

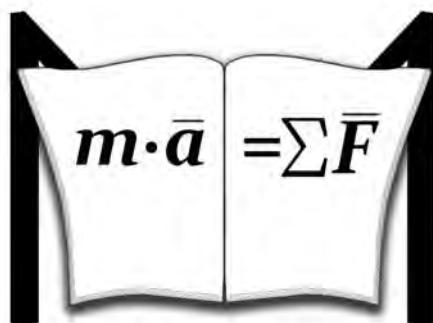
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги»
очной и заочной форм обучения*

Часть 1



Могилев 2019

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «4» ноября 2019 г., протокол № 4

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Сопrotивление материалов и теория упругости» для студентов специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги». Содержат материал для проведения практических занятий в осеннем семестре по разделу «Сопrotивление материалов».

Учебно-методическое издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть 1

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Редактор	А. А. Подошеvко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2019



Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений. Определение центра тяжести составного сечения.....	5
2 Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей. Использование таблиц сортамента.....	6
3 Определение моментов инерции простых сечений при параллельном переносе и повороте осей. Главные центральные оси и моменты инерции поперечного сечения.....	7
4 Определение геометрических характеристик в составных сечениях и сечениях сложной формы.....	9
5 Определение внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений.....	11
6 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брус.....	13
7 Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе.....	14
8 Определение внутренних сил при кручении. Построение эпюр крутящих моментов.....	17
9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусев.....	18
10 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проверочный расчет).....	21
11 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проектировочный расчет).....	23
12 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности.....	24
13 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (определение допускаемой нагрузки).....	26
14 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе.....	28
15 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения.....	31
16 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса прямоугольного поперечного сечения.....	34
17 Расчеты на сдвиг.....	36
18 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии в статически неопределимых системах.....	38
Список литературы.....	42



Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента строительных конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» изучают дисциплину «Сопротивление материалов и теория упругости» на протяжении 3-го и 4-го семестров.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

ПК-14. Определять актуальные направления научных исследований в области строительства с целью внедрения в практику эффективных строительных материалов, конструкций и технологий.

ПК-22. Формулировать и реализовывать мероприятия по повышению качества строительной продукции, снижению энергоемкости и материальных затрат при выполнении строительно-монтажных работ.

ПК-26. Работать с научной, технической, юридической литературой в области промышленного и гражданского строительства.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–8], разобрать решения приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

1 Геометрические характеристики поперечных сечений.

Определение центра тяжести составного сечения

Пример – Определить координату центра тяжести составного сечения относительно оси y . Размеры сечения на рисунке 1.1 даны в миллиметрах.

Решение

Положение центров тяжести прямоугольника и круга с координатами относительно оси y указано на рисунке 1.1. Площади отдельных фигур

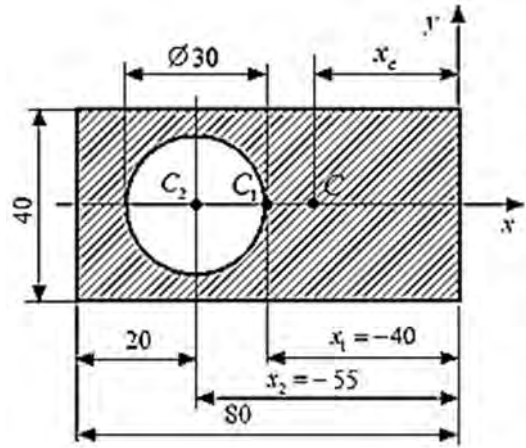


Рисунок 1.1

$$A_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3,14 \cdot 1,5^2 = 7,065 \text{ см}^2.$$

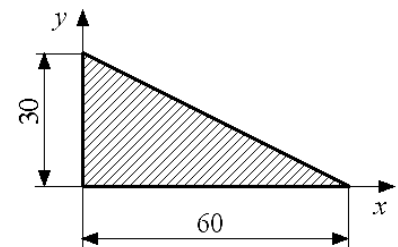
Координата x_c определяется по формуле

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(-4) \cdot 32 - (-5,5) \cdot 7,065}{32 - 7,065} = -3,57 \text{ см.}$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

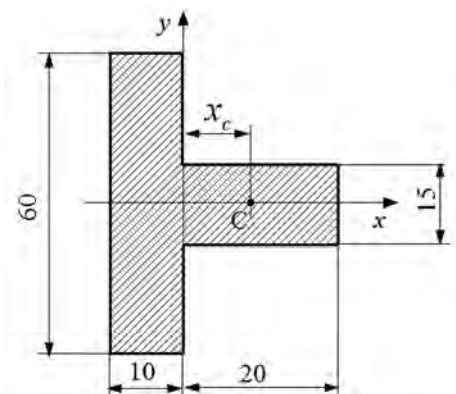
1 Координата центра тяжести треугольника относительно указанных осей:

- а) $x_c = 1$ см;
- б) $x_c = 2$ см;
- в) $x_c = -2$ см;
- г) $x_c = 3$ см.



2 В каком ответе дано правильное значение координаты центра тяжести сечения x_c ?

- а) $x_c = 0$ см;
- б) $x_c = -1/3$ см;
- в) $x_c = 1/3$ см;
- г) $x_c = 2/3$ см.



3 По какой формуле определяется статический момент простого сечения площадью A относительно произвольной оси y ?

- а) $S_y = x_c \cdot A$;
 б) $S_y = y_c \cdot A$;
 в) $S_y = x_c / A$;
 г) $S_y = y_c / A$.

4 По какой формуле определяется координата центра тяжести составного поперечного сечения относительно оси x ?

- а) $x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}$; в) $x_c = \frac{\sum S_x}{\sum A}$;
 б) $y_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}$; г) $y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A}$.

2 Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей. Использование таблиц сортамента

Пример 1 – Определить осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей x и y . Размеры сечения на рисунке 2.1 даны в миллиметрах.

Решение

Определим осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей:

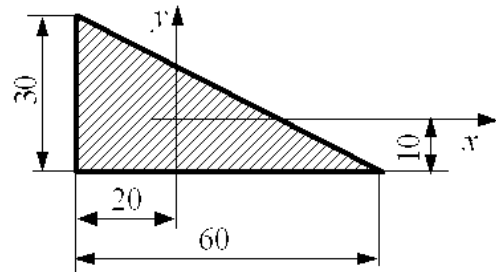


Рисунок 2.1

$$I_x = \frac{6 \cdot 3^3}{36} = 4,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 6^3}{36} = 18 \text{ см}^4.$$

Пример 2 – Определить осевые и полярный моменты инерции сечения относительно центральных осей x и y . Размеры сечения на рисунке 2.2 даны в миллиметрах.

Решение

Определим осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей:

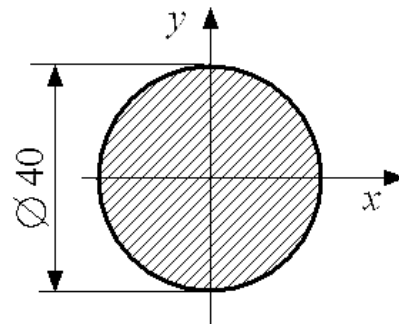


Рисунок 2.2

$$I_x = I_y = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4.$$

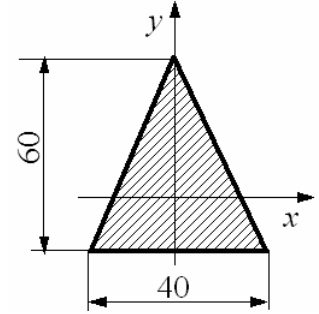
Определим полярный момент инерции:

$$I_p = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

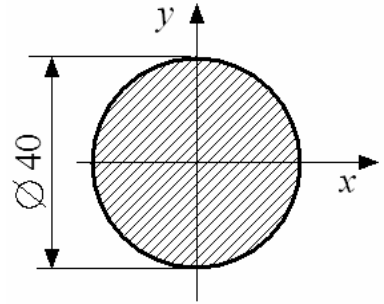
1 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси y ?

- а) $I_y = 24 \text{ см}^4$;
- б) $I_y = 8 \text{ см}^4$;
- в) $I_y = 10,7 \text{ см}^4$;
- г) $I_y = 18 \text{ см}^4$.



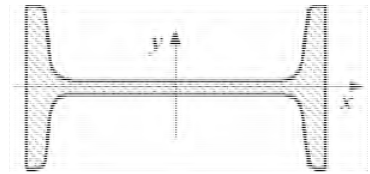
2 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

- а) $I_{xy} = 0 \text{ см}^4$;
- б) $I_{xy} = -8 \cdot \pi \text{ см}^4$;
- в) $I_{xy} = -24 \cdot \pi \text{ см}^4$;
- г) $I_{xy} = 24 \cdot \pi \text{ см}^4$.



3 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции двутавра № 10 относительно оси x ?

- а) $I_x = 198 \text{ см}^4$;
- б) $I_x = 39,7 \text{ см}^4$;
- в) $I_x = 17,9 \text{ см}^4$;
- г) $I_x = 6,49 \text{ см}^4$.



3 Определение моментов инерции простых сечений при параллельном переносе и повороте осей. Главные центральные оси и моменты инерции поперечного сечения

Пример – Определить осевые моменты инерции поперечного сечения (рисунок 3.1) относительно указанных осей x и y . Размеры сечения на рисунке 3.1 даны в миллиметрах.

Решение

По рисунку видно, что заданная ось x и центральная ось x_c совпадают, а между вертикальными осями y и y_c есть межосе-

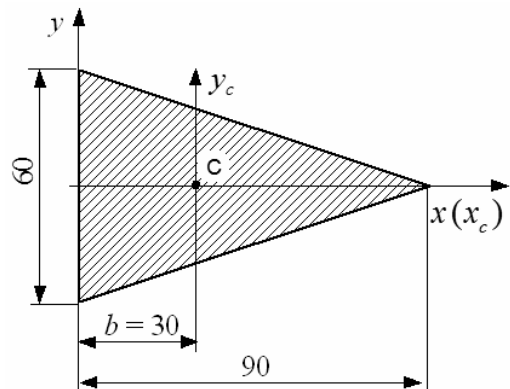


Рисунок 3.1

вое расстояние b .

Моменты инерции

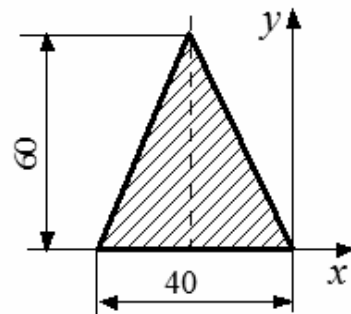
$$I_x = I_{x_c} = \frac{9 \cdot 6^3}{48} = 40,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot A = \frac{6 \cdot 9^3}{36} + 3^2 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 354,5 \text{ см}^4.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

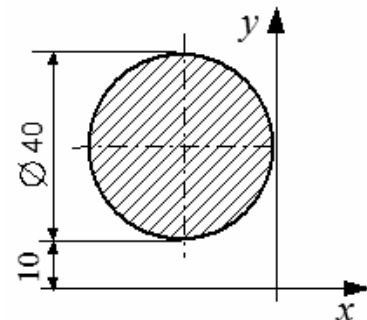
1 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси y ?

