МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» очной и заочной форм обучения

Могилев 2019

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» « 27 » сентября 2019 г., протокол № 2

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;
ст. преподаватель С. В. Гонорова
Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория упругости и пластичности» для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» очной и заочной форм обучения.

Содержат материалы к практическим занятиям.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Ответственный за выпуск П. Н. Громыко

Технический редактор А. Т. Червинская

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев

Содержание

Введение

Целью преподавания курса «Теория упругости и пластичности» является получение теоретических знаний по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

В методических рекомендациях подробно описана структура оболочки и приведена последовательность действий при проведении анализа в среде SolidWorks – COSMOSWorks (Simulation). Методические рекомендации содержат примеры решения задач по темам курса. Приведены исходные данные для самостоятельного решения конкретных задач с целью приобретения навыков практических расчетов.

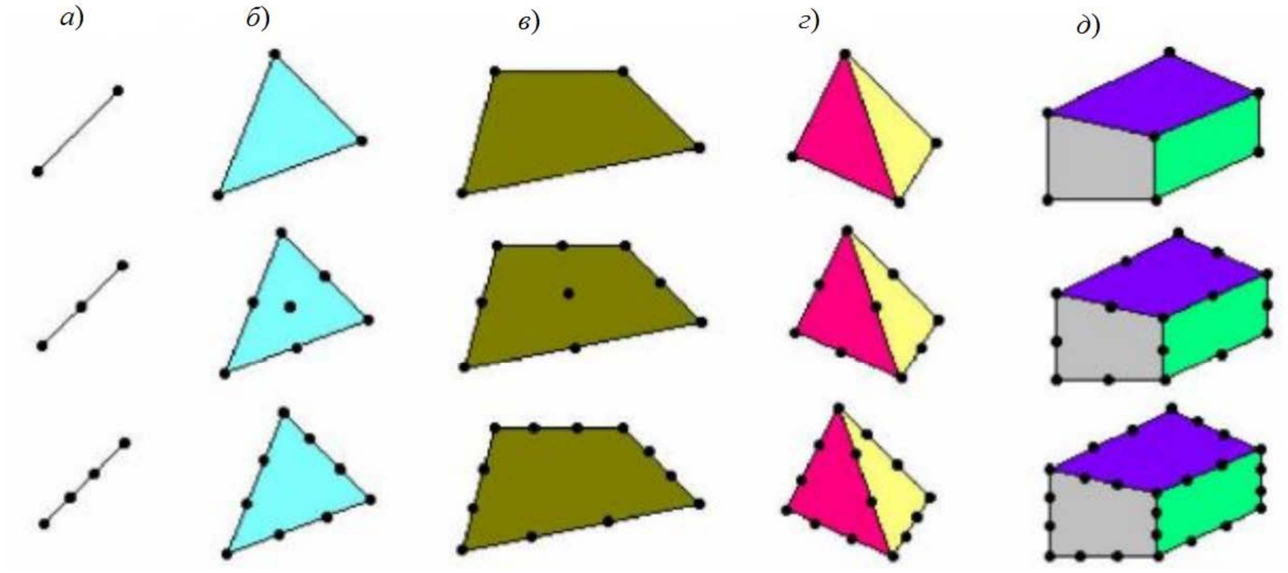
1 Исследование напряженного состояния в окрестности заданной точки

Проектирование различного рода конструкций, удовлетворяющих современным требованиям развития техники и технологии, связано с всесторонними исследованиями по выявлению предполагаемого поведения проектируемого объекта при его эксплуатации. В этой связи еще на стадии проектирования производят размерный конструкторский и технологический анализ систем и процессов с целью выявления их эксплуатационных возможностей, минимизации материалоемкости, снижения трудозатрат на их изготовление.

Для решения подобных сложных, комплексных прикладных задач исследователи использовали различные численно-аналитические и численные методы расчета. Численно-аналитические методы представляют решение в виде рядов: метод коллокаций, метод Ритца − Тимошенко, метод Бубнова − Галеркина, метод Канторовича − Власова. Численные методы: метод сеток, вариационно-разностный метод (ВРМ) и др. Однако их применение в явном виде далеко не всегда позволяло достичь желаемого результата, особенно это касается объектов сложной конфигурации, включающих материалы с нелинейной зависимостью деформаций от величины действующих нагрузок.

В настоящее время все больше исследователей отдают предпочтение методу конечных элементов, хорошо зарекомендовавшему себя при решении ряда сложных прикладных задач. Это обусловлено вариационно-разностной структурой данного метода. Являясь синтезом вариационных и сеточных методов, он обладает присущими им преимуществами.

Метод конечных элементов с математической точки зрения является одним из численных методов решения систем дифференциальных уравнений. Исследуемая область изменения функций (перемещений, деформаций, напряжений) разбивается на большое число малых, но конечных по размерам подобластей, называемых конечными элементами. В зависимости от решаемой задачи конечные элементы могут быть линейными, плоскими или объемными и иметь различную форму. Так, при расчете стержневых конструкций конечный элемент в ряде задач представляют в виде отрезка стержня, в плоской задаче теории упругости конечный элемент часто принимают в виде прямоугольника или треугольника, в трехмерной задаче конечным элементом может служить тетраэдр, гексаэдр и т. д. (рисунок 1.1).



а – стержневые конечные элементы; *б*, *в* – пластинчатые конечные элементы; *г*, *д* – объемные конечные элементы

Рисунок 1.1 – Виды конечных элементов, используемых в практике расчетов

В дальнейшем отдельные конечные элементы связывают между собой не по всей поверхности контакта их с соседними элементами, а лишь определенным числом связей, в отдельных точках, называемых узлами. Число связей конечного элемента с окружающей областью принято называть числом степеней свобод, характеризующим данный тип конечных элементов.

Степень свободы является чрезвычайно важным понятием в методе конечных элементов, характеризующим возможность изменяться искомой величине в узловой точке и в определенном направлении, например, перемещение узла элемента в направлении одной из координатных осей.

Математический аппарат метода конечных элементов позволяет, с определенной степенью точности, определять значение искомой величины в любой точке исследуемого объекта по значениям этих величин (например, перемещений) в узловых точках элементов.

Таким образом, путем представления составляющих технологических систем или конструкций в виде совокупности отдельных элементов, связанных не бесконечным, а конечным числом связей, континуальную систему заменяем дискретной. Задача об отыскании неизвестных функций из системы дифференциальных уравнений сводится к задаче о нахождении значений функции в отдельных точках путем решения системы линейных алгебраических уравнений.

Внутри отдельного конечного элемента исследуемая область принимается континуальной, однако функции, описывающие его напряженно-деформированное состояние, аппроксимируем некоторыми простейшими функциями, часто имеющими линейный характер. Таким образом, непрерывные функции в пределах исследуемой области аппроксимируются кусочно-непрерывными функциями.

Способ разбивки составляющих технологической системы на конечные элементы, их количество, число степеней свобод, характеризующих используемый конечный элемент, а также вид аппроксимирующих функций в конечном итоге определяют расчетную схему и вместе с тем предопределяют точность расчета.

2 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

2.1 Основные уравнения теории упругости для плоского напряженного состояния

Основные соотношения метода конечных элементов проиллюстрируем на примере расчета плоской задачи теории упругости.

Представим себе плоскую пластину, нагруженную силами, действующими в ее плоскости (рисунок 2.1). Толщина ее δ очень мала по сравнению с размерами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$. В идеале толщина должна стремиться к нулю. В подобных условиях находится очень тонкая пластина. Если выделить элементарный фрагмент пластины с размерами $\boldsymbol{dx}$, $\boldsymbol{dy}$ и δ в любой точке такой пластины, то на его гранях в общем случае возникают напряжения σ_x, σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ (рисунок 2.2). На боковых гранях этого элемента (рисунок 2.2) они заштрихованы) напряжения отсутствуют $\sigma_z = 0$; $\tau_{zx} = 0$; $\tau_{zy} = 0$. Предположим, что эти напряжения равны нулю и во внутренних точках элемента. Описанное состояние называется плоским напряженным состоянием тела. Оно характеризуется тем, что две параллельные грани бесконечно малого элемента, выделенного в любой точке тела, свободны от напряжений. Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} при этом равномерно распределены по толщине пластины δ.

Приведем теперь перечень основных уравнений теории упругости для плоского напряженного состояния.

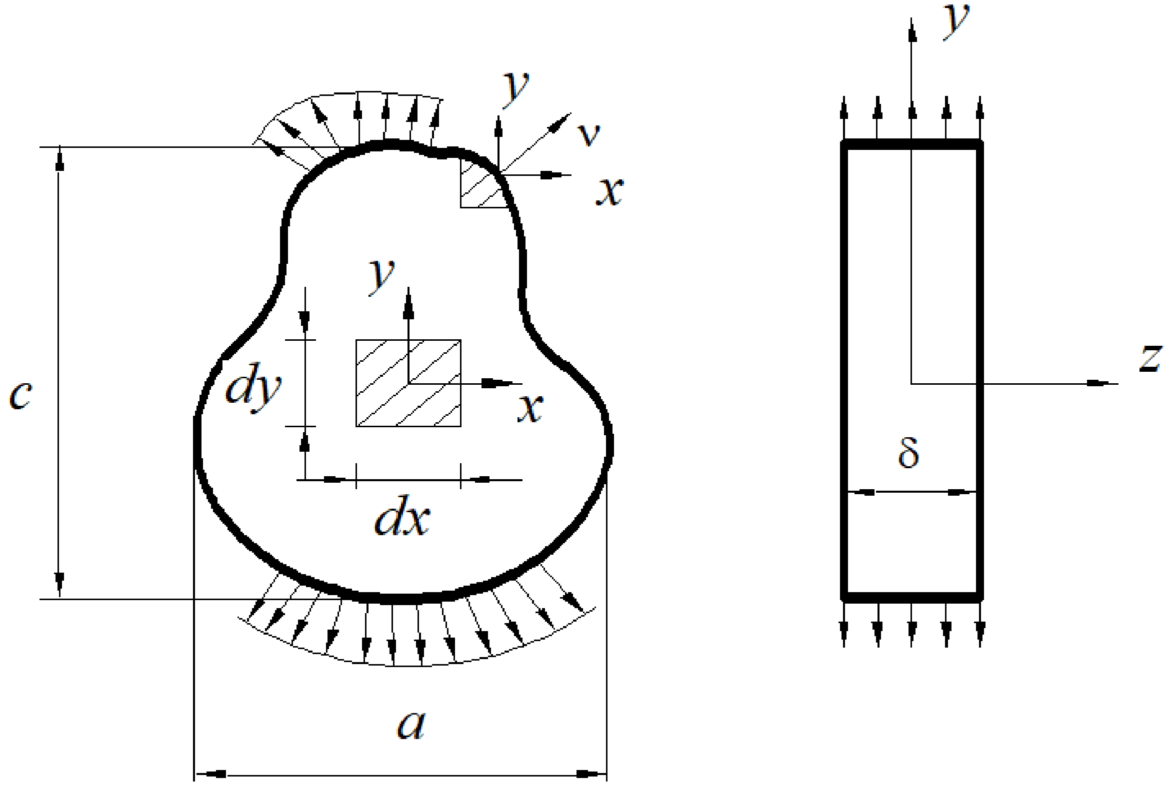


Рисунок 2.1 – Плоское напряженное состояние

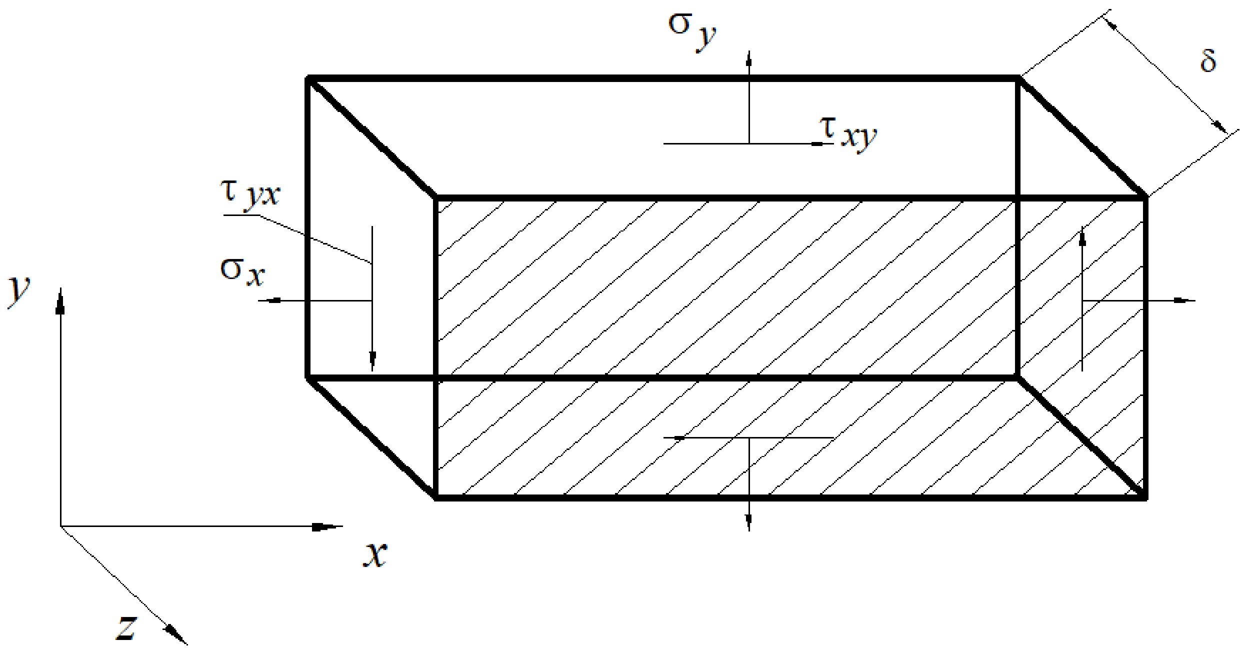


Рисунок 2.2 – Фрагмент тела, испытывающего плоское напряженное состояние

Уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0;\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0.
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

Уравнения, описывающие условия на поверхности тела,

$$
\begin{aligned}
&\ell\sigma_x+m\tau_{xy}=P_x;\\
&\ell\tau_{yx}+m\sigma_y=P_y,
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

где X, Y – объемная нагрузка, действующая в пластине;

$\ell=\cos(x\cap\nu), m=\cos(y\cap\nu)$; - направляющие косинусы (см. рисунок 2.1);

$\boldsymbol{P_x}, \boldsymbol{P_y}$ – нагрузки, действующие на боковой поверхности пластины.

Геометрические уравнения (зависимости Коши), связывающие относительные линейные $\boldsymbol{\varepsilon_x}, \boldsymbol{\varepsilon_y}$ и сдвиговые $\boldsymbol{\gamma_{xy}}$ деформации,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\\
&\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Из шести уравнений совместности деформаций (уравнений Сен-Венана) для общего случая напряженно-деформированного состояния в плоской задаче остается только одно:

$$
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=0. \qquad (2.4)
$$

Наконец, закон Гука для изотропного материала в случае плоского напряженного состояния имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right);\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right);\\
&\gamma_{xy}=\frac{\tau}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau,
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

где E и G – модули упругости при растяжении и сдвиге;

$\boldsymbol{\nu}$ – коэффициент Пуассона.

