МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

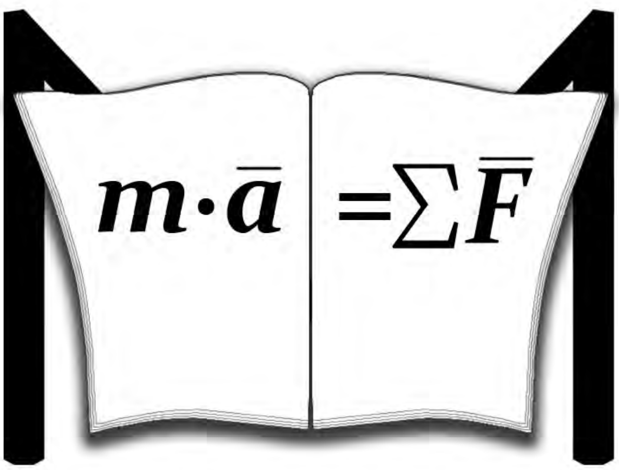
Кафедра «Механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» дневной формы обучения

Часть 1

СТАТИКА – КИНЕМАТИКА



Могилев 2019

УДК 531
ББК 22.21
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «18» октября 2019 г., протокол № 3

Составители: канд. техн. наук, доц. Ю. В. Машин;
канд. техн. наук, доц. Н. А. Леванович;
канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов;
канд. техн. наук, доц. Л. Г. Доконов

Рецензент канд. техн. наук А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Теоретическая механика» для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» дневной формы обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов по разделам «Статика» и «Кинематика».

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск П. Н. Громыко

Редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Указания по подготовке к практическим занятиям

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика, строительная механика и металлические конструкции и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» изучают теоретическую механику на протяжении 2-го и 3-го семестров. Данные методические рекомендации предназначены для использования при изучении разделов «Статика» и «Кинематика».

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;

– выполнение и защита индивидуальных заданий;

– выполнение контрольных работ.

На практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;

– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. В установленные преподавателем сроки индивидуальные задания защищают во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не защитившие индивидуальные задания, не допускаются к зачету (экзамену) по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

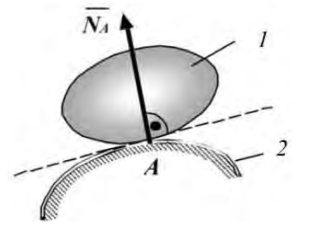
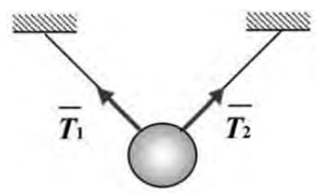
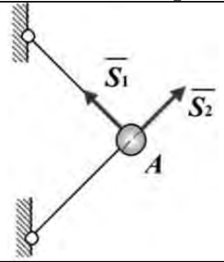
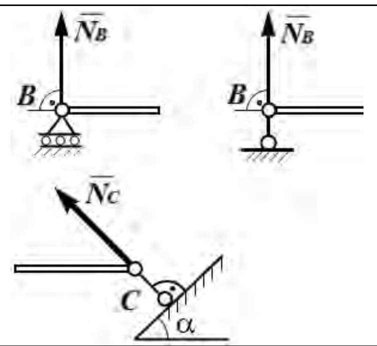
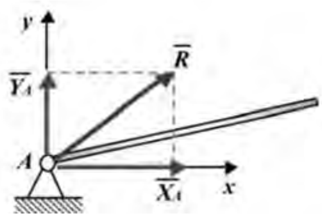
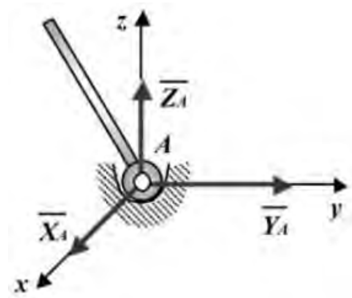
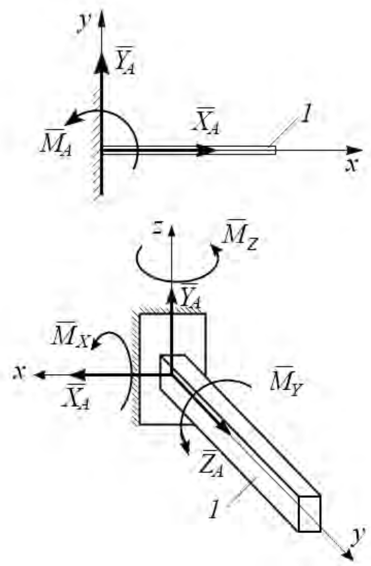
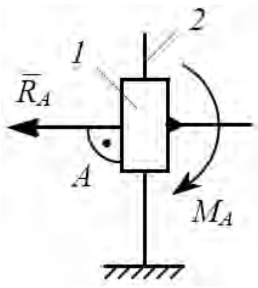
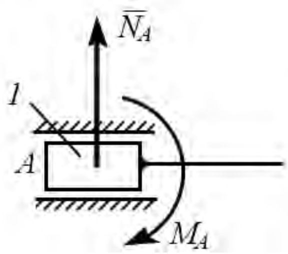
2 Статика

2.1 Основные типы связей и их реакции. Примеры распределенных сил

Тела, которые ограничивают перемещения данного тела в пространстве, являются по отношению к нему связями. Эффект действия связей на данное тело учитывается введением в рассмотрение сил, действие которых на данное тело эквивалентно действию связей. Эти силы называются реакциями связей. Реакция связи направлена противоположно тем перемещениям, которым данная связь не позволяет осуществиться.

Основные типы связей и их реакции представлены в таблице 1.

Таблица 1

Гладкая поверхность	Нить	Невесомый стержень
		
Шарнирно-подвижная опора	Цилиндрический шарнир	Сферический (шаровый) шарнир
		
Жесткая заделка	Ползун *1* на стержне *2*	Ползун *1* в направляющих
		

Распределенные силы

Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется сосредоточенной (рисунок 1, *а*).

Система распределенных сил характеризуется интенсивностью q, Н/м, т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

Распределенную нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределенная нагрузка) или треугольника заменяют одной сосредоточенной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рисунок 1, *б*, *в*). Величина сосредоточенной равнодействующей силы численно равна площади фигуры, образованной распределенной нагрузкой. Для нагрузки, распределенной в виде прямоугольника, $Q = q \cdot l$, а в виде треугольника – $Q = \frac{1}{2} q \cdot l$.

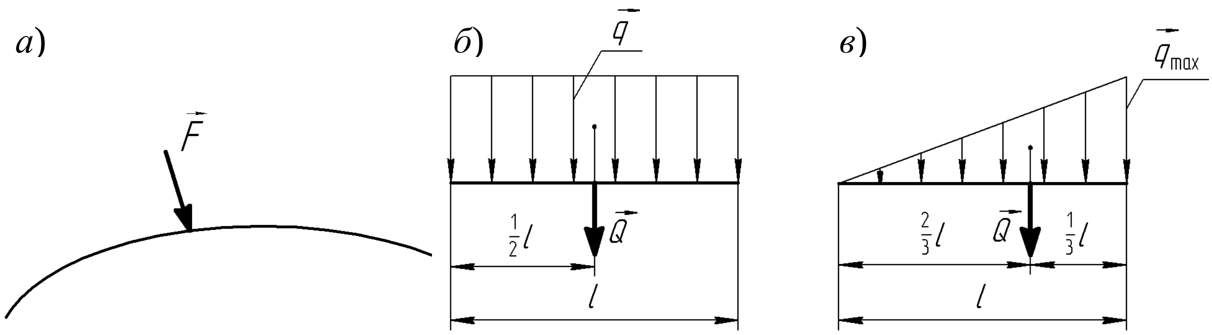


Рисунок 1

Задача 1. Шар *1* весом 16 Н и шар *2* связаны нитью, перекинутой через блок *D*, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30^o$ (рисунок 2).

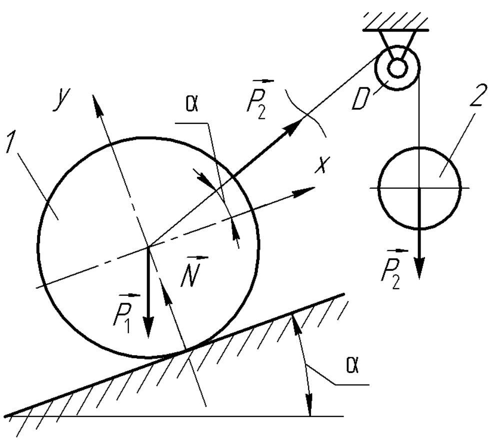


Рисунок 2

Решение

Расставим все силы и реакции на расчетной схеме. Применим принцип освобождаемости от связей. Так как шар *1* удерживается в равновесии шаром *2*, то усилие в тросе между двумя шарами будет равно весу шара *2*. Шар *1* свободно опирается на наклонную поверхность. В точке касания возникает реакция связи *N*, направленная перпендикулярно опоре. Направим оси координат.

Для шара *1* составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на координатную ось *Ox*.

$$\sum \vec{F}_{iX} = 0: \quad -P_1 \cdot \sin\alpha + P_2 \cdot \cos\alpha = 0.$$

$$P_2 = \frac{P_1 \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = P_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha = 16\mathrm{tg}30° = 9{,}24 \text{ Н}.$$

Ответ: $P_2 = 9{,}24$ Н.

