весь имеющийся в наличии груз развозится полностью и все потребности заказчиков полностью удовлетворены; в случае же открытой модели либо все заказчики удовлетворены, но на некоторых базах остаются излишки груза ($a > b$), либо весь груз доставлен, хотя потребность заказчиков полностью не удовлетворена ($a < b$).

Также существуют одноэтапные модели задач, где перевозка осуществляется напрямую с базы или завода изготовителя к потребителю, и двухэтапные, где между ними имеется дополнительный пункт, например, склад.

План перевозок с указанием запасов и потребностей удобно записывать в виде таблицы 9, называемой таблицей перевозок.

Таблица 9

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	…	B_n	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	a_2
A_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	…	x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	b_3	…	b_n	$a = b$ или $a \neq b$

Условие $a = b$ или $a \neq b$ показывает, является ли данная задача задачей с закрытой или открытой моделью транспортной задачи. Переменные x_{ij} означают количество груза, перевозимого с базы A_i потребителю B_j: совокупность этих величин образует матрицу перевозок.

Переменные x_{ij} должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2; \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}.$$

Эта система содержит $m + n$ уравнений с mn неизвестными. Ее особенность состоит в том, что коэффициенты при неизвестных всюду равны единице. Кроме того, все уравнения системы могут быть разделены на две группы: первая группа из m первых уравнений («горизонтальные уравнения») и вторая группа из n остальных уравнений («вертикальные уравнения»). В каждом из горизонтальных уравнений содержатся неизвестные с одним и тем же первым индексом (они образуют одну строку матрицы перевозок), в каждом из вертикальных уравнений содержатся неизвестные с одним и тем же вторым индексом (они образуют один столбец матрицы перевозок). Таким образом, каждая неизвестная встречается в системе дважды: по одному разу в одном горизонтальном и одном вертикальном уравнении.

Для решения транспортной задачи необходимо, кроме запасов и потребностей, также знать тарифы c_{ij}, т. е. стоимость перевозки единицы груза с базы A_i потребителю B_j.

Совокупность тарифов c_{ij} также образует матрицу, которую можно объединить с матрицей перевозок и данными о запасах и потребностях в таблицу 10.

Таблица 10

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}		x_{2n} c_{2n}	a_2
…					…
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}		x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$a = b$ или $a \neq b$

Сумма всех затрат, т. е. стоимость реализации данного плана перевозок, является линейной функцией переменных x_{ij}:

$$S = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum c_{ij}x_{ij} .$$

Требуется в области допустимых решений системы уравнений найти решение, минимизирующее линейную функцию.

Таким образом, транспортная задача является задачей линейного программирования. Для ее решения применяют симплекс-метод и метод потенциалов.

3.2 Примеры решения задач

Задача 1. Имеются три поставщика с запасами груза $A = \{90; 70; 50\}$ и четыре пункта назначения (потребителя) с заявками $B = \{80; 60; 40; 30\}$. Стоимость перевозки груза задана матрицей $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Требуется составить экономико-математическую модель задачи и найти методом потенциалов оптимальный план перевозки груза, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими.

Решение

Построение экономико-математической модели задачи.

Введем следующие обозначения: пусть x_{ij} – количество груза от i-го поставщика к j-му потребителю, тогда x_{11} – количество груза от первого поставщика к первому потребителю; x_{12} – количество груза от первого поставщика ко второму потребителю; x_{13} – количество груза от первого поставщика к третьему потребителю; x_{14} – количество груза от первого поставщика к четвертому потребителю и т. д.

Ограничения по запасам груза можно записать следующим образом:
– для первой базы $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 90$;
– для второй базы $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 70$;
– для третьей базы $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 50$.

Ограничения по заявкам можно записать следующим образом:
– для первого потребителя $x_{11}+x_{21}+x_{31}=80$;
– для второго потребителя $x_{12}+x_{22}+x_{32}=60$;
– для третьего потребителя $x_{13}+x_{23}+x_{33}=40$;
– для четвертого потребителя $x_{14}+x_{24}+x_{34}=30$.