2.2 Характеристики конечного элемента, описывающего плоское напряженное состояние

На рисунке 2.3 показан типичный треугольный элемент с узлами ***i***, ***j***, ***m***, пронумерованными против хода часовой стрелки.

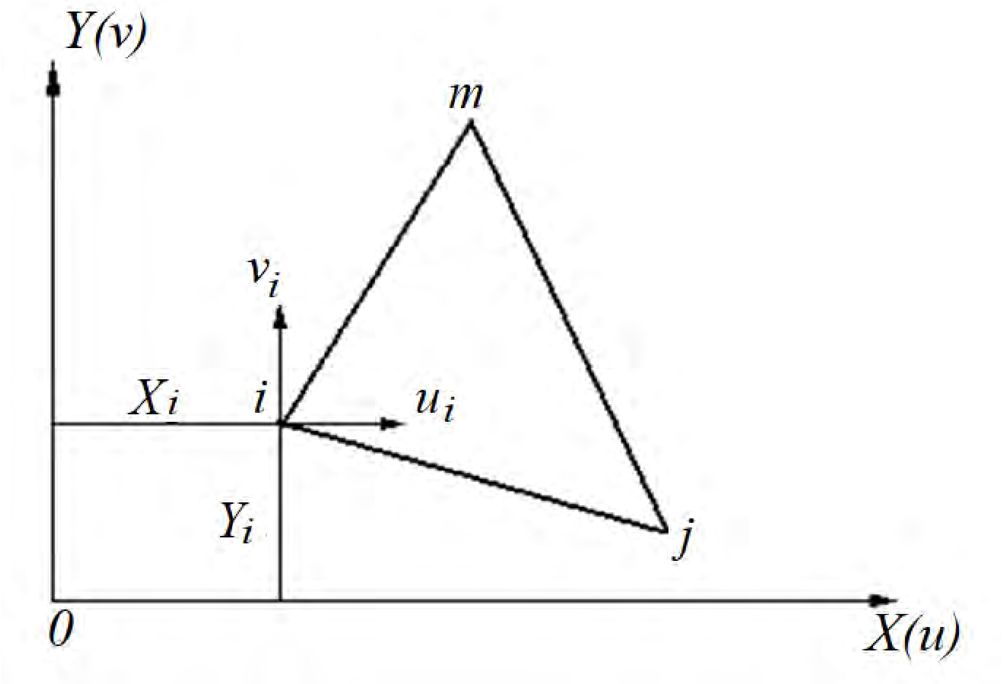


Рисунок 2.3 – Элемент сплошной среды для расчета плоского напряженного состояния

Каждая узловая точка элемента имеет по две компоненты перемещений:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \tag{2.6}$$

а весь элемент обладает шестью степенями свободы, образующими вектор перемещений:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \tag{2.7}$$

Согласно процедуре метода конечных элементов перемещения внутри элемента должны однозначно определяться этими шестью величинами. Простейшим представлением функции перемещений на плоскости элемента являются линейные полиномы

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y;$$
$$v = \alpha_4 + \alpha_5 X + \alpha_6 Y. \qquad (2.8)$$

Значения шести коэффициентов α_i можно определить, используя выражения (2.8) для описания перемещений в узловых точках элемента. Так, например,

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i;$$
$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j; \qquad (2.9)$$
$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 X_m + \alpha_3 Y_m.$$

Выразив значения коэффициентов α_1, α_2, α_3 через величины узловых перемещений u_i, u_j, u_m, имеем

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left\{\left(a_i + b_i X + c_i Y\right)u_i + \left(a_j + b_j X + c_j Y\right)u_j + \right. \qquad (2.10)$$
$$\left. + \left(a_m + b_m X + c_m Y\right)u_m \right\},$$

где

$$a_i = X_j Y_m - X_m Y_j;$$
$$b_i = Y_j - Y_m; \qquad (2.11)$$
$$c_i = X_m - X_j.$$

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов i, j, m, а величина 2Δ вычисляется следующим образом:

$$2\Delta = \det\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_m & Y_m \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

Аналогично описываются перемещения υ по направлению вертикальной оси:

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left\{\left(a_i + b_i X + c_i Y\right)v_i + \left(a_j + b_j X + c_j Y\right)v_j + \right. \qquad (2.13)$$
$$\left. + \left(a_m + b_m X + c_m Y\right)v_m \right\}.$$

Данная функция перемещений обеспечивает непрерывность перемещений между соседними элементами, так как вдоль любой стороны треугольника они изменяются линейно, и, таким образом, из равенства перемещений в узлах следует их равенство по всей границе.

Приведенные соотношения (2.3) можно представить в матричном виде как

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \tag{2.14}$$

Если подставить в соотношение (2.14) выражения (2.10), (2.13), то можно получить выражение, связывающее деформации в любой точке внутри элемента с перемещениями узловых точек элемента:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}. \tag{2.15}$$

Здесь следует отметить, что в описываемом элементе матрица $[B]$ не зависит от координат точки внутри элемента, и, следовательно, деформации являются постоянными величинами по площади элемента.

Используя соотношения (2.5), можно по величине действующих в исследуемой точке напряжений определить величину деформаций. Вместе с тем с помощью соотношений (2.5) может быть также решена и обратная задача, заключающаяся в том, что по величине деформаций можно определить значение компонент напряжений. В матричной форме это соотношение выглядит следующим образом:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \tag{2.16}$$

где матрица $[D]$ имеет вид:

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Согласно процедуре метода конечных элементов необходимо определить матрицу жесткости каждого элемента в отдельности [1, 2, 3]. Здесь следует отметить, что матрица жесткости характеризует механические свойства элемента и его геометрию. Физический смысл матрицы жесткости заключается в том, что с ее помощью могут быть определены перемещения узлов элемента в зависимости от величины усилий, деформирующих элемент. Эта связь имеет следующий вид:

$$\{F\}^e=[K]^e\{\delta\}^e, \quad (2.18)$$

где $[K]^e$ – матрица жесткости элемента;

$\{F\}^e$ – усилия, действующие в узлах элемента.

Матрица жесткости элемента определяется с помощью общего соотношения [1], в соответствии с которым

$$[K]^e=\int[B]^T[D][B]t\,dxdy; \quad (2.19)$$

где t – толщина элемента;

$[B]^T$ – это транспонированная матрица $[B]$, а интегрирование производится по площади треугольного элемента. Если предположить, что толщина элемента постоянна, и учитывая, что ни одна из матриц, входящих в интеграл, не зависит от переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то выражение (2.19) можно представить в следующем виде:

$$[K]^e=[B]^T[D][B]t\Delta. \quad (2.20)$$

В дальнейшем процедура метода конечных элементов предполагает последовательное выполнение стандартных операций – построение объединенной матрицы жесткости и решение системы линейных алгебраических уравнений. Объединенная матрица жесткости всего исследуемого объекта имеет тот же физический смысл, что и матрица жесткости элемента, она характеризует связь между усилиями, приложенными в узловых точках расчетной модели и перемещениями всей совокупности узлов. В матричной форме данная зависимость выражается как

$$\{R\}=[K]\{\delta\}, \quad (2.21)$$

где

$$\{\delta\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n, v_n\}, \qquad (2.22)$$

где ***n*** – число узлов в рассматриваемой расчетной модели;

$$\{\delta\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n, v_n\}, \qquad (2.23)$$

где u_n, v_n – перемещения ***n***-го узла в направлении координатных осей ***x*** и ***y***;

$[K]$ – объединенная матрица жесткости всего исследуемого объекта.

Объединенная матрица жесткости всей конечно-элементной модели определяется на основании использования матриц жесткости конечных элементов, входящих в нее, исходя из рассмотрения условий равновесия в узлах. При этом предполагается, что каждый из стыкующихся конечных элементов имеет одинаковые перемещения в узловых точках. Как видно из предшествующих выкладок, порядок объединенной матрицы жесткости для используемых конечных элементов равен удвоенному числу узлов – **2*n***. С другой стороны, порядок объединенной матрицы жесткости равен количеству искомых перемещений в узловых точках, а следовательно, числу степеней свобод в используемой расчетной модели.

Окончательная система линейных алгебраических уравнений, разрешив которую и определяются искомые перемещения в узлах, получается из уравнений (2.21) исходя из граничных условий, накладываемых на расчетную модель. Граничные условия, заключающиеся в учете внешней нагрузки, приложенной к исследуемому объекту, реализуются в методе конечных элементов автоматически посредством формирования вектора нагрузки $\{R\}$. Если узлы свободны от воздействия нагрузки, то соответствующие этим узлам элементы вектора нагрузок приравниваются нулю.

В случае, когда граничные условия накладывают ограничения на перемещение узла в определенном направлении, матрица жесткости и вектор нагрузки должны быть модифицированы. При этом столбец матрицы жесткости, соответствующий нулевому перемещению, а также строка, характеризующая усилия в направлении данной степени свободы, исключаются при составлении окончательной системы линейных алгебраических уравнений.

В любой программе, реализующей метод конечных элементов, ключевой является подпрограмма решения систем линейных алгебраических уравнений. Выбор метода решения зависит от числа уравнений задачи и от типа используемой вычислительной машины.

В простейшем случае уравнения формируются полностью. При таком подходе требуется $(2\boldsymbol{n})^2$ ячеек памяти, и его можно использовать только для небольших задач и при применении мощных ЭВМ.

После того, как из решения общей системы уравнений определены узловые перемещения, из соотношений (2.15), (2.16) могут быть найдены напряжения в любой точке каждого конечного элемента:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta^e\} \tag{2.24}$$

Примером использования пластинчатых конечных элементов для проведения численного анализа различных изделий могут послужить следующие модели исследуемых объектов (рисунки 2.4 и 2.5).

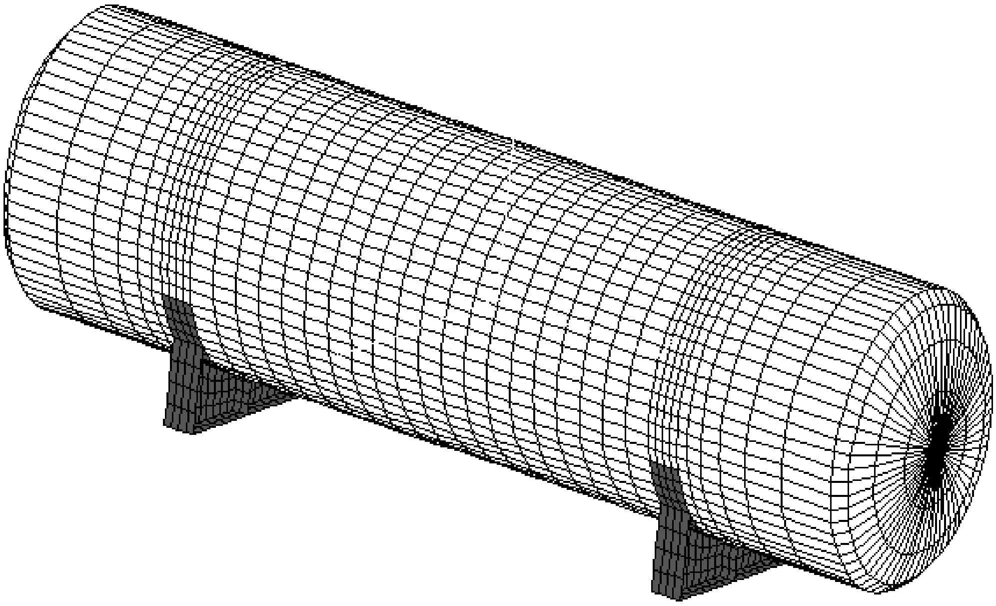


Рисунок 2.4 – Конечно-элементная модель адсорбера

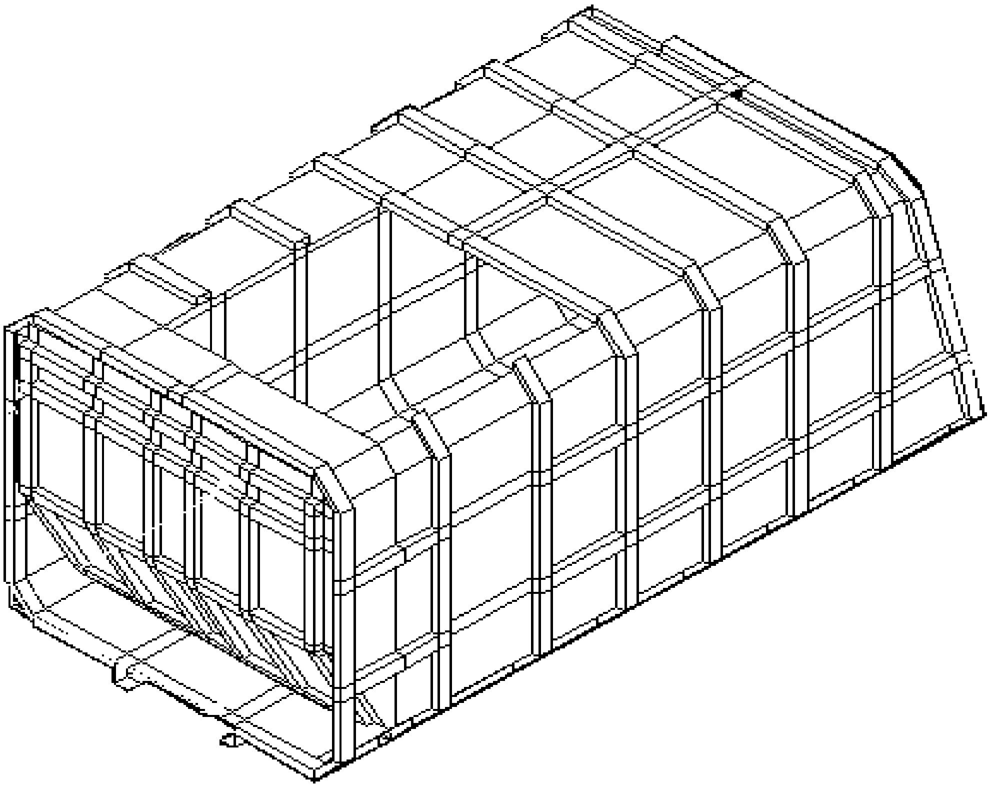


Рисунок 2.5 - Конечно-элементная модель кузова мусоровоза

3 Статический поперечный изгиб пластинок средней толщины.

3.1 Конечно-элементный анализ пластин, работающих на изгиб, и объемного напряженного состояния

Объемное напряженное состояние реализуется практически во всех случаях поведения изделий под нагрузкой, хотя иногда предположение о том, что напряженное или деформированное состояние двумерно, дает вполне приемлемую и экономичную модель. Объемным задачам ранее уделялось относительно мало внимания при проектировании из-за трудности использования традиционных подходов к решению такого рода проблем. Поэтому в этой области, за исключением простейших случаев, конечно-элементный анализ стал фактически неоспоримым средством отыскания решения.

На рисунке 3.1 изображен тетраэдральный объемный конечный элемент в декартовой системе координат.