- а) $I_y = 32 \text{ см}^4$;
- б) $I_y = 58 \text{ см}^4$;
- в) $I_y = 56 \text{ см}^4$;
- г) $I_y = 54 \text{ см}^4$.



2 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

- а) $I_{xy} = 0 \text{ см}^4$;
- б) $I_{xy} = -8 \cdot \pi \text{ см}^4$;
- в) $I_{xy} = -24 \cdot \pi \text{ см}^4$;
- г) $I_{xy} = 24 \cdot \pi \text{ см}^4$.



3 Какое утверждение может быть верно для главных центральных осей x и y ?

- а) $I_x > 0, I_y < 0$;
- б) $I_x = I_{\max}, I_y = I_{\min}$;
- в) $I_x = 0, I_y = 0$;
- г) $I_x + I_y = 0$.

4 Оси x и y являются главными центральными, если ...:

- а) $I_{xy} = 0, S_x = 0, S_y = 0$;
- б) $I_{xy} = 0$;
- в) $S_x = 0, S_y = 0$;
- г) $S_x = S_y$.

5 Ось симметрии поперечного сечения является ...:

- а) всегда главной, но не всегда центральной осью;
- б) всегда центральной, но не всегда главной осью;
- в) всегда главной центральной осью;
- г) не всегда центральной осью.

$$I_{x_1} = I_{x_3} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{12} = 116,7 \text{ см}^4; \quad I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{10 \cdot 1,4^3}{12} = 2,3 \text{ см}^4.$$

Для швеллера из таблиц ГОСТ 8240–97, с учетом горизонтального расположения фигуры,

$$A_2 = 10,9 \text{ см}^2; \quad I_{x_2} = 20,4 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 174 \text{ см}^4; \quad h = 10 \text{ см}; \quad z_0 = 1,44 \text{ см}.$$

В данном сечении ось y является осью симметрии (главной центральной осью инерции), поэтому центр тяжести всего сечения расположен на этой оси. Определим его координату y_c относительно оси $x_{нач}$:

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 14 + 1,44 \cdot 10,9 + 5 \cdot 14}{14 + 10,9 + 14} = 4 \text{ см},$$

где y_1, y_2, y_3 – координаты центров тяжести прямоугольников и швеллера относительно начальной оси $x_{нач}$ (см. рисунок 4.1).

Через найденный центр тяжести проводим вторую главную центральную ось инерции сечения – x .

Расстояния между главными центральными осями всего сечения и центральными осями отдельных фигур

$$c_1 = c_3 = y_1 - y_c = 5 - 4 = 1 \text{ см}; \quad c_2 = y_c - y_2 = 4 - 1,44 = 2,56 \text{ см};$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1,4}{2} + \frac{10}{2} = 5,7 \text{ см}; \quad d_2 = 0.$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения относительно осей xu по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (116,7 + 1^2 \cdot 14) \cdot 2 + (20,4 + 2,56^2 \cdot 10,9) = 353,2 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (2,3 + 5,7^2 \cdot 14) \cdot 2 + (174 + 0 \cdot 10,9) = 1088,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

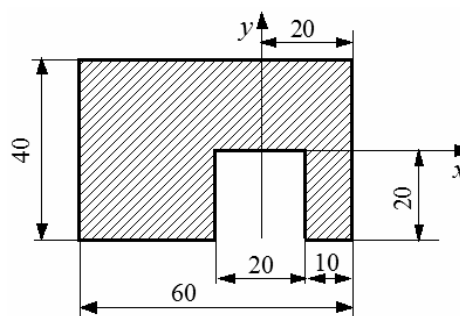
Так как $I_x = I_{\min}$, а $I_y = I_{\max}$, то ось y проходит через плоскость максимальной жесткости сечения, а ось x – минимальной.



Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

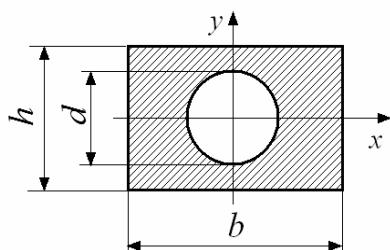
1 В каком ответе дано правильное значение статического момента сечения относительно оси x ?

- а) $S_x = 0 \text{ см}^3$; б) $S_x = 4 \text{ см}^3$;
 в) $S_x = 44 \text{ см}^3$; г) $S_x = 52 \text{ см}^3$.



- а) $I_x = \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$;
 б) $I_x = \frac{bh^3}{12} + \frac{\pi d^4}{64}$;
 в) $I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$;
 г) $I_x = \frac{bh^3}{36} - \frac{\pi d^4}{64}$.

2 По какой формуле определяется момент инерции I_x указанного поперечного сечения?



5 Определение внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений

Пример – Определить величину внутренних силовых факторов в сечении C прямолинейного бруса (рисунок 5.1).

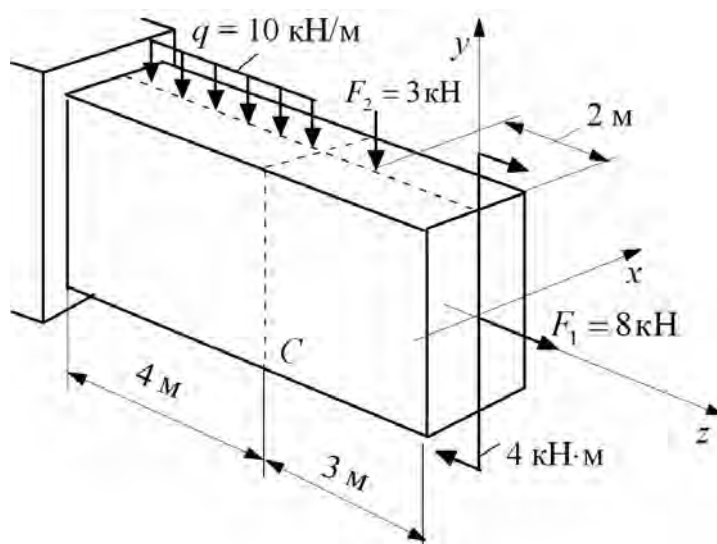


Рисунок 5.1

Решение

Покажем расчетную схему (рисунок 5.2, а).

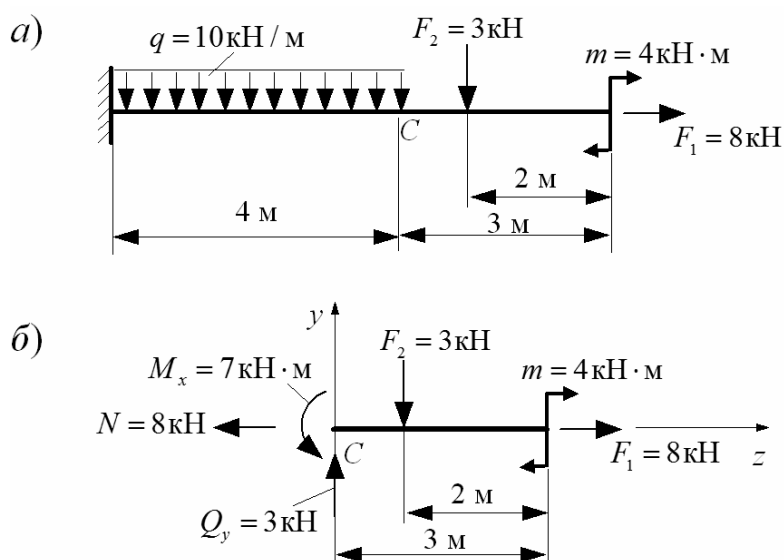


Рисунок 5.2

Для решения задачи используем *метод сечений*: мысленно рассечем брус по искомому сечению C и рассмотрим равновесие его правой части (рисунок 5.2, б). Для определения всех внутренних усилий составим шесть уравнений статического равновесия:

$$\sum X = 0; \quad Q_x = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_y - F_2 = 0; \quad Q_y = F_2 = 3 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 0; \quad -N + F_1 = 0; \quad N = F_1 = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_x^C = 0; \quad M_x - F_2 \cdot 1 - m = 0; \quad M_x = F_2 \cdot 1 + m = 3 + 4 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sum M_y^C = 0; \quad M_y = 0;$$

$$\sum M_z^C = 0; \quad M_z = M_{\text{кр}} = 0.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Метод, позволяющий определить внутренние усилия в сечении стержня:

- а) метод сил;
- б) метод начальных параметров;
- в) метод независимости действия сил;
- г) метод сечений.

2 Сколько всего существует внутренних силовых факторов?

- а) три;
- б) четыре;
- в) пять;
- г) шесть.

6 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брусе

Пример – Стальной брус (рисунок 6.1) площадью поперечного сечения $A = 50 \text{ см}^2$ сжимается силой $F = 300 \text{ Н}$. Удельный вес материала $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$. Построить эпюру продольных сил N с учетом собственного веса бруса.

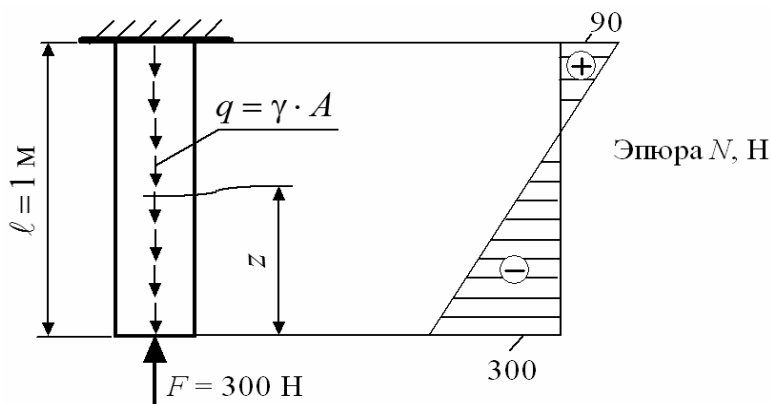


Рисунок 6.1

Решение

Построение эпюры продольных сил N :

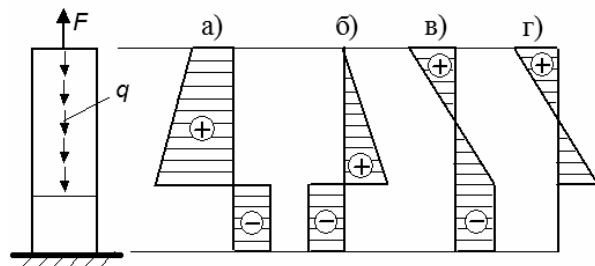
$$N = -F + \gamma \cdot A \cdot z = -300 + 78 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot z = -300 + 390 \cdot z;$$

$$z = 0 \quad N = -300 \text{ Н};$$

$$z = 1 \text{ м} \quad N = 90 \text{ Н}.$$

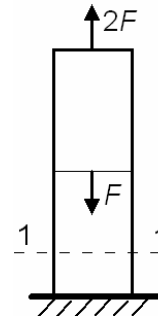
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Для стержня, изображенного на рисунке, эпюра продольных сил N будет иметь вид:

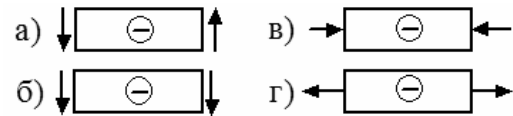


2 Для стержня, схема которого изображена на рисунке, продольная сила, действующая в сечении 1–1, будет:

- а) растягивающей;
- б) сжимающей;
- в) сдвигающей;
- г) равна нулю.