В соответствии с матрицей стоимости перевозки груза целевая функция имеет вид: $Z=2x_{11}+1x_{12}+3x_{13}+2x_{14}+2x_{21}+3x_{22}+3x_{23}+1x_{24}+3x_{31}+3x_{32}+2x_{33}+1x_{34}$.

Для того чтобы проверить, имеет ли задача решение, сравним сумму количества продукции, которую могут отгрузить все поставщики, с суммой потребностей потребителя. В данном случае $90+70+50=210$ и $80+60+40+30=210$. Так как эти суммы совпадают, то задача является задачей закрытого типа и имеет решение.

Поэтому экономико-математическая модель задачи имеет вид:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}\to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50; \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=80; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=60; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30; \end{cases}$$

$$x_{ij}>0\quad (i=1,\ 2,\ 3;\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Заполним первую распределительную таблицу (при составлении первого опорного плана будем пользоваться «методом северо-западного угла».

1 В верхнюю левую клетку (1;1) внесем меньшее из чисел 80 и 90, т. е. число 80. Таким образом, $x_{11} = 80$. Получим, что заявка первого пункта назначения выполнена, поэтому клетки (2;1) и (3;1) остаются незаполненными. Продвинемся по первой строке вправо. Видим, что у первого поставщика еще остался груз (было 90, использовали только 80), поэтому в клетку (1;2) запишем $x_{12} = \min(90 - 80; 60) = 10$. Теперь у первого поставщика исчерпан весь запас груза, поэтому клетки (1;3) и (1;4) остаются незаполненными.

2 Для выполнения заявки второго пункта назначения в клетку (2;2) запишем значение, равное $x_{22} = \min(60 - 10; 70) = 50$. Заявка второго пункта назначения выполнена, поэтому клетка (3;2) остается незаполненной.

3 Двигаясь вправо по второй строке, в клетку (2;3) запишем значение $x_{23} = \min(70 - 50; 40) = 20$. Запас второго поставщика исчерпан, поэтому клетка (2;4) остается незаполненной.

4 Для выполнения заявки третьего пункта назначения в клетку (3;3) запишем значение $x_{33} = \min(40 - 20; 50) = 20$. Заявка третьего пункта назначения выполнена.

5 Для выполнения заявки четвертого пункта назначения в клетку (3;4) запишем значение $x_{34} = \min(50 - 20; 30) = 30$. Заявка четвертого пункта назначения выполнена, запас третьего поставщика исчерпан.

6 В правом нижнем углу таблицы запишем значение целевой функции $Z_1 = 2 \cdot 80 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 = 450$.

Получим таблицу 11.

Таблица 11

A_i	B_j				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 80	1 10	3	2	90
A_2	2	3 50	3 20	1	70
A_3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	450

Проверка. Если распределительная таблица заполнена правильно, то число заполненных клеток должно быть равно «*число поставщиков* + число *потребителей* –1». В данном случае 4 + 3 – 1 = 6. Проверим – заполненных клеток ровно 6.

Первый опорный план.

Дальнейшее улучшение первого опорного плана и получение оптимального плана будем осуществлять методом потенциалов.

Для этого каждому поставщику поставим в соответствие потенциал $u_i\ \left(i=1,2,3\right)$, а каждому потребителю – потенциал $v_j\ \left(j=1,2,3,4\right)$. Тогда сумма потенциалов u_i+v_j будет определять выручку за перевозку груза от i-го поставщика в j-й пункт назначения. Для оптимального плана значения u_i+v_j не должны превышать значения коэффициентов c_{ij} целевой функции при переменных x_{ij} (c_{ij} заданы в условии задачи как элементы матрицы стоимости перевозки груза). При этом для клеток, в которых значения $x_{ij}>0$, должно выполняться условие равенства $u_i+v_j=c_{ij}$, а для клеток, в которых значения $x_{ij}=0$, должно выполняться условие $u_i+v_j\le c_{ij}$.