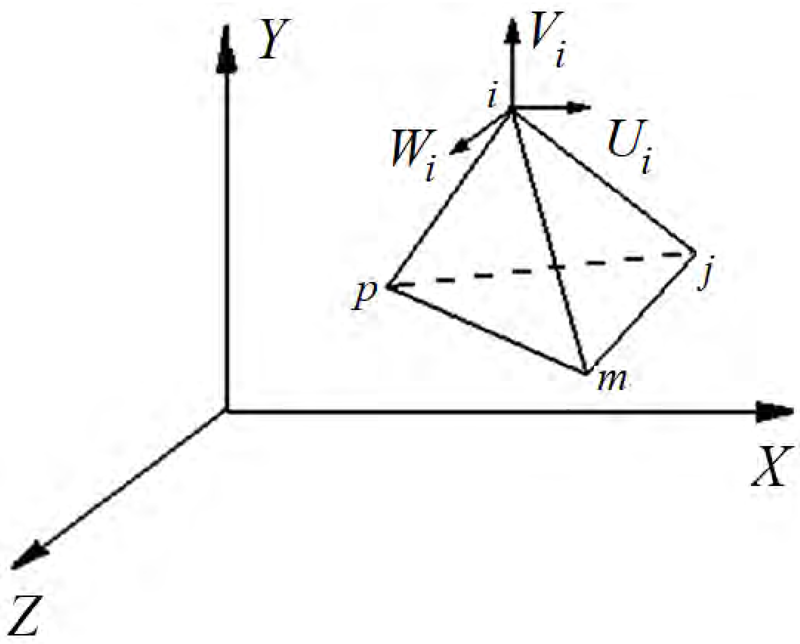


Рисунок 3.1 – Тетраэдральный конечный элемент

Данный конечный элемент является наиболее универсальным элементом. С его помощью могут быть описаны практически любые объекты и, кроме того, используя его, можно построить конечные элемент с большим числом узловых точек – например восьмиузловые гексаэдры общего вида.

Перемещения каждой узловой точки тетраэдрального элемента имеют три компоненты:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \tag{3.1}$$

а двенадцать компонент перемещений всех узловых точек элемента образуют вектор:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{Bmatrix}. \tag{3.2}$$

Перемещения внутри элемента должны однозначно определяться этими двенадцатью величинами. Предположим, что перемещения внутри элемента изменяются по линейному закону и описываются полиномами

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z; \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z; \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Значения двенадцати постоянных $\boldsymbol{\alpha_i}$ легко найти из трех систем, состоящих из четырех уравнений, которые получаются в результате подстановки в (***u, v, w***) узловых координат и приравнивания перемещений соответствующим перемещениям узловых точек. Записав, например,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i; \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j; \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 z_m; \\ u_p &= \alpha_1 + \alpha_2 x_p + \alpha_3 y_p + \alpha_4 z_p, \end{aligned} \qquad (3.4)$$

выразим α_1, α_2, α_3, α_4 через величины узловых перемещений и окончательно получим

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i; \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j; \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 z_m; \\ u_p &= \alpha_1 + \alpha_2 x_p + \alpha_3 y_p + \alpha_4 z_p, \end{aligned} \qquad (3.5)$$

где

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}. \qquad (3.6)$$

Величина ***V*** в данном случае представляет собой объем тетраэдра, а коэффициентами $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$, $\boldsymbol{d_i}$ обозначены определители

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}; \qquad (3.7)$$

$$b_i = -\det\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_J \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}; \qquad (3.8)$$

$$c_i = -\det\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}; \qquad (3.9)$$

$$d_i = -\det\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3.10)$$

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов ***i***, ***j***, ***m***, ***p***.

Таким образом, перемещения произвольной точки элемента можно записать в виде

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I\,N_i, & I\,N_j, & I\,N_m, & I\,N_p \end{bmatrix} \{\delta\}^e, \qquad (3.11)$$

где скалярные величины определяются соотношениями

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \qquad \text{и т. д.,}$$

а ***I*** – единичная матрица размерности 3 Х 3.

Вполне очевидно, что данные функции перемещений будут удовлетворять требованиям непрерывности на границах между элементами. Объясняется это использованием линейного закона изменения перемещений внутри элемента.

В трехмерном случае учитываются все шесть компонент деформаций. Компоненты деформаций связаны с компонентами перемещений зависимостями Коши:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}. \tag{3.12}$$

Используя вышеприведенные соотношения, легко убедиться, что

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e=\begin{bmatrix}B_i & B_j & B_m & B_p\end{bmatrix}\{\delta\}^e, \tag{3.13}$$

где

$$[B_i]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial Ni}{\partial z}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial Ni}{y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}b_i & 0 & 0\\ 0 & c_i & 0\\ 0 & 0 & d_i\\ c_i & b_i & 0\\ 0 & d_i & c_i\\ d_i & 0 & b_i\end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Остальные подматрицы получаются простой перестановкой индексов.

Объемное напряженное состояние характеризуется шестью компонентами напряжений. Эти компоненты напряжений, в линейной постановке задачи, связаны с компонентами деформаций зависимостями обобщенного закона Гука. В матричной форме данный закон имеет следующий вид:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}, \qquad (3.15)$$

где матрица $[D]$ выглядит так:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \qquad (3.16)$$

а величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{\nu}$ – это соответственно модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона.

Построение матрицы жесткости осуществляется на основании использования закона сохранения энергии, согласно которому работа внешних сил на перемещениях, обусловленных этими усилиями, равна потенциальной энергии упругих деформаций тела. В результате выражение для определения матрицы жесткости имеет следующий вид:

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D][B]\, dV. \qquad (3.17)$$

Здесь $[B]^T$ означает транспонирование матрицы.

Приведенное выражение для определения матрицы жесткости может быть проинтегрировано по объему тетраэдрального элемента точно, поскольку компоненты деформаций и напряжений внутри его постоянны. Таким образом, окончательное выражение для определения матрицы жесткости элемента принимает следующий вид:

$$[K]^e = [B]^T [D][B]V. \tag{3.18}$$

Матрица жесткости рассматриваемого конечного элемента имеет размерность 12х12.

Далее процедура реализации алгоритма метода конечных элементов полностью аналогична той, которая рассмотрена для случая плоского напряженного состояния.

Примером использования объемных конечных элементов для проведения численного анализа изделий может послужить следующая модель объекта (рисунок 3.2).

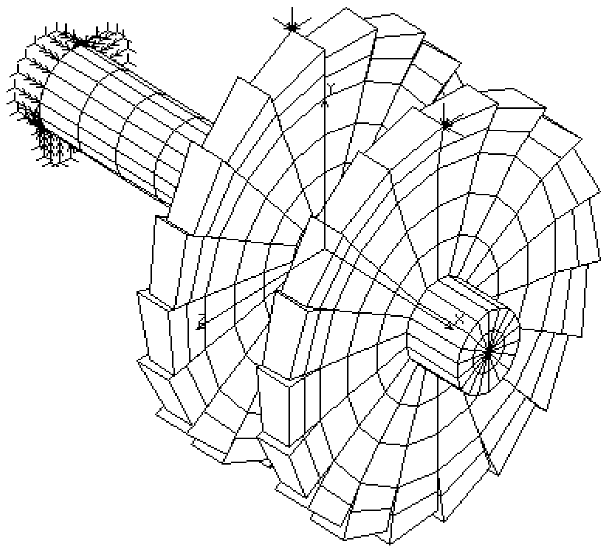


Рисунок 3.2 – Конечно-элементная модель фрез с насадкой, установленных в шпиндель

Наряду с приведенными примерами использования конечных элементов одного типа, в рассматриваемой модели возможно одновременное применение конечных элементов разных типов, например, пластинчатых и стержневых (рисунок 3.3). Это обстоятельство позволяет достичь существенного снижения требований по объему обрабатываемой компьютером информации и тем самым сократить продолжительность расчетов.

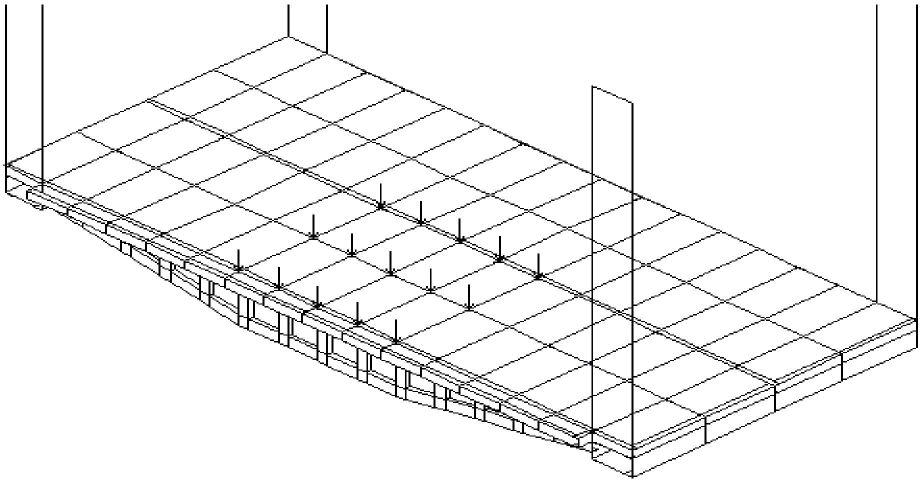


Рисунок 3.3 - Конечно-элементная модель пола кабины лифтовой установки для Большого театра (г. Москва) с указанным местом приложения нагрузки величиной 10000 кг

К настоящему времени имеется достаточно большое количество программных продуктов, в которых реализован алгоритм метода конечных элементов. Одним из таких пакетов прикладных программ является программный продукт COSMOSWorks, который полностью интегрирован в графический редактор SolidWorks и именуется в последующем SolidWorks Simulation. SolidWorks изначально создавалась как система твердотельного параметрического моделирования. Программа содержит всю необходимую номенклатуру инструментов, причем некоторые возможности крайне эффективны для разработки объектов, ориентированных на последующее использование программ расчета.

4 Построение конечно-элементной модели исследуемого объекта, подготовка данных и расчет на ЭВМ (работа с пакетом прикладных программ SolidWorks)

COSMOSWorks — приложение к SolidWorks, предназначенное для решения задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов. Программа использует геометрическую модель детали или сборки SolidWorks для формирования расчетной модели. Интеграция с SolidWorks дает возможность минимизировать операции, связанные со специфическими особенностями конечно-элементной аппроксимации. Назначение граничных условий производится в привязке к геометрической модели. Такими же особенностями обладают и процедуры представления результатов (рисунок 4.1).

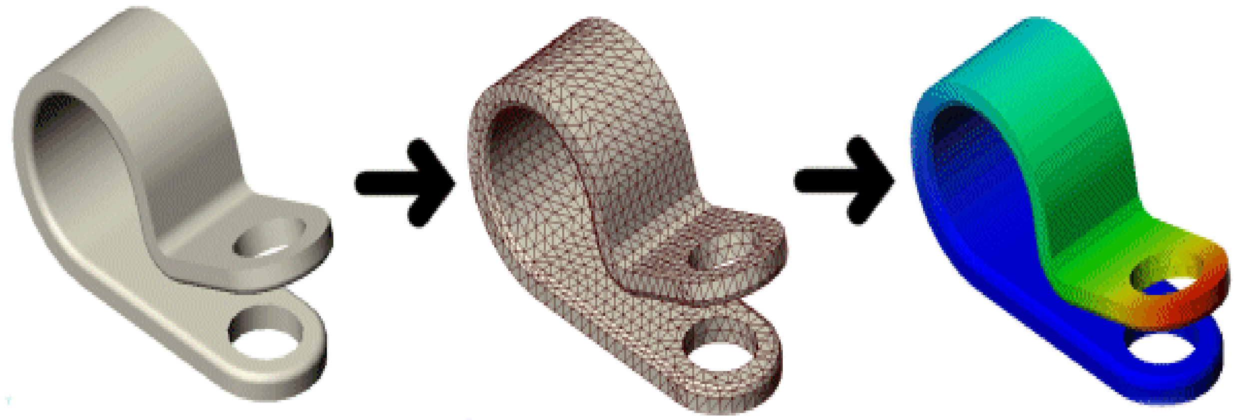


Рисунок 4.1 – Последовательность операций моделирования исследуемого объекта (твердотельная модель – конечно-элементное представление изделия – картина распределения искомого параметра (деформаций, перемещений, напряжений и т. д.) по поверхности детали)

В основу программного обеспечения SolidWorks Simulation, как уже отмечалось, положен метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ – это численный метод анализа различных конструкций. Он делит модель на много малых частей простых форм (рисунок 4.2), называемых конечными элементами, заменяющими сложную задачу несколькими простыми, которые необходимо рассматривать совместно.

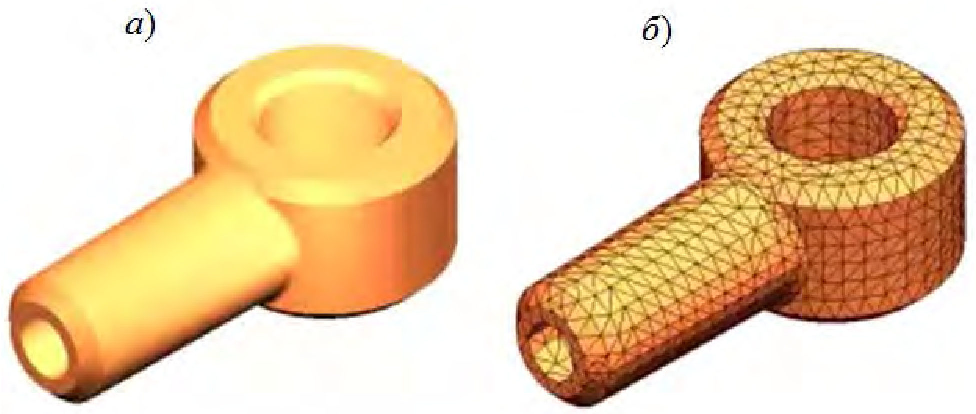


Рисунок 4.2 – Создание конечно-элементной модели (*б*) на основе модели детали САПР (*а*)

Конечные элементы жестко связаны друг с другом в некотором количестве общих точек (как правило, они расположены в вершинах геометрического тела), называемых узлами. Процесс деления модели на малые части называется созданием сетки.

В COSMOSWorks используются два типа конечных элементов: объемные изопараметрические тетраэдры и треугольные элементы оболочек. Оба этих типа могут иметь линейное или параболическое поле перемещений (постоянную деформацию или линейное поле деформаций). Тетраэдры содержат, соответственно, 4 или 10 узлов (рисунок 4.3), а оболочки – 3 или 6.

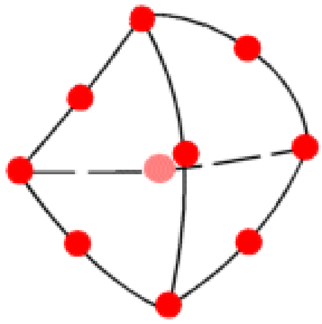


Рисунок 4.3 – Тетраэдральный параболический конечный элемент (кромки элементов могут быть изогнутыми или прямыми)

Для объемных конечных элементов учитываются по три перемещения каждой узловой точки вдоль соответствующих координатных осей. В узловой точке оболочечного конечного элемента допускаются перемещения по шести направлениям – тремя перемещениями по направлению координатных осей и тремя углами поворота вокруг этих осей. Эти перемещения называются степенями свободы (DOF) узловой точки конечного элемента и в целом всей конечно-элементной модели.

