

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

САПР САЕ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

*Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов направления подготовки
23 04 02 «Наземные транспортно-технологические комплексы»
дневной и заочной форм обучения*



УДК 531.01
ББК 22.251
С 26

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой ТТМ «25» сентября 2019 г., протокол № 2

Составитель доц. О. В. Леоненко

Рецензент Ю. С. Романович

Методические рекомендации разработаны на основе рабочей программы дисциплины «САПР САЕ средств вычислений» и предназначены для использования студентами направления подготовки 23 04 02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» дневной и заочной форм обучения при выполнении лабораторных работ.

Учебно-методическое издание

САПР САЕ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ответственный за выпуск	И. В. Лесковец
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать 24.12.2019. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 56 экз. Заказ № 811.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2019



Содержание

Введение.....	4
1 Обзор геометрического редактора SpaceClaim.....	5
2 Подготовка геометрической модели к расчету методом конечных элементов.....	9
3 Статический линейный анализ объемных конструкций.....	13
4 Статический линейный анализ тонкостенных конструкций.....	15
5 Анализ контактных взаимодействий в сборочных единицах.....	17
6 Анализ разъемных соединений. Методики моделирования болтовых соединений.....	20
7 Статический нелинейный анализ конструкций. Задание нелинейных свойств материала.....	34
8 Частотный анализ конструкций.....	37
9 Основы CFD (ANSYS CFX). Анализ однофазных изотермических течений. Обработка результатов.....	39
10 Анализ сопряженного теплообмена. Постановка задачи. Решение и анализ результатов.....	42
11 Передача тепловых и механических нагрузок в ANSYS Workbench.....	46
Список литературы.....	48



Введение

Целью учебной дисциплины является формирование специалистов, умеющих обоснованно и результативно применять существующие и осваивать новые программные продукты и технологии инженерного анализа в области наземных ТТМ.

Задачами учебной дисциплины являются получение углубленных знаний работы в САД-среде и овладение вычислительными алгоритмами исследования напряженно-деформированного состояния конструкций ТТМ.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся:

– **познает:**

- а) основные программные продукты, реализующие метод конечных элементов;
- б) особенности реализации метода конечных элементов в современном прикладном программном обеспечении;

– **научится:**

- а) выполнять инженерный анализ ТТМ и их элементов с применением современных программных средств;

– **овладеет:**

- а) методами проведения инженерного анализа с применением программного продукта ANSYS Workbench.

Дисциплина относится к модулю «Современные технологии в машиностроении».

Учебная дисциплина, изученная ранее, усвоение которой необходимо для изучения данной дисциплины: математическое моделирование технических объектов и процессов с использованием компьютерных технологий.

Учебная дисциплина, которая будет опираться на данную дисциплину: САПР САД-средства оптимизации.



1 Обзор геометрического редактора SpaceClaim

Цель лабораторной работы № 1 – изучение интерфейса SpaceClaim и его объектов.

SpaceClaim — ведущее решение по прямому моделированию в трехмерном режиме, предназначенное для быстрого конструирования концепций и обработки геометрии. Онлайн-справка (F1), обучающие видео (F3), руководства и учебные материалы помогают в кратчайшие сроки научиться эффективно использовать SpaceClaim. Прежде чем приступить к работе, ознакомьтесь с разделом Начало работы и руководствами, доступными в онлайн-справке.

Интерфейс онлайн-справки представлен на рисунке 1.

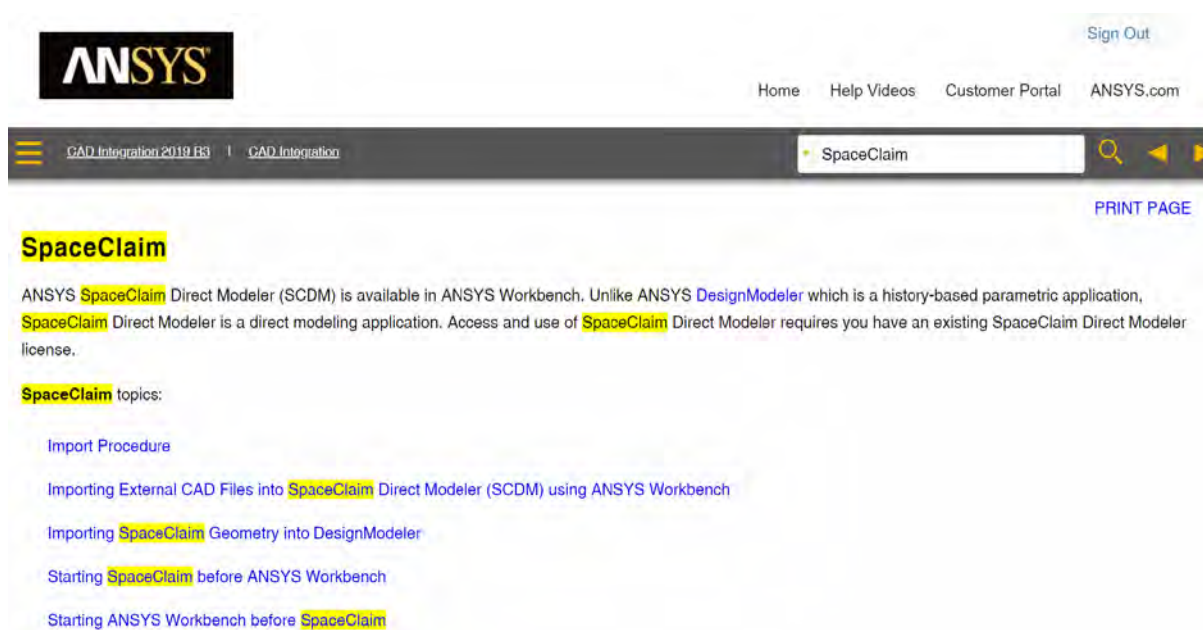


Рисунок 1 – Интерфейс онлайн-справки

Дополнительные информационные материалы можно найти на следующих информационных ресурсах: SpaceClaim.com — демонстрационные видеоматериалы и записанные вебинары, MySpaceClaim.com – видеоруководства и примеры моделей.