3 Укажите верное правило знаков для продольной силы N :



4 Если $N > 0$, то участок стержня:

- а) сжат;
- б) изогнут;
- в) растянут;
- г) испытывает сдвиг.

7 Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе

Пример – Для балки, изображенной на рисунке 7.1, построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

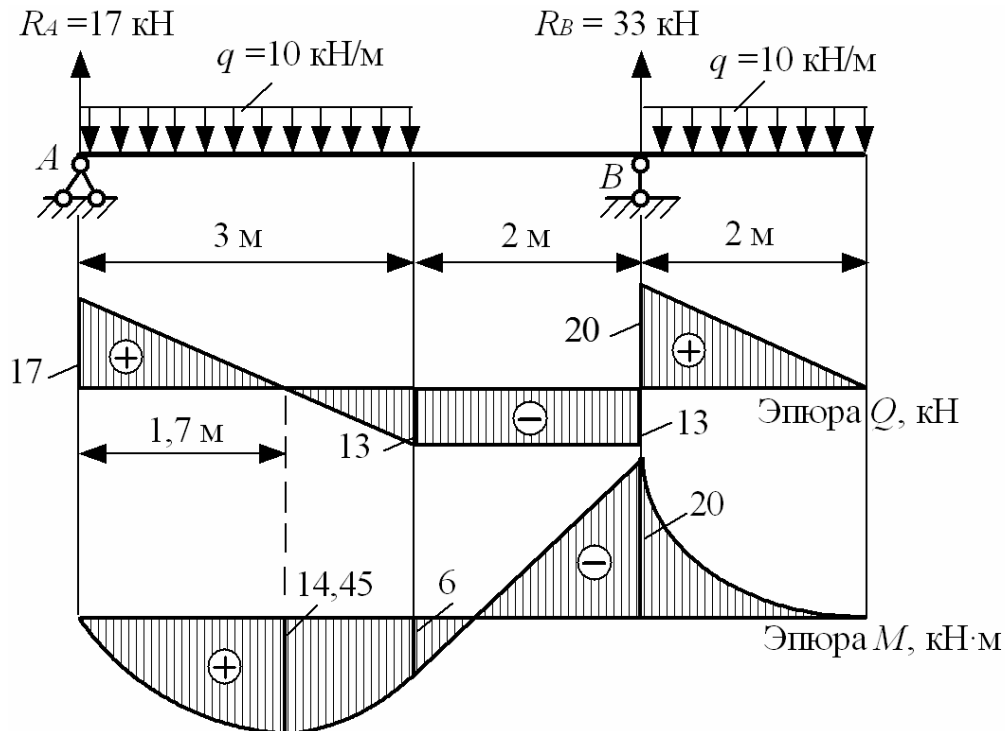


Рисунок 7.1



Решение

Определение реакций на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0; R_B = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 \cdot 6)}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; R_A = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 3,5 - 10 \cdot 2 \cdot 1)}{5} = 17 \text{ кН}.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$.

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1; M = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2;$$

$$z_1 = 0; Q = 17 \text{ кН}; M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; Q = -13 \text{ кН}; M = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0; z_1 = 1,7 \text{ м};$$

$$M_{\text{экстр}} = 17 \cdot 1,7 - 5 \cdot 1,7^2 = 14,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН};$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2) = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2);$$

$$z_2 = 0; M = 17 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; M = 17 \cdot 5 - 30 \cdot 3,5 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III: $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3; M = -0,5 \cdot q \cdot z_3^2 = -5 \cdot z_3^2;$$

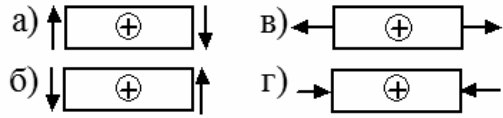
$$z_3 = 0; Q = 0; M = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; Q = 20 \text{ кН}; M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

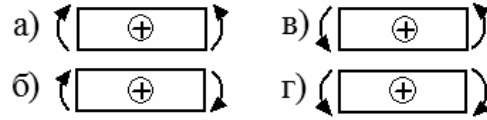


Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите верное правило знаков для поперечной силы Q :



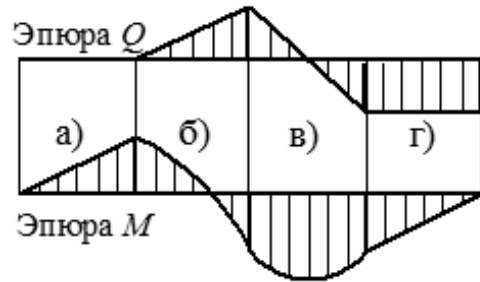
2 Укажите верное правило знаков для изгибающего момента M :



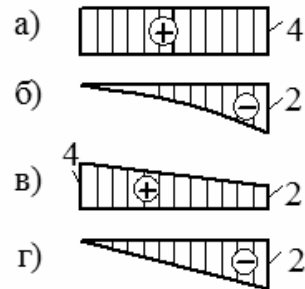
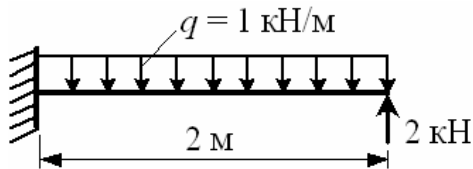
3 Укажите правильную дифференциальную зависимость:

а) $M = \frac{dq}{dz}$; в) $q = \frac{dM}{dz}$;
 б) $Q = \frac{dM}{dz}$; г) $M = \frac{dQ}{dz}$.

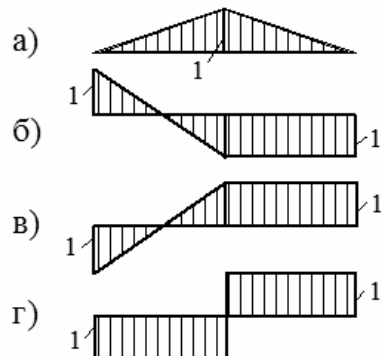
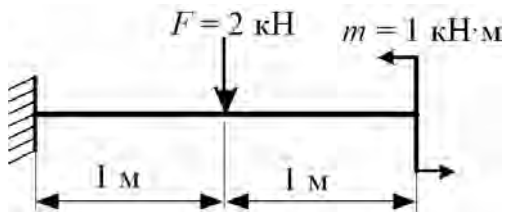
4 На каком участке не соблюдаются дифференциальные зависимости между Q и M ?



5 Какая эпюра поперечных сил верна для указанной балки?



6 Какая эпюра изгибающих моментов верна для указанной балки?



8 Определение внутренних сил при кручении. Построение эюр крутящих моментов

Пример – Для заданного ступенчатого вала (рисунок 8.1) построить эюру крутящих моментов. Предварительно вал уравновесить.

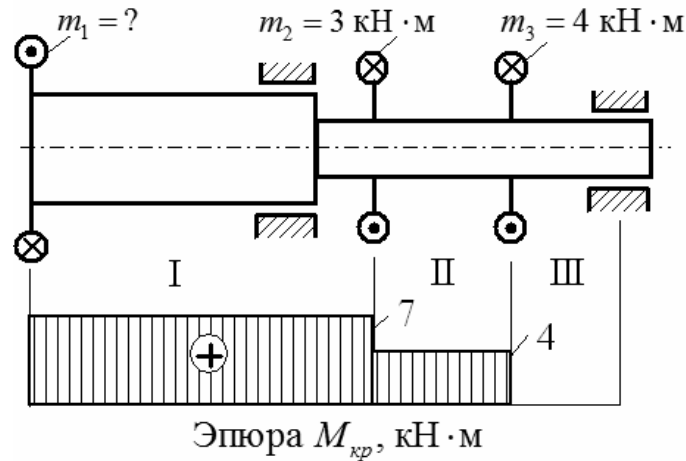


Рисунок 8.1

Решение

Для определения скручивающего момента m_1 составим уравнение статики:

$$\sum m = m_2 + m_3 - m_1 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m_2 + m_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение эюры $M_{кр}$:

$$M_1 = m_1 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = m_1 - m_2 = 7 - 3 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = m_1 - m_2 - m_3 = 7 - 3 - 4 = 0.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

При кручении стержня в поперечном сечении бруса возникает ...:

- продольная сила N ;
- крутящий момент $M_{кр}$;
- изгибающий момент M ;
- поперечная сила Q .

9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусьев

Пример 1 – Произвести проверку прочности и жесткости стального ступенчатого бруса, показанного на рисунке 9.1.

Исходные данные: $A_1 = 3 \text{ см}^2$; $A_2 = 5 \text{ см}^2$; $R = 160 \text{ МПа}$; $[\Delta \ell] = 1 \text{ мм}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\gamma_c = 1$.

Решение

Проверку прочности производим по условию

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} \leq R \cdot \gamma_c.$$

По эпюре продольных сил и конфигурации стержня определяем опасный участок:

$$\sigma_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 140 \cdot 10^6 \text{ Па} = 140 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

Для проверки жесткости стержня строим эпюру $\Delta \ell$, определяя деформацию каждого участка по формуле

$$\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

Начало расчета находится в сечении, примыкающем к жесткой заделке, перемещение которого равно нулю: $z = 0$; $\Delta \ell = 0$.

$$z = 1 \text{ м}; \quad \Delta \ell = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм};$$

$$z = 1,5 \text{ м}; \quad \Delta \ell = 0,7 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,55 \text{ мм};$$

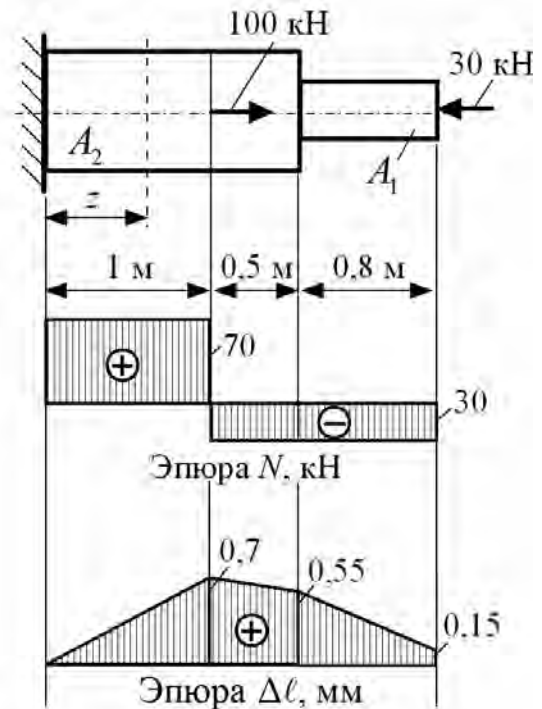


Рисунок 9.1

$$z = 2,3 \text{ м}; \quad \Delta l = 0,55 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,15 \text{ мм}.$$

$$\Delta l_{\max} = 0,7 \text{ мм} < [\Delta l] = 1 \text{ мм}.$$

Жесткость бруса обеспечена.