Решить задачи 1.1.5, 1.2.7, 1.2.10, 1.2.23, 1.4.3 и 1.4.9 из [5].

2.2 Равновесие системы сходящихся сил

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, образуют систему сходящихся сил. Равнодействующая система сходящихся сил равна векторной сумме всех сил системы и проходит через точку пересечения их линий действия.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i .$$

Задача 2. Какую по модулю силу $\vec{F}_3$ надо приложить к сходящимся силам $\vec{F}_1 = 2$ Н и $\vec{F}_2 = 4$ Н, образующим с осью *Ox* углы $\alpha = 30^o$ и $\beta = 60^o$, чтобы равнодействующая этих трех сил равнялась нулю (рисунок 3)?

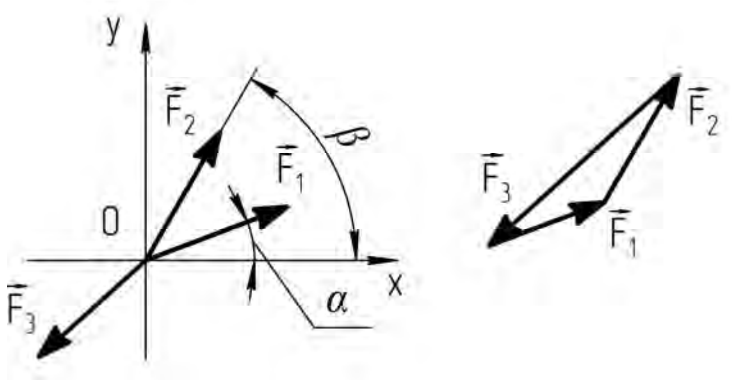


Рисунок 3

Решение

Для нахождения равнодействующей сил, расположенных произвольно в плоскости, необходимо спроецировать уравнение $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ или $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ на координатные оси.

Проекция на ось *Ox*

$$R_X = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta - F_{3X} = 0.$$

Проекция на ось *Oy*

$$R_Y = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta - F_{3Y} = 0.$$

Так как $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$, то равнодействующая будет равна нулю тогда, когда каждое слагаемое будет равно нулю.

$$0 = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta - F_{3X}; \qquad 0 = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta - F_{3Y}.$$

Из полученных уравнений находим проекции силы $\vec{F}_3$ на координатные оси.

$$F_{3X} = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta = 2\cos 30° + 4\cos 60° = 3{,}73 \text{ Н};$$

$$F_{3Y} = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta = 2\sin 30° + 4\sin 60° = 4{,}46 \text{ Н}.$$

Тогда

$$F_3 = \sqrt{F_{3X}^2 + F_{3Y}^2} = \sqrt{3{,}73^2 + 4{,}46^2} = 5{,}81 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_3 = 5{,}81$ Н.

Задача 3. Груз удерживается в равновесии стержнями *AC* и *BC*, шарнирно соединенными в точках *A*, *B* и *C*. Стержень *BC* растянут силой F_2 = 45 Н, а стержень *AC* сжат силой F_1 = 17 Н. Определить вес груза, если заданы углы α = 15° и β = 60° (рисунок 4).

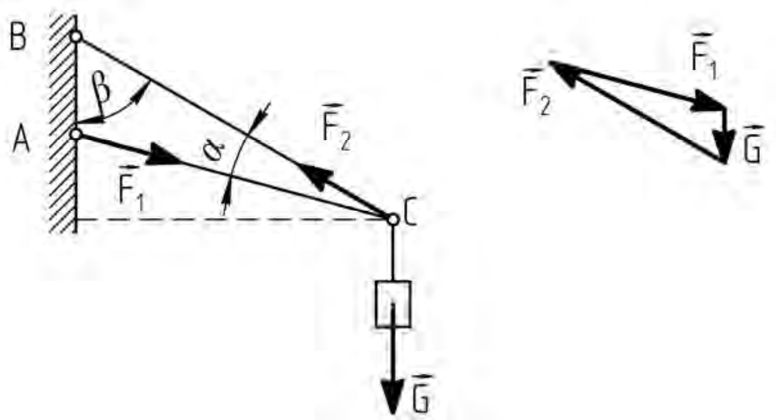


Рисунок 4

Решение

Шарнир *C* находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил:

$$\vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Составим уравнение равновесия:

$$\sum F_Y = 0; \quad -G + F_2 \cdot \cos 60° - F_1 \cdot \sin 15° = 0 \ \Rightarrow \ G = F_2 \cdot \cos 60° - F_1 \cdot \sin 15°.$$

Подставляя значения сил, получим

$$G = 45 \cdot \cos 60° - 17 \cdot \sin 15° = 18{,}1 \text{ Н}.$$

Ответ: G = 18,1 Н.

Решить задачи 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7, 1.2.10, 1.2.12, 1.4.3 и 1.4.9 из [5].

2.3 Равновесие тела под действием плоской системы сил

Для произвольной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия.

Первая форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Уравнение моментов составляют относительно произвольной точки. Лучше всего брать точку, которую пересекает наибольшее количество линий действия неизвестных сил.

Вторая форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0.$$

При использовании второй формы уравнений равновесия необходимо, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB.

Третья форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = 0.$$

При использовании третьей формы уравнений равновесия необходимо, чтобы точки A, B, C не лежали на одной прямой.

Задача 4. Определить реакции опор, если $F = 10$ кН, q = 2 кН/м, M = 3 кН·м (рисунок 5).

Решение

Рассмотрим равновесие балки *AB* под действием силы *F*, момента *M*, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей Q = 4q = 8 кН, которая приложена в середине участка *BD*.

Составим три уравнения равновесия по первой форме:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + F \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A - F \cdot \sin 60° - Q + R_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -6 \cdot F \cdot \sin 60° - M - 10 \cdot Q + 12 \cdot R_B = 0.$$

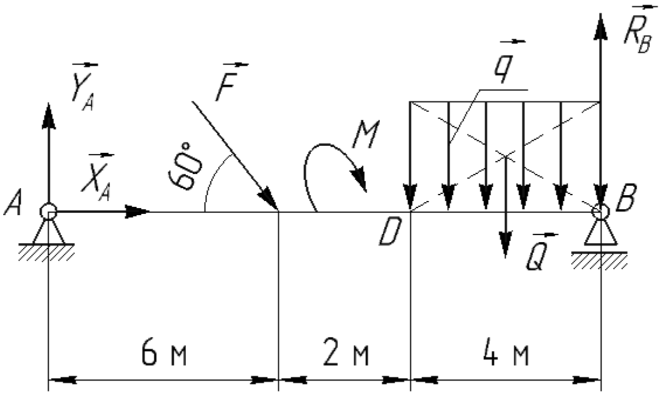


Рисунок 5

Из первого уравнения находим $X_A = -F \cdot \cos 60° = -10 \cdot 0{,}5 = -5$ кН, из третьего

$$R_B = \frac{6 \cdot F \cdot \sin 60° + M + 10Q}{12} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 10 \cdot 8}{12} = 11{,}25 \text{ кН},$$

из второго

$$Y_A = F \cdot \sin 60° + Q - R_B = 10\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11{,}25 = 5{,}41 \text{ кН}.$$

Ответ: X_A= – 5 кН, Y_A = 5,41 кН, R_B =11,25 кН. Знак «минус» показывает, что направление X_A противоположно направлению, указанному на рисунке 5.

Решить задачи 2.4.5, 2.4.6, 2.4.8, 2.4.10, 2.4.17 и 2.4.27 из [5].

2.4 Равновесие системы тел

Инженерные конструкции часто представляют собой системы тел, соединенные друг с другом какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются внутренними в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с другими телами, в нее не входящими. Соответственно, силы взаимодействия между телами системы являются внутренними, а силы, действующие на рассматриваемую систему тел со стороны других тел, – внешними.

В случае рассмотрения равновесия системы в целом внутренние силы взаимодействия между телами не учитываются на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия.

Задача 5. Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки, если M = 8 кН/м, q = 2 кН/м, P = 6 кН (рисунок 6).

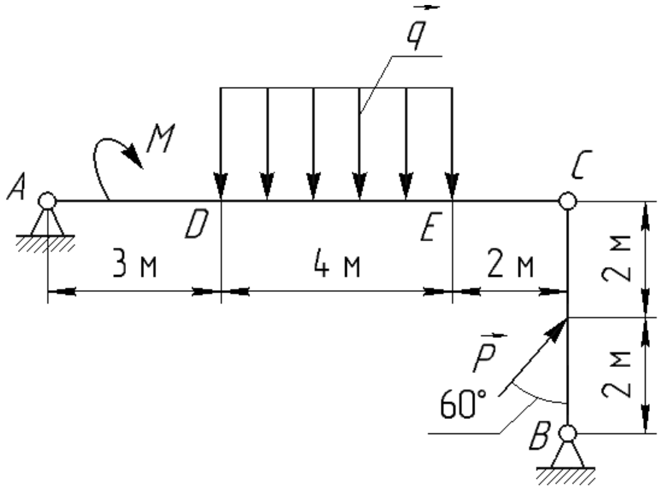


Рисунок 6

Решение

Расчленим составную балку ACB, соединенных шарниром C, и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q и реакций $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, шарнирно-неподвижной опоры A и реакций $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ шарнира C (рисунок 7).