Перед началом работы необходимо изучить основные команды для работы с геометрией в SpaceClaim, они представлены на рисунке 2.

Создадим в среде SpaceClaim объемную модель, отображенную на рисунке 3. Используя команды на закладках «Файл», «Конструкция» и «Деталь», создайте эскиз детали, представленный на рисунке 4.

Используя команду «Вытянуть», строим объемный объект и далее достраиваем отсутствующие элементы в соответствии с рабочим чертежом. В итоге получается объемная модель тела вращения, изображенная на рисунке 5. Итоговая объемная деталь «Корпус» изображена на рисунке 6.

ВЫБОР		ОРИЕНТАЦИЯ		РАЗМЕРЫ	
	Click to select one object		Spin		Изменить размер во время перетаскивания
	Двойной щелчок перебирает поверхность/грань/кривую				Переключаться между редактируемыми размерами
	Тройной щелчок выбирает все поверхности на теле		Zoom		Наведите курсор на геометрию, чтобы измерить расстояние в эскизе
	Добавляет или удаляет объекты из выбора		Scroll		<ul style="list-style-type: none"> Принять значение размера завершить большинство инструментов
	Добавляет все объекты между выбором и объектом		Pan		Создание Временных объектов
	Выбор движущегося или многих объектов для инструментов (синим цветом)		Snap View		Создание линейного/Углового размера
	Выбор всех объектов внутри рамки		Double-click		Создать группу и сохранить размер
	Выбор объектов частично внутри рамки		Home View		Изменение размера и аннотации
	Выбор других объектов под курсором				Выберите ссылку до
	Клик – вызов контекстного меню Перетаскивание – вызов команды клавиш		Plane selected		
	Используйте инструмент Select-Bounds для прекращения выбора		Zoom Fit selection		
	Вернуться к последнему набору выбранных компонентов				
	Для выхода из текущего инструмента и возврата к выбору		Previous view		
			Next view		
				Files	
					сохранить
					Сохранить как
					Сохранить как новую версию

Рисунок 2 – Основные комбинации команд в SpaceClame

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 1 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи решаемые в ходе её выполнения;
- последовательность команд для построения объемной детали «Корпус»;
- ответы на контрольные вопросы.

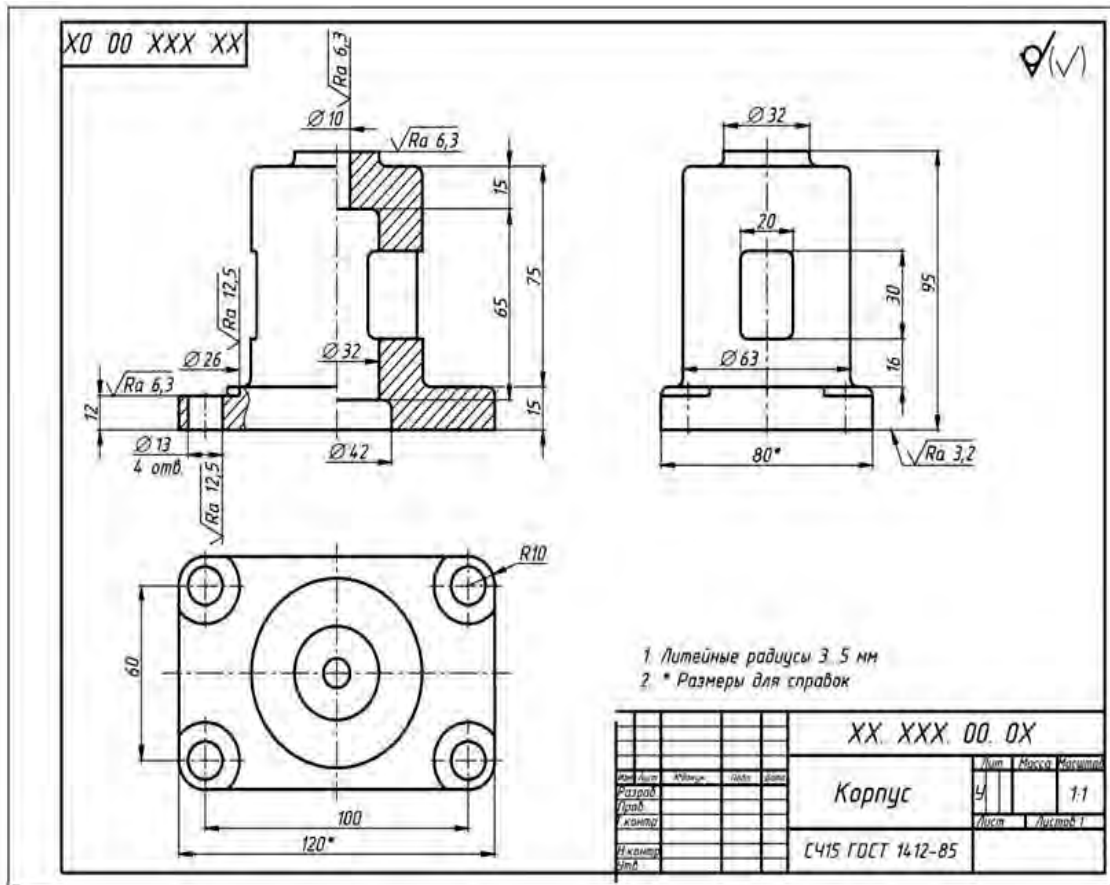


Рисунок 3 – Чертеж детали «Корпус»