Пример 2 – Бетонная колонна (рисунок 9.2) круглого поперечного сечения длиной $\ell = 5$ м сжимается силой $F = 500$ кН.

Определить диаметр колонны, если коэффициент $\gamma_c = 1$, расчетное сопротивление на сжатие $R = 5$ МПа, а удельный вес бетона $\gamma = 20 \cdot 10^3$ Н/м³.

Решение

При постоянной площади поперечного сечения A полный вес колонны $G = \gamma \cdot A \cdot \ell$. Эюра продольных сил N показана на рисунке 9.2.

В опасном сечении $N_{\max} = F + \gamma A \ell$. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \ell \leq R \cdot \gamma_c.$$

$$A \geq \frac{F}{R \cdot \gamma_c - \gamma \cdot \ell} = \frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 \cdot 1 - 20 \cdot 10^3 \cdot 5} = 0,102 \text{ м}^2.$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,102}{\pi}} = 0,36 \text{ м} = 360 \text{ мм}.$$

Пример 3 – Определить наибольшее значение допустимой силы F для ступенчатого чугунного бруса (рисунок 9.3), если $R_{\text{раст}} = 60$ МПа; $R_{\text{сж}} = 120$ МПа; $A = 10$ см²; $\gamma_c = 1$.

Решение

Эюра продольных сил N , выраженная в долях от силы F , показана на рисунке 9.3. Расчет допустимой силы по условию прочности в сжатой области:

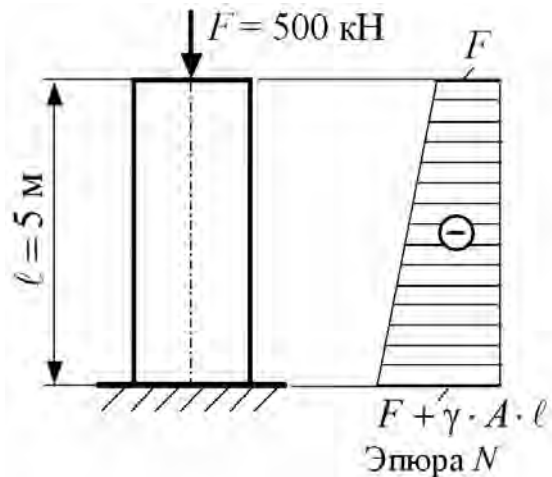


Рисунок 9.2

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{сж}} = \frac{F}{A} \leq R_{\text{сж}};$$

$$[F]_{\text{сж}} \leq AR_{\text{сж}} = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 120 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Расчет допустимой силы по условию прочности в растянутой области:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{раст}} = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot A} \leq R_{\text{раст}};$$

$$[F]_{\text{раст}} \leq \frac{2AR_{\text{раст}}}{1,5} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,5} = 80 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

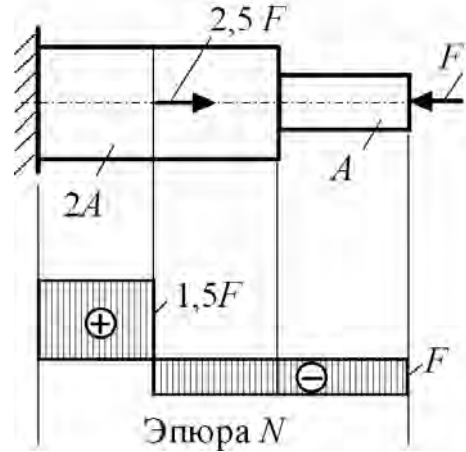


Рисунок 9.3

Допустимой силой для бруса будет меньшая из рассчитанных сил: $[F] = 80 \text{ кН}$.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 По какой формуле определяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении-сжатии?

- а) $\sigma = \frac{M}{W}$; в) $\sigma = G \cdot \varepsilon$;
 б) $\sigma = \frac{N}{A}$; г) $\sigma = \frac{N}{E \cdot A}$.

2 По какой формуле определяется абсолютная деформация бруса при растяжении-сжатии?

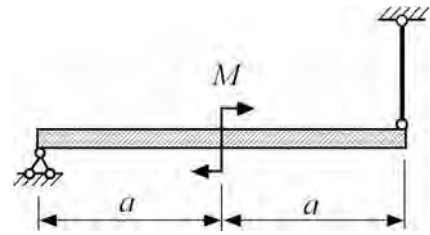
- а) $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$; в) $\Delta l = \frac{\varepsilon}{l}$;
 б) $\Delta l = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$; г) $\Delta l = \frac{N}{A}$.

3 Образец диаметром 0,02 м разрушился под действием силы $F = 0,15 \text{ МН}$. Тогда величина предела прочности материала равна:

- а) 7,5 МПа; в) 209,3 МПа;
 б) 375 МПа; г) 477,7 МПа.



4 Жесткий брус, нагруженный моментом M , поддерживается в горизонтальном положении стальным стержнем площадью поперечного сечения A . Условие прочности стержня:



а) $\frac{M}{2 \cdot a \cdot A} \leq R$; б) $\frac{M \cdot A}{2 \cdot a} \leq R$; в) $\frac{M}{A} \leq R$; г) $\frac{M \cdot a}{A} \leq R$.

10 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проверочный расчет)

Пример – Проверить прочность балки таврового сечения при нормальных условиях работы ($\gamma_c = 1$), если $R_{раст} = 30$ МПа и $R_{сж} = 60$ МПа (рисунок 10.1).

Решение

Определение координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$y_c = \frac{15 \cdot 5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 5 \cdot 12,5}{15 \cdot 5 + 15 \cdot 5} = 7,5 \text{ см.}$$

Определение главного центрального момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 = 5312,5 \text{ см}^4 = 5312,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

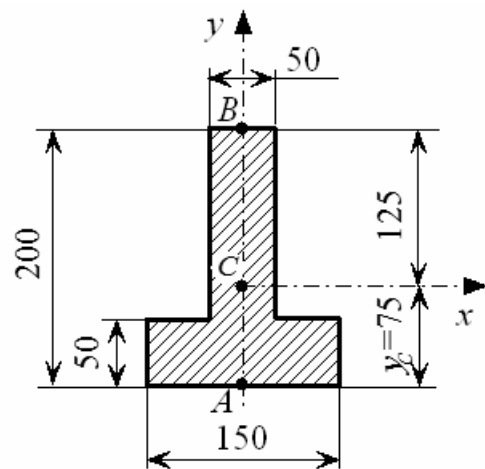
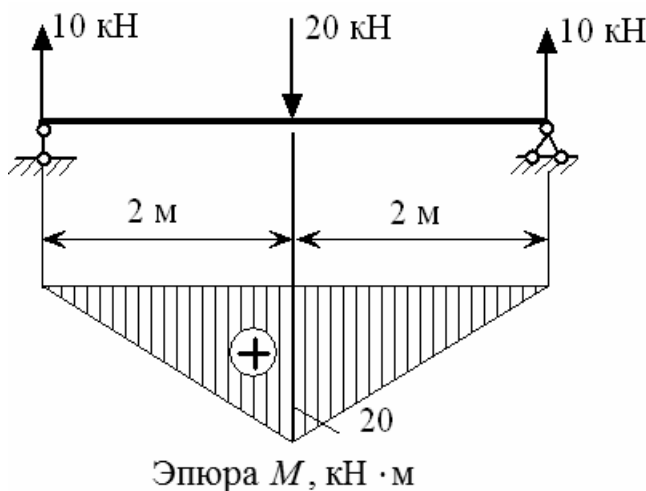


Рисунок 10.1

Определение моментов сопротивления поперечного сечения относительно оси x :

$$W_A = \frac{I_x}{y_A} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{7,5 \cdot 10^{-2}} = 708 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_B = \frac{I_x}{y_B} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{12,5 \cdot 10^{-2}} = 425 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_A = \frac{M_{\max}}{W_A} = \frac{20 \cdot 10^3}{708 \cdot 10^{-6}} = 28,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,25 \text{ МПа} < R_{\text{расп}} = 30 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{W_B} = \frac{20 \cdot 10^3}{425 \cdot 10^{-6}} = 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа} < R_{\text{сж}} = 60 \text{ МПа}.$$

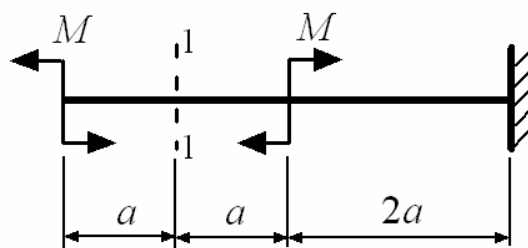
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки имеет вид:

$$\text{а) } \frac{M}{W} \leq R \cdot \gamma_c; \quad \text{б) } \frac{M \cdot \ell}{W} \leq R \cdot \gamma_c; \quad \text{в) } \frac{M}{E \cdot I} \leq R \cdot \gamma_c; \quad \text{г) } \frac{F}{W} \leq R \cdot \gamma_c.$$

2 В сечении 1-1 возникают внутренние силовые факторы:

- а) $M \neq 0, Q = 0$;
- б) $M = 0, Q = 0$;
- в) $M \neq 0, Q \neq 0$;
- г) $M = 0, Q \neq 0$.



11 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проектировочный расчет)

Пример – Подобрать двутавровое поперечное сечение стальной балки (рисунок 11.1) и проверить его прочность по нормальным и касательным напряжениям. Исходные данные: $R = 160$ МПа; $R_S = 100$ МПа; $\gamma_c = 1$.

Решение

Поперечное сечение выбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 1} = 281,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 281,25 \text{ см}^3.$$

Рассчитанному моменту сопротивления в наибольшей степени подходит двутавр № 24 ($W_x = 289 \text{ см}^3$; $I_x = 3460 \text{ см}^4$; $S_x^* = 163 \text{ см}^3$; $b^* = 5,6 \text{ мм}$).

