рой студентам предлагается погрузиться в конкретную экономическую проблему и смоделировать реальную бизнес-ситуацию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии решения: учебное пособие / И. Л. Акулич [и др.]. – Минск: БГЭУ, 2003. – 348 с.
2. **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 351 с.
3. **Курицкий, Б. Я.** Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – Санкт-Петербург: BHV-Санкт-Петербург, 1997. – 384 с.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ X ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

X Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике [1–3] состоялась 21 февраля 2019 г. В соревновании приняли участие 52 студента и аспиранта из 23 вузов Беларуси, Грузии, Польши, России и Таджикистана. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 часов. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчёте количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Горно-металлургической академии имени Станислава Сташица (Польша) Томаш Бохатик, давший 20 правильных ответов. Второе и третье места заняли студенты университета имени Адама Мицкевича в Познани (Польша) Войтех Ваврув (22 правильных ответа) и Гжегож Адамски (19 правильных ответов).

Наиболее сложными заданиями десятой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1, 2 и 3. Задачу 1 не решил ни один участник, а правильные ответы в задачах 2 и 3 смогли дать лишь по 3 участника.

Задача 1 [4, с. 56]. Найдите интеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx$, где $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция.

Решение

Производя замену $x = 1 - t$, получаем

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-x)\sin\pi x dx.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\big(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\big)\sin\pi x dx,$$

откуда с помощью формулы дополнения

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p},\ 0 < p < 1,$$

находим

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\ln\pi - \ln\sin\pi x)\sin\pi x dx = \frac{1}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\sin\pi x \sin\pi x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{2\pi}\Big(\cos\pi x + (1-\cos\pi x)\ln\sin\pi x - \ln(1+\cos\pi x)\Big)\Big|_{+0}^{1-0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 2 [4, с. 38]. Найдите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-0,01x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение

Рассмотрим интеграл $I\left(\alpha\right)=\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, $\left|\alpha\right|\le 1$.

Пусть $\left|\alpha\right|\le 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$. Тогда при фиксированном ε функции

$$f:\left(x,\alpha\right)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}, x\ne 0,\\ -\alpha^2, x=0,\end{cases}$$

$$f'_\alpha:\left(x,\alpha\right)\mapsto\frac{-2\alpha}{\left(1-\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

непрерывны в области $\left|\alpha\right|\le 1-\varepsilon$, $\left|x\right|<1$. Интеграл $I\left(\alpha\right)$ сходится по признаку сравнения, а интеграл

$$I'\left(\alpha\right)=-2\int\limits_0^1\frac{\alpha dx}{\left(1-\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно на отрезке $\left|\alpha\right|\le 1-\varepsilon$,

$$\left|f'_\alpha\left(x,\alpha\right)\right|\le\frac{2}{\left(1-\left(1-\varepsilon\right)^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$$

Следовательно, дифференцирование по параметру α под знаком интеграла возможно при $\left|\alpha\right|\le 1-\varepsilon$.

Полагая в (1) $x=\sin t$, получаем

$$I'\left(\alpha\right)=-2\alpha\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t}=-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = \pi\sqrt{1-\alpha^2} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = -\pi$. Следовательно,

$$I(\alpha) = \pi\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right) - 1. \qquad (2)$$

В силу произвольности ε, заключаем, что этот ответ пригоден при $|\alpha| < 1$. В частности, при $\alpha = 0{,}1$ по формуле (2) получаем

$$I(0{,}1) = \pi\left(\sqrt{0{,}99} - 1\right).$$

Видим, что функция f непрерывна в области $|\alpha| \le 1$, $|x| < 1$. В силу признака Вейерштрасса, интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на сегменте $|\alpha| \le 1$, $f(x,\alpha) \le \dfrac{\left|\ln\left(1-x^2\right)\right|}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, функция I непрерывна при $|\alpha| \le 1$. Поэтому $I(\pm 1) = \lim\limits_{|\alpha| \to 1-0} I(\alpha)$, т. е. формула (2) справедлива при $\alpha = \pm 1$.

Ответ: $\pi\left(\sqrt{0{,}99} - 1\right)$.

