менном образовании: материалы III Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Наукоград Королев, 18 дек. 2015 г. – Москва, 2016. – С. 771–774.

7. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерное моделирование физических процессов с использованием системы Mathematica / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Наукоград Королев, 15 дек. 2017 г. – Москва, 2018. – С. 525–530.

8. Sympy [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.sympy.org/en/index.html. – Дата доступа: 07.01.2020.

9. SymPyGamma [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.sympygamma. – Дата доступа: 07.01.2020.

УДК 510.22

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ НА СЧЕТНОСТЬ

А. Ю. ЭВНИН
Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)
Челябинск, Россия

Приведём небольшую подборку красивых задач с различных студенческих олимпиад последних лет, решение которых основывается на счётности соответствующих множеств.

1. *Кузнечик ловит блоху, прыгающую по точкам плоскости* Oxy *с рациональными координатами. Блоха в моменты времени* $t = 0, 2, 4, 6, \ldots$ *прыгает на некоторый фиксированный вектор* $\boldsymbol{a}$, *а кузнечик в каждый из моментов* $t = 1, 3, 5, \ldots$ *может прыгнуть в любую точку плоскости. Сможет ли он поймать блоху, если её не видно, а начальное положение блохи и вектор* $\boldsymbol{a}$ *неизвестны*? [1]

Решение

Назовём *ситуацией* пару $(A, \boldsymbol{a})$, где A – точка, в которой блоха находилась в момент времени $t = 0$, $\boldsymbol{a}$ – вектор, на который прыгает блоха.

Из условия ясно, что координаты вектора $\boldsymbol{a}$ рациональны. Поэтому множество всех ситуаций, являясь декартовым произведением двух счётных множеств, счётно. Пронумеруем все ситуации натуральными числами. Для каждой ситуации можно определить, в какой точке плоскости должна находиться блоха в конкретный момент времени. Для i-й ситуации в i-й момент времени будем искать блоху в нужном месте плоскости. Перебирая последовательно все ситуации, кузнечик рано или поздно поймает блоху.

2. *Объединение отрезка AB и круга с центром в точке B назовем леденцом с основанием в точке A. Существуют ли в плоскости Oxy попарно непересекающиеся леденцы, основания которых – все точки с координатами вида* $(x; 0)$, *где x – рациональное число из отрезка* $[0; 1]$? [2]

Решение

Множество леденцов счётно. Поэтому мы можем расставлять их один за другим так, чтобы очередной леденец не пересекался со всеми предыдущими (это возможно, так как этих предыдущих леденцов – конечное число и наш очередной леденец можно выбрать маленьким настолько, чтобы он не имел с ними общих точек).

3. *Можно ли расставить все положительные рациональные числа в клетки бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы каждое число появлялось только один раз и при этом сумма элементов любой строки и любого столбца была конечной*? [3]

Решение

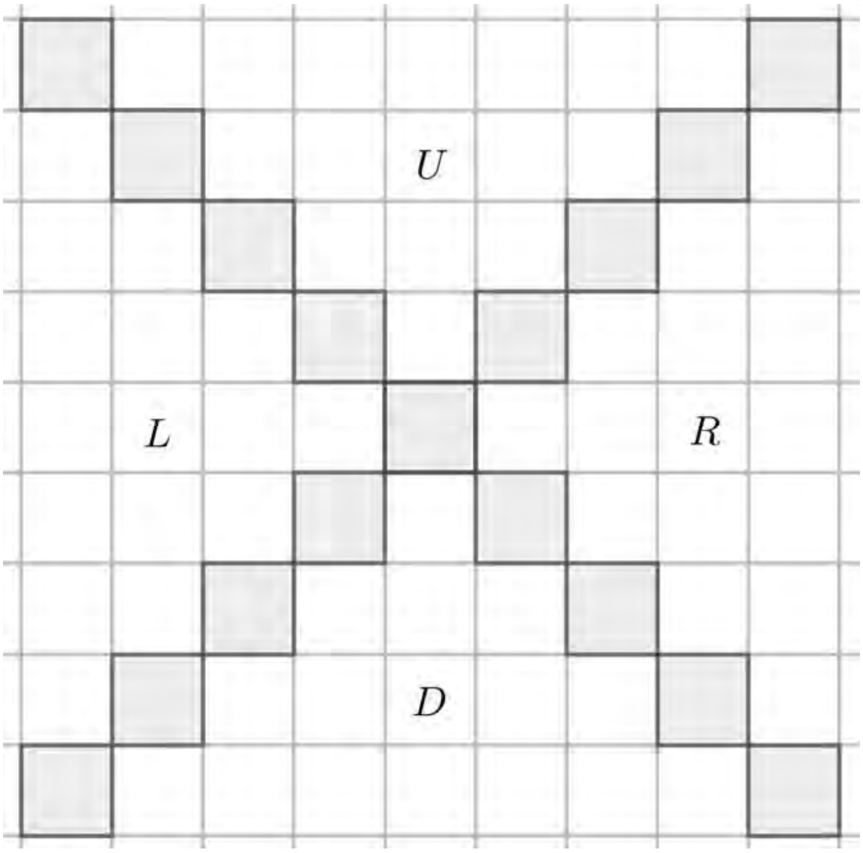
Пусть $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$, $B = \boldsymbol{Q}^{+} \setminus A$. Выделим на плоскости бесконечную диагональ. Элементы множества B (а оно счётно) расставим по этой диагонали, а элементы множества A разместим в остальные клетки. В каждом столбце и каждой строке все элементы, кроме диагонального, входят в A. Их сумма меньше двух.

4. *Можно ли расставить все рациональные числа в клетки бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы каждое число появлялось только один раз и при этом суммы по всем строкам были равны минус бесконечности, а по всем столбцам плюс бесконечности*? (Задача турнира матбоёв ФПМИ МФТИ в апреле 2019 г.)

Решение

Две перпендикулярные друг другу клетчатые диагонали, выделенные цветом на рисунке, делят остальную клетчатую плоскость на четыре части: левую L, правую R, верхнюю U и нижнюю D.

Расставим в L и R все отрицательные целые числа, в U и D все положительные целые числа, а по диагоналям все остальные числа. Возможность такой расстановки обеспечивается счетностью соответствующих множеств. Любая строка содержит бесконечное число отрицательных целых чисел и лишь конечное число других чисел (они расположены от одной диагонали до другой диагонали). Поэтому сумма по любой строке равна $-\infty$. В то же время любой столбец содержит бесконечное число натуральных чисел и лишь конечное число других чисел (они вновь расположены от одной диагонали до другой диагонали). Значит, сумма по любому столбцу равна $+\infty$.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Эвнин, А. Ю.** 150 красивых задач для будущих математиков / А. Ю. Эвнин. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 224 с.

2. **Эвнин, А. Ю.** Ещё 150 красивых задач для будущих математиков. / А. Ю. Эвнин. – Москва: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.

3. Математические олимпиады Лаврентьевских чтений 1997–2015 (СВФУ им. М. К. Аммосова) / И. Г. Дмитриев, В. Г. Марков, С. В. Попов, Э. И. Шамаев. – Якутск: СВФУ, 2016. – 77 с.