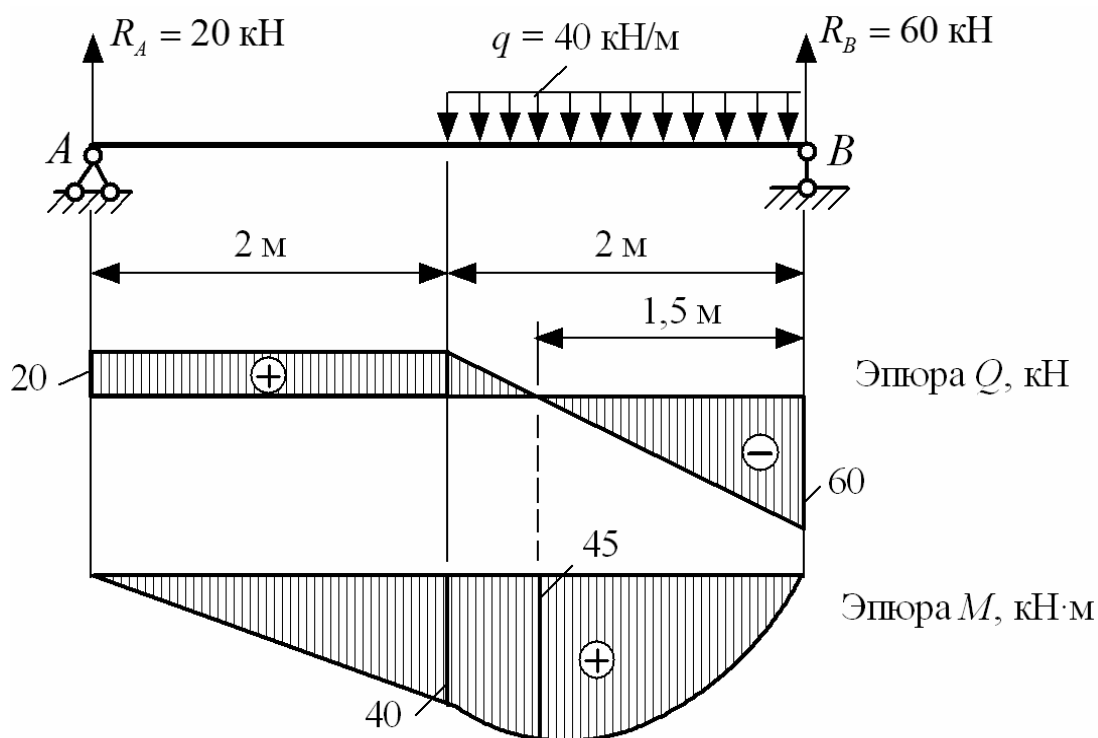


Рисунок 11.1

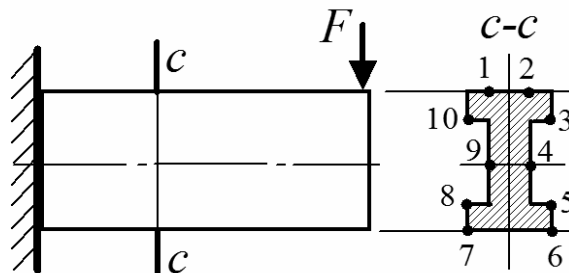
Проверяем прочность двутавра по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{b^* \cdot I_x} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,5 \text{ МПа} < R_s = 100 \text{ МПа}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

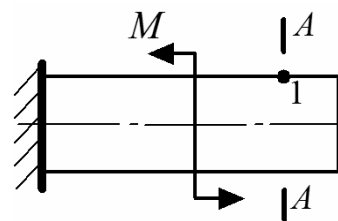
1 Максимальные нормальные напряжения действуют в точках:

- а) 10, 3, 8, 5;
- б) 3, 5, 6;
- в) 1, 2, 7, 6;
- г) 9, 4.



2 Какие напряжения действуют в точке 1?

- а) нет напряжений;
- б) действуют нормальное и касательное напряжения;
- в) действует нормальное напряжение;
- г) действует касательное напряжение.



12 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности

Пример 1 – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как указано на рисунке 12.1.

Проверить прочность детали по третьей теории прочности, если $R = 160 \text{ МПа}$.

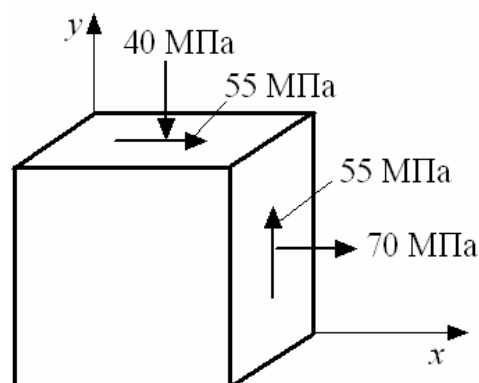


Рисунок 12.1

Решение

Напряжения, действующие на указанных площадках:

$$\sigma_x = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 55 \text{ МПа}.$$



Главные напряжения

$$\sigma_{\pm 1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{70 - 40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(70 + 40)^2 + 4 \cdot 55^2} = 15 \pm 78;$$

$$\sigma_{\max} = 15 + 78 = 93 \text{ МПа} = \sigma_1;$$

$$\sigma_{\min} = 15 - 78 = -63 \text{ МПа} = \sigma_3;$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Проверка прочности: $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 93 - (-63) = 156 \text{ МПа} < R$.

Условие прочности выполняется.

Пример 2 – Для напряженного состояния (см. пример 1) определить положение главных площадок и направление действия главных напряжений.

Определить величину максимальных касательных напряжений и указать площадки, на которых они действуют.

Решение

Положение главных площадок определяется углом α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 55}{70 - (-40)} = 1;$$

$$\alpha_0 = 22,5^\circ.$$

Так как $\alpha_0 > 0$, поворачиваем заданные площадки против часовой стрелки и получаем главные площадки (рисунок 12.2).

Определяем величину максимальных касательных напряжений, которые действуют на площадках, расположенных под углом 45° по отношению к главным площадкам:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{93 - (-63)}{2} = 78 \text{ МПа}.$$

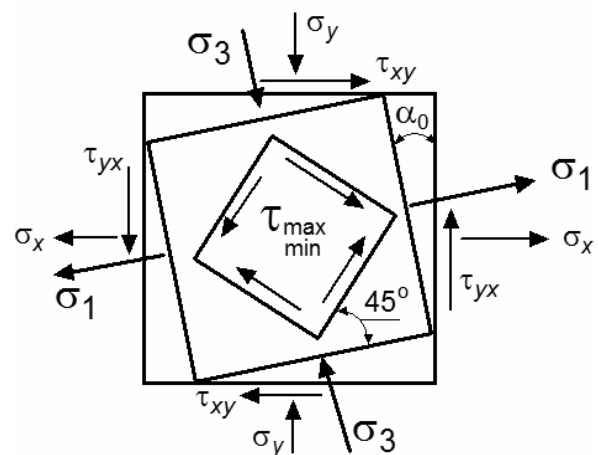
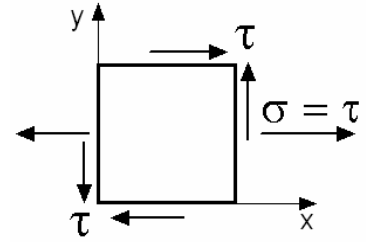


Рисунок 12.2

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

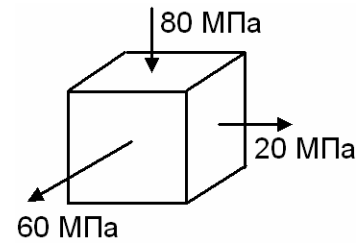
1 Для заданного напряженного состояния максимальное главное напряжение равно ...:

- а) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$; в) $\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$;
 б) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$; г) $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$.



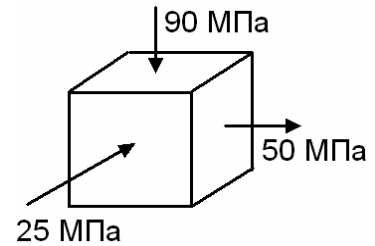
2 Для заданного напряженного состояния главное напряжение σ_3 равно:

- а) 80 МПа; в) 20 МПа;
 б) 60 МПа; г) - 80 МПа.



3 Для заданного напряженного состояния определить эквивалентное напряжение по теории максимальных касательных напряжений:

- а) 65 МПа; в) 165 МПа;
 б) 140 МПа; г) 75 МПа.



4 На главных площадках плоского напряженного состояния действуют ...:

- а) только касательные напряжения;
 б) только нормальные напряжения;
 в) нет напряжений;
 г) эквивалентные напряжения.

13 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (определение допускаемой нагрузки)

Пример – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой F (рисунок 13.1). Определить допустимую величину силы $[F]$ при $R = 10$ МПа и $\gamma_c = 1$. Проверить прочность балки по касательным напряжениям при $R_s = 1$ МПа.

Решение

Осей момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 30^2}{6} = 1800 \text{ см}^3 = 1800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Допустимую силу рассчитаем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1,2 \cdot [F]}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$[F] = \frac{W_x \cdot R}{1,2} = \frac{1800 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 1}{1,2} = 15000 \text{ Н} = 15 \text{ кН}.$$

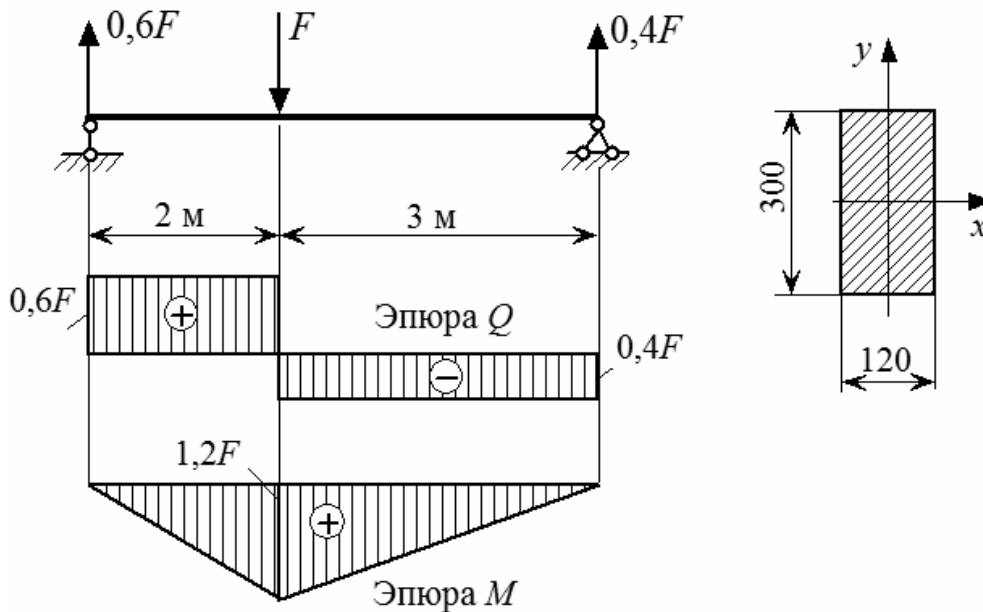


Рисунок 13.1

Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,6 \cdot 15 \cdot 10^3}{12 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,375 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,375 \text{ МПа} < R_s = 1 \text{ МПа}.$$

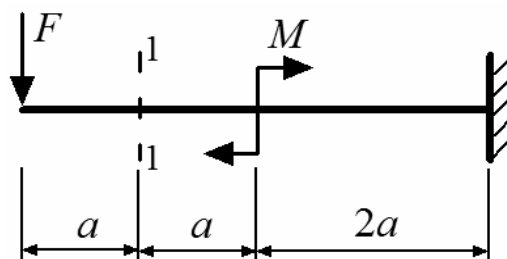
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какой закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки?

- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный

2 В сечении 1-1 возникают внутренние силовые факторы:

- а) $M \neq 0, Q = 0$;
- б) $M = 0, Q = 0$;
- в) $M \neq 0, Q \neq 0$;
- г) $M = 0, Q \neq 0$.



14 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе

Пример 1 – Проверить жесткость двутавровой балки (рисунок 14.1), если допустимый прогиб $[y] = 6$ мм.

Исходные данные: двутавр № 20 ($I_x = 1840 \text{ см}^4$); $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

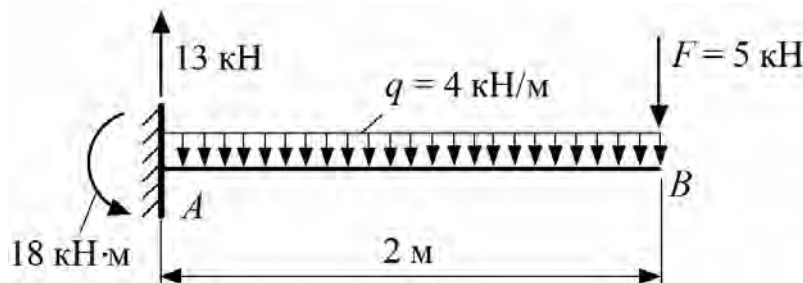


Рисунок 14.1

Решение

Уравнение прогибов для данной балки по методу начальных параметров имеет вид:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z - 18 \cdot \frac{z^2}{2!} + 13 \cdot \frac{z^3}{3!} - 4 \cdot \frac{z^4}{4!}.$$

Начальные параметры следующие: $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$.

Максимальный прогиб $y_{\max} = y_B$ при $z = 2$ м.

$$EI_x y_B = -18 \cdot \frac{2^2}{2} + 13 \cdot \frac{2^3}{6} - 4 \cdot \frac{2^4}{24} = -21,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_{\max} = y_B = \frac{21,33}{EI_x} = \frac{21,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0058 \text{ м} = 5,8 \text{ мм} < [y] = 6 \text{ мм}.$$

Пример 2 – Методом начальных параметров определить прогиб сечения C и угол поворота сечения D деревянной балки прямоугольного поперечного сечения указанных размеров (рисунок 14.2).

Модуль продольной упругости материала $E = 10^4 \text{ МПа} = 10^{10} \text{ МПа}$.

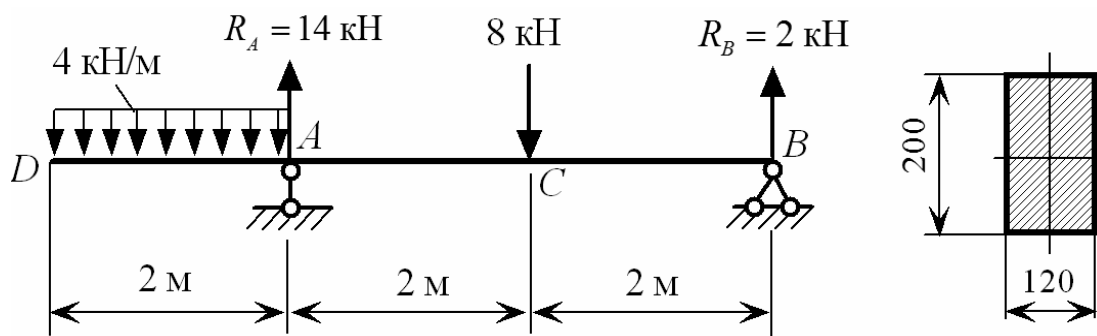


Рисунок 14.2

Решение

Определение осевого момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Определение начальных параметров:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{2^4}{4!} = 0;$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{6^4}{4!} + 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 14 \cdot \frac{4^3}{3!} - 8 \cdot \frac{2^3}{3!} = 0;$$

$$EI_x y_0 = -\frac{40}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_x \theta_0 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Прогиб сечения C

$$\begin{aligned}
 EI_x y_C &= EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 14 \cdot \frac{2^3}{3!} = \\
 &= -\frac{40}{3} + 8 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{24} + 4 \cdot \frac{2^4}{24} + 14 \cdot \frac{2^3}{6} = -\frac{8}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \\
 y_C &= -\frac{8}{3 \cdot EI_x} = -\frac{8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = -0,33 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -3,3 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

Угол поворота сечения D равен начальному параметру θ_0 :

$$\theta_D = \frac{8}{EI_x} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 0,01 \text{ рад.}$$

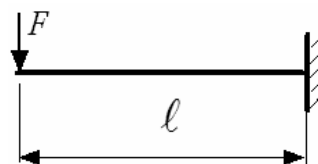
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите наиболее общее определение «начальные параметры»:

- а) прогиб и угол поворота в опорном сечении;
- б) прогиб и угол поворота в крайнем левом сечении балки;
- в) прогиб и угол поворота в жесткой заделке;
- г) прогиб и угол поворота в крайнем правом сечении балки.

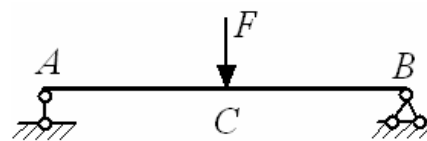
2 Начальные параметры показанной балки равны:

- а) $y_0 \neq 0, \theta_0 = 0$;
- б) $y_0 \neq 0, \theta_0 \neq 0$;
- в) $y_0 = 0, \theta_0 = 0$;
- г) $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$.



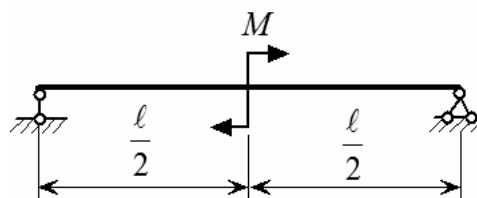
3 В каком сечении показанной балки прогиб равен нулю?

- а) сечение A ;
- б) сечение C ;
- в) сечение B ;
- г) сечения A и B .



4 Балка нагружена сосредоточенным моментом M . Жесткость поперечного сечения балки равна EI_x . Начальный параметр θ_0 равен:

- а) $\theta_0 = \frac{M \cdot l}{8 \cdot EI_x}$;
- б) $\theta_0 = 0$;
- в) $\theta_0 = -\frac{M \cdot l}{8 \cdot EI_x}$;
- г) $\theta_0 = \frac{M \cdot l}{24 \cdot EI_x}$.



5 Укажите жесткость поперечного сечения при изгибе:

- а) GI_x ; б) EI_ρ ; в) EI_x ; г) EA .

15 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения

Пример 1 – Проверить прочность и жесткость стального бруса (рисунок 15.1). Исходные данные: $R_S = 60$ МПа; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; $[\varphi] = 0,03$ рад.

Решение

Геометрические характеристики вала следующие:

$$I_{\rho 1} = I_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4 = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4 = 25,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_{\rho 1} = W_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,53 \text{ см}^3 = 24,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3 = 12,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

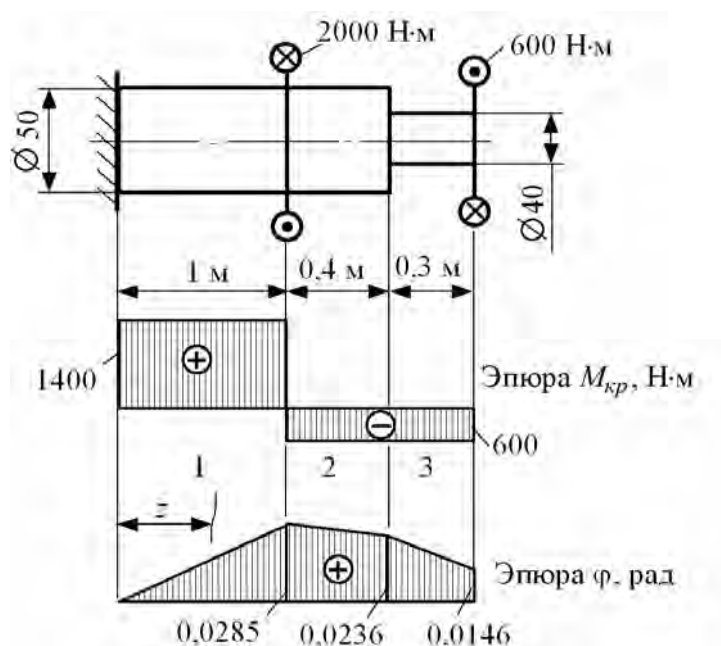


Рисунок 15.1

Проверка прочности вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 1}} = \frac{1400}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 57,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 57,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 2}} = \frac{600}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 3}} = \frac{600}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 57,1 \text{ МПа} < R_s = 60 \text{ МПа}.$$

Проверка жесткости вала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр i} \cdot \ell_i}{G_i \cdot I_{\rho i}};$$

$$z = 0 \text{ м}; \quad \varphi = 0 \text{ рад};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 = \frac{1400 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0285 \text{ рад};$$

$$z = 1,4 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0285 - \frac{600 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0236 \text{ рад};$$

$$z = 1,7 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_3 = 0,0236 - \frac{600 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,12 \cdot 10^{-8}} = 0,0146 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\max} = 0,0285 \text{ рад} < [\varphi] = 0,03 \text{ рад}.$$

Пример 2 – Определить минимальный диаметр стального вала (рисунок 15.2), если $R_s = 90 \text{ МПа}$; $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\Theta] = 0,03 \text{ рад/м}$.

Решение

По эпюре $M_{кр}$ определим опасный участок, на котором действует максимальный крутящий момент $5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.