4.1 Содержание типов анализа и их обозначение в среде SolidWorks Simulation

Программное обеспечение Simulation позволяет производить следующие типы анализа (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Типы проводимого в Simulation анализа и их обозначения

Тип исследования	Значок исследования		
Статический		Модальная временная диаграмма	
Частотный анализ		Гармонический анализ	
Потеря устойчивости		Случайные колебания	
Термический анализ		Спектр реакции	
Исследование проектирования		Анализ на ударную нагрузку	
Нелинейный статический анализ		Усталость	
Нелинейный динамический анализ		Конструкция сосуда, работающего под давлением	

Статический анализ – рассматривает статическое нагружение изделия, при этом предполагается, что материал деформируется упруго. Расчет осуществляется как для отдельных деталей с использованием пространственной или оболочечной модели, так и для сборок в трехмерной постановке с учетом взаимодействия деталей.

Частотный анализ – расчет собственных частот и соответствующих им форм колебаний для деталей в твердотельном или оболочечном представлении, а также сборок с неподвижными деталями. Тело, выведенное из состояния покоя, начинает колебаться на определенной частоте, так называемой собственной частоте или резонансной частоте. При каждой собственной частоте тело принимает определенную форму, которая называется формой колебаний. Теоретически у тела существует бесконечное количество форм и частот колебаний. При анализе методом конечных элементов существует столько форм, сколько степеней свободы имеет конечно-элементная модель. На практике учитываются только несколько самых низких частот и соответствующих им форм колебаний. Самая низкая собственная частота называется основной частотой. При совпадении частоты вынуждающей внешней нагрузки с одной из собственных частот изделия амплитуда колебаний будет значительно возрастать, при этом возрастают и напряжения, фиксируемые в изделии. Данное явление называется резонансом. Таким образом, частотный анализ позволяет избежать разрушений, обусловленных резонансными явлениями.

Потеря устойчивости – расчет величин критических нагрузок потери устойчивости и соответствующих им форм для деталей в твердотельном или оболочечном представлении, а также сборок с неподвижными деталями.

Термический анализ – тепловой расчет с учетом явлений теплопроводности, конвекции, излучения, но без учета движения сред.

Термоупругий анализ – производится на базе результатов теплового расчета.

Параметрическая оптимизация по критерию минимизации/максимизации массы, объема, собственных частот и критической силы.

Имитация деформирования конструкции с учетом физической и геометрической нелинейности, а также ввиду изменения нагрузок и температуры во времени.

Анализ на ударную нагрузку – моделирование эффекта падения конструкции на жесткую поверхность. Кроме силы тяжести, указывается высота сбрасывания или скорость во время удара. После завершения анализа можно построить эпюры и графики перемещений, скоростей, ускорений нагрузок и напряжений.

Усталость – усталостный расчет с учетом кривых усталости, формы кривой нагрузки, а также линейной гипотезы суммирования повреждений.

Нелинейный динамический анализ – производится при приложении нагрузки, изменяющейся во времени, когда силами инерции нельзя пренебрегать. Динамическим исследованиям должен предшествовать частотный анализ. В большинстве случаев только низшие частоты оказывают существенной влияние на уровень напряжений, возникающих в исследуемом объекте.

Нелинейный статический анализ – исследование поведения изделий с нелинейными свойствами материала, претерпевающих большие перемещения, случаи нагружения объекта, когда принцип независимости действия сил не применим.

Все эти типы анализа могут быть связаны с одним и тем же объектом SolidWorks.

4.2 Последовательность действий при проведении анализа в среде SolidWorks – COSMOSWorks (*Simulation*)

На первом этапе в оболочке SolidWorks создается твердотельная модель исследуемого объекта. При этом, как правило, выполняются операции создания эскиза (например, прямоугольного поперечного сечения рассматриваемого стержня) (рисунок 4.4), а затем (рисунок 4.5) изготавливается непосредственно твердотельная модель изделия (в данном случае посредством операции «вытянутая бобышка/основание»). На основании использования средств SolidWorks могут быть также заданы механические свойства материала, из которого изготовлен исследуемый объект. В базе данных этого программного продукта имеется обширная библиотека механических свойств различных материалов. В рассматриваемом примере в качестве материала детали выбрана «простая углеродистая сталь» (см. рисунок 4.5).

Здесь следует иметь в виду, что в оболочке COSMOSWorks (Simulation) также присутствует возможность задания механических свойств материала, в том числе и уникальных, зависимых от различных параметров, например, температуры.

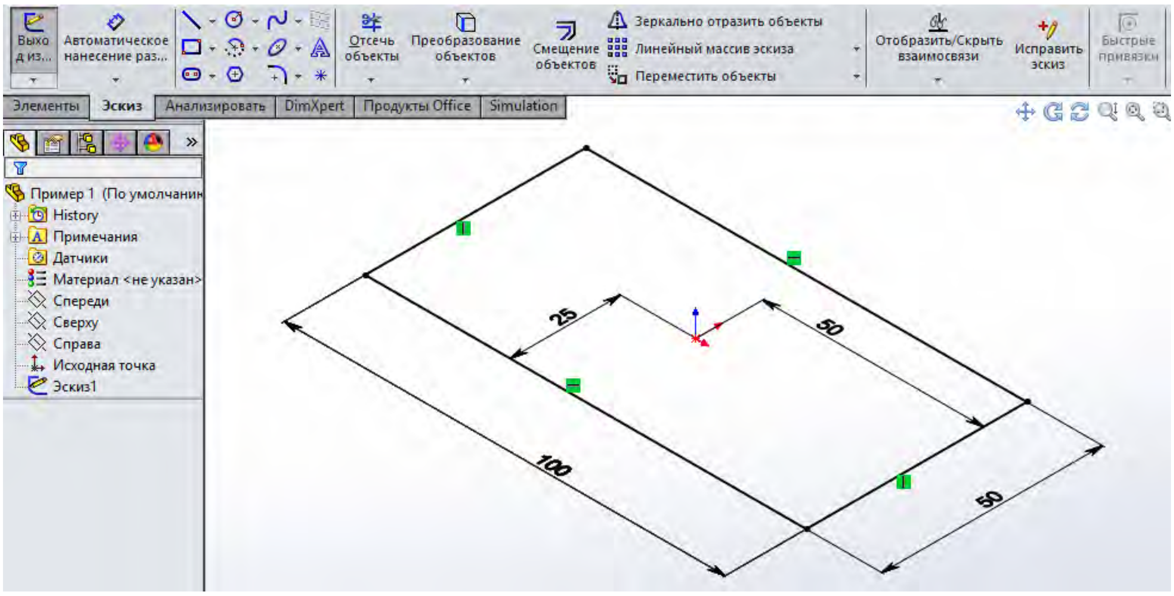


Рисунок 4.4 – Эскиз прямоугольного поперечного сечения стержня с размерами 100х50 мм

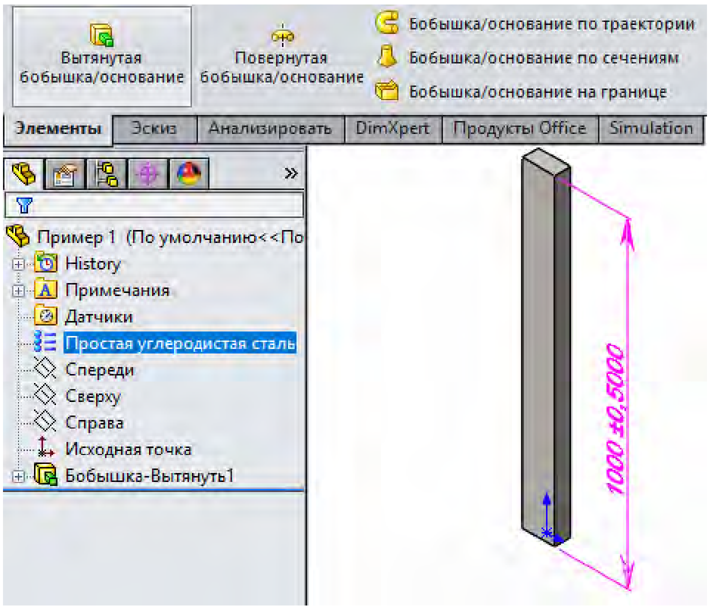


Рисунок 4.5 – Твердотельная модель стержня длиной 1000 мм, состоящего из материала «простая углеродистая сталь»

После создания твердотельной модели объекта активизируется оболочка Simulation, при этом в контекстном меню предлагается выбрать тип проводимого исследования (в приведенном примере (рисунок 4.6) выбран «статический анализ»).

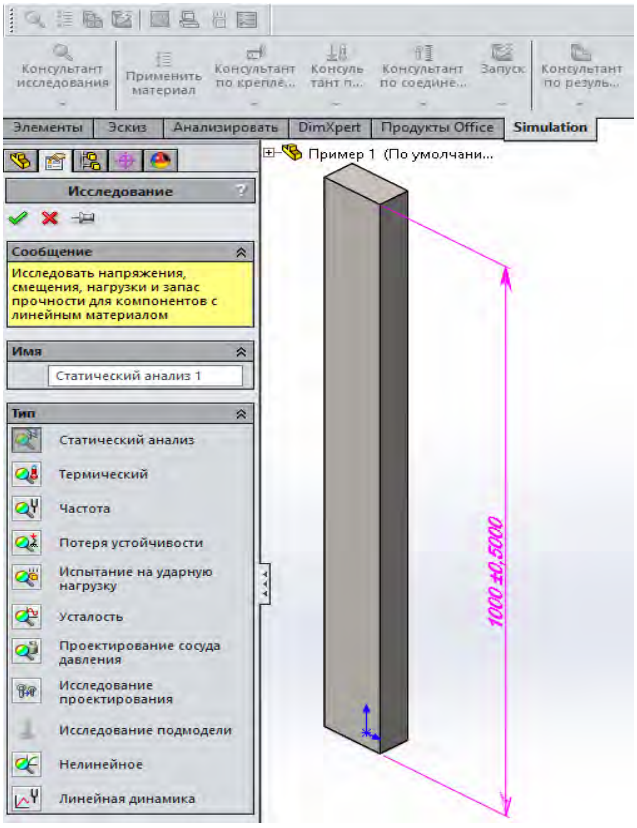


Рисунок 4.6 – Выбор типа анализа для проведения исследования изделия

Вслед за выполнением этой операции слева на экране под Менеджером оболочки SolidWorks появляется Менеджер проекта Simulation (рисунок 4.7).

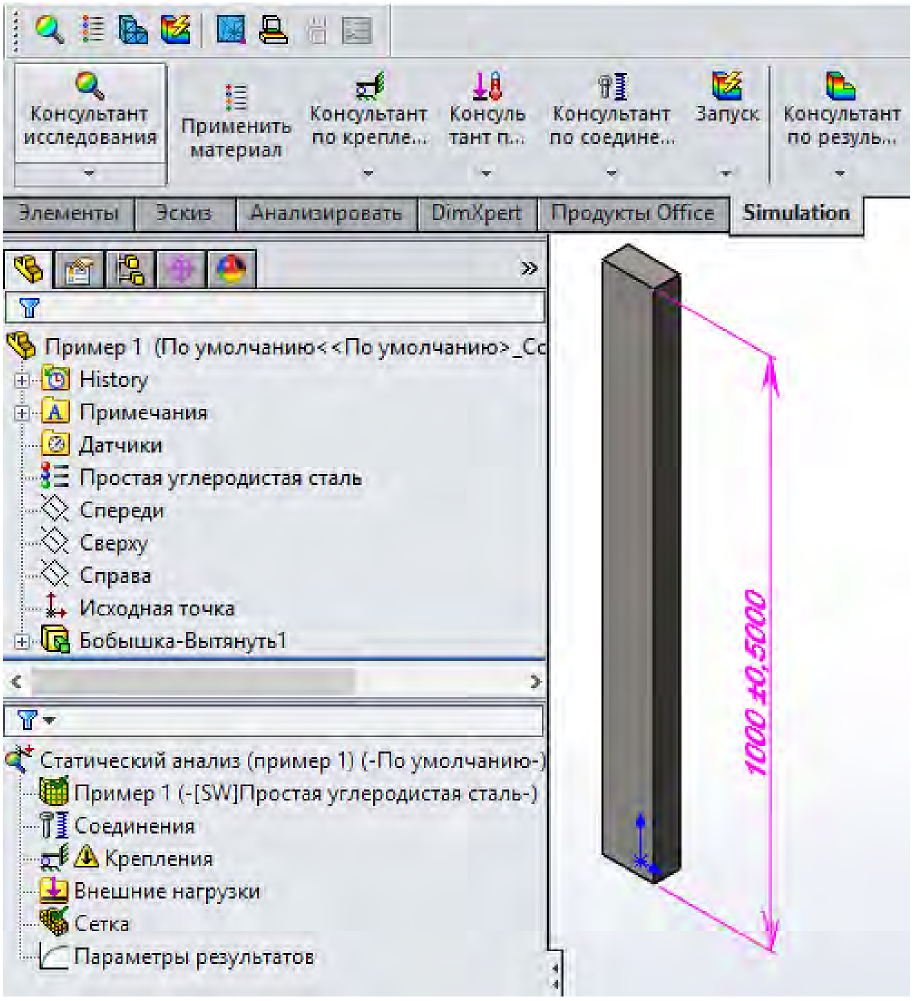


Рисунок 4.7 – Расположение Менеджеров оболочки SolidWorks и Simulation

Менеджер Simulation представляет собой типичное для современных программных продуктов дерево, корень которого – это тип проводимого анализа, а ветви первого уровня – это блоки, обеспечивающие выполнение определенного типа действий (рисунок 4.8). При щелчке правой кнопкой мыши по какому-либо элементу появляется контекстное меню, содержащее функции, доступные для работы с данным объектом.

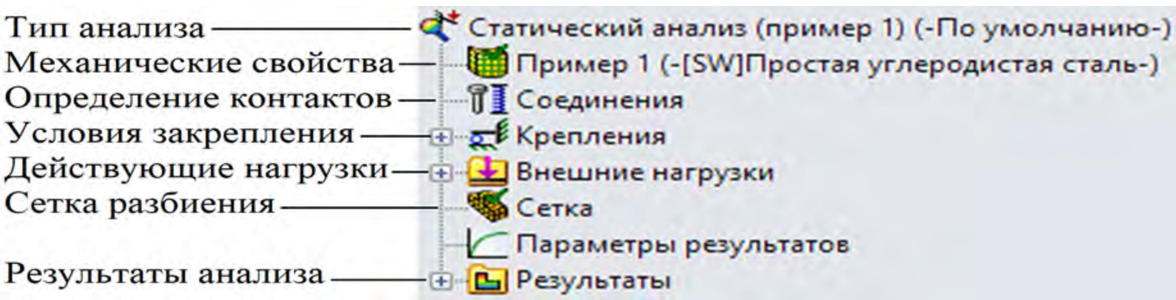


Рисунок 4.8 – Внешний вид Менеджера Simulation для статического анализа

Ветви второго уровня растут, соответственно, из «корней» ветвей первого уровня (рисунок 4.9).