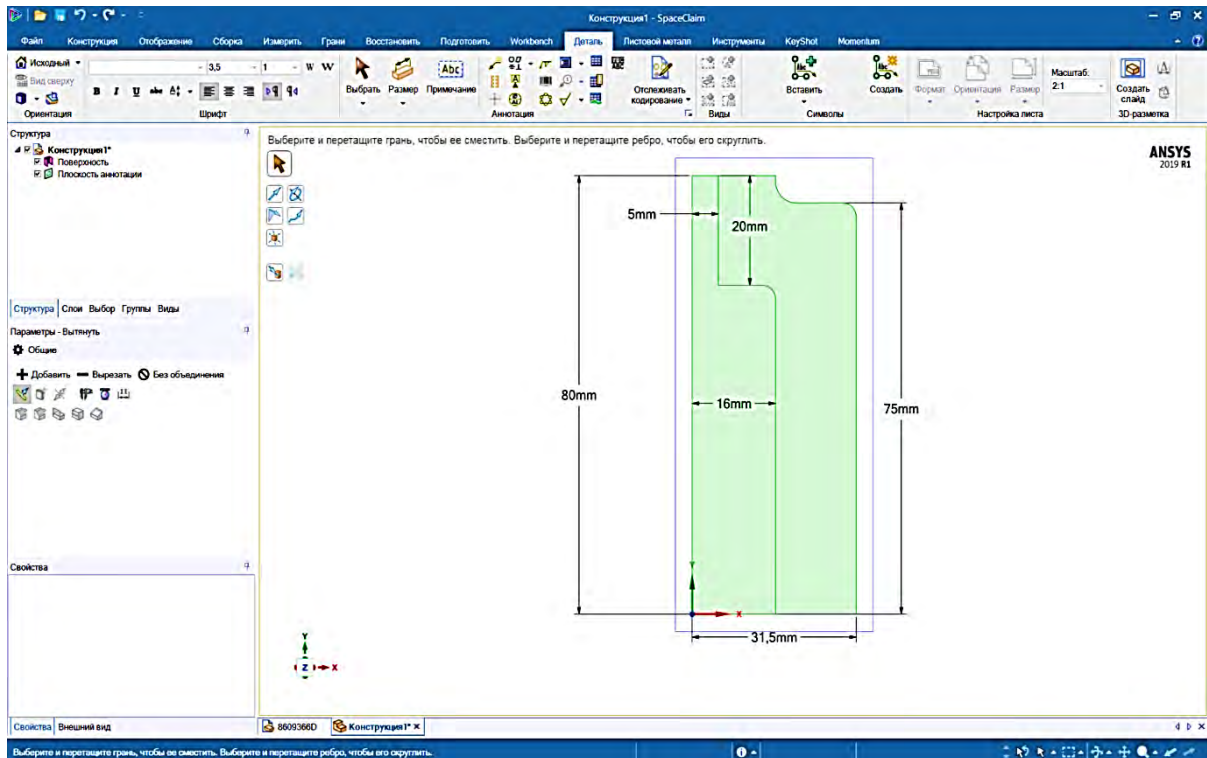


Рисунок 4 – Эскиз детали

Выберите 1 или несколько граней или ребер для поворота

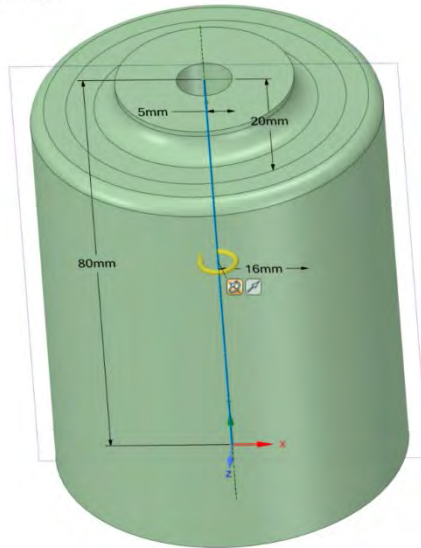


Рисунок 5 – Объемная часть тела вращения

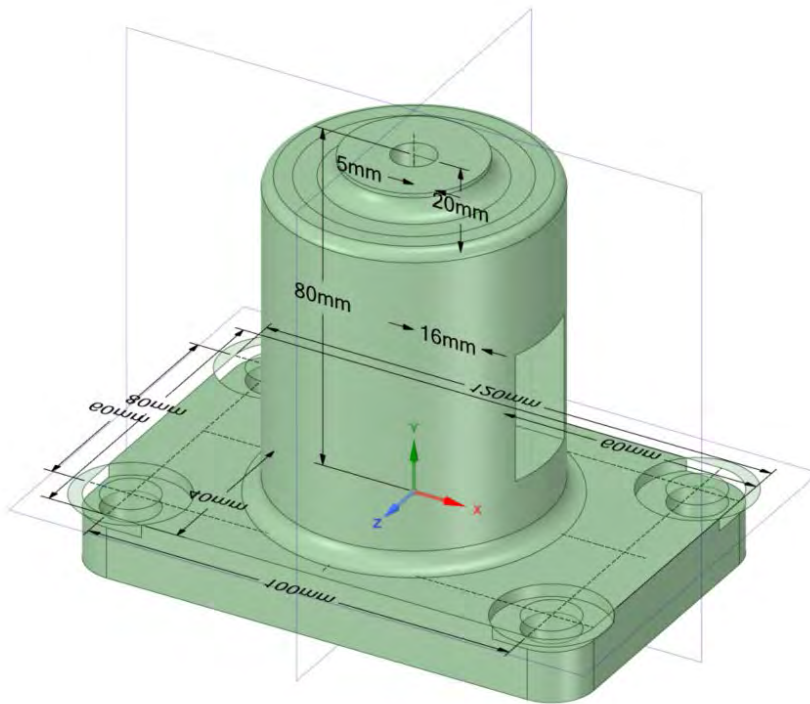


Рисунок 6 – Объемная деталь «Корпус»

Контрольные вопросы

- 1 Как вызвать диалоговое меню «параметры SpaceClaim»?
- 2 Можно ли настроить параметры единицы измерения длины в метрах?
- 3 Как вызвать файлы видеоуроков SpaceClaim?
- 4 В чем заключается отличие системы трехмерного проектирования прямого моделирования от системы параметрического моделирования?
- 5 Можно ли в SpaceClaim создать файл рабочего чертежа детали?