Таким образом, составим следующую систему уравнений (для *занятых* клеток).

$$\begin{cases} u_1+v_1=2; \\ u_1+v_2=1; \\ u_2+v_2=3; \\ u_2+v_3=3; \\ u_3+v_3=2; \\ u_3+v_4=1; \\ u_1=0. \end{cases}$$

Для ее решения положим, например, что $u_1=0$, получим решение

$$\begin{cases} v_1=2; \\ v_2=1; \\ u_2=2; \\ v_3=1; \\ u_3=1; \\ v_4=0; \\ u_1=0. \end{cases}$$

К таблице 11 добавим одну строку и один столбец для указания значений потенциалов. Получим таблицу 12.

Таблица 12

A_i	B_j				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2 80	1 10	3	2	90	0
A_2	2	3 50	3 20	1	70	2
A_3	3	3	2 20	1 30	50	1
b_j	80	60	40	30	450	
v_j	2	1	1	0		

Для исследования полученного опорного плана на оптимальность для каждой *свободной* клетки проверяется условие $u_i + v_j \le c_{ij}$. Если хотя бы одна свободная клетка не удовлетворяет данному условию, то опорный план не является оптимальным и, значит, его можно улучшить за счет загрузки этой клетки. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной является клетка, для которой разность (оценка) между тарифом c_{ij} и суммой потенциалов наименьшая, т. е. $S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$.

Если для всех свободных клеток оценки $S_{ij} > 0$, то полученный опорный план перевозок является оптимальным.

Найдем оценки S_{ij} по таблице 12:

$$S_{13} = 3 - (1+0) = 2; \qquad S_{21} = 2 - (2+2) = -2 < 0; \qquad S_{31} = 3 - (2+1) = 0;$$
$$S_{14} = 2 - (0+0) = 2; \qquad S_{24} = 1 - (0+2) = -1 < 0; \qquad S_{32} = 3 - (1+1) = 1.$$

Итак, среди оценок есть отрицательные, значит, опорный план не является оптимальным и его нужно улучшать.

Перспективными являются клетки (2;1) и (2;4), т. к. их оценки отрицательны. Однако наиболее перспективной (потенциальной) является клетка (2;1), т. к. ее оценка $S_{21} = -2$ минимальна.

Для улучшения опорного плана наиболее перспективную клетку следует загрузить. Для этого строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписываются знаки: свободной клетке – знак «+», следующей по часовой или против часовой стрелки занятой клетке – знак «–», следующей – снова «+» и т. д. Из поставок цикла с «отрицательными» вершинами выбирается наименьшее количество λ груза, которое перемещается по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в «положительных» вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах, в результате чего баланс не нарушится.

Второй опорный план.

В данном случае для клетки (2;1) можно построить цикл, в который войдут клетки (2;1), (1;1), (1;2), (2;2). Тогда клетке (2;1) припишем знак «+», клетке (1;1) припишем знак «–», клетке (1;2) – знак «+» и клетке (2;2) – знак «–». Наименьшее количество груза в клетках со знаком «–» $\lambda = \min(80;50) = 50$, значит, в клетку (2;1) добавим 50, а из клеток (1;2) и (2;2) вычтем по 50. В результате получим таблицу 13.

Таблица 13

A_i	B_j				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	– 2 80 – 50	+ 1 10 + 50	3	2	90
A_2	+ 2 +50	– 3 50 – 50	3 20	1	70
A_3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	

После вычислений получим таблицу 14.