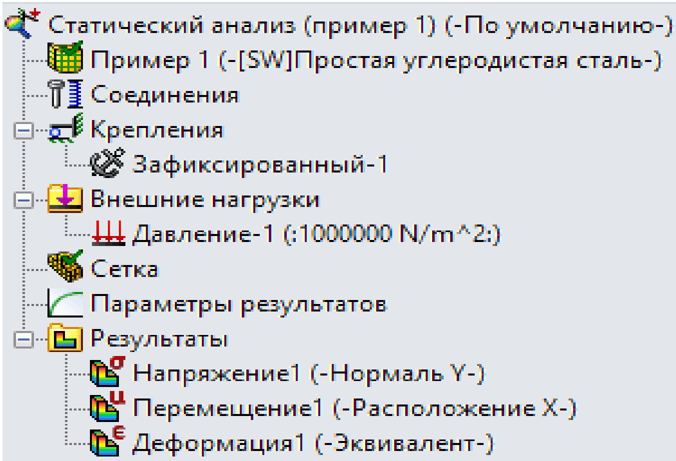


Рисунок 4.9 – Информация, содержащаяся в ветвях второго уровня

Как видно из приведенного рисунка (см. рисунок 4.9), на ветвях второго уровня представлены сведения о характере закрепления обследуемого изделия, приложенной к нему нагрузке, результатах проводимых исследований (напряжения, перемещения, деформации). Посредством щелчка правой кнопкой мышки по какому-либо элементу появляется контекстное меню, содержащее, например, функции, представленные на рисунке 4.10, позволяющие выполнять определенные операции над объектом коррекции.

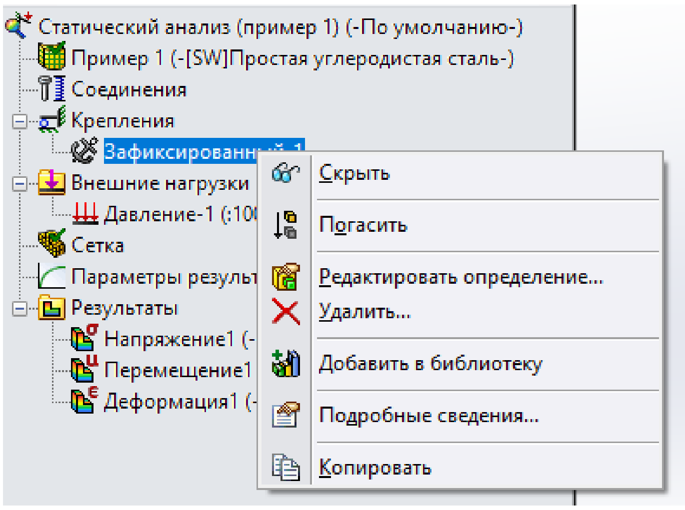


Рисунок 4.10 – Контекстное меню по корректировке введенных ранее исходных данных

Приведенные в контекстном меню термины (см. рисунок 4.10) означают следующие действия:

– «Скрыть» – не отображать данную информацию на графическом представлении модели (в данном примере это место и характер закрепления);

– «Погасить» – не использовать эту информацию при расчете, но в памяти она сохраняется;

– «Редактировать определение» – осуществлять корректировку введенной ранее информации;

– «Удалить» – стереть представленную ранее информацию;

– «Добавить в библиотеку» – сохранить эту информацию в библиотеке примера;

– «Подробные сведения» – приводится подробная информация об используемых в примере условиях;

– «Копировать» – осуществляется копирование данной информации в буферную память с целью последующего использования в другом исследовании данного объекта.

Функция «Редактировать определение» позволяет произвести корректировку вводимой ранее информации об объекте исследования, щелкнув на этом элементе левой кнопкой мыши. В результате предоставляется возможность увидеть существующую информацию и возможные варианты изменений (рисунок 4.11).

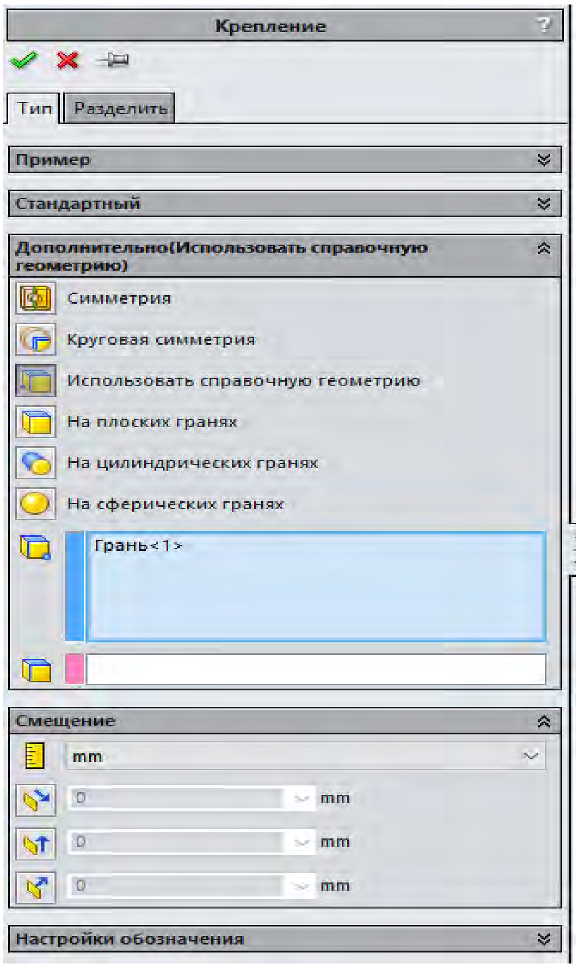


Рисунок 4.11 – «Редактирование определения» (условий закрепления) в рассматриваемом примере исследований

После введения всей необходимой информации о предлагаемой модели исследования на графической части экрана высвечивается модель исследуемого объекта с изображением действующей нагрузки и условиями закрепления (рисунок 4.12).

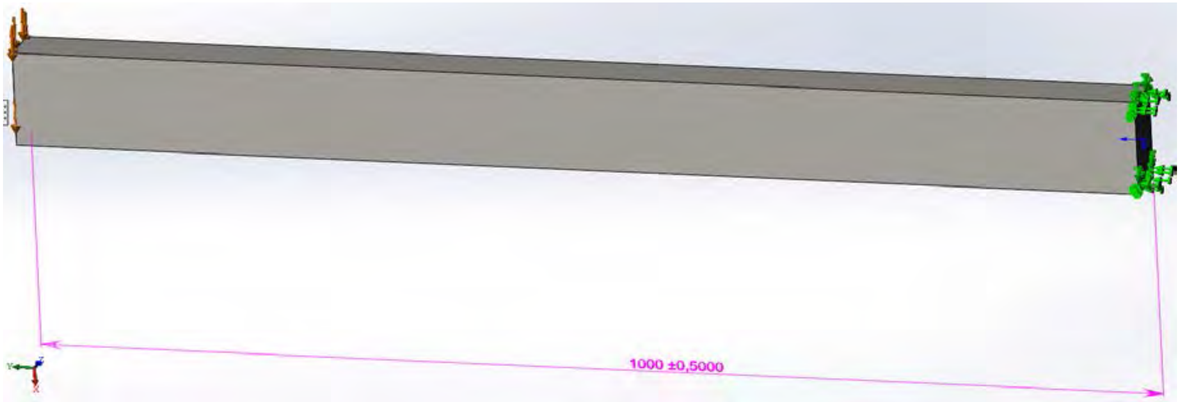


Рисунок 4.12 – Модель исследуемого объекта с изображением действующей нагрузки и условиями закрепления

Важным этапом решения задачи механики твердого деформируемого тела методом конечных элементов является «сетка» разбиения изделия на конечные элементы. Пример контекстного меню по созданию сетки разбиения модели на конечные элементы и сопутствующие операции представлен на рисунке 4.13.

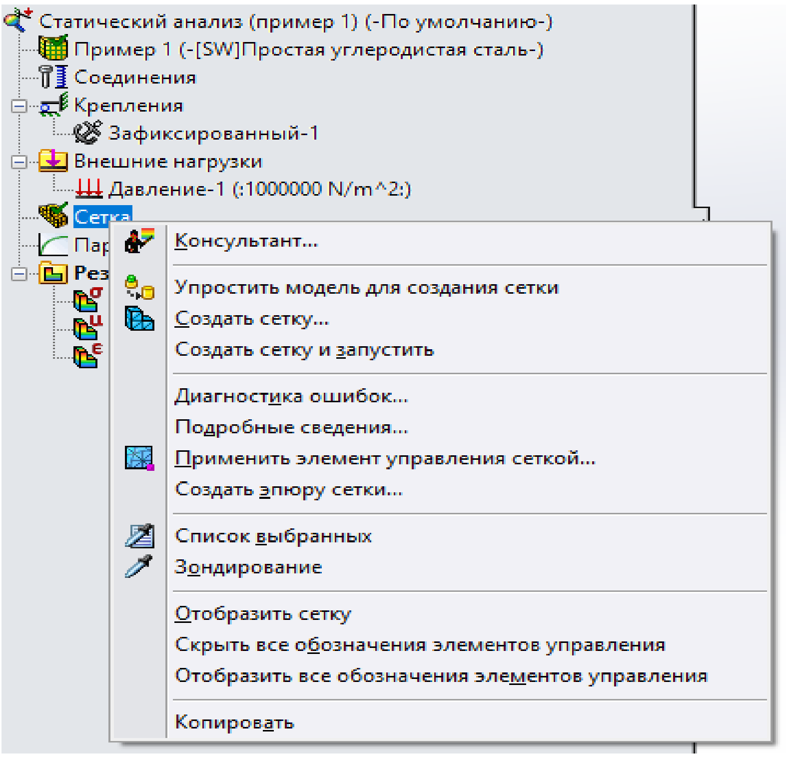


Рисунок 4.13 – Контекстное меню по созданию сетки разбиения модели на конечные элементы и сопутствующие операции

На первом этапе ознакомления с работой продукта SolidWorks Simulation можно воспользоваться разбиением на элементы по умолчанию, которое предлагает программа при нажатии левой клавишей мыши на элементе «Создать сетку» (рисунок 4.13).

В результате выполнения этой операции будет показано меню с предложением плотности сетки разбиения, полученной автоматически (рисунок 4.14).

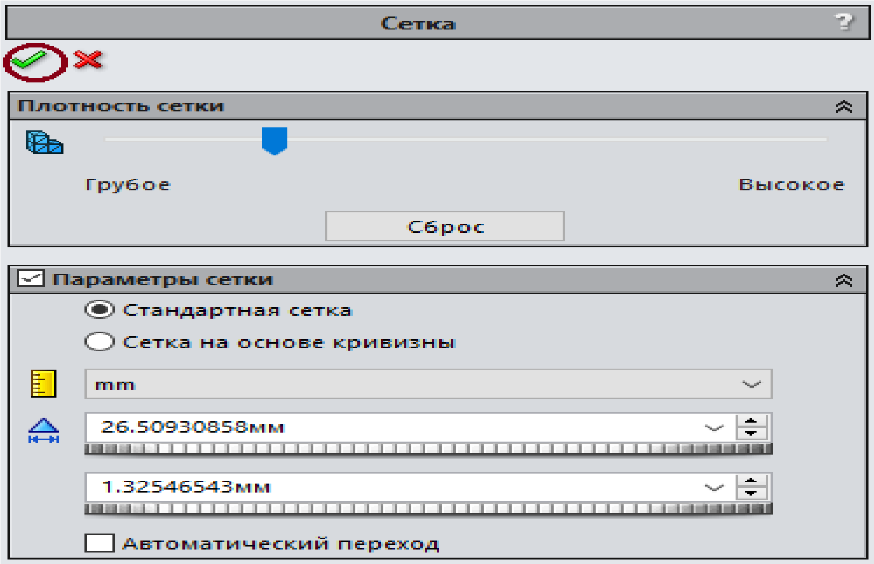


Рисунок 4.14 – Меню по определению параметров сетки разбиения модели на конечные элементы

При согласии с этим предложением, посредством нажатия «зеленой галочки», выделенной на рисунке 4.14 коричневым кружком, произойдет разбиение модели на элементы. Затем, после нажатия клавиши «Отобразить сетку» (см. рисунок 4.13), в графической части экрана высветится конечно-элементная модель исследуемого объекта (рисунок 4.15).

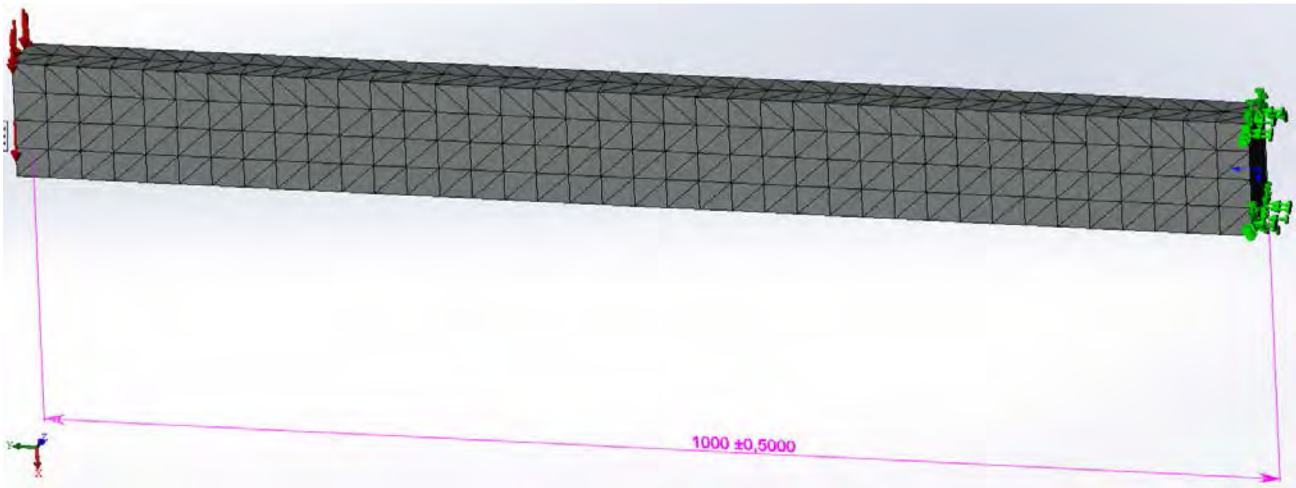


Рисунок 4.15 – Конечно-элементная модель консольно-закрепленной балки, нагруженной на свободном конце поперечной нагрузкой, равномерно распределенной по плоскости торца

После введения всей информации о конечно-элементной модели исследуемого объекта можно перейти непосредственно к расчетной части анализа, когда формируются матрицы жесткости всех конечных элементов, входящих в модель, объединенная матрица жесткости всей системы в целом и производится решение системы линейных алгебраических уравнений с определением вектора-столбца перемещений всех узловых точек модели.

Настройка параметров расчетной части исследования осуществляется посредством щелчка правой клавиши мыши по корню дерева менеджера Simulation в том месте, где обозначается тип анализа. В результате высвечивается контекстное меню, представленное на рисунке 4.16.