2 Подготовка геометрической модели к расчету методом конечных элементов

Цель лабораторной работы № 2 – изучение команд SpaceClaim для подготовки геометрической модели к исследованию.

SpaceClaim может импортировать различные родные и нейтральные форматы CAD, но, возможно, потребуется очистить и отремонтировать эти данные для использования в SpaceClaim и CAE. Вкладка Repair (Исправление) включает в себя инструменты, которые можно использовать для ремонта импортированных моделей и подготовки своих конструкций для экспорта и анализа.

Инструменты Repair (Исправление) представлены в следующих группах:

- Solidify (Превращение в твердое тело);
- Fix (Исправление);
- Fix Curves (Исправление кривых);
- Adjust (Настройка).

В целом, когда необходимо восстановить геометрию, импортированную из другого источника, можно использовать инструменты в том порядке, в котором они представлены в ленте (слева направо).

Инструменты в группе **Solidify** (Превращение в твердое тело) исправляют проблемы, которые могут существовать в импортированных данных, которые препятствуют превращению модели в твердое тело.



Используйте инструмент **Stitch** (Стачать), чтобы объединить грани детали, которые соприкасаются по ребрам.



Используйте инструмент **Gaps** (Разрывы) для устранения разрывов между гранями.



Используйте инструмент **Missing Faces** (Отсутствующие грани) для заполнения отсутствующих граней.

Инструменты в группе **Fix** (Исправление) исправляют проблемы, имеющиеся в импортированных данных, которые могут существовать в модели тела, но вызывать проблемы при редактировании или изменении геометрии.



Используйте инструмент **Split Edges** (Разделить ребра) для удаления посторонних точек на ребрах.



Используйте инструмент **Duplicates** (Дубликаты) для обнаружения и устранения дубликатов граней.



Используйте инструмент **Extra Edges** (Дополнительные ребра) для обнаружения и удаления ребер, которые не нужны для определения модели.



Используйте инструмент **Bad Faces** (Плохие грани) для обнаружения граней с поврежденной визуализацией.

Инструменты в группе **Fix Curves** (Исправление кривых) исправляют проблемы, которые могут существовать в импортированных данных, которые вызывают проблемы при работе с кривыми.



Используйте инструмент Curve Gaps (Разрывы кривых) для обнаружения и устранения разрывов между кривыми.



Используйте инструмент Small Curves (Небольшие кривые) для обнаружения и удаления небольших кривых и устранения образовавшихся разрывов.



Используйте инструмент Duplicate Curves (Дубликаты кривых) для обнаружения и устранения дубликатов кривых.



Используйте инструмент Fit Curves (Проложить кривые) для улучшения выбранных кривых путем замены их линиями, дугами или сплайнами (гибкими кривыми).

Инструменты в группе **Adjust** (Настройка) помогают изменить характеристики конструкции, которые будут влиять на анализ.



Используйте инструмент Merge Faces (Объединить грани) для объединения двух или более граней в единую грань.



Используйте инструмент Small Faces (Небольшие грани) для удаления небольших граней из конструкции.



Используйте инструмент Tangency (Касание) для изменения почти соприкасающихся граней, чтобы они стали соприкасаться.



Используйте инструмент Simplify (Упрощение) для упрощения сложных граней и кривых.



Используйте инструмент Inexact Edges (Неточные ребра) для исправления ребер, которые не сходятся точно.



Используйте инструмент Relax (Расслабить) для сокращения числа контрольных точек в импортированных поверхностях, чтобы сделать их более устойчивыми.



Используйте инструмент Straighten (Выпрямить) для выпрямления граней, находящихся под нежелательным углом.

Все вышеперечисленные инструменты необходимо использовать при работе с импортированной геометрией для сокращения количества концентраторов и ошибок геометрии при подготовке к созданию конечно-элементной сетки средствами ANSYS.

Алгоритм создания конечно-элементной сетки.

1 Выберите закладку Workbench и далее – иконку Start Ansys. После этого через определенное время (определяется производительностью компьютера) загрузится приложение Workbench Project.

2 Создайте следующую структуру проекта, представленную на рисунке 7, и запустите п. 4 в блоке Static Structural.