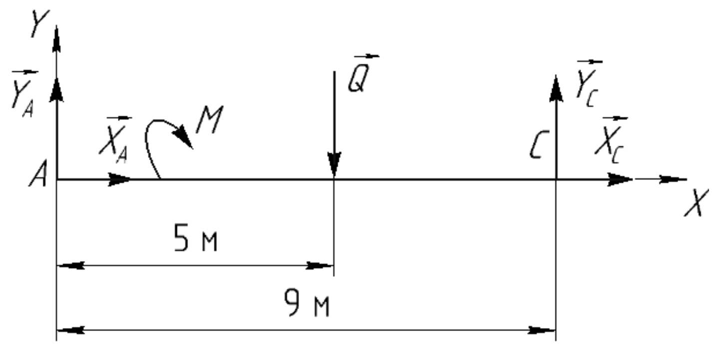


Рисунок 7

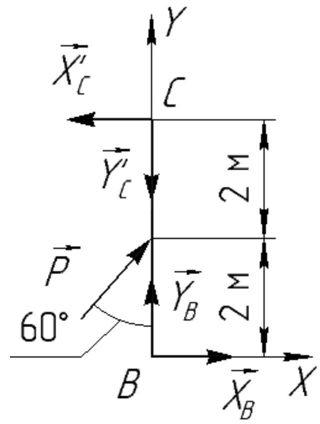


Рисунок 8

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 4q = 8$ кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рисунке 7.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + X_C = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A + Y_C - Q = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -M - Q \cdot 5 + Y_C \cdot 9 = 0. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\vec{P}$, реакции $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ шарнирно-неподвижной опоры B и реакции $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ шарнира C (рисунок 8). На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X'_C, \quad Y_C = Y'_C;$$

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C, \quad \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C.$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_B - X'_C + P \cdot \cos 30° = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = -Y'_C + P \cdot \sin 30° + Y_B = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = P \cdot 2\cos 30° + X_B \cdot 4 = 0. \tag{6}$$

Находим из уравнения (6)

$$X_B = \frac{-P \cdot 2\cos 30°}{4} = \frac{-6 \cdot 2\cos 30°}{4} = -2{,}6 \text{ кН},$$

из (4)

$$X'_C = X_B + P \cdot \cos 30° = -2{,}6 + 6\cos 30° = 2{,}6 \text{ кН},$$

из (3)

$$Y_C = \frac{M + Q \cdot 5}{9} = \frac{8 + 8 \cdot 5}{9} = 5{,}33 \text{ кН},$$

из (5)

$$Y_B = -P \cdot \sin 30° + Y'_C = -6\sin 30° + 5{,}33 = 2{,}33 \text{ кН},$$

из (2)

$$Y_A = -Y_C + Q = -5{,}33 + 8 = 2{,}67 \text{ кН},$$

из (1)

$$X_A = -X_C = -2{,}6 \text{кН}.$$

Ответ: X_A = – 2,6 кН, Y_A = 2,67 кН, $X_в$ = – 2,6 кН, $Y_в$ = 2,33 кН, X_c = 2,6 кН, Y_c = 5,33 кН. Знак «минус» показывает, что реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{X}_A$ направлены противоположны направлению, указанному на рисунках 7 и 8.

Решить задачи 3.3.4, 3.3.7, 3.3.8 и 3.3.9 из [5].

2.5 Расчет плоских ферм

Фермой называется геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из «невесомых» стержней, соединенных между собой шарнирами.

Места соединения стержней фермы называются узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней пренебрегают. Стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие.

Зависимость между числом стержней S и числом узлов n геометрически неизменяемой фермы определяется следующим выражением:

$$S = 2n - 3,$$

где S – число стержней;

n – число узлов.

Расчет ферм включает в себя определение опорных реакций и усилий в ее стержнях. Опорные реакции фермы находят обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело.

Определение усилий в стержнях фермы можно выполнять способом вырезания узлов и способом сечений (способ Риттера).

Задача 6. Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если P_1 = 20 Н, P_2 = 40 Н, α = 30°, a = 4 м (рисунок 9).

Решение

Рассмотрим равновесие фермы, считая ее абсолютно твердым телом. Отбросим связи и заменим их реакциями связей.

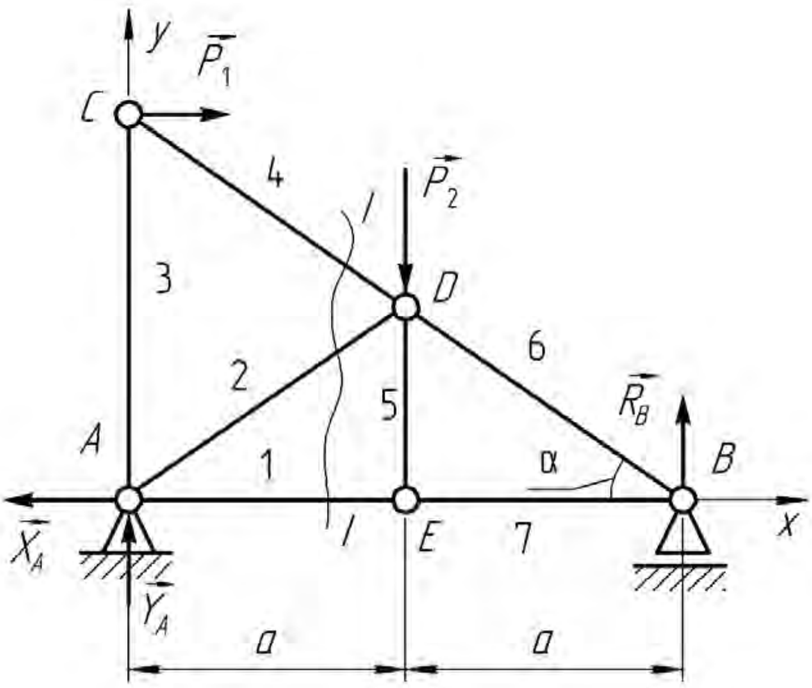


Рисунок 9

На опоре A имеются две составляющие: $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, на опоре B – одна составляющая $\vec{R}_B$. Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия и найдем реакции связей:

$$\sum F_{iX} = -X_A + P_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = Y_A + R_B - P_2 = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot 2a \cdot \text{tg}\alpha - P_2 \cdot a + R_B \cdot 2a = 0.$$

Находим из первого уравнения

$$X_A = P_1 = 20 \text{ Н},$$

из третьего

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 2a \cdot \text{tg}\alpha + P_2 \cdot a}{2a} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 4\,\text{tg}\,30° + 40 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 31{,}55 \text{ Н},$$

из второго

$$Y_A = -R_B + P_2 = -31{,}55 + 40 = 8{,}45 \text{ Н}.$$

Определение усилий в стержнях начинаем с узла B (рисунок 10), где число неизвестных равно двум. Составим для узла B два уравнения равновесия в проекции на оси X и Y. Направление осей показано на рисунке 9.

$$\sum F_{iX} = -S_7 - S_6 \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iY} = R_B + S_6 \cdot \sin\alpha = 0.$$

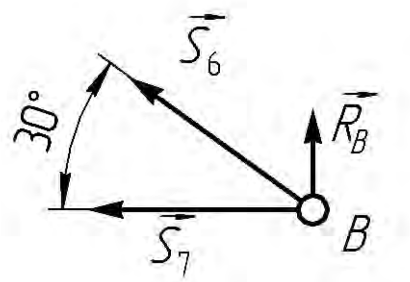


Рисунок 10

Находим из второго уравнения

$$S_6 = \frac{-R_B}{\sin\alpha} = \frac{-31{,}55}{\sin 30°} = -63{,}1 \text{ Н},$$

из первого

$$S_7 = -S_6 \cdot \cos\alpha = 63{,}1\cos 30° = 54{,}65 \text{ Н}.$$

Рассмотрим узел E (рисунок 11). Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = S_7' - S_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = S_5 = 0.$$

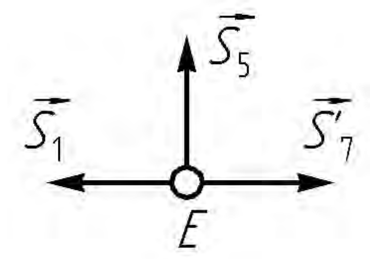


Рисунок 11

Из первого уравнения находим

$$S_1 = S_7' = 54,65 \text{ Н.}$$

Рассмотрим узел C (рисунок 12). Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = S_4 \cdot \cos\alpha + P_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = -S_3 - S_4 \cdot \sin\alpha = 0.$$

