УДК 517.2

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ»

Т. Ю. ОРЛОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В связи с переходом на четырехлетнее обучение в вузах происходит сокращение часов по общеобразовательным дисциплинам, в том числе и по математике. Кроме этого, студенты одной академической группы имеют разный уровень математической подготовки. В связи с этим во время аудиторных занятий нет возможности уделить должное внимание математически одаренным студентам, которые хотят и могут совершенствовать свои способности [2].

Поэтому в Белорусско-Российском университете для студентов, которые желают углубленно изучать математику, развивать логическое мышление, а также участвовать в различных математических олимпиадах, работает математический кружок [1].

Ранее мы рассмотрели системы упражнений для математического кружка, начав с темы «Матрицы» [2]. Продолжая тему работы математического кружка, приведу подборку задач по теме «Производная» и методы их решения.

1. Вычислить $f'(1999)$, если $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1999)$ [3].

Решение данной задачи обычно не вызывает у студентов затруднений, т. к. приём логарифмирования подробно рассматривается на занятиях по математике.

$$f'(x)=(x-1)\ldots(x-1999)+x(x-2)\ldots(x-1999)+x(x-1)\ldots(x-1998);$$

$$f'(1999)=0+0+\ldots+1999\cdot1998\cdot\ldots\cdot1=1999!$$

2. Найти $f'(0)$, если $f(x)=(3x+2)f(x^2)+2$ [3].

Дифференцируем $f(x)$:

$$f'(x)=3f(x^2)+(3x+2)\cdot f'(x)\cdot2x.$$

Находим $f(0)$:

$$f(0)=2f(0)+2;\; f(0)=-2.$$

Имеем

$$f'(0)=3f(0)=-6.$$

3. $f\left(\dfrac{x}{x+2}\right)=x$. Найти $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Задача решается аналогично предыдущей:

$$f'\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=1;\ \ f'\left(\frac{x}{x+2}\right)=\frac{(x+2)^2}{2};$$

$$\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2};\ \ x=2.$$

Имеем $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$. Найти $f^{(6)}(0)$.

Прямой подход (взять производную функции 6-го порядка) приведёт к громоздким выкладкам. Студент должен, проанализировав ситуацию, понять, в какой записи функции используются производные высших порядков. Вспомнив про ряд Тейлора, задачу можно решить довольно быстро.

Используем разложение функции в ряд Маклорена:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ \ \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Приравниваем коэффициенты при x^6:

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=-1;\ \ f^{(6)}(0)=-720.$$

5. $f(x)=(x-2)^2\ln(3x+2)$. Найти $f^{(2000)}(2)$ [3].

Решение – аналогично предыдущей задаче. Удобна замена $x-2=t$.

$$g(t)=t^2\ln 8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n t^{n+2}}{n8^n};$$

$$\frac{g^{(2000)}(0)}{2000!}=\frac{-3^{1998}}{1998\cdot 8^{1998}};\ f^{(2000)}(2)=\frac{-3^{1998}\cdot 2000!}{1998\cdot 8^{1998}}.$$

6. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Найти $f^{(7)}(0)$.

Решение – аналогично предыдущим задачам. Предварительно дифференцируем функцию:

$$f'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{\frac{1}{2}x^2}{1!}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^4}{2!}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}x^6}{3!}+\ldots.$$

$$\frac{(f')^{(6)}(0)}{6!}=-\frac{3\cdot 5}{8\cdot 3!};\ f^{(7)}(0)=(f')^{(6)}(0)=-225.$$

7. Что больше 100^{101} или 101^{100} ? (Internet Mathematics Olympiad for Students, университет Ариель, Израиль).

Рассмотрим функцию $y=\sqrt[x]{x}$. Исследуем её на монотонность:

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x;\ \ y'=\frac{\sqrt[x]{x}\,(1-\ln x)}{x^2}<0\ \ \forall x\in(e;+\infty).$$

Следовательно, $y=\sqrt[x]{x}$ убывает $\forall x\in(e;+\infty)$. Значит,

$$\sqrt[100]{100}>\sqrt[101]{101};\ \left(\sqrt[100]{100}\right)^{100\cdot 101}>\left(\sqrt[101]{101}\right)^{100\cdot 101};\ 100^{101}>101^{100}.$$

8. Найти кратчайшее расстояние между линиями: $3x^2+y^2=3,\ x+y=5$ [3].

Кратчайшим будет расстояние между данной прямой и касательной, проведённой к некоторой точке эллипса параллельно этой прямой. Следовательно, задача сводится к нахождению данной точки касания и расстояния от неё до прямой.

Так как прямые параллельны, то угловые коэффициенты равны. Имеем

$$y=5-x;\ k=-1.$$

$$6x+2yy'=0;\ \ y'=-\frac{3x}{y};\ \ -\frac{3x_0}{y_0}=-1;\ \begin{cases} y_0=3x_0, \\ 3x_0^2+y_0^2=3; \end{cases}$$

$$M_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\quad M_2\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

Найдём расстояние:

$$\rho(M_1;l)=\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-5\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad \rho(M_2;l)=\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Кратчайшим будет $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлова, Т. Ю.** Концепция кружка по углубленному изучению математики / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2018. – С. 19–20.
2. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Матрицы» / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 58–62.
3. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 171 с.

УДК 372. 851

О ПОДГОТОВКЕ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Л. А. РОМАНОВИЧ, Е. В. ПОПОВА
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

В современных условиях возрастает важность изучения предметов естественно-математического профиля. Во-первых, математика является основой многих технологий, во-вторых, развивает такие качества, как воля и сообразительность, критичность и гибкость ума, самостоятельность. Этим объясняется внимание, которое должно уделяться организации обучения