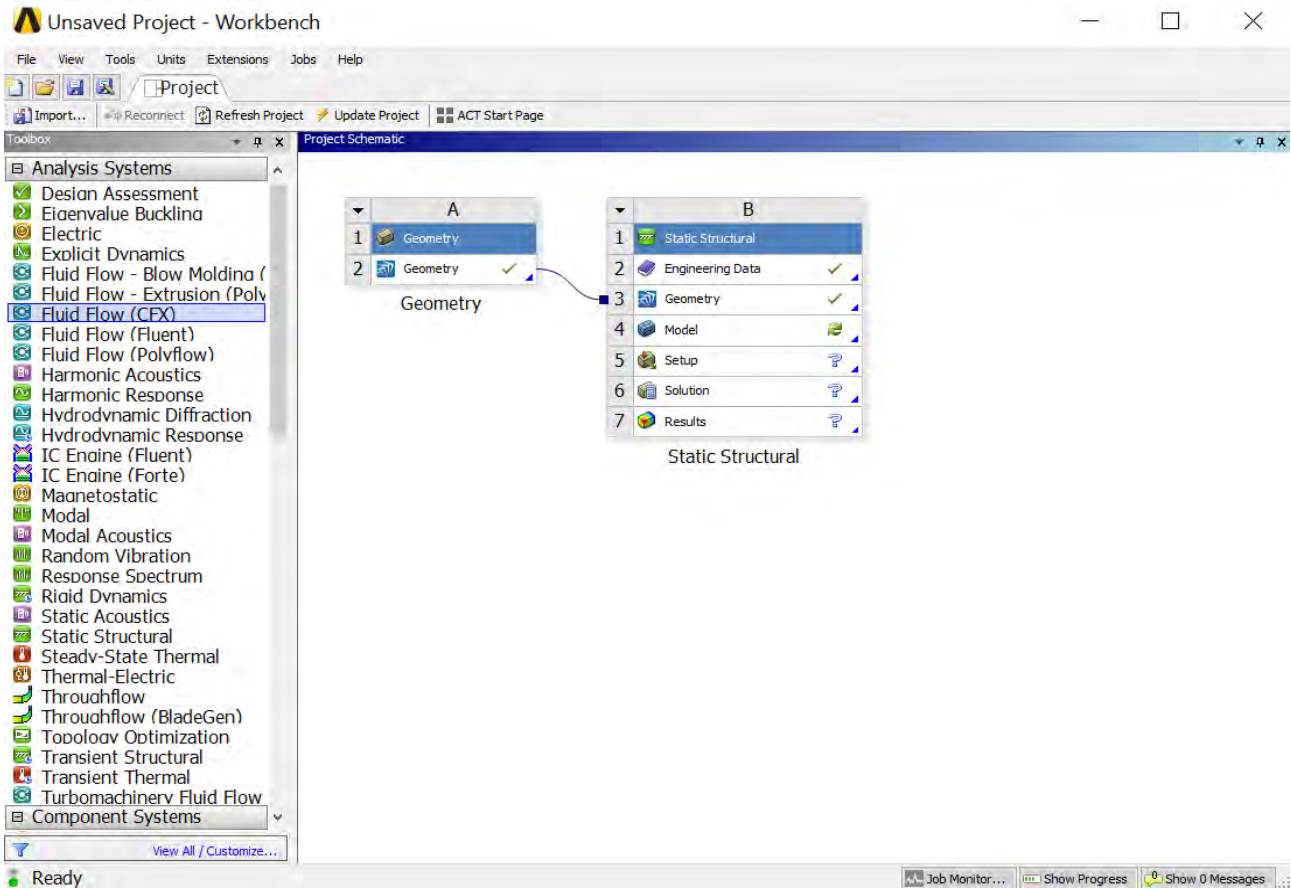


Рисунок 7 – Структура проекта

3 Загрузится приложение Static Structural Ansys Mechanical. Выберите пункт Mesh и через контекстное меню запустите команду Generate Mesh. Результат создания конечно-элементной сетки представлен на рисунке 8.

4 Для оценки качества созданной конечно-элементной сетки воспользуемся командой Element Quality и выберем её в меню, представленном на рисунке 9.

5 Сохраните проект как «Корпус».

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 2 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи решаемые в ходе её выполнения;
- картину распределения качества конечных элементов при создании сетки с настройками по умолчанию;
- картину распределения качества конечных элементов с пороговым значением 0,25;
- ответы на контрольные вопросы.

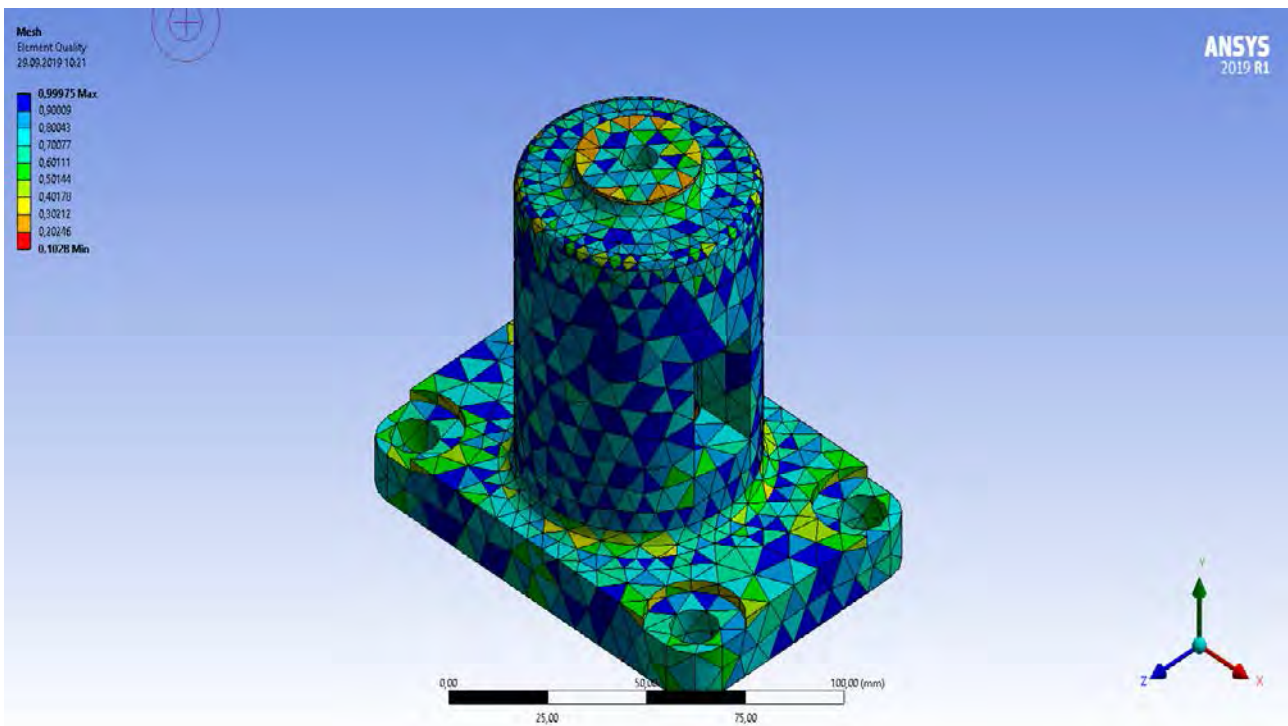


Рисунок 8 – Конечно-элементная сетка детали «Корпус»