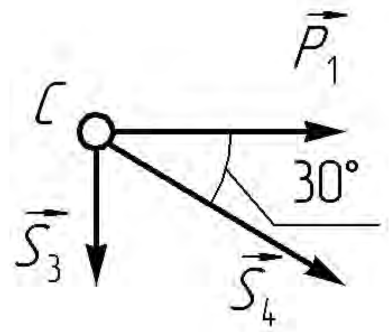


Рисунок 12

Находим из первого уравнения

$$S_4 = \frac{-P_1}{\cos\alpha} = \frac{-20}{\cos 30°} = -23,09 \text{ Н,}$$

из второго

$$S_3 = -S_4 \cdot \sin\alpha = 23,09 \sin 30° = 11,55 \text{ Н.}$$

Рассмотрим узел A (рисунок 13). Составим одно уравнение равновесия:

$$\sum F_{iY} = Y_A + S_3 + S_2 \cdot \sin\alpha = 0.$$

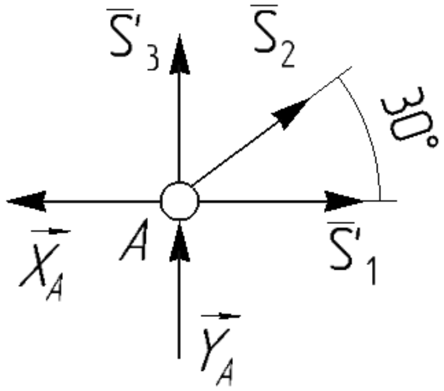


Рисунок 13

Находим

$$S_2 = \frac{-Y_A - S_3}{\sin\alpha} = \frac{-8,45 - 11,55}{\sin 30°} = -40 \text{ Н.}$$

Результаты вычислений усилий в стержнях плоской фермы сведем в таблицу 2.

Таблица 2

Параметры	Номер стержня						
	1	2	3	4	5	6	7
Знак усилия	+	–	+	–		–	+
Усилие, Н	54,56	40	11,55	23,1	0	63,1	54,65

Знак «минус» показывает, что стержни 2, 4 и 6 сжаты, а не растянуты, как предполагалось.

Задача 7. Для фермы, рассмотренной в задаче 6, необходимо найти усилия в стержнях *1*, *2*, *4* способом сечений.

Решение

Проведем сечение *I–I* через стержни *1*, *2* и *4* и рассмотрим равновесие фермы слева от сечения (рисунок 14). Точки *A*, *B* и *D* являются точками Риттера. Составим уравнение моментов относительно точки *D*:

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = -X_A \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha - P_1 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha - Y_A \cdot a + S_1 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha = 0\,.$$

Находим

$$S_1 = \frac{X_A \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha + P_1 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha + Y_A \cdot a}{a \cdot \mathrm{tg}\alpha} = \frac{20 \cdot 4\mathrm{tg}30° + 20 \cdot 4\mathrm{tg}30° + 8,45 \cdot 4}{4\mathrm{tg}30°} = 54,64 \text{ Н.}$$

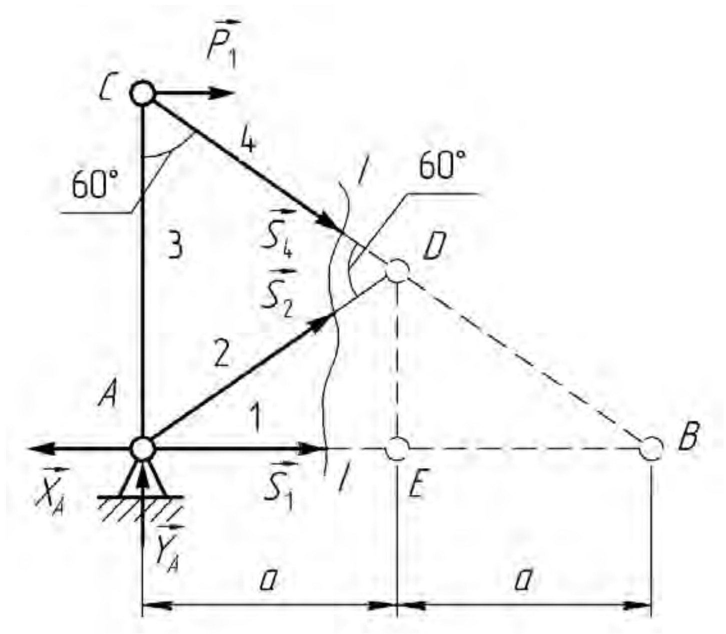


Рисунок 14

Составим уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot AC - S_4 \cdot AC \cdot \cos\alpha = 0 .$$

Находим

$$S_4 = \frac{-P_1 \cdot AC}{AC \cdot \cos\alpha} = \frac{-20}{\cos 30°} = -23{,}1 \text{ Н.}$$

Для определения S_2 составим уравнение моментов относительно точки B:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot 2 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha - Y_A \cdot 2 \cdot a - S_2 \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot a = 0 .$$

Находим

$$S_2 = \frac{-P_1 \cdot 2 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha - Y_A \cdot 2 \cdot a}{2 \cdot a \cdot \sin\alpha} = \frac{-20 \cdot \mathrm{tg}\alpha - 8{,}45}{\sin 30°} = -40 \text{ Н.}$$

Результаты вычислений усилий в стержнях методом Риттера сведем в таблицу 3.

Таблица 3

Параметры	Номер стержня		
	1	2	4
Знак усилия	+	–	–
Усилие, Н	54,56	40	23,1

Результаты, полученные способами вырезания узлов и Риттера, совпадают.

Решить задачи 4.2.8, 4.2.10, 4.3.5, 4.3.9 и 4.3.14 из [5].

2.6 Контрольная работа. Плоская система сил

2.7 Условия равновесия при наличии сил трения

Трение покоя. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в местах их соприкосновения возникает сила сцепления (сила трения покоя), препятствующая движению тел друг относительно друга. При увеличении сдвигающей силы тело какое-то время будет находиться в покое. При превышении определенного (предельного) значения сдвигающей силы тело выйдет из состояния покоя и начнет двигаться.

Трение скольжения. При скольжении тела по поверхности другого также возникает сила, препятствующая этому движению, – сила трения скольжения.

Законы трения

1 Сила трения скольжения направлена противоположно возможному движению тела (рисунок 15).

2 Сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

3 Максимальная сила трения пропорциональна нормальному давлению. Под нормальным давлением понимают полное давление на всю площадь соприкосновения трущихся поверхностей:

$$F_{\max} = f \cdot N\,.$$

4 Коэффициент трения скольжения f зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.

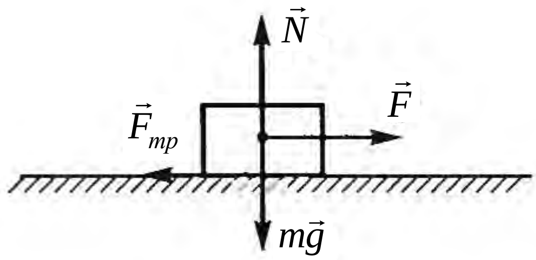


Рисунок 15

Коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения покоя. В технических расчетах принимают, что эти коэффициенты равны. С увеличением скорости движения для большинства материалов коэффициент трения скольжения уменьшается. Данный коэффициент определяют экспериментально.

Трение качения. Сопротивление качению одного тела по поверхности другого называется трением качения. Трение качения возникает в результате деформации катящегося тела и опорной поверхности, которые в действительности не являются абсолютно твердыми. Поэтому контакт между телом и поверхностью происходит по некоторой площадке (рисунок 16, *а*). Нормальная реакция смещается относительно центра катка в сторону его движения на некоторую величину $f_к$, которая при выходе тела из состояния равновесия достигает максимума и называется коэффициентом трения качения (рисунок 16, *б*). Коэффициент трения качения имеет размерность длины в отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения. Обычно нормальную реакцию проводят через центр катка, добавляя при этом к телу пару сил с моментом (рисунок 16, *в*), который называют моментом сопротивления качению:

$$M_T = f_K \cdot N\,.$$

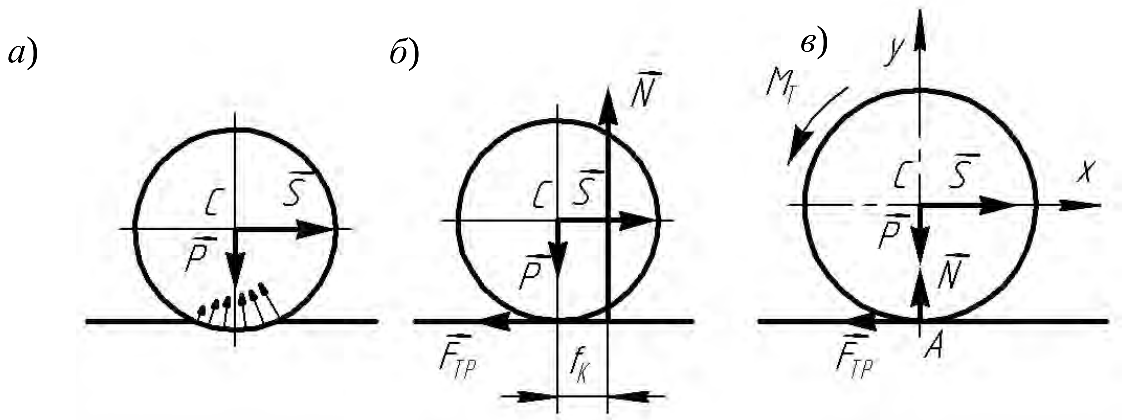


Рисунок 16

Задача 8. На наклонной поверхности находится цилиндр радиусом r (рисунок 17). Определить, при каких значениях угла наклона плоскости к горизонту α цилиндр будет находиться в равновесии, если f – коэффициент трения скольжения, $f_к$ – коэффициент трения качения.