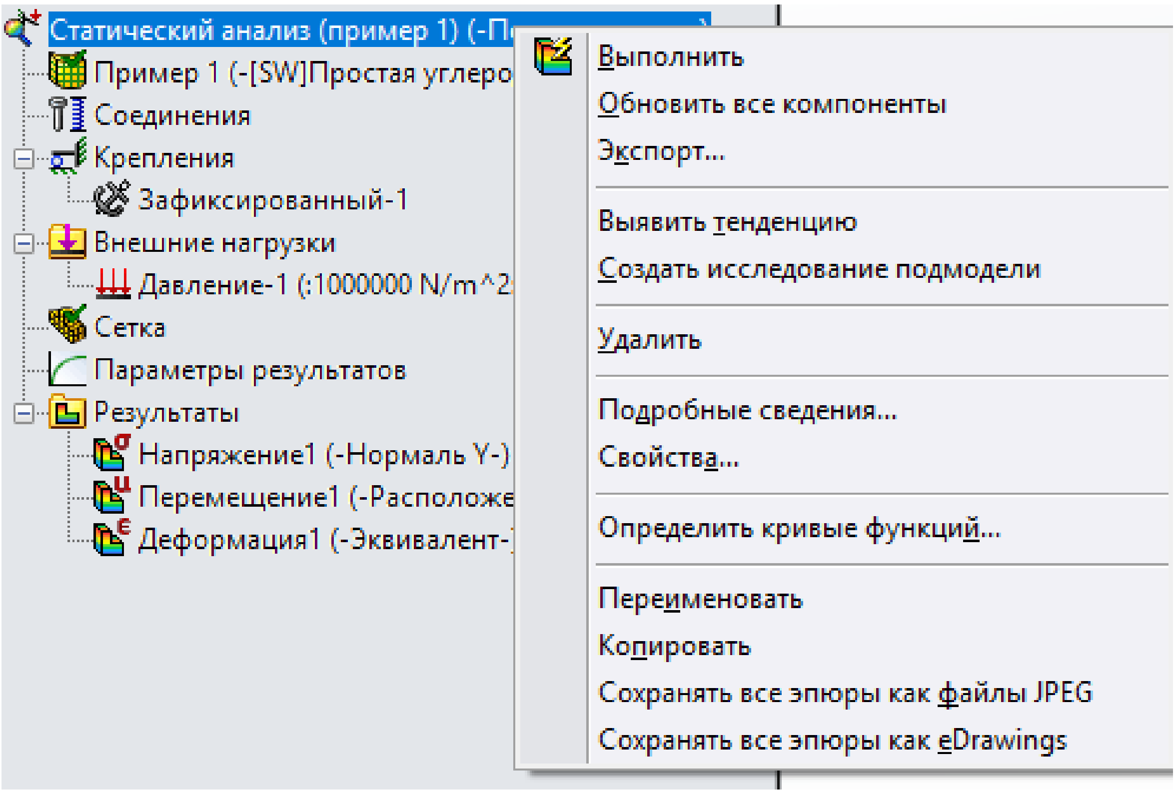


Рисунок 4.16 – Контекстное меню проводимого анализа

Посредством щелчка левой клавишей мыши по пункту контекстного меню «Выполнить» (рисунок 4.16) происходит запуск программы расчета задачи с параметрами «по умолчанию». Если есть необходимость произвести коррекцию параметров расчета, то в этом случае нажатие левой клавиши на разделе «Свойства…» приведет к появлению нового меню, отображенного на рисунке 4.17.

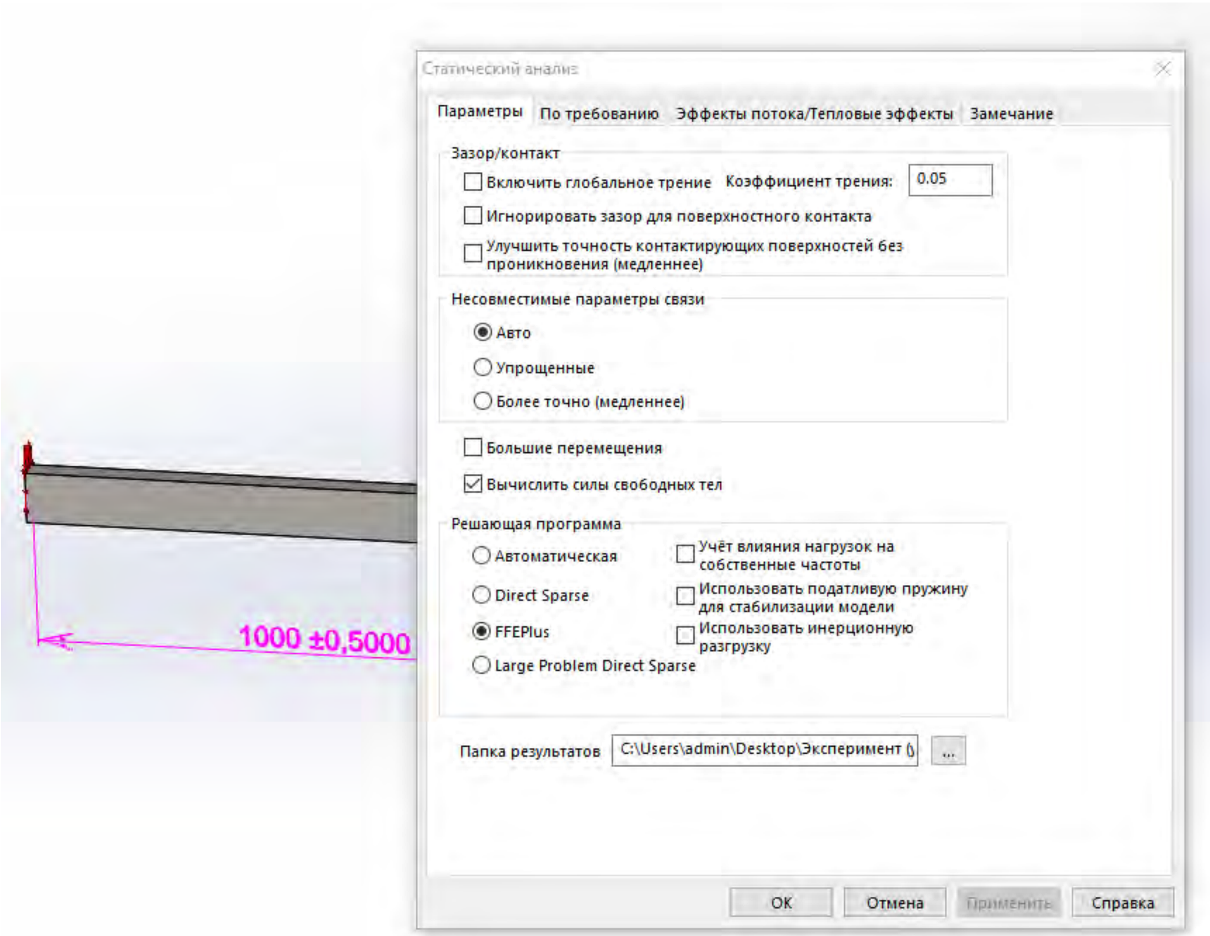


Рисунок 4.17 – Меню параметров статического анализа

В таблице 4.2 приведена справка по диалоговому окну «Статический анализ».

Таблица 4.2 – Диалоговое окно «Статический анализ»

Зазор/контакт	
Включить глобальное трение	Позволяет включить или пренебречь влиянием трения условий глобального контакта. Настоящий флажок не управляет условиями локального контакта. Программное обеспечение рассчитывает силы статического трения путем умножения сил по нормали, образующихся на контактирующих площадях, на заданный коэффициент трения. Направление силы трения в местоположении противоположно направлению движения в этом местоположении
Коэффициент трения	Устанавливается коэффициент статического трения для условий глобального контакта. Для условий локального контакта коэффициент трения задан в PropertyManager «Набор контактов» для каждого условия. Коэффициент трения должен быть между 0 и 1,0
Игнорировать зазор для поверхностного контакта	Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа учитывает по умолчанию условия контакта вне зависимости от начального расстояния между определенной пользователем пары поверхностей

Продолжение таблицы 4.2

Улучшить точность контактирующих поверхностей без проникновения (медленнее)	Настоящий метод дает непрерывные и более точные напряжения в областях контактов без проникновения. Этот метод используется при определении контактов между гранями и гранями или гранями и кромками. Он также гарантирует сходимость при использовании h-адаптивного метода. Когда выбран настоящий параметр, программному обеспечению может потребоваться больше времени для решения задачи. Настоящий метод в литературе называется «строительный контакт»
Несовместимые параметры связи	
Авто	Если связанный контакт поверхности к поверхности по умолчанию значительно снижает производительность решения, решающая программа переключается на связанный контакт узла к поверхности автоматически. Автоматическое переключение доступно для статических, частотных, линейных динамических исследований и исследований потери устойчивости
Упрощенные	Программа корректирует контакт связи поверхностей по умолчанию и переходит к контакту связи узлов. Выберите этот параметр только в случаях возникновения проблем с быстродействием при решении моделей с большим количеством контактирующих поверхностей. Если для анализа 2D - упрощения выбран этот параметр, программа применяет контакт связи узлов к кромке
Более точно (медленнее)	Постановка задачи для поверхностного контакта по умолчанию занимает намного больше времени, чем постановка задачи для контакта узлов. Для анализа 2D - упрощения решающая программа применяет контакт связи кромок
Дополнительные параметры	
Большие перемещения	Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа прикладывает нагрузки постепенно, равномерно и ступенчато до их полных значений, выполняя итерации контакта на каждом шаге. Количество шагов определяется программой внутренне. Этот параметр не доступен для исследований 2D - упрощения
Вычислить силы свободных тел	Выберите этот флажок, чтобы инструктировать прикладную программу о подготовке масштабной сетки равновесия сил в каждом узле. После запуска исследования с этим установленным флажком нажмите правой кнопкой мыши папку «Результаты» и выберите «Вывести силы реакции», чтобы вывести список сил, которые действуют на грани, кромке и вершине. Силы могут исходить от контакта, внешних нагрузок, ограничений или соединителей. Этот параметр не доступен для исследований 2D - упрощения

Окончание таблицы 4.2

Решающая программа Позволяет задать решающую программу для использования при выполнении статического анализа	
Автоматический	Программное обеспечение выбирает решающую программу на основе типа исследования, параметров анализа, условий контакта и т. п. Некоторые параметры и условия применимы только либо для Direct Sparse, либо для FFEPlus
Direct Sparse	Установите флажок этого параметра для использования решающей программы Direct Sparse
FFEPlus	Используйте решающую программу FFEPlus, чтобы запустить исследование. Настоящая решающая программа использует усовершенствованное переупорядочение матрицы, что делает ее более эффективной для больших задач
Large Problem Direct Sparse	Использование улучшенных алгоритмов распределения памяти помогает решающей программе Large Problem Direct Sparse в обработке проблем моделирования, сложность которых превышает возможности физической памяти вашего компьютера. При первоначальном выборе решающей программы Direct Sparse и в связи с ограниченными ресурсами памяти при отыскании решения, отличного от базового, отображается предупреждение о необходимости переключения на Large Problem Direct Sparse
Учёт влияния нагрузок на собственные частоты	Включите этот параметр, чтобы учитывать влияние нагрузки в своей плоскости при расчете жесткости
Использовать незакаленную пружину для стабилизации модели	Установите флажок у этого параметра, чтобы инструктировать программу добавить мягкие пружины, прикрепленные к основанию для предотвращения неустойчивости. Если приложить нагрузки к неустойчивой конструкции, она будет перемещаться и/или вращаться, как твердое тело. Вы должны применить соответствующие ограничения, чтобы предотвратить движение твердого тела
Использовать инерционную разгрузку	Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа автоматически прикладывает инерционные силы, чтобы уравновесить несбалансированную внешнюю нагрузку. Настоящий параметр является в особенности полезным, когда вы импортируете нагрузки из пакета движения (SolidWorks Motion), где внешние нагрузки могут быть немного несбалансированны. Когда у настоящего параметра установлен флажок, можно решать структурные задачи без необходимости применять ограничения или активизировать параметр "мягкая пружина", чтобы стабилизировать модель от перемещений твердого тела

После проведения расчета с помощью щелчка левой клавишей мыши по дереву менеджера Simulation в том месте, где высвечивается пункт «Результаты» (рисунок 4.18), будет раскрыто меню, использование которого позволит просмотреть итоги численного анализа.

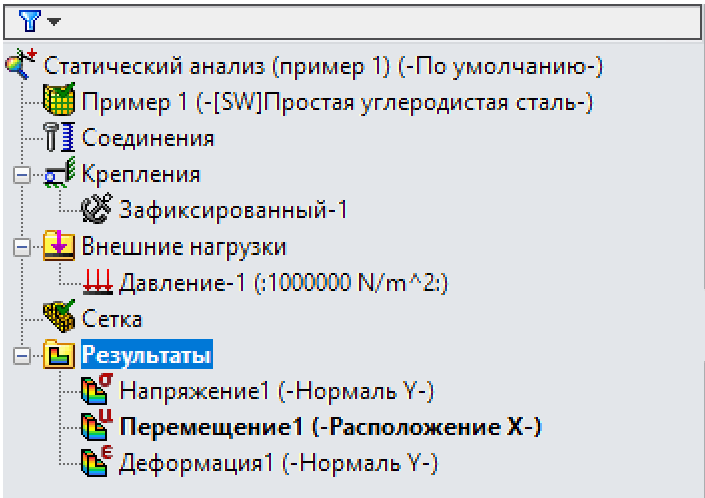


Рисунок 2.18 – Меню пункта «Результаты» после проведения расчета

Как видно, для проведенного анализа программа исследования представила три типа результирующих параметров – напряжения, перемещения и деформации. Дважды щелкнув левой клавишей мыши по соответствующему параметру, представленному в данном меню, можно получить картину распределения данной физической величины по поверхности расчетной модели. При этом распределение параметра изображается в цвете с одновременным представлением шкалы значений. На рисунках 4.19–4.21 приведено распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки σ_y, перемещений балки в вертикальном направлении UX и относительных линейных деформаций ε_y в направлении, перпендикулярном поперечному сечению.