Таблица 14

A_i	B_j				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	– 2 30	+ 1 60	3	2	90
A_2	+ 2 50	– 3	3 20	1	70
A_3	3	3	2 20	1 30	50
b_j	80	60	40	30	350

В правом нижнем углу таблицы запишем значение целевой функции

$$Z_2 = 2 \cdot 30 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 30 = 350.$$

Проверим полученный опорный план на оптимальность, для чего вновь рассчитаем потенциалы по заполненным клеткам. Получим систему

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2; \\ u_1 + v_2 = 1; \\ u_2 + v_1 = 2; \\ u_2 + v_3 = 3; \\ u_3 + v_3 = 2; \\ u_3 + v_4 = 1; \\ u_1 = 0, \end{cases}$$

решив которую, получим значения потенциалов:

$$\begin{cases} v_1 = 2; \\ v_2 = 1; \\ u_2 = 0; \\ v_3 = 3; \\ u_3 = -1; \\ v_4 = 2; \\ u_1 = 0. \end{cases}$$

Внесем значения потенциалов в таблицу, получим таблицу 15.

Таблица 15

A_i	B_j				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	– 2 30	+ 1 60	3	2	90	0
A_2	+ 2 50	– 3	3 20	1	70	0
A_3	3	3	2 20	1 30	50	-1
b_j	80	60	40	30	350	
v_j	2	1	3	2		

Для исследования полученного опорного плана на оптимальность для каждой *свободной* клетки проверяется условие $u_i + v_j \le c_{ij}$.

Найдем оценки S_{ij} по таблице 15:

$$S_{13} = 3 - (0+3) = 0; \quad S_{22} = 3 - (1+0) = 2; \quad S_{31} = 3 - (2 + (-1)) = 2;$$

$$S_{14} = 2 - (2+0) = 0; \quad S_{24} = 1 - (2+0) = -1 < 0; \quad S_{32} = 3 - (1 + (-1)) = 3.$$

Итак, среди оценок есть отрицательные, значит, опорный план не является оптимальным и его нужно улучшать.

Перспективной является клетка (2;4), т. к. ее оценка отрицательна. Для улучшения опорного плана загрузим клетку (2;4). Для этого построим замкнутый цикл с вершинами в клетках (2;4), (2;3), (3;3), (3;4). Свободной клетке (2;4) и клетке (3;3) условно припишем знак «+», клеткам (2;3) и (3;4) – знак «–».

Наименьшее количество груза в клетках со знаком «–» $\lambda = \min(20;30) = 20$, значит, в клетку (2;4) добавляем 20, а из клеток (2;3) и (3;4) вычтем по 20. В результате получим таблицу 16.

Таблица 16

A_i	B_j				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	– 2 30	+ 1 60	3	2	90	0
A_2	+ 2 50	– 3	+ 3 20 – 20	– 1 +20	70	0
A_3	3	3	– 2 20 + 20	+ 1 30 – 20	50	-1
b_j	80	60	40	30		
v_j	2	1	3	2		

После вычислений получим таблицу 17.

Таблица 17

A_i	B_j				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	– 2 30	+ 1 60	3	2	90	
A_2	+ 2 50	– 3	+ 3	– 1 20	70	
A_3	3	3	– 2 40	+ 1 10	50	
b_j	80	60	40	30	330	
v_j						

В правом нижнем углу таблицы запишем значение целевой функции:

$$Z_3 = 2 \cdot 30 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 10 = 330\,.$$

Третий опорный план.

Проверим полученный опорный план на оптимальность, для чего вновь рассчитаем потенциалы по заполненным клеткам. Получим систему

$$
\begin{cases}
u_1 + v_1 = 2; \\
u_1 + v_2 = 1; \\
u_2 + v_1 = 2; \\
u_2 + v_4 = 1; \\
u_3 + v_3 = 2; \\
u_3 + v_4 = 1; \\
u_1 = 0,
\end{cases}
$$

решение которой имеет вид:

$$
\begin{cases}
v_1 = 2; \\
v_2 = 1; \\
u_2 = 0; \\
v_3 = 2; \\
u_3 = 0; \\
v_4 = 1; \\
u_1 = 0.
\end{cases}
$$

Внесем значения потенциалов в таблицу, получим таблицу 18.