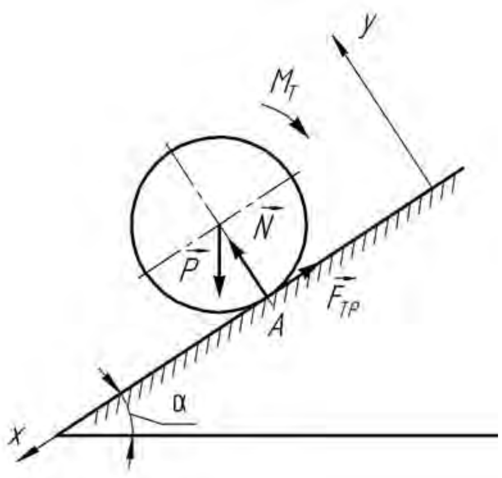


Рисунок 17

Решение

Изобразим действующие на цилиндр силы. Силу трения скольжения направим вверх по наклонной поверхности, момент трения качения – по часовой стрелке, одну из осей направим по наклонной поверхности (см. рисунок 17). Составим три уравнения равновесия для уравновешенной плоской произвольной системы сил:

$$\sum F_{iX} = -F_{TP} + P \cdot \sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iY} = N - P \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = M_T - P \cdot \sin\alpha \cdot r = 0.$$

Находим из первого уравнения

$$F_{TP} = P \cdot \sin\alpha,$$

из второго

$$N = P \cdot \cos\alpha,$$

из третьего

$$M_T = P \cdot \sin\alpha \cdot r.$$

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$F_{TP} \le f \cdot N; \qquad M_T = f_K \cdot N.$$

С учетом полученных зависимостей

$$P \cdot \sin\alpha \le f \cdot P \cdot \cos\alpha \to \mathrm{tg}\alpha \le f; \qquad P \cdot \sin\alpha \cdot r \le f_K \cdot P \cdot \cos\alpha \to \mathrm{tg}\alpha \le \frac{f_K}{r}.$$

Для равновесия цилиндра на наклонной поверхности необходимо, чтобы оба условия выполнялись одновременно.

2.8 Произвольная пространственная система сил

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на три непараллельные оси и сумма моментов всех сил системы относительно трех непараллельных осей была равна нулю.

Условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $\vec{R}_Г = 0$ и $\vec{M}_{ГО} = 0$. Но данные векторы равны нулю только тогда, когда их проекции на оси координат равны нулю:

$$R_x = R_y = R_z = 0 \quad \text{и} \quad M_x = M_y = M_z = 0.$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum F_{iz} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_{ix} = 0; \\ \sum M_{iy} = 0; \\ \sum M_{iz} = 0. \end{cases}$$

При равновесии системы сил, произвольно расположенных в пространстве, суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей равны нулю.

Задача 9. Горизонтальная однородная квадратная плита *ABCD* весом *G* = 500 Н подвешена в точках *A*, *D*, *E* к вертикальным стержням *1*, *2*, *3*. Определить усилие в стержне *1*, если *AD* = *2·AE* (рисунок 18).

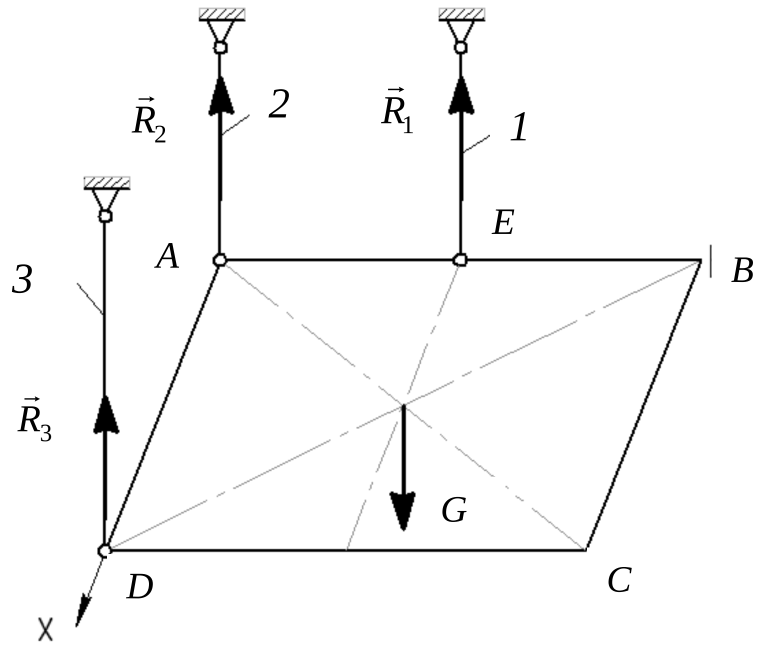


Рисунок 18

Решение

Покажем усилия в стержнях $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$. Запишем уравнение момента относительно оси *Ax*:

$$R_1 \cdot AE - G \cdot AE = 0;\ R_1 \cdot AE = G \cdot AE;\ R_1 = G = 500\ \text{Н}.$$

Ответ: R_1 = 500 Н.

Решить задачи 8.14, 8.15, 8.16, 8.24 и 8.28 из [3]; 5.6.3, 5.6.7 и 5.6.12 из [5].

2.9 Контрольная работа. Пространственная система сил

3 Кинематика

3.1 Кинематика точки

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил. Под движением в механике понимается изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Существуют три основных способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения заключается в определении положения точки в пространстве радиус-вектором, который является векторной функцией времени, относительно выбранной системы отсчета.

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки в виде известных, непрерывных, дважды дифференцируемых функций времени.

Естественный способ задания движения считается известным, если заданы траектория движения точки, начало отсчета, положительное и отрицательное направления движения, закон движения точки по траектории $S = S(t)$.

Закон движения $S = S(t)$ также называют дуговой координатой, которую отсчитывают от начального положения. Дуговую координату не следует смешивать с длиной пути, пройденного точкой, т. к. за начало отсчета может быть выбрана любая точка или движение может быть колебательным.

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей принимают естественные (оси естественного трехгранника): $\vec{\tau}$ – касательная, $\vec{n}$ – нормаль, $\vec{b}$ – бинормаль. Данные оси связывают непосредственно с движущейся точкой.

Задача 1. Определить ускорение точки через 2 с после начала движения из состояния покоя, если движение задано уравнениями $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.

Решение

Определим положение точки в момент времени $t = 2$ с:

$$x_1 = 3t^2 = 3\cdot 2^2 = 12 \text{ м}, \quad y_1 = 4t^2 = 4\cdot 2^2 = 16 \text{ м}.$$

Находим проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$V_X = \dot{x} = 6t; \quad V_{X1} = 12 \text{ м/с}; \quad V_Y = \dot{y} = 8t; \quad V_{Y1} = 16 \text{ м/с};$$

$$V_1 = \sqrt{V_{X1}^2 + V_{Y1}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ м/с}.$$

$$a_{X1} = \ddot{x} = 6 \text{ м/с}^2; \quad a_{Y1} = \ddot{y} = 8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_1 = \sqrt{a_{X1}^2 + a_{Y1}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ м/с}^2,$$

или

$$a_{\tau 1}=\frac{|V_{X1}\cdot a_{X1}+V_{Y1}\cdot a_{Y1}|}{V_1}=\frac{12\cdot 6+16\cdot 8}{20}=10\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{n1}=\frac{|V_{X1}\cdot a_{Y1}-V_{Y1}\cdot a_{X1}|}{V_1}=\frac{|12\cdot 8-16\cdot 6|}{20}=0\ \text{м/с}^2.$$

$$a_1=\sqrt{a_{\tau 1}^2+a_{n1}^2}=\sqrt{10^2+0^2}=10\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a_{\tau 1}=10$ м/с^2, $a_{n1}=0$ м/с^2, $a_1=10$ м/с^2.

Решить задачи 7.3.6, 7.4.9, 7.4.20, 7.5.8, 7.5.10, 7.6.9, 7.7.17 и 7.8.8 из [5].

3.2 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Точки твердого тела, совершающего поступательное движение, перемещаются как по прямолинейным, так и по криволинейным траекториям.

Для задания поступательного движения тела в декартовой системе координат достаточно записать $x_c = f_1(t)$, $y_c = f_2(t)$, $z_c = f_3(t)$. Эти выражения будут законом поступательного движения.

Основные свойства поступательного движения твердого тела определяются теоремой: при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Скорость и ускорение твердого тела находят по формулам, применяемым в кинематике точки.

Задача 2. Точка A шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ движется по закону $S=0{,}5\pi t^2$ (рисунок 19). Определить скорость и ускорение точки C стержня AB, если $AC = BC$, $O_1B = OA = 0{,}4$ м, $t = 2$ с.