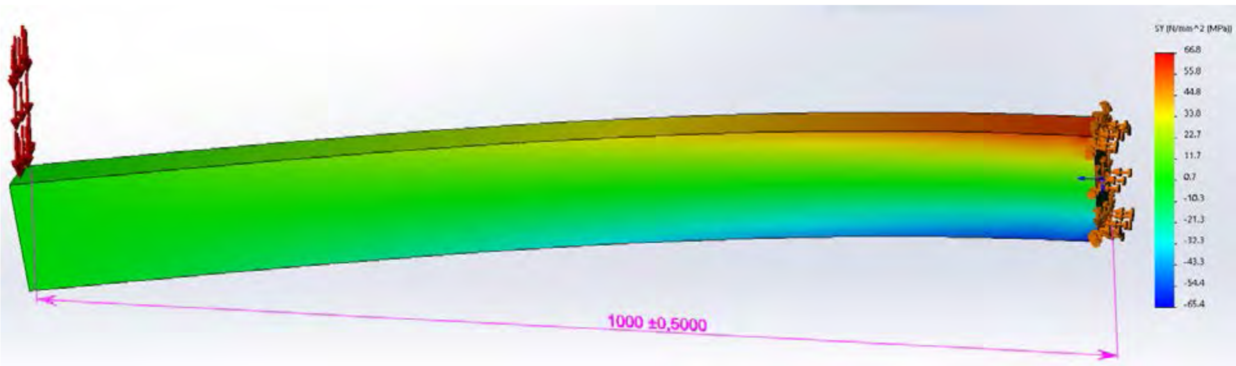


Рисунок 4.19 – Распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

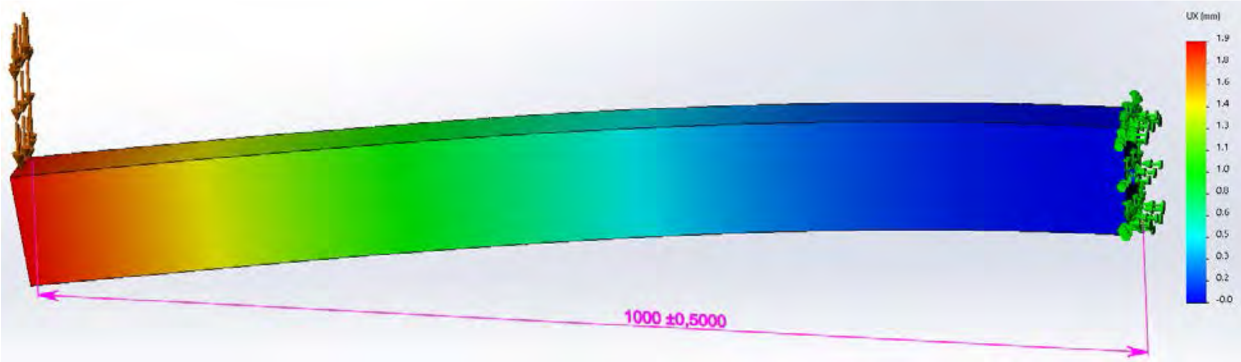


Рисунок 4.20 – Перемещения точек поверхности балки в вертикальном направлении

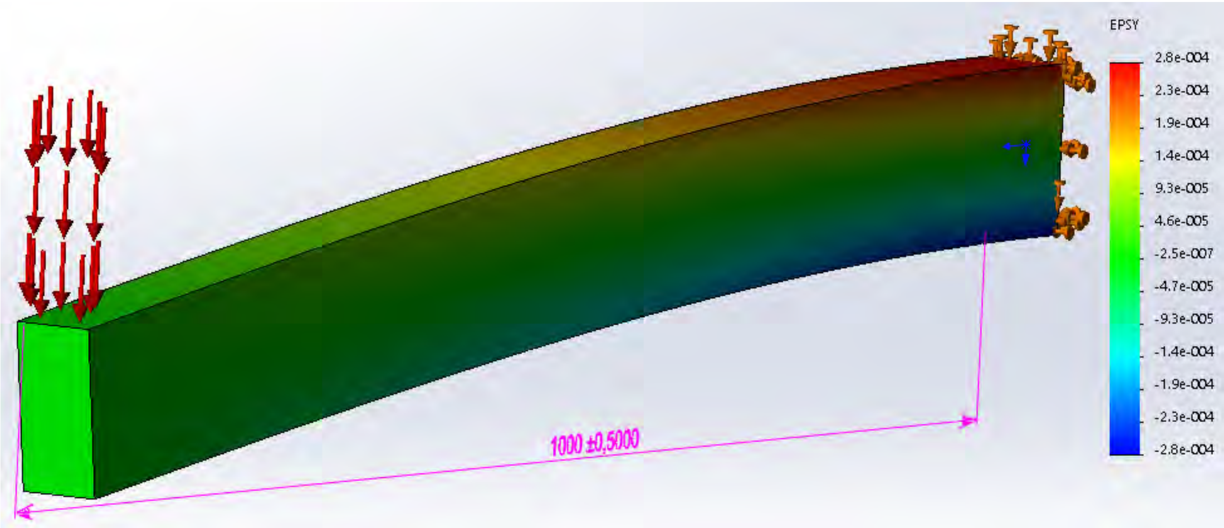


Рисунок 4.21 – Распределение относительных линейных деформаций ε_y в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

Здесь следует отметить, что при подготовке картины распределения соответствующего параметра по поверхности разработанной модели SolidWorks Simulation предоставляет большие возможности в формировании и виде выводимой информации. Для этого необходимо правой клавишей мыши щелкнуть по пункту меню, в котором указан физический параметр, выводимый в качестве рисунка, в результате высветится еще одно меню, разделами которого являются пункты предлагаемого редактирования (рисунок 4.22).

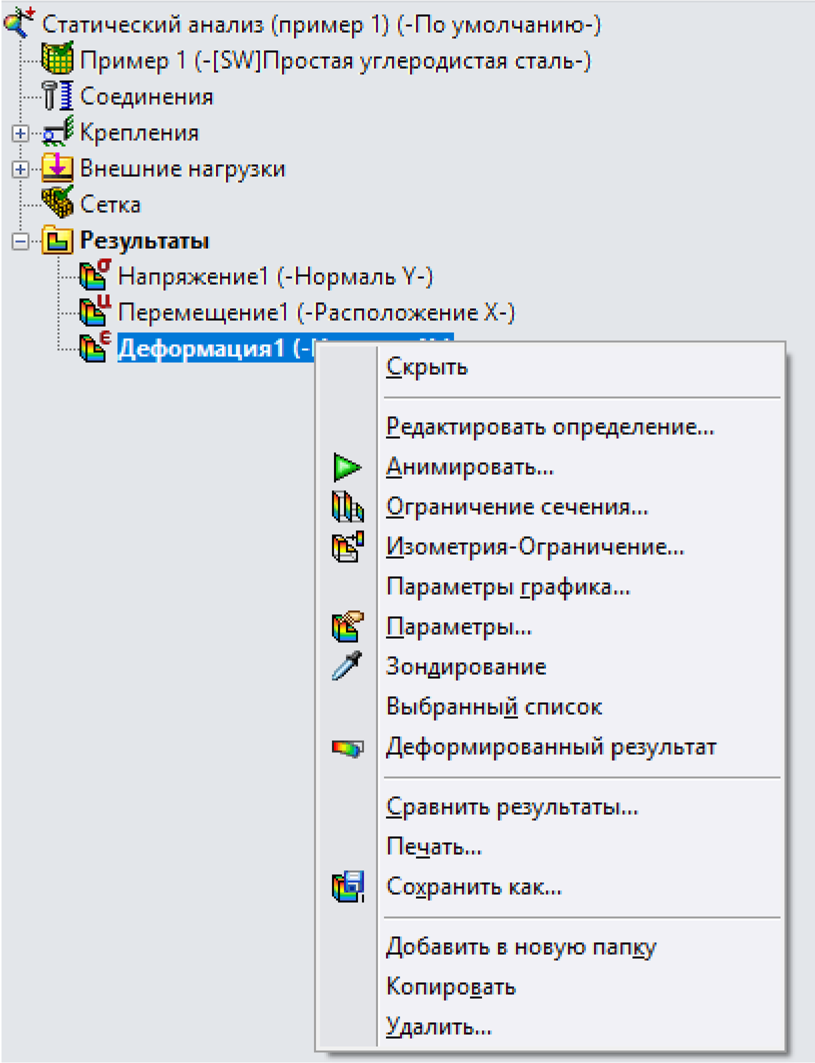


Рисунок 4.22 – Пункты возможного редактирования выводимой графической информации о результатах анализа

В таблице 4.1 были приведены различные типы проводимого в Simulation анализа. Среди них имеется анализ по проверке «Потери устойчивости». Этот анализ позволяет определить величину критической нагрузки, при которой изделие теряет устойчивость, а также соответствующую ей форму потери устойчивости. Далее предлагается пример расчета центрально-сжатого продольной силой стержня на предмет потери устойчивости. Твердотельная модель анализируемого в этом примере объекта была идентична той, что рассматривалась в статическом анализе расчета балки на изгиб. Это лишний раз подчеркивает возможности программного обеспечения Simulation по всестороннему анализу изделия без дополнительных трудозатрат по подготовке геометрической модели в каждом конкретном случае.

На рисунке 4.23 приведена предлагаемая для расчета модель продольно-сжатого стержня усилием 100000 Н, прямоугольного поперечного 50 х 100 мм, длиной 1000 мм, нижний край которого жестко защемлен. Кроме того, на рисунке 4.23 представлено дерево менеджера Simulation применительно к расчетам по проверке потери устойчивости. Сетка разбиения данной модели на конечные элементы осталась прежней, поэтому она не приводится в предлагаемом графическом материале.

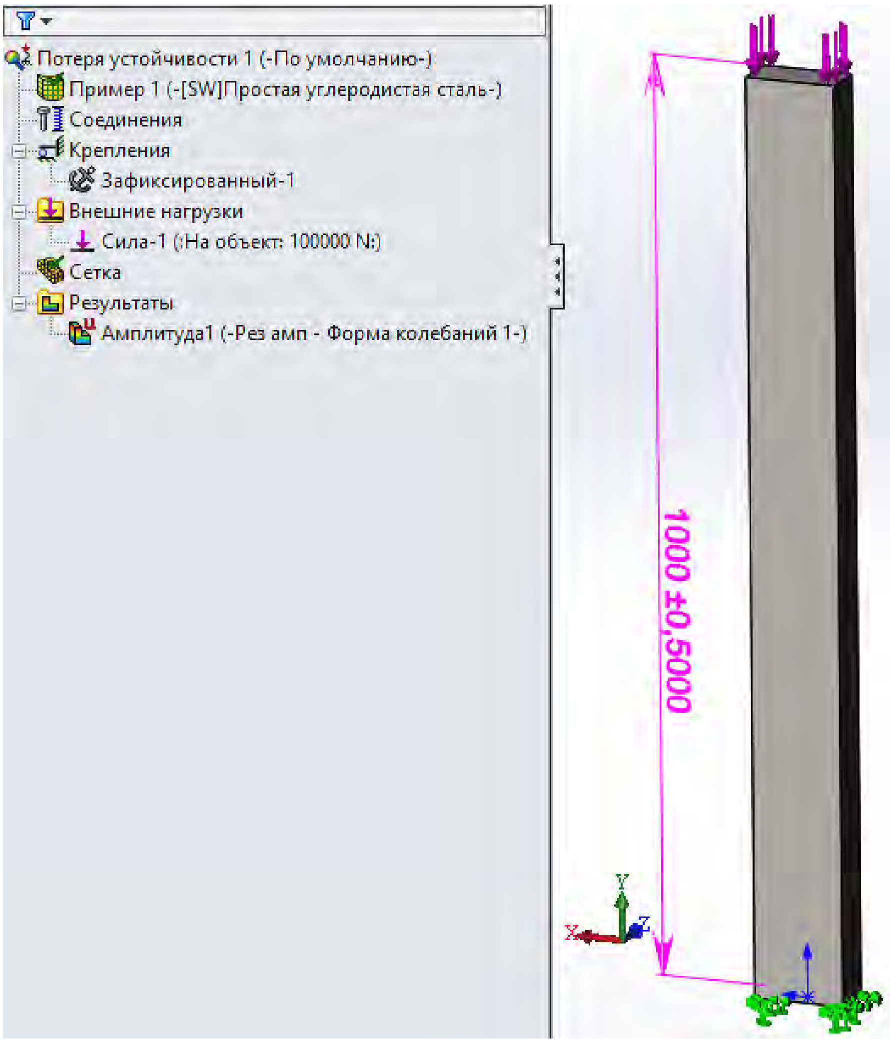


Рисунок 4.23 – Модель расчета продольно-сжатого стержня усилием 100000Н, прямоугольного поперечного 50 x 100 мм, длиной 1000 мм, нижний край которого жестко защемлен и дерево менеджера Simulation применительно к расчетам по проверке потери устойчивости

Кроме уже отмеченной информации, для проведения расчета на устойчивость, в разделе контекстного меню «Свойства» (рисунок 4.24) необходимо указать количество используемых форм потери устойчивости. Как правило, первая форма потери устойчивости является наиболее информативной с точки зрения определения наименьшей критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости. Остальные параметры можно оставить «по умолчанию».

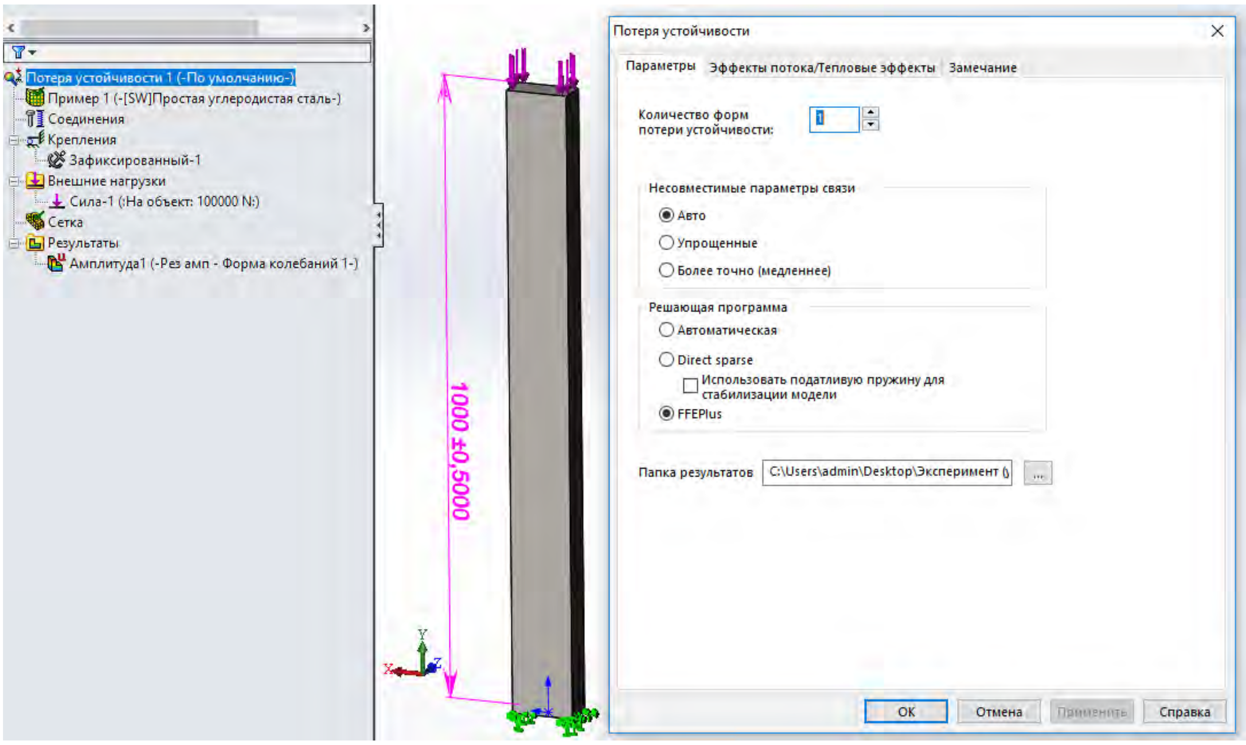


Рисунок 4.24 – Параметры контекстного меню «Свойства» при проведении расчетов на устойчивость

После проведения завершающего расчета посредством щелчка левой клавишей мыши по дереву менеджера Simulation в том месте, где высвечивается пункт «Результаты» (см. рисунок 4.24), будет раскрыто меню, использование которого позволит просмотреть итоги численного анализа на возможную потерю устойчивости объекта. Дважды щелкнув левой клавишей по разделу меню (в данном примере это «Амплитуда 1») на мониторе появится картинка (рисунок 4.25) с информацией о форме потери устойчивости и значении коэффициента запаса устойчивости n_y:

$$n_y = \frac{P_{КР}}{P_{ЗАД}},$$

где $P_{КР}$ – критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости; $P_{ЗАД}$ – нагрузка, при которой изделие эксплуатируется. Как видно, в рассматриваемом примере (см. рисунок 4.25) коэффициент запаса устойчивости $n_y = 5{,}41$.