Таблица 18

A_i	B_j				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	– 2 30	+ 1 60	3	2	90	0
A_2	+ 2 50	– 3	+ 3	– 1 20	70	0
A_3	3	3	– 2 40	+ 1 10	50	0
b_j	80	60	40	30	330	
v_j	2	1	2	1		

Для исследования полученного опорного плана на оптимальность для каждой *свободной* клетки проверяется условие $u_i + v_j \le c_{ij}$.

Найдем оценки S_{ij} по таблице 8:

$$S_{13} = 3-(2+0) = 1; \quad S_{22} = 3-(1+0) = 2; \quad S_{31} = 3-(2+0) = 1;$$
$$S_{14} = 2-(1+0) = 1; \quad S_{23} = 3-(2+0) = 1; \quad S_{32} = 3-(1+0) = 2.$$

Для всех свободных клеток получили положительные оценки, значит, полученный опорный план является оптимальным.

Значение целевой функции

$$Z_3 = 2\cdot 30 + 1\cdot 60 + 2\cdot 50 + 1\cdot 20 + 2\cdot 40 + 1\cdot 10 = 330$$

является минимальным.

Анализ оптимального плана: от первого поставщика A_1 30 ед. груза нужно направить к первому потребителю B_1, и 60 ед. груза – ко второму потребителю B_2. От второго поставщика A_2 50 ед. груза нужно направить к первому потребителю B_1, и 20 ед. груза – к четвертому потребителю B_4. От третьего поставщика A_3 40 ед. груза нужно направить к третьему потребителю B_3, и 10 ед. груза – к четвертому потребителю B_4.

Задача 2 (самостоятельно). Имеются три поставщика с запасами груза $A = \{310; 360; 230\}$ и пять пунктов назначения (потребителей) с заявками $B = \{140; 190; 180; 170; 220\}$. Стоимость перевозки груза задана матрицей $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Требуется составить экономико-математическую модель задачи и найти методом потенциалов оптимальный план перевозки груза, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими.

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Продукция определенного типа производится в городах А1, А2, А3 и потребляется в городах В1, В2, В3, В4.

В таблицах 19–48 указаны объем производства, спрос, стоимость перевозки единицы продукции.

Составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна.

Предварительно следует проверить, сбалансирована ли данная транспортная задача. Если задача не сбалансирована, то нужно ввести фиктивных потребителей или производителей, добавляя к исходной таблице столбцы и строки.

Таблица 19 – Вариант 1

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	20	47	31	13	49
А2	3	38	44	10	18
А3	11	32	46	17	68
Спрос	45	30	10	45	

Таблица 20 – Вариант 2

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	47	31	13	45	34
А2	20	47	31	13	44
А3	4	42	41	2	68
Спрос	30	45	41	80	

Таблица 21 – Вариант 3

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	31	13	45	35	48
А2	38	44	10	33	48
А3	20	47	31	13	44
Спрос	40	41	45	44	

Таблица 22 – Вариант 4

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	13	45	35	7	49
А2	47	31	13	45	47
А3	32	46	17	27	68
Спрос	45	80	44	45	

Таблица 23 – Вариант 5

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	45	35	7	43	48
А2	44	10	33	46	41
А3	42	41	2	38	49
Спрос	44	12	88	44	

Таблица 24 – Вариант 6

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	35	7	43	39	45
А2	31	13	45	35	33
А3	47	31	13	45	19
Спрос	6	10	30	41	

Таблица 25 – Вариант 7

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	7	43	39	10	41
А2	10	33	46	16	22
А3	46	17	27	47	61
Спрос	38	30	19	87	

Таблица 26 – Вариант 8

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	43	39	10	40	34
А2	13	45	35	7	18
А3	41	2	38	44	86
Спрос	48	45	5	30	

Таблица 27 – Вариант 9

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	39	10	40	43	26
А2	33	46	16	28	18
А3	31	13	45	35	58
Спрос	15	50	10	22	

Таблица 28 – Вариант 10

Производитель	Потребитель				Объем производства
	В1	В2	В3	В4	
А1	10	40	43	6	16
А2	45	35	7	43	27
А3	17	27	47	23	68
Спрос	31	44	24	42	