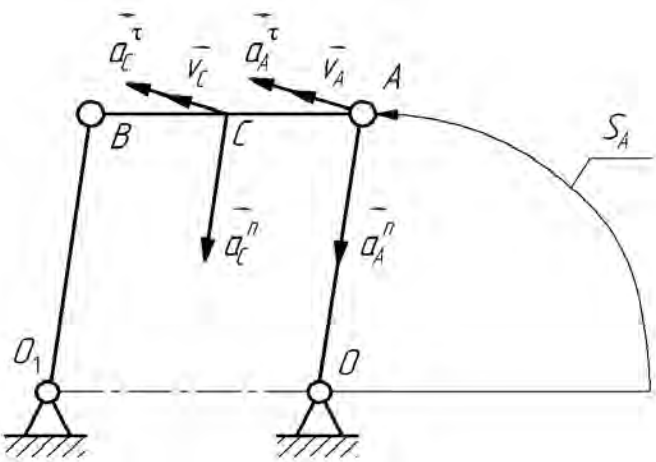


Рисунок 19

Решение

Стержень AB совершает поступательное движение, т. к. в любой момент времени прямая AB остается параллельной самой себе. Следовательно, скорости и ускорения точек A, B, C будут одинаковы:

$$V_B = V_C = V_A = \dot{S} = \pi t;$$

$$a_B^\tau = a_C^\tau = a_A^\tau = \dot{V}_A = \pi = 3{,}14 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B^n = a_C^n = a_A^n = \frac{V_A^2}{AO} = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = a_C = a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $V_B = V_C = 2\pi$ м/с; $a_B = a_C = 98{,}65$ м/с^2.

Решить задачи 8.1.4, 8.1.5, 8.1.8 и 8.1.14 из [5].

3.3 Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через данные неподвижные точки, называется осью вращения. Точки тела, не принадлежащие оси вращения, двигаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени. Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Полученный знак при дифференцировании угла поворота по времени определяет направление вращения. Если $\omega > 0$, то вращение происходит по направлению угла поворота φ, если $\omega < 0$, то вращение – против направления угла поворота φ.

Угловое ускорение характеризует быстроту и направление изменения угловой скорости в данный момент времени. Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Полученный знак производной определяет направление углового ускорения. Если $\varepsilon > 0$, то угловое ускорение направлено по углу поворота φ, если $\varepsilon < 0$, то угловое ускорение – против направления угла поворота φ.

Задача 3. Груз *1* опускается по закону $x = 2,4t^2 - 4t$. Определить угловую скорость, угловое ускорение барабана, а также скорость и ускорение точки *M* в момент времени *t* = 1 с, если *R* = 3*r* = 0,6 м (рисунок 20).

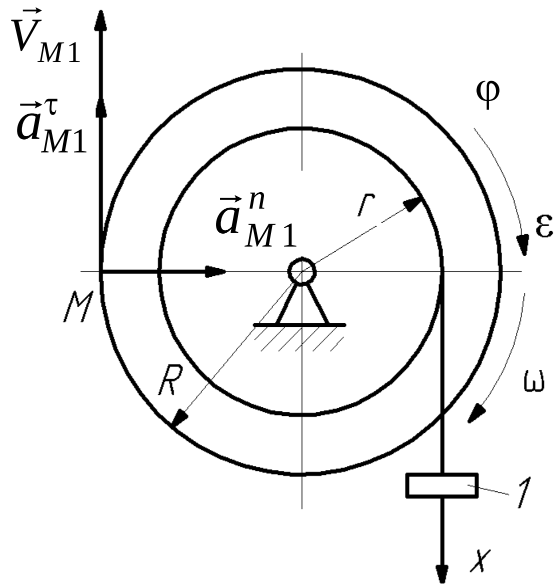


Рисунок 20

Решение

Определим угол поворота барабана:

$$\varphi = \frac{x}{r} = \frac{2,4t^2 - 4t}{r} = \frac{2,4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1}{r} = -8 \text{ рад}.$$

Знак «минус» показывает, что направление изменения угла поворота φ происходит по ходу часовой стрелки.

Определим скорость груза:

$$V = \dot{x} = 4,8t - 4.$$

Находим угловую скорость и угловое ускорение в момент времени *t* = 1 с:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{4,8t - 4}{0,2} = 24t - 20 = 24 \cdot 1 - 20 = 4 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 24 \text{ рад/с}^2 = \text{const}.$$

Скорость и ускорение точки M в момент времени t = 1 с

$$V_{M1} = \omega \cdot R = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное (вращательное) ускорение точки M

$$a_{M1}^{\tau} = \varepsilon \cdot R = 24 \cdot 0{,}6 = 14{,}4 \text{ м/с}^2 = \text{const}.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение точки M

$$a_{M1}^{n} = \omega^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0{,}6 = 9{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки M

$$a_{M1} = \sqrt{(a_{M1}^{\tau})^2 + (a_{M1}^{n})^2} = \sqrt{14{,}4^2 + 9{,}6^2} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega = 4$ рад/с, $\varepsilon = 24$ рад/с^2, V_{M1} = 2,4 м/с, a_{M1} = 17,31 м/с^2.

Решить задачи 8.2.2, 8.2.8, 8.3.3, 8.3.13, 8.3.15 и 8.3.16 из [5].

3.4 Контрольная работа. Кинематика точки. Поступательное и вращательное движение твердого тела

3.5 Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей точек плоской фигуры

Плоским или плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Уравнения плоского движения твердого тела. Для задания движения сечения твердого тела достаточно описать движение какого-либо отрезка CA, принадлежащего этому сечению. Положение отрезка CA определяется координатами точки C, выбранной за полюс, и углом поворота отрезка, который отсчитывается от выбранного начального положения. Тогда уравнениями плоского движения твердого тела будут следующие:

$$X_C = f_1(t); \quad Y_C = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

Первые два уравнения описывают поступательное движение плоской фигуры, определяемое движением полюса C. Поступательное движение плоской фигуры зависит от выбора полюса. Третье уравнение описывает вращательное движение плоской фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющие эти точки, равны между собой. При этом проекции должны иметь одинаковый знак.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей в точках их приложения.

Если известны МЦС и угловая скорость вращения, то вектор скорости любой точки будет перпендикулярен отрезку, соединяющему МЦС с данной точкой, и направлен в соответствии с угловой скоростью. Модуль скорости равен произведению угловой скорости на расстояние от точки до МЦС.

Задача 4. Колесо радиусом R = 0,4 м катится по прямолинейному горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω = 2 рад/с (рисунок 21). Определить скорость точки M обода колеса.

Решение

Определим скорость центра колеса:

$$V_C = \omega \cdot R = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

За полюс примем точку C, скорость которой найдена. Тогда

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}.$$

Вращательная скорость мочки M относительно полюса C

$$V_{MC} = \omega \cdot MC = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{V}_{MC}$ перпендикулярен отрезку MC и направлен в соответствии с угловой скоростью. Поэтому вектор $\vec{V}_{MC}$ относительно полюса C должен показывать направление угловой скорости (см. рисунок 21).

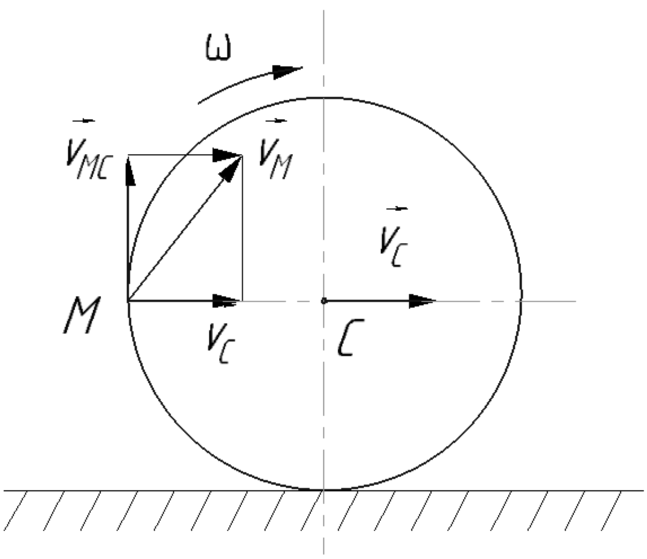


Рисунок 21

Так как $\vec{V}_{MC} \perp \vec{V}_C$, то

$$V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,8^2} = 1,13 \text{ м/с}.$$

Ответ: $V_M = 1,13$ м/с.

Задача 5. В положении механизма, схема которого приведена на рисунке 22, определить угловую скорость шатуна *AB* и скорость точки *B*, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, *OA* = 0,2 м, *AB* = 1,6 м, *BC* = 0,8 м, *h* = 0,8 м.