Правильный ответ в задании 2 дал победитель олимпиады Томаш Бохатик, а также студенты Таджикского национального университета Шохрух Хусенов и Файзулло Исматов.

Задача 3 [5, с. 49]. Пусть $x^*(t)$ – решение дифференциального уравнения $\dot{x}\sin 2t = 2(x + \cos t)$, которое остаётся ограниченным при $t \to \dfrac{\pi}{2}$. Найдите $x^*\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Из рассмотрения общего решения этого уравнения

$$x = C\,\mathrm{tg}\,t - \frac{1}{\cos t}$$

следует, что $\lim\limits_{t \to \pi/2} x(t) = \lim\limits_{t \to \pi/2}\left(C\,\mathrm{tg}\,t - \dfrac{1}{\cos t}\right)$ существует лишь при $C = 1$ и равен нулю. Поэтому $x^* = \mathrm{tg}\,t - \sec t$ является требуемым решением.

При $t = \dfrac{\pi}{4}$ получаем $x^*\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$.

Ответ: $1 - \sqrt{2}$.

Правильные ответы в задании 3 дали Гжегож Адамски, Достонжон Баротов (Худжандский государственный университет имени академика Бободжона Гафурова, Таджикистан) и Якуб Гоголёк (Силезский университет в Катовицах, Польша).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 4, 5 и 6, правильные ответы в которых дали 39, 37 и 32 участника соответственно.

Задача 4 [6, с. 91]. Найдите количество всех натуральных делителей числа 10^{999}, которые не являются делителями числа 10^{998}.

Ответ: 1999.

Задача 5. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений выражения $f(x,y) = y - x^2$, если $|x| + |y| \le 13$.

Ответ: -156.

Задача 6. Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее уравнению $x - \left[\sqrt{x}\right]^2 = 2019$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x.

Ответ: 1022119.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 22–24.

2. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач VIII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2018. – С.12–15.

3. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач IX Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 40.

4. Справочное пособие по высшей математике. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.

5. **Боярчук, А. К.** Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А. К. Боярчук, Г. П. Головач. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 384 с.

6. **Бахтина, Т. П.** Математика. Подготовка к олимпиадам: 6–9 классы / Т. П. Бахтина. – Минск: Аверсэв, 2015. – 221 с.

УДК 515.1 (0.78)

КРАТКАЯ СХЕМА ПОВТОРЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОЦЕНТЫ»

Ю. П. ЗОЛОТУХИН
Гродненский государственный университет имени Я. Купалы
Гродно, Беларусь

Как известно, *один процент* по определению есть одна сотая: *1 %* = $\frac{1}{100}$. Таким образом, *p %* есть $\frac{p}{100}$: *p* % = $\frac{p}{100}$. Соответственно, *одним процентом от числа* А называют сотую часть (долю) этого числа: *1 % от А* равен $\frac{1}{100}$·А, соответственно, *p % от А* равно $\frac{p}{100}$·А. При этом число А принимается за 100 % и называется *процентной* (иногда – *сто-процентной*) *базой*. Число, которое выражается в процентах от А, будем называть *объектом*.

Аналогичным образом определяются *процент от величины* и связанные с ним понятия.

Важнейшими умениями, необходимыми для уверенного решения задач на проценты, являются выявление процентной базы и объекта в условии данной задачи. Необходимо иметь в виду, что часто используется «принцип умолчания», состоящий в том, что в условии задачи процентная база и объект не указываются явно. В связи с этим, а также учитывая, что любую задачу на проценты можно сформулировать в различных, но синонимически равноценных формах, проблема их решения во многом превращается в лингвистическую.

В частности, следует придерживаться нормативного подхода к сравнению процентов, согласно которому правильными считаются выражения «p % больше q % на p – q *процентных пунктов*» и «p % больше q % на $\frac{p-q}{q}$·100 процентов» ([1]). Заметим, что в некоторых источниках, и даже в учебных пособиях, при формулировании условий задач иногда используется ненормативное сравнение процентов. В таких случаях преподаватель должен уметь прокомментировать ситуацию и предложить нормативную перефразировку задачи.

Можно выделить семь основных (*опорных*) *задач на проценты*.