Таблица 29 – Вариант 11

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	40	43	6	36	15
A2	46	16	28	47	39
A3	2	38	44	9	71
Спрос	50	28	36	1	

Таблица 30 – Вариант 12

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	43	6	36	45	14
A2	35	7	43	39	48
A3	13	45	35	7	22
Спрос	23	16	45	10	

Таблица 31 – Вариант 13

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	6	36	45	13	24
A2	16	28	47	22	52
A3	27	47	23	22	85
Спрос	24	18	49	20	

Таблица 32 – Вариант 14

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	36	45	13	31	34
A2	7	43	39	10	52
A3	38	44	9	34	81
Спрос	50	38	49	80	

Таблица 33 – Вариант 15

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	45	13	31	46	42
A2	28	47	22	23	47
A3	45	35	7	43	72
Спрос	30	49	44	88	

Таблица 34 – Вариант 16

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	13	31	46	19	49
A2	43	39	10	40	88
A3	47	23	22	47	58
Спрос	17	48	35	45	

Таблица 35 – Вариант 17

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	31	46	19	26	58
A2	47	22	23	47	24
A3	44	9	34	46	78
Спрос	49	36	21	49	

Таблица 36 – Вариант 18

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	46	19	26	47	54
A2	39	10	40	43	19
A3	35	7	43	39	44
Спрос	36	15	6	50	

Таблица 37 – Вариант 19

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	19	26	47	25	52
A2	22	23	47	28	13
A3	23	22	47	29	12
Спрос	10	19	10	48	

Таблица 38 – Вариант 20

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	26	47	25	20	48
A2	10	40	43	6	28
A3	9	34	46	15	71
Спрос	47	81	25	44	

Таблица 39 – Вариант 21

Производитель	Потребитель				Объем производ-ства
	B1	B2	B3	B4	
A1	47	25	20	47	41
A2	23	47	28	17	41
A3	7	43	39	10	79
Спрос	40	46	88	37	

Таблица 40 –Вариант 22

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	25	20	47	30	32
A2	40	43	6	36	49
A3	22	47	29	16	46
Спрос	13	50	46	28	

Таблица 41 – Вариант 23

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	20	47	30	14	22
A2	47	28	17	46	58
A3	34	46	15	29	78
Спрос	43	42	50	18	

Таблица 42 – Вариант 24

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	47	30	14	45	10
A2	43	6	36	45	61
A3	43	39	10	40	60
Спрос	44	23	48	6	

Таблица 43 – Вариант 25

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	14	45	35	7	22
A2	6	36	45	13	83
A3	46	15	29	47	56
Спрос	39	24	30	18	

Таблица 44 – Вариант 26

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	30	14	45	35	10
A2	28	17	46	33	44
A3	47	29	16	46	41
Спрос	15	43	41	6	

Таблица 45 – Вариант 27

Производитель	Потребитель				Объем производ-ства
	B1	B2	B3	B4	
A1	45	35	7	43	83
A2	17	46	33	10	18
A3	39	10	40	43	82
Спрос	47	42	15	29	

Таблица 46 – Вариант 28

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	4	5	6	10	83
A2	8	6	3	8	405
A3	7	10	4	11	540
Спрос	425	415	335	400	

Таблица 47 – Вариант 29

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	3	7	4	8	513
A2	9	6	4	4	448
A3	6	10	5	8	522
Спрос	437	417	333	396	

Таблица 48 – Вариант 30

Производитель	Потребитель				Объем производства
	B1	B2	B3	B4	
A1	35	30	10	10	53
A2	21	41	53	10	28
A3	39	32	27	20	61
Спрос	47	38	23	24	

Список литературы

1 **Лунгу, К. Н.** Линейное программирование. Руководство к решению задач: учебное пособие / К. Н. Лунгу. – Москва: Физматлит, 2005. – 128 с.

2 **Барсов, А. С.** Линейное программирование в технико-экономических задачах / А. С. Барсов. – Москва: Наука, 1964. – 278 с.