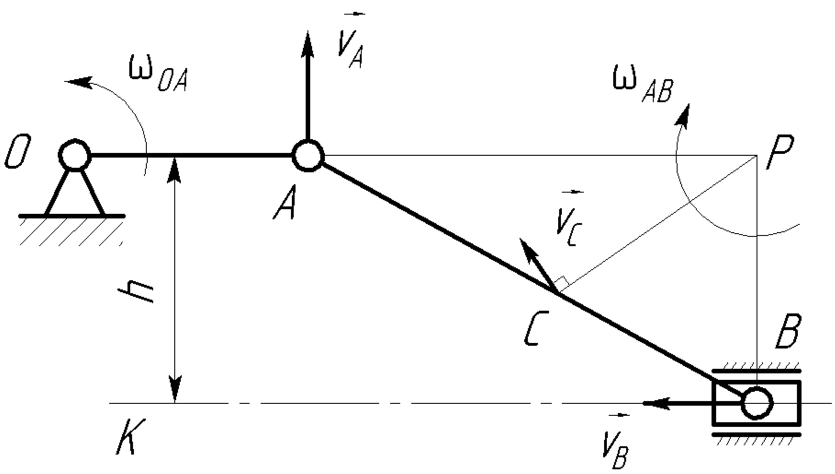


Рисунок 22

Решение

Найдем скорость точки *A*:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}; \qquad \vec{V}_A \perp OA.$$

Скорость ползуна *B* направлена горизонтально по прямой *KB*.

Мгновенный центр скоростей шатуна *AB* находится в точке *P* пересечения перпендикуляров, восстановленных к направлениям векторов скоростей точек *A* и *B*.

Угловая скорость шатуна *AB*

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

Определим величины *AP*, *BP* и *CP* с учетом того, что $BP = h = 0,8$ м:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = 1,39 \text{ м}.$$

$$\cos\angle PBC = \frac{h}{AB} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5 \to \angle PBC = 60°.$$

Треугольник ΔPBC равносторонний, следовательно,

$$CP = BP = BC = 0,8 \text{ м}.$$

Находим угловую скорость:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0,4}{1,39} = 0,29 \text{ рад/с.}$$

Определяем скорости точек B и C:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с;}$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с.}$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определяется по направлению вращения вектора $\vec{V}_A$ скорости точки A относительно мгновенного центра скоростей P. Угловая скорость шатуна AB направлена по часовой стрелке. Скорости точек B и C должны показывать такое же направление. Для построения вектора $\vec{V}_C$ восстанавливаем перпендикуляр к отрезку CP и направляем вектор $\vec{V}_C$ в соответствии с направлением ω_{AB}.

Ответ: $\omega_{AB} = 0,29$ рад/с, $V_B = V_C = 0,23$ м/с.

Решить задачи 9.2.2, 9.2.4, 9.2.6, 9.4.10, 9.5.7 и 9.5.10 из [5].

3.6 Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг данного полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC} \quad \text{или} \quad \vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{MC} + \vec{a}^{n}_{MC}.$$

Задача 6. Используя условие задачи 5, определить ускорение точки B.

Решение

За полюс выберем точку A, т. к. ускорение этой точки можно найти как

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{AO} + \vec{a}^{n}_{AO}.$$

Так как кривошип OA вращается равномерно, $\omega = \text{const} \to \varepsilon = \dot{\omega} = 0$, получим

$$a^n_{AO} = \omega^2_{OA} \cdot OA = 2^2 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}^{\tau}_{AO} = \varepsilon \cdot AO = 0.$$

Вектор $\vec{a}^n_{AO}$ направлен по AO от точки A к точке O (рисунок 23).

Находим ускорение точки B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}_{AO} + \vec{a}^{n}_{AO} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}.$$

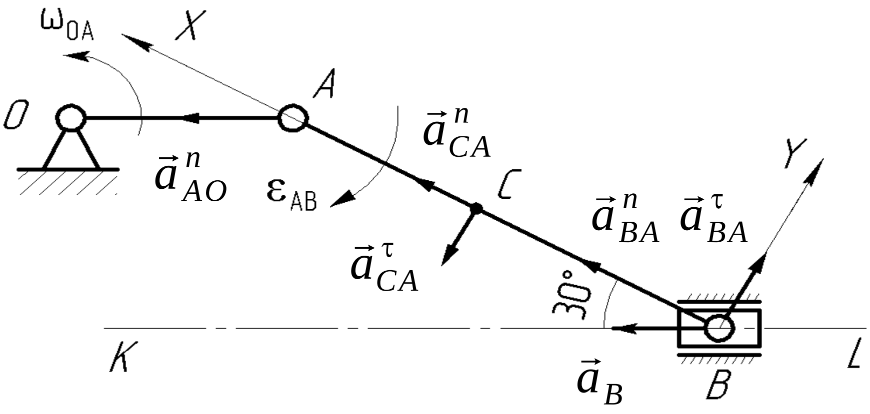


Рисунок 23

Находим $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{n}$:

$$a_A^{\tau} = |\varepsilon_{AB}| \cdot AB.$$

Так как ε_{AB} неизвестно, то зададим направление вектора $\vec{a}_{BA}^{\tau}$, учитывая, что $\vec{a}_{BA}^{\tau} \perp BA$.

$$a_{BA}^{n} = \omega_{AB}^{2} \cdot AB = 0{,}29^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}135 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^{n}$ направлен по BA от точки B к полюсу A. Проецируем выражение для определения ускорения точки B на выбранные оси (X, Y):

$$\text{ось } X\text{: } a_B \cdot \cos 30° = a_{AO}^{n} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{n};$$

$$\text{ось } Y\text{: } -a_B \cdot \cos 60° = a_{BA}^{\tau} - a_{AO}^{n} \cdot \cos 60°.$$

Из предпоследнего равенства находим

$$a_B = \frac{a_{AO}^{n} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{n}}{\cos 30°} = \frac{0{,}8\cos 30° + 0{,}135}{\cos 30°} = 0{,}96 \text{ м/с}^2,$$

из последнего

$$a_{BA}^{\tau} = a_{AO}^{n} \cdot \cos 60° - a_B \cdot \cos 60° = 0{,}8\cos 60° - 0{,}96\cos 60° = -0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ направлен в противоположную сторону, выбранную на рисунке 23.

Определим угловое ускорение шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^{\tau}|}{AB} = \frac{0{,}08}{1{,}6} = 0{,}05 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{AB} будет по часовой стрелке.

Ответ: a_B = 0,96 м/с^2.

Решить задачи 9.7.16, 9.7.17, 9.7.20 и 9.7.21 из [5].

3.7 Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей

Сложным движением называют такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях (рисунок 24).

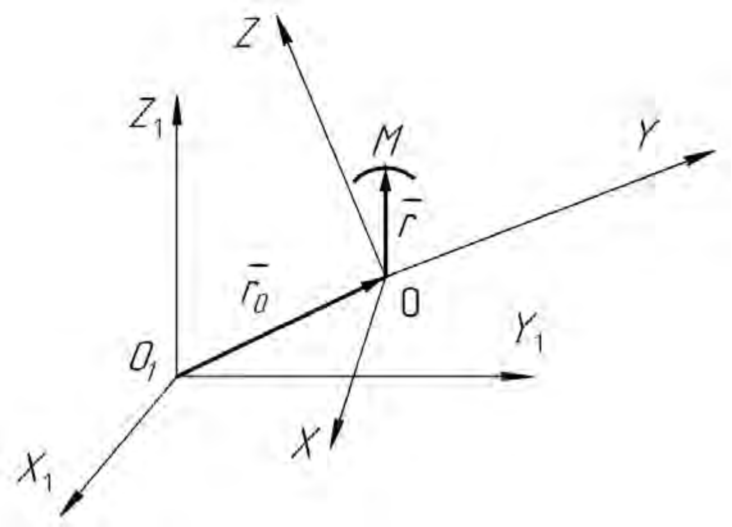


Рисунок 24

Абсолютным движением называют движение точки *M* по отношению к основной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, которую условно принимают за неподвижную.

Относительным движением называют движение точки *M* по отношению к подвижной системе отсчета *OXYZ*.

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета *OXYZ* относительно основной (неподвижной) системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$.

Абсолютной скоростью называют скорость точки *M* относительно основной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и обозначают $\vec{V}_a$.

Относительной скоростью называют скорость точки *M* относительно подвижной системы координат *OXYZ* и обозначают $\vec{V}_r$.

Переносной скоростью точки *M* называют скорость движения подвижной системы координат вместе с неизменно связанными с ней точками и обозначают $\vec{V}_e$.

Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Модуль абсолютной скорости в общем случае находят проецированием последнего равенства на оси координат, т. к. угол между векторами относительной и переносной скоростей может быть различный:

$$V_a = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2},$$

где $V_X = V_{ex} + V_{rx}$; $V_Y = V_{ey} + V_{ry}$.

Задача 7. Диск радиусом R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$ рад. По ободу движется точка M по закону $OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3)$ (рисунок 25). Определить абсолютную скорость точки в момент времени t_1 = 1 с.

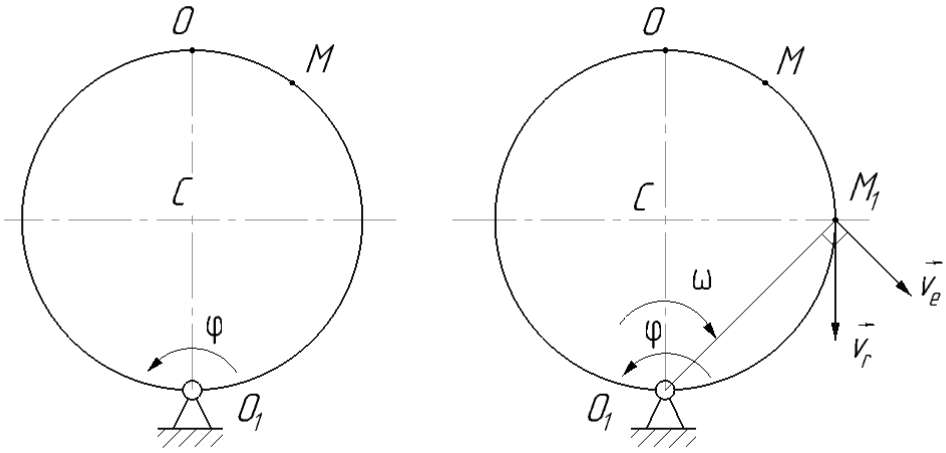


Рисунок 25

Решение

Точка M совершает сложное движение. Движение точки M по ободу диска будет относительным, а вращение диска вокруг точки O_1 – переносным.