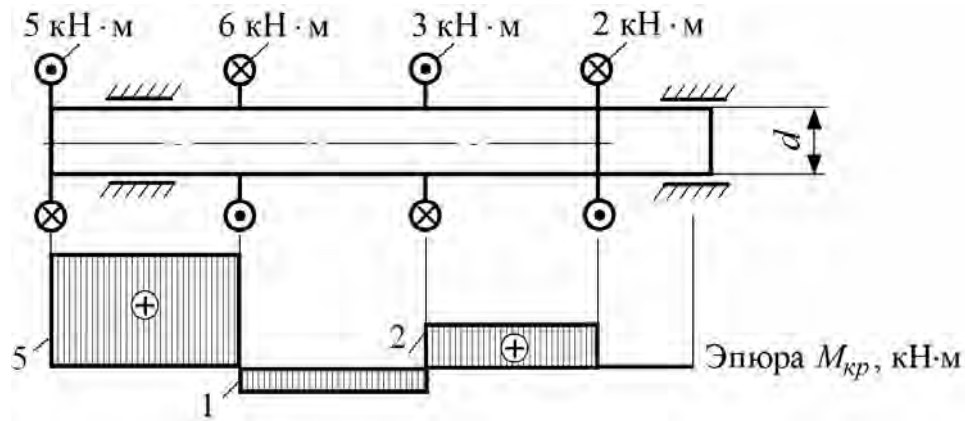


Рисунок 15.2

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,0657 \text{ м.}$$

Из условия жесткости

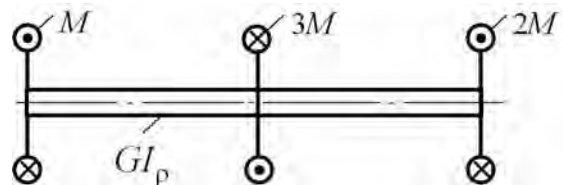
$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,03}} = 0,0679 \text{ м.}$$

В качестве минимального диаметра вала выбираем значение

$$d = 0,0679 \text{ м} = 67,9 \text{ мм.}$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

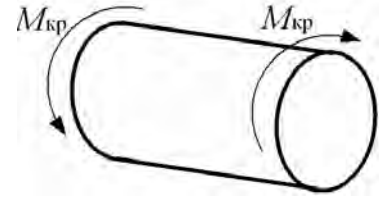
1 Укажите условие жесткости показанного вала постоянного поперечного сечения при допуске относительном угле закручивания $[\theta]$ рад/м:



- а) $\frac{M}{GI_p} \leq [\theta]$; б) $\frac{2M}{GI_p} \leq [\theta]$; в) $\frac{6M}{GI_p} \leq [\theta]$; г) $\frac{3M}{GI_p} \leq [\theta]$.

2 Определите из расчета на прочность максимальное допустимое значение момента $[M_{кр}]$, если диаметр вала 2 см, а расчетное сопротивление $R_S = 80$ МПа :

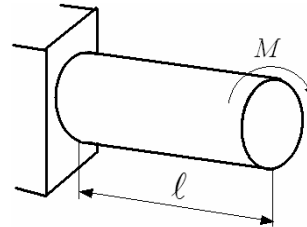
- а) $50 \cdot \pi$ Н·м;
 б) $60 \cdot \pi$ Н·м;
 в) $40 \cdot \pi$ Н·м;
 г) $30 \cdot \pi$ Н·м.



3 Укажите формулу для расчета максимальных касательных напряжений при кручении:

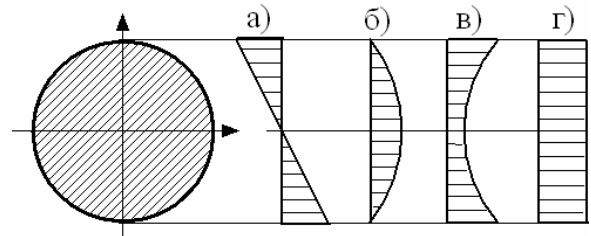
а) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{W_\rho}$; б) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_\rho}$; в) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_\rho}$; г) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}$.

4 $[\varphi]$ – допустимый угол закручивания. Из расчета на жесткость максимальное допустимое значение момента $[M_{кр}]$ равно:



а) $M \leq GI_\rho \cdot [\varphi]$; б) $M \leq \frac{GI_\rho \cdot [\varphi]}{\ell}$; в) $M \leq \frac{3GI_\rho \cdot [\varphi]}{\ell}$; г) $M \leq \frac{GI_\rho \cdot [\varphi]}{2\ell}$.

5 Как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении?



16 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса прямоугольного поперечного сечения

Пример – Проверить прочность и жесткость прямолинейного стального бруса для двух вариантов прямоугольного поперечного сечения (рисунок 16.1), если $R_S = 90$ МПа; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; $[\Theta] = 0,02$ рад/м.

Решение

Определение моментов сопротивления при кручении:

а) $W_{кр} = 0,208 \cdot h^3 = 0,208 \cdot 6^3 = 44,93 \text{ см}^3 = 44,93 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$;

$$\text{б) } W_{кр} = 0,246 \cdot h \cdot b^2 = 0,246 \cdot 12 \cdot 6^2 = 106,3 \text{ см}^3 = 106,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

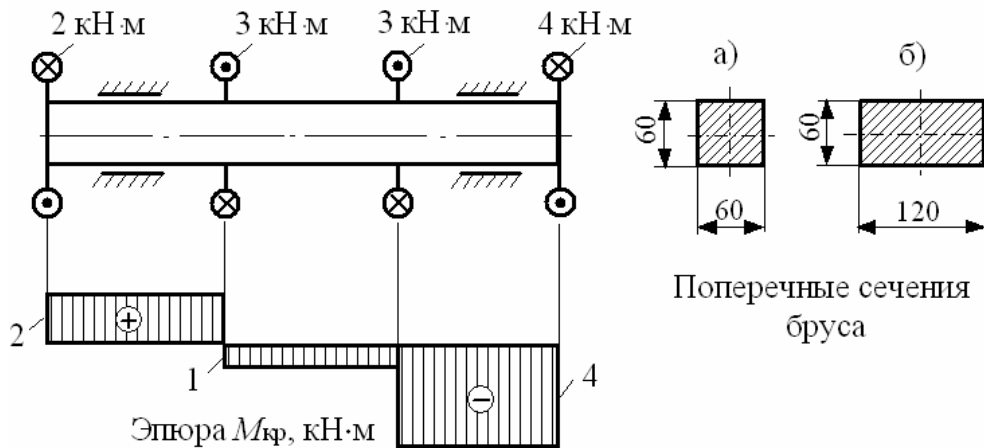


Рисунок 16.1

Проверка прочности вала:

$$\text{а) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{44,93 \cdot 10^{-6}} = 89 \cdot 10^6 \text{ Па} = 89 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа};$$

$$\text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{106,3 \cdot 10^{-6}} = 37,63 \cdot 10^6 \text{ Па} = 37,63 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа}.$$

Определение моментов инерции при кручении:

$$\text{а) } I_{кр} = 0,141 \cdot h^4 = 0,141 \cdot 6^4 = 182,7 \text{ см}^4 = 182,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\text{б) } I_{кр} = 0,229 \cdot h \cdot b^3 = 0,229 \cdot 12 \cdot 6^3 = 593,6 \text{ см}^4 = 593,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Проверка жесткости вала по относительному углу закручивания:

$$\text{а) } \theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GI_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 182,7 \cdot 10^{-8}} = 0,0274 \text{ рад/м} > [\theta] = 0,002 \text{ рад/м};$$

$$\text{б) } \theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GI_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 593,6 \cdot 10^{-8}} = 0,0084 \text{ рад/м} > [\theta] = 0,002 \text{ рад/м}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите условие прочности при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения:

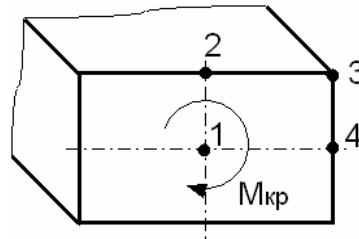
а) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} \leq [\tau];$

б) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_{кр}} \leq [\tau];$

в) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{кр}} \leq [\tau];$

г) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{W_{кр}} \leq [\tau].$

2 В какой точке поперечного сечения касательные напряжения при кручении максимальны?



3 В каких точках прямоугольного поперечного сечения касательные напряжения при кручении равны нулю?

- а) по внешнему контуру сечения;
- б) только в центре тяжести;
- в) в угловых точках и в центре тяжести;
- г) нет таких точек.

4 Какая гипотеза не применима в теории кручения брусьев некруглого поперечного сечения?

- а) гипотеза плоских сечений;
- б) гипотеза об идеальной упругости материала;
- в) гипотеза о малости деформаций;
- г) гипотеза Сен-Венана.

17 Расчеты на сдвиг

Пример – Рассчитать заклепочное соединение двух листов одинакового сечения толщиной $t = 16$ мм, перекрытых двумя накладками (рисунок 17.1), если $F = 500$ кН, диаметр заклепки $d = 20$ мм. Допускаемые напряжения: $\sigma_{adm} = 160$ МПа; $\tau_{adm} = 90$ МПа; $\sigma_{con} = 320$ МПа.

Решение

В данном случае заклепки двухсрезные, так как для разрушения соединения необходимо, чтобы каждая заклепка срезалась по двум плоскостям. Определяем необходимое число срезов:



$$n = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \tau_{adm}} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 90 \cdot 10^6} = 17,6 \text{ срезов.}$$

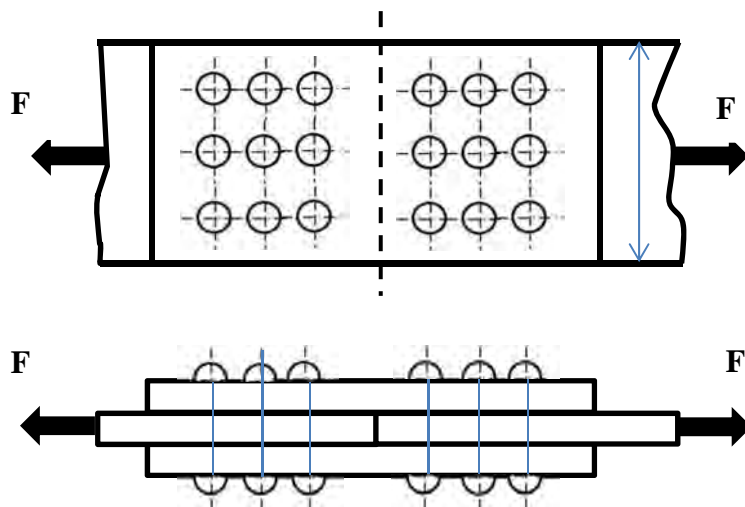


Рисунок 17.1

Следовательно, необходимо принять девять заклепок.