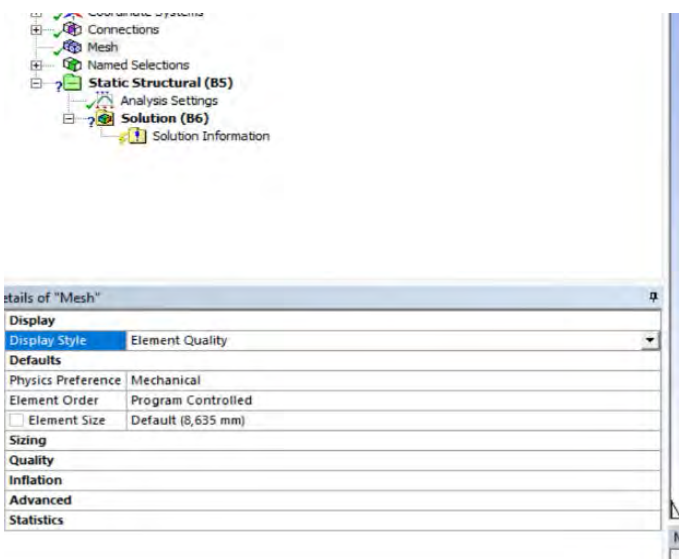


Рисунок 9 – Выбор команды Element Quality

Контрольные вопросы

- 1 Какие команды SpaceClaim используются для редактирования импортированной геометрии?
- 2 Можно ли объединять части импортированной геометрии в единое твердое тело?
- 3 Как измерить размер конечного элемента в ANSYS Mechanical?

3 Статический линейный анализ объемных конструкций

Цель лабораторной работы № 3 – выполнение статического линейного анализа объемных конструкций.

Задачи, решаемые в ходе выполнения работы:

- выполнение настроек ANSYS Mechanical для статического линейного анализа;
- расчет детали «Корпус» и определение максимального уровня эквивалентных напряжений.

Для выполнения данной работы будем использовать результаты предыдущей лабораторной работы.

Загрузите проект «Корпус». В дереве конструирования выделите меню Static Structural и, используя команду Standard Earth Gravity (вдоль оси -Y), задайте ускорение свободного падения вдоль оси Y со знаком «минус». Далее, используя команду Fixed Support, ограничьте перемещение и вращение по присоединительным отверстиям корпуса. Затем приложите нормальное усилие через нагрузку Force величиной 25 кН на внутреннюю поверхность детали «Корпус». Наведитесь на меню Solution и, вызвав контекстное меню через Insert, добавьте следующие пункты: Total Deformation, Directional Deformation (для компонентов X, Y, Z) и Equivalent stress. Используя клавишу F5, запустите расчет исследования.

Если все правильно было сделано, то должен получиться такой результат, как представленный на рисунке 10.

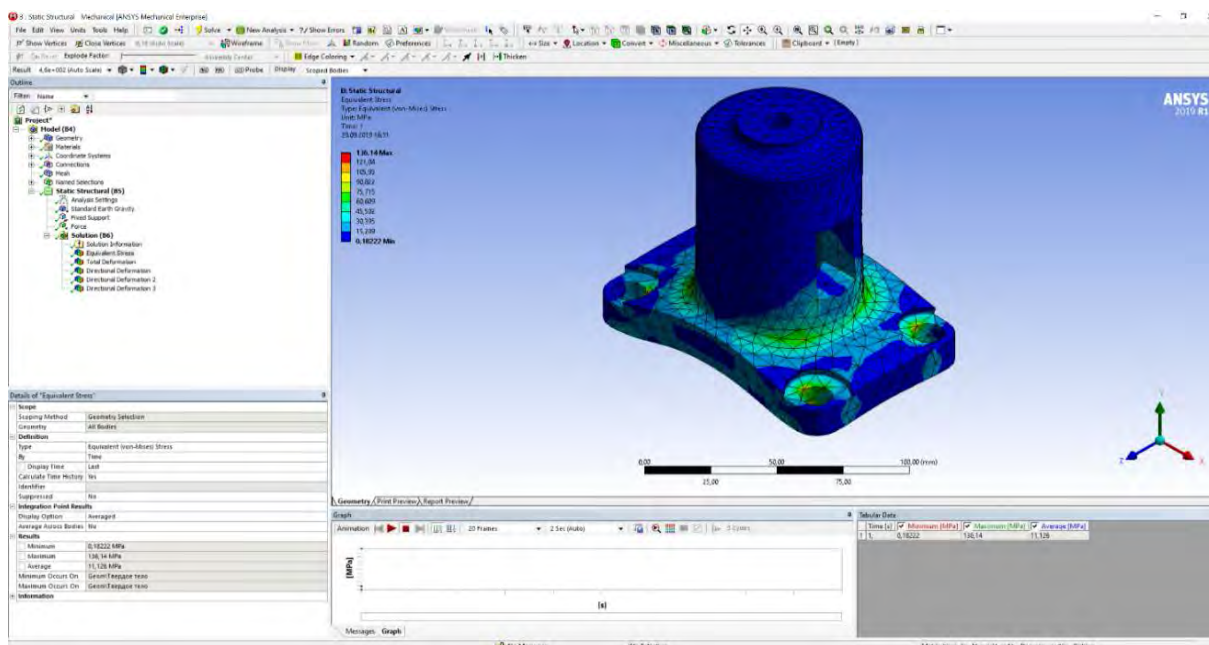


Рисунок 10 – Результат линейного анализа детали «Корпус»

Проведите исследование для диапазона нагрузок 25, 250, 2500, 25000 Н и заполните таблицу 1.