Определим положение точки M на траектории относительного движения при t_1 = 1 с:

$$OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3) = \frac{\pi \cdot R}{2}.$$

Находим угол O_1CM_1:

$$\angle O_1CM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Находим скорость относительного движения:

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi}{2} R \cdot (4t - 3t^2).$$

При t_1 = 1 с получим

$$V_{r1} = \dot{S} = \frac{50\pi}{2} \cdot (4 - 3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с.}$$

Так как V_r > 0, то вектор $\vec{V}_r$ направлен по касательной к окружности в точке M_1 в сторону увеличения дуги OM (см. рисунок 25).

Находим скорость переносного движения:

$$V_e = |\omega| \cdot h,$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При t_1 = 1 с значение $\omega = -3$ рад/с. Знак «минус» показывает, что направление ω противоположно направлению положительного отсчета угла φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70,5 \text{ см},$$

то

$$V_{e1} = |-3| \cdot 70,5 = 211,5 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{V}_{e1}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1O_1}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью (см. рисунок 25).

Так как $\angle \vec{V}_{e1}, \vec{V}_{r1} = 45°$, то

$$V_{a1} = \sqrt{V_{e1}^2 + V_{r1}^2 + 2V_{r1} \cdot V_{e1} \cdot \cos 45°} = \sqrt{211,5^2 + 78,5^2 + 2 \cdot 211,5 \cdot 78,5 \cdot 0,71} = 272,89 \text{ см/с}.$$

Ответ: $V_{a1} = 272,89$ см/с.

3.8 Сложное движение точки. Теорема о сложении ускорений

Абсолютное ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_к,$$

где $\vec{a}_e$ – ускорение переносного движения;
$\vec{a}_r$ – ускорение относительного движения;
$\vec{a}_к$ – ускорение Кориолиса,

$$\vec{a}_к = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right).$$

Ускорение Кориолиса характеризует:

– изменение величины переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;

– изменение направления вектора относительной скорости вследствие вращательного переносного движения.

Направление ускорения Кориолиса определяют либо по правилу векторного произведения, либо по правилу Жуковского.

Правило Жуковского: проецируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, и поворачиваем эту проекцию в той же плоскости на угол 90° в сторону переносной угловой скорости.

Модуль ускорения Кориолиса

$$a_к = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\left(\vec{\omega}_e \,\hat{}\, \vec{V}_r\right).$$

Ускорение Кориолиса равно нулю, если:

– $\omega_e = 0$ – переносное движение является поступательным;

– $V_r = 0$ – относительная скорость в данный момент равна нулю;

– $\sin\left(\vec{\omega}_e \,\hat{}\, \vec{V}_r\right) = 0$ – вектор угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ параллелен вектору относительной скорости $\vec{V}_r$.

Модуль абсолютного ускорения точки можно найти через проекции на выбранные оси координат. Тогда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Задача 8. Используя условие задачи 7, определить абсолютное ускорение точки M (рисунок 26).

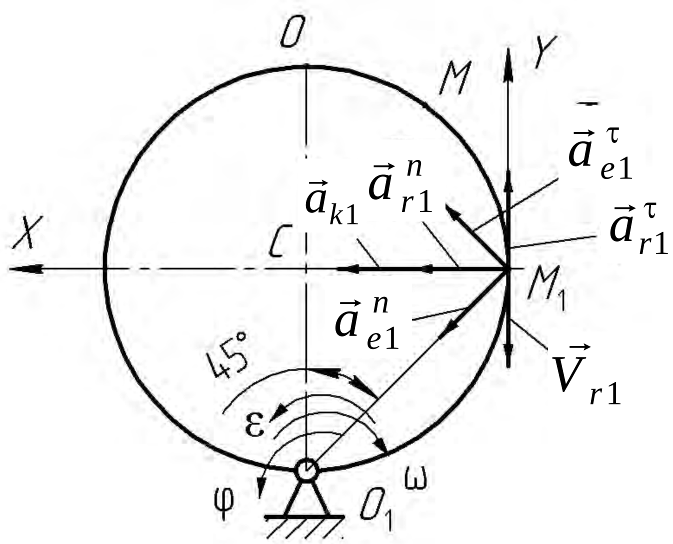


Рисунок 26

Решение

Рассмотрим переносное движение точки M. Нормальное (центростремительное) переносное ускорение

$$a_{e1}^n = \omega_e^2 \cdot h = 3^2 \cdot 70{,}5 = 634{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Тангенциальное (вращательное) переносное ускорение

$$a_{e1}^\tau = \varepsilon \cdot h = 6 \cdot 70{,}5 = 423 \text{ см/с}^2,$$

где $\varepsilon = \dot{\omega} = 18t - 12$; $\varepsilon = 6$ рад/с^2 при t_1 = 1 с.

Угловое ускорение направлено противоположно угловой скорости (см. рисунок 26), т. к. производная имеет другой знак. Вектор $\vec{a}_{e1}^{n}$ направлен по M_1O_1 к оси переносного вращения. Вектор $\vec{a}_{e1}^{\tau}$ перпендикулярен M_1O_1 и направлен в соответствии с угловым ускорением.

Относительное тангенциальное ускорение

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}R\cdot\left(4t - 3t^2\right)\right) = \frac{\pi}{2}R\cdot(4-6t).$$

При t_1 = 1 с значение $a_{r1}^{\tau} = -\pi R = -\pi\cdot 50 = -157$ см/с^2.

Нормальное относительное ускорение

$$a_{r1}^{n} = \frac{V_{r1}^2}{r} = \frac{25\pi^2}{50} = 123{,}25 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{r1}^{n}$ направлен по M_1C от точки M_1 к точке C. Вектор $\vec{a}_{r1}^{\tau}$ направлен противоположно вектору $\vec{V}_{r1}$, т. к. a_{r1}^{τ} меньше нуля.

Находим ускорение Кориолиса:

$$a_{к1} = 2\cdot 3\cdot 78{,}5\cdot\sin 90^\circ = 471 \text{ м/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_{к1}$ находим по правилу Жуковского. Так как вектор $\vec{V}_{r1}$ находится в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то повернем $\vec{V}_{r1}$ на 90° в направлении ω_e, т. е. по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{a}_{к1}$ будет направлен от M_1 к C.

Проецируем полученные ускорения на выбранные координатные оси:

$$a_x = a_{e1}^{\tau}\cdot\cos 45^\circ + a_{e1}^{n}\cdot\cos 45^\circ + a_{r1}^{n} + a_{к1} =$$

$$= 423\cdot\cos 45^\circ + 634{,}5\cdot\cos 45^\circ + 123{,}25 + 471 = 1341{,}9 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_{e1}^{\tau}\cdot\cos 45^\circ - a_{e1}^{n}\cdot\cos 45^\circ + a_{r1}^{\tau} =$$

$$= 423\cdot\cos 45^\circ - 634{,}5\cdot\cos 45^\circ + 157 = 7{,}47 \text{ см/с}^2.$$

Абсолютное ускорение точки M

$$a_1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1341{,}9^2 + 7{,}47^2} = 1341{,}92 \text{ см / с}^2.$$

Ответ: $V_{a1} = 272{,}89$ см/с, a_1 = 1341,92 см/с^2.

3.9 Контрольная работа. Сложное движение точки и плоское движение тела

Список литературы

1 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. А. Никифорова. – Москва: Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 427 с.: ил.

2 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. А. Никифорова. – Москва: Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 447 с.: ил.

3 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский. – Москва: Наука, 1986. – 448 с.: ил.

4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов / Под ред. А. А. Яблонского. – Москва: Высшая школа, 1985. – 367 с.: ил.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для втузов / О. Э. Кепе [и др.]; под ред. О. Э. Кепе. – Москва: Высшая школа, 1989. – 368 с.: ил.

6 **Добронравов, В. В.** Курс теоретической механики: учебник / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – Москва: Высшая школа, 1983. – 430 с.: ил.

7 **Игнатищев, Р. М.** Курс теоретической механики / Р. М. Игнатищев, П. Н. Громыко, С. Н. Хатетовский. – Могилев: МГТУ, 2002. – 359 с.

8 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика / В. Л. Цывильский. – Москва: Высшая школа, 2001. – 319 с.: ил.

9 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва: Наука, 1990. – Т. 1–3.

10 **Чигарев, А. В**. Курс теоретической механики: учебное пособие / А. В. Чигарев. – Москва: Новое знание; Минск: ЦУПР, 2010. – 399 с.

11 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2016. – 368 с.