Необходимое число заклепок по смятию определяем по формуле

$$n' = \frac{F}{t \cdot d \cdot \sigma_{con}} = \frac{500 \cdot 10^6}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 320 \cdot 10^6} = 5,85 \text{ шт.}$$

Принимаем шесть заклепок.

Решающим явился расчет на срез. Принимаем девять заклепок – с каждой стороны стыка в три ряда по три заклепки в ряд (см. рисунок 17.1). Подберем площадь поперечного сечения листа из расчета на растяжение:

$$A = \frac{F}{\sigma_{adm}} = \frac{500 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 31,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31,3 \text{ см}^2.$$

При толщине $t = 1,6$ см ширина листа

$$b = \frac{A}{t} = \frac{31,3}{1,6} = 19,5 \text{ см.}$$

К этой рабочей ширине надо добавить ширину отверстий $3d = 6$ см, тогда получим полную ширину листа $B = 19,5 + 6 = 25,5$ см. Этой ширины вполне достаточно для размещения трех заклепок (расстояние между центрами заклепок принимаем равным $3d$). Толщина t_n каждой накладки должна быть не менее половины толщины листа; принимаем $t_n = 0,8$ см.

18 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии в статически неопределимых системах

Пример 1 – Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 18.1), если площадь поперечного сечения $A = 3 \text{ см}^2$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, расчетное сопротивление $R = 160 \text{ МПа}$, коэффициент $\gamma_c = 1$.

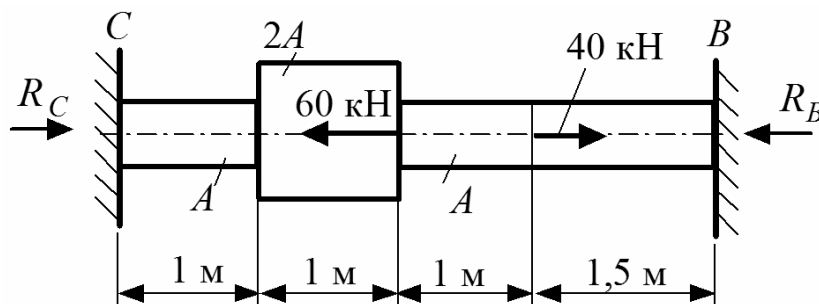


Рисунок 18.1

Решение

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum X = R_C - 60 + 40 - R_B = 0.$$

Стержень один раз статически неопределим, т. к. единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_R = 0,$$

где Δl_P и Δl_R – деформации стержня соответственно от внешних сил и реакций на опорах.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору C и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением эпюры N_P и под действием реакции R_C с построением эпюры N_R (рисунок 18.2).

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta l_P = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1,5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_R = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = -\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1,5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$



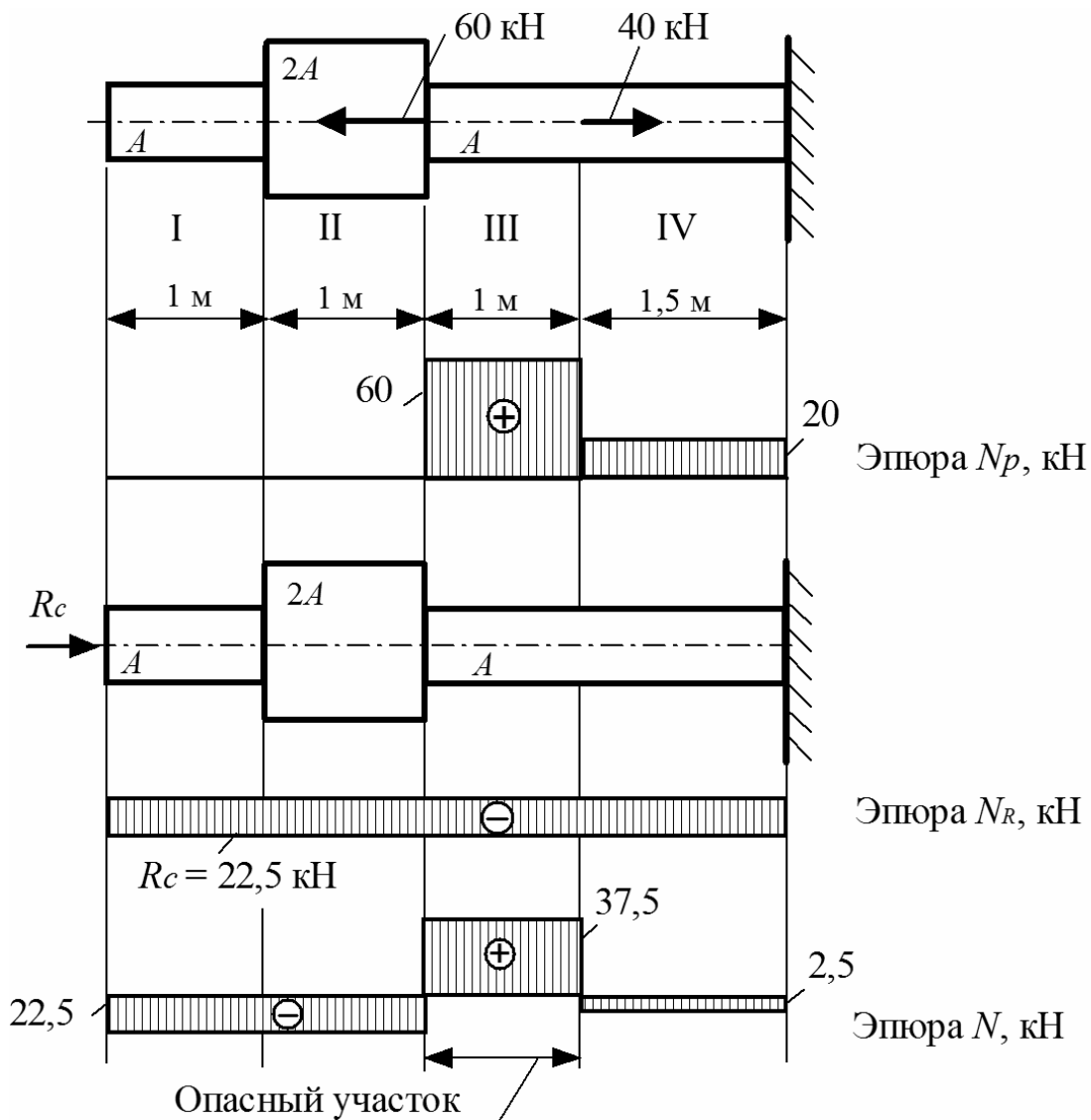


Рисунок 18.2

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta \ell = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_c}{E \cdot A} = 0,$$

откуда $R_c = 22,5$ кН.

Окончательную эпюру продольных сил N строим суммированием эпюр N_p и N_R . Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

Пример 2 – Железобетонная колонна (рисунок 18.3) нагружена силой F . Площадь поперечного сечения продольной арматуры $A_a = 50 \text{ см}^2$. Модули про-

дольной упругости для арматуры и бетона $E_a = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и $E_b = 1,4 \cdot 10^4$ МПа соответственно. Определить напряжения в арматуре σ_a и бетоне σ_b .

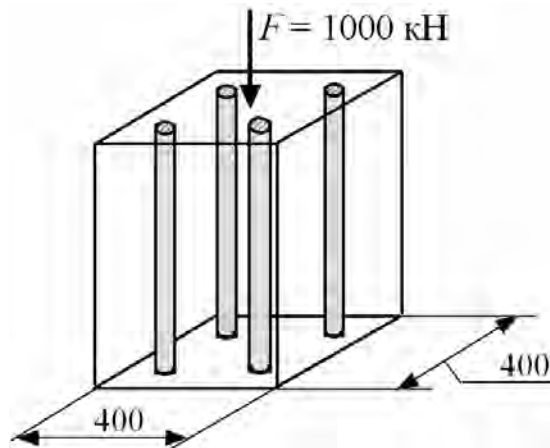


Рисунок 18.3

Решение

Площадь поперечного сечения бетона

$$A_b = A - A_a = 40 \cdot 40 - 50 = 1550 \text{ см}^2.$$

Уравнение проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = \sigma_a \cdot A_a + \sigma_b \cdot A_b - F = 0. \quad (18.1)$$

Для решения задачи требуется дополнительное деформационное уравнение. В железобетонных элементах арматура соединена и работает совместно с бетоном. Следовательно, относительное удлинение арматуры ε_a и бетона ε_b должно быть одинаковым:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon, \text{ или } \varepsilon = \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b}.$$

Откуда

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \cdot \sigma_b. \quad (18.2)$$

Решая совместно выражения (18.1) и (18.2), получим

$$\frac{E_a}{E_b} \cdot \sigma_b \cdot A_a + \sigma_b \cdot A_b - F = 0.$$

Напряжения

$$\sigma_b = \frac{F}{\frac{E_a}{E_b} \cdot A_a + A_b} = \frac{1000 \cdot 10^3}{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{1,4 \cdot 10^{10}} \cdot 50 \cdot 10^{-4} + 1550 \cdot 10^{-4}} = 4,35 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,35 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \cdot \sigma_b = \frac{2,1 \cdot 10^5}{1,4 \cdot 10^4} \cdot 4,35 = 65,25 \text{ МПа}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Сколько независимых уравнений статики можно составить для плоской стержневой системы?

- а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

2 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой стержневой системы?

- а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

3 Укажите условие прочности для статически неопределимой системы, работающей на растяжение-сжатие:

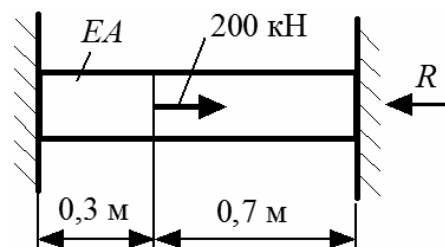
- а) $\frac{Q}{A} \leq R \cdot \gamma_c$; б) $\frac{M}{W} \leq R \cdot \gamma_c$; в) $\frac{N}{E} \leq R \cdot \gamma_c$; г) $\frac{N}{A} \leq R \cdot \gamma_c$.

4 Какое свойство не присуще статически неопределимым системам?

- а) возможность возникновения температурных напряжений;
 б) возможность возникновения монтажных напряжений;
 в) возможность свободного деформирования;
 г) перераспределение внутренних усилий при нарушении одной связи.

5 Определите реакцию на правой опоре R , если жесткость поперечного сечения EA постоянна по величине:

- а) 60 кН;
 б) 200 кН;
 в) 85,7 кН;
 г) 140 кН.



Список литературы

1 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.

2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с.: ил.

3 Сопротивление материалов. Практикум: учебно-методическое пособие / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2015. – 316 с. : ил.

4 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва: МГИУ, 2007. – 240 с.

5 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.

6 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

7 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

8 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 320 с.

9 Сопротивление материалов. Сопротивление материалов и теория упругости: метод. рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» / Сост. А. А. Катькало, И. А. Леонович. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с.