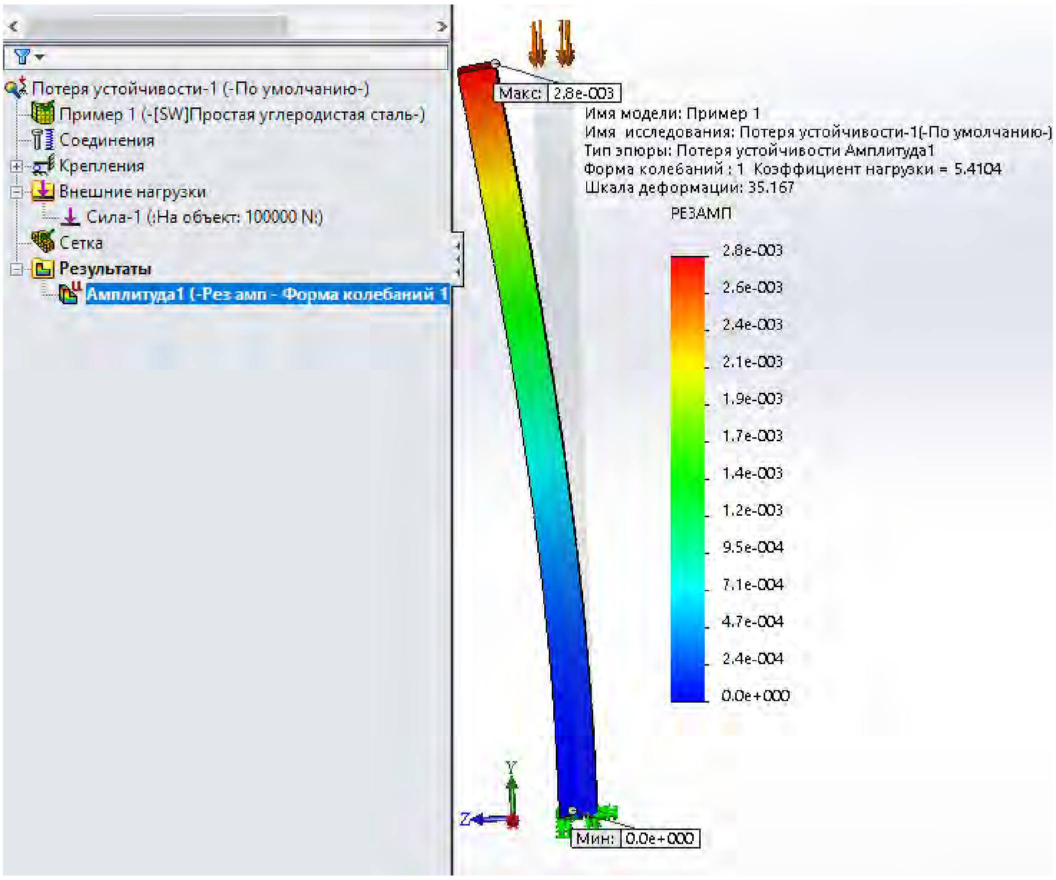


Рисунок 4.25 – Форма потери устойчивости, наложенная на недеформированное состояние и числовые значения эпюры формы (колебаний/амплитуд «РЕЗАМП»)

Числовые значения эпюры формы (колебаний/амплитуд «РЕЗАМП») показывают относительные (безразмерные) значения амплитуд для рассматриваемой формы. Здесь параметр «РЕЗАМП» представляет собой результирующую амплитуду без привязки к какой-либо координатной оси.

Определим теперь величину критического усилия $P_{КР}$ и запас устойчивости n_y, полученные на основании использования подходов курса «Сопротивление материалов». Для приведенного поперечного сечения стойки минимальный осевой момент инерции

$$I_{\min} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{(50)^3 100}{12} 10^{-12} = 10,42 \cdot 10^{-7} M^4.$$

Заданному характеру закрепления колонны соответствует коэффициент, учитывающий условия закрепления, равный $\mu = 2$.

Минимальный радиус инерции принимает следующее значение:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{10,42 \cdot 10^{-7}}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = 1,69 \cdot 10^{-2} M.$$

Тогда максимальная гибкость колонны будет соответственно

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu\ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1}{1,69 \cdot 10^{-2}} = 118.$$

Для полученного значения гибкости стальной колонны критическая величина сжимающей нагрузки может быть определена с помощью формулы Эйлера как

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 10,42 \cdot 10^{-7}}{(2 \cdot 1)^2} = 539370 H.$$

Тогда запас устойчивости

$$n_у = \frac{P_{КР}}{P_{ЗАД}} = \frac{539370}{100000} = 5,393.$$

Как видно, данные, полученные с использованием методов, предлагаемых в курсе «Сопротивление материалов», достаточно хорошо согласуются с результатами конечно-элементного анализа, проведенного в оболочке COSMOSWorks (Simulation), что лишний раз подтверждает право на существование обоих подходов.

5 Выполнение расчетно-проектировочного задания «Расчет балки на поперечный изгиб и колонны на устойчивость методом конечных элементов в среде SolidWorks Simulation»

Исходные данные.

Расчетные схемы выполняемых исследований представлены на рисунке 5.1, варианты поперечных сечений приведены в приложении *А*. Величины внешней нагрузки и параметры размеров поперечного сечения, в приложении *А*, задаются преподавателем. Во всех вариантах заданий материалом изделия является низкоуглеродистая сталь.

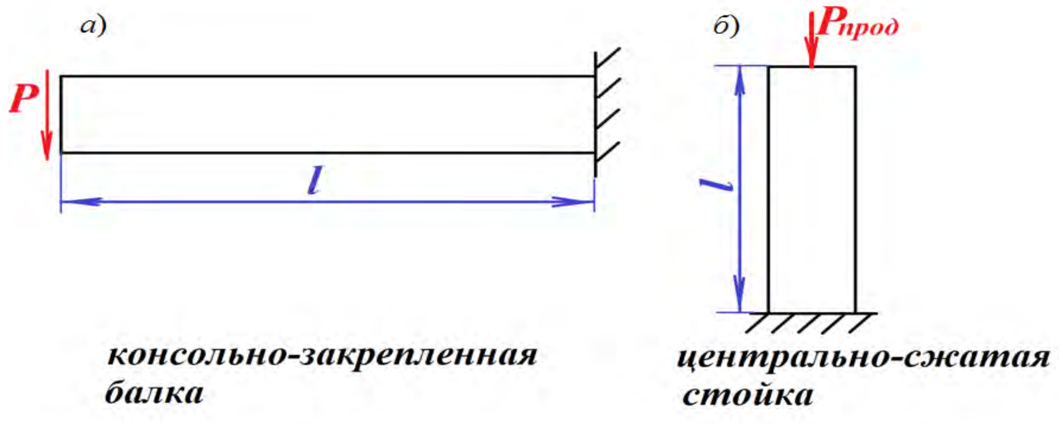


Рисунок 5.1 – Схемы расчета балки при поперечном изгибе (*а*) и колонны (*б*) на устойчивость

Требуется.

1 Произвести расчет балки на поперечный изгиб и стойки на устойчивость с помощью пакета прикладных программ «**SolidWorks**»:

– построить пространственную модель балки (стойки) с заданным поперечным сечением;

– произвести расчет балки и стойки (колонны) методом конечных элементов с помощью приложения программного пакета «**SolidWorks**» – «**Simulation**».

2 Выполнить расчеты рассматриваемых объектов методами курса «Сопротивление материалов» [4, 5, 6, 7]:

– определить геометрические характеристики поперечного сечения;

– вычислить максимальные напряжения для балки при поперечном изгибе;

– определить значение коэффициента запаса устойчивости колонны.

3 Сопоставить результаты проведенных расчетов в пунктах 1 и 2.

Порядок выполнения расчетно-проектировочного задания:

1) получить у преподавателя исходные данные к выполнению расчетно-проектировочного задания;

2) вычислить геометрические характеристики поперечного сечения;

3) построить пространственную геометрическую модель анализируемого объекта;

4) ввести необходимые данные для проведения конечно-элементного анализа в среде «**Simulation**»;

5) произвести соответствующие расчеты и сопоставить результаты, полученные методами курса «Сопротивление материалов» и методом конечных элементов.

Список литературы

1 **Сегерлинд, Л.** Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – Москва : Мир, 1979. – 392 с.

2 **Стренг, Г.** Теория метода конечных элементов / Г. Стренг. – Москва : Мир, 1977. – 435 с.

3 **Усюкин, В. И.** Строительная механика конструкций космической техники / В. И. Усюкин. – Москва : Машиностроение, 1988. – 390 с.

4 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. − 5-е изд. – Москва: РИОР; НИЦ ИНФРА-М., 2014. − 543 с.

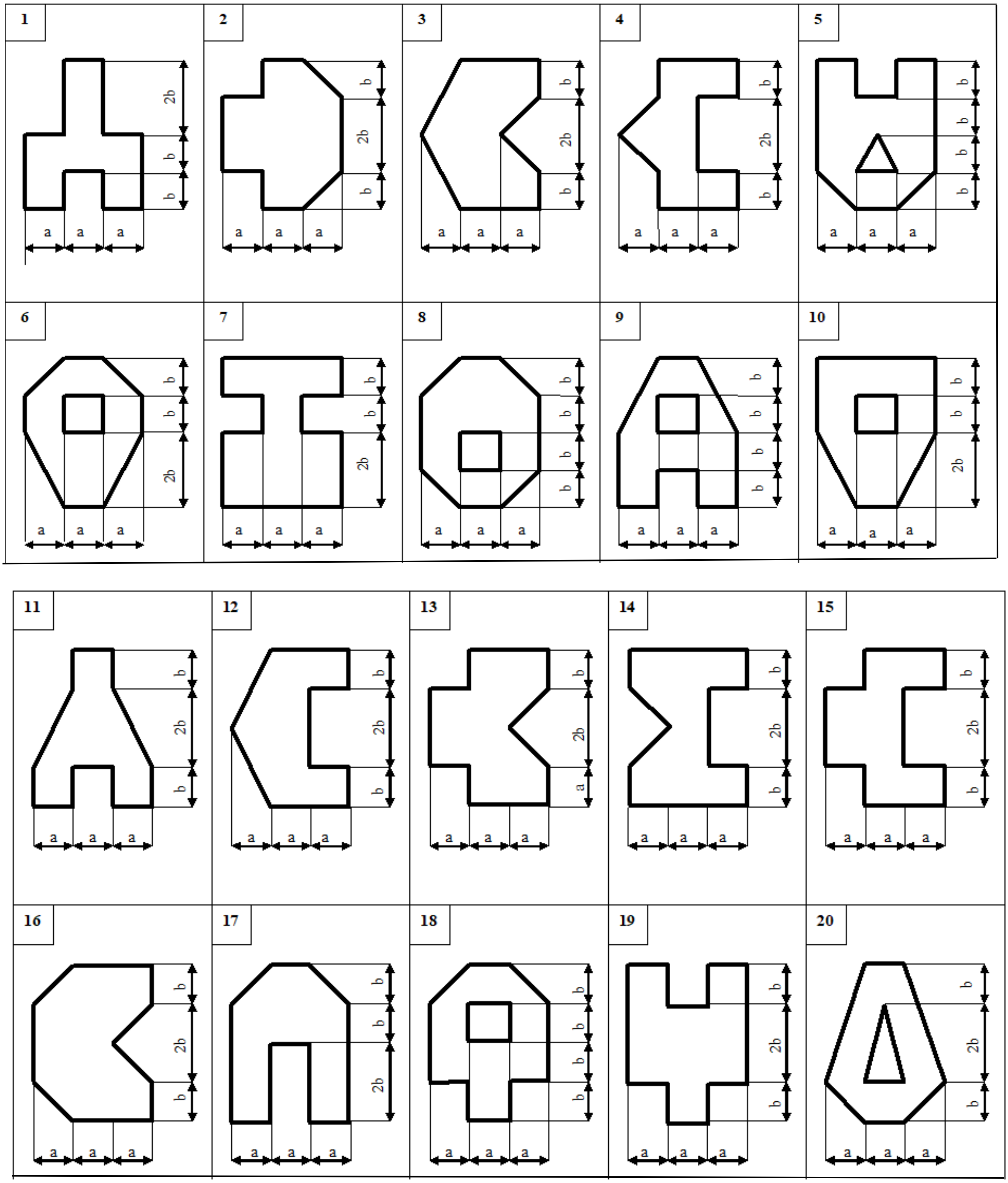
5 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. − Москва : ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2015. − 112 с. : ил.

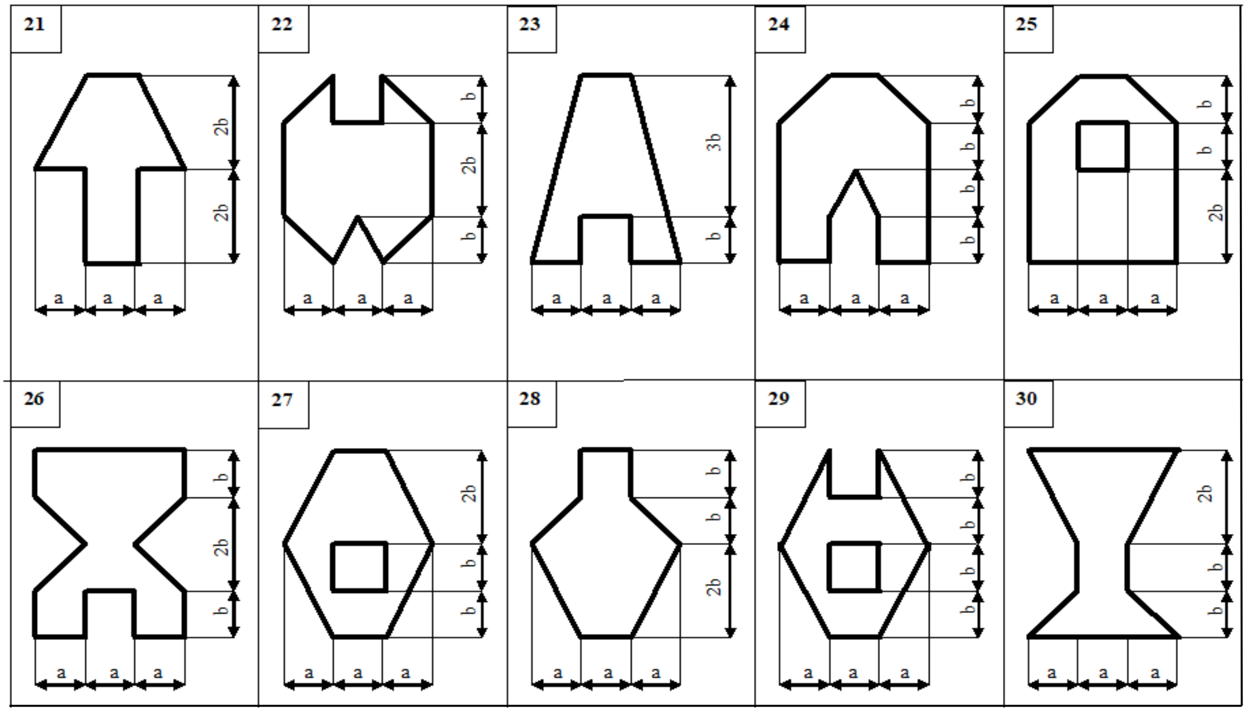
6 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. − Москва : Юрайт, 2016. − 413 с.

7 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2-е изд., испр. и доп. − Москва: ИНФРА-М, 2011. − 638 с.

Приложение *А*
(обязательное)

Исходные данные для выполнения расчетно-проектировочного задания




21
22
23
24
25
26
27
28
29
30