Таблица 1 – Результаты исследования напряжений и деформаций детали

Нагрузка, Н	Эквивалентное напряжение, МПа	Результирующая деформация, мм	Деформация по оси X, мм	Деформация по оси Y, мм	Деформация по оси Z, мм
25					
250					
2500					
25000	136,4	0,018	0,004	0,018	0,0016
250000					

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 3 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи решаемые в ходе её выполнения;
- построенную зависимость величины эквивалентных напряжений от величины усилия;
- ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Сформулируйте закон Гука при растяжении и сжатии.
- 2 Почему вид исследования называется линейным?
- 3 Если нагрузку с 250 Н увеличить до 25 МН, как изменится величина деформаций по оси Y?
- 4 Какие характеристики материала, приведенные на рисунке 11, отвечают за изменение линейных размеров в продольной и поперечной плоскостях?

Common Material Properties

Density	7,85e-06 kg/mm ³
Young's Modulus	2e+05 MPa
Thermal Conductivity	0,060500 W/mm·°C
Specific Heat	4,34e+05 mJ/kg·°C
Tensile Yield Strength	250,00 MPa
Tensile Ultimate Strength	460,00 MPa
Nonlinear Behavior	False
Full Details	Click To View Full Details

Statistics

Assigned Bodies	11
-----------------	----

Рисунок 11 – Характеристики материала, используемые в исследовании



4 Статический линейный анализ тонкостенных конструкций

Цель лабораторной работы № 4 – выполнение статического линейного анализа тонкостенной конструкций.

Задачи, решаемые в ходе выполнения работы:

- выполнение настроек ANSYS Mechanical для статического линейного анализа;
- расчет детали «Корпус» и определение максимального уровня эквивалентных напряжений с использованием Shell-элементов.

Для выполнения данной работы будем использовать результаты лабораторной работы № 1. Используя команду «Midsurface – твердое тело», выделяя параллельные поверхности (верхнюю и нижнюю), в корпусе выделим их средние поверхности. Полученный результат представлен на рисунке 12.

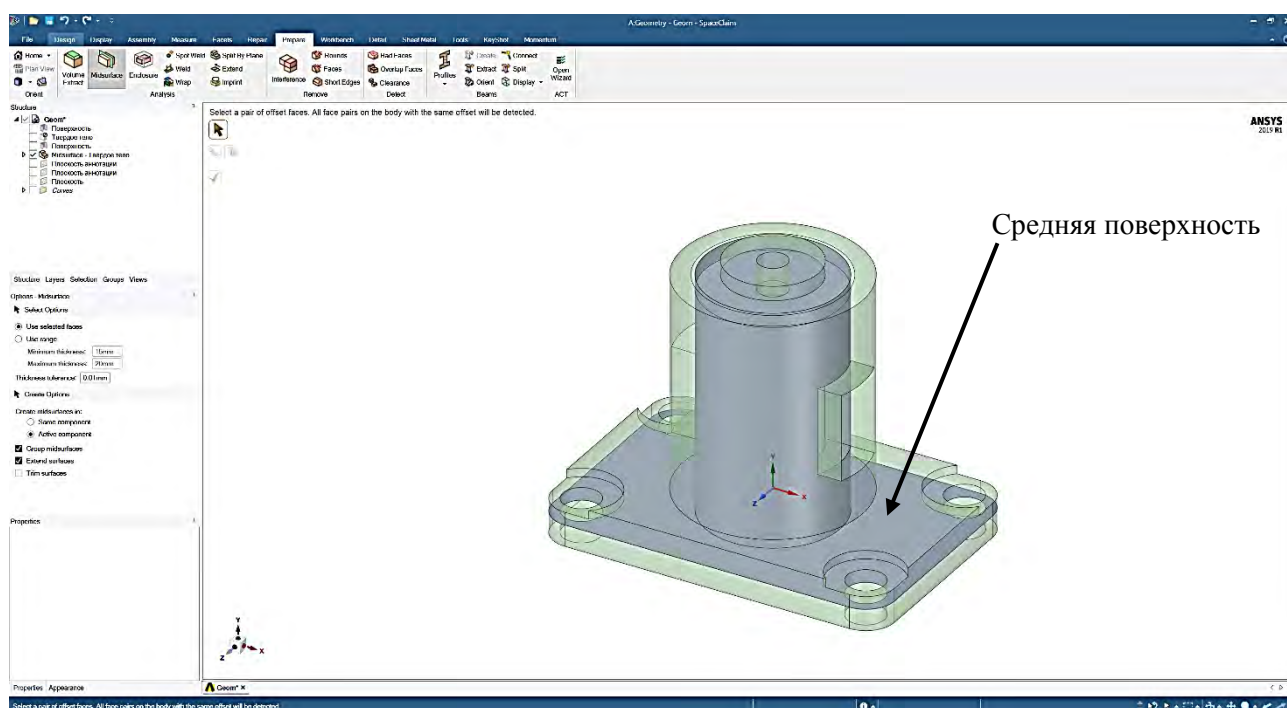


Рисунок 12 – Средние поверхности детали «Корпус»

Далее необходимо обновить проект в ANSYS Mechanical и задать параметры материала вновь. На рисунке 13 представлены результаты обновленного проекта.

Затем обновите контактные группы через команду Create Automatic Connections, вызванную через контекстное меню. После этого создайте конечно-элементную сетку с настройками по умолчанию. Приложите граничные условия, так же как и в лабораторной работе № 3. На рисунке 14 представлена конечно-элементная модель детали «Корпус».

Проведите исследование для диапазона нагрузок 25, 250, 2500, 250000 Н и заполните таблицу 2.

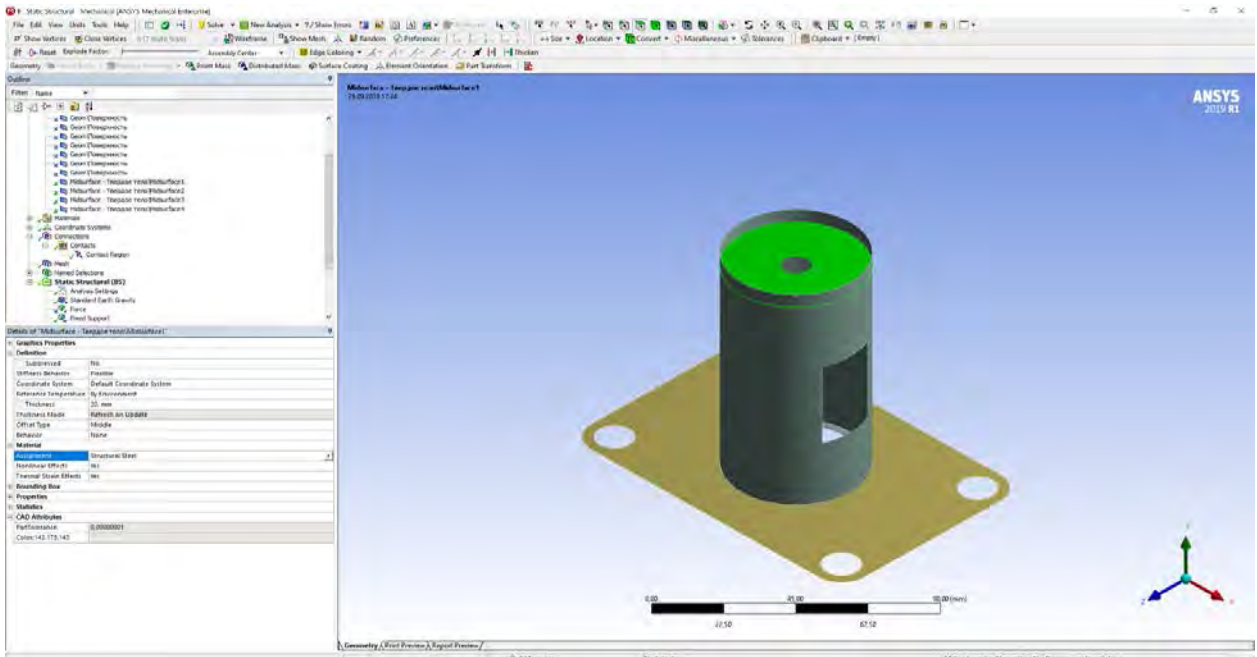


Рисунок 13 – Деталь «Корпус», представленная в форме поверхностей

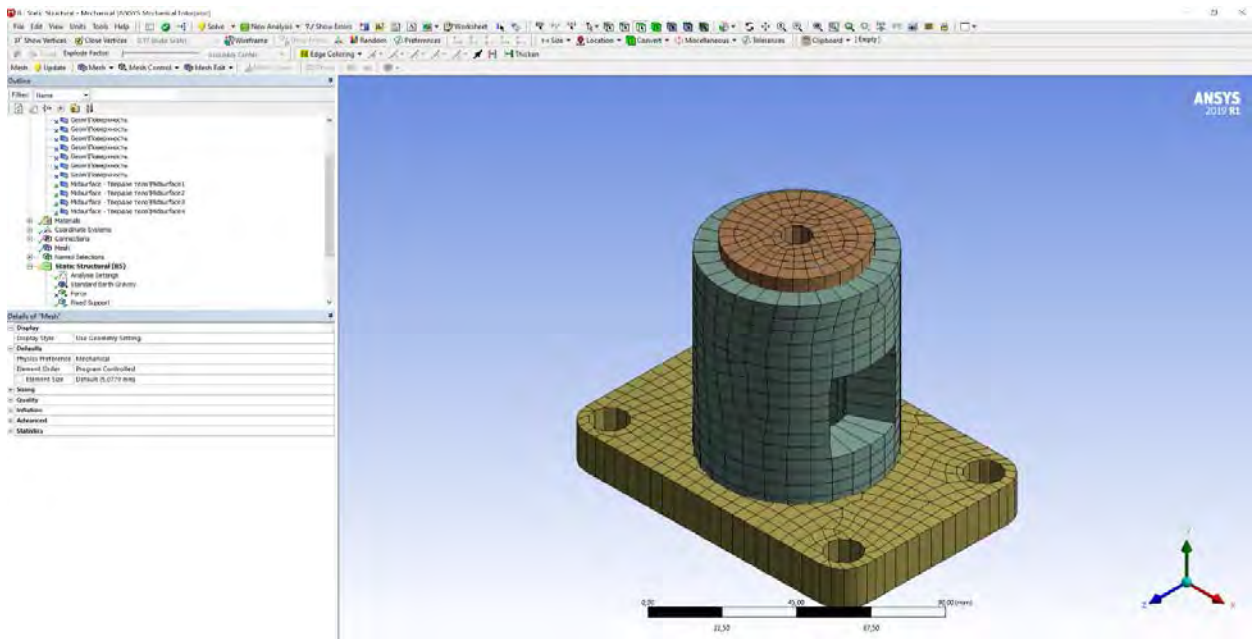


Рисунок 14 – Конечно-элементная сетка типа Shell (визуализация)

Таблица 2 – Результаты исследования напряжений и деформаций детали

Нагрузка, Н	Эквивалентное напряжение, МПа
25	
250	
2500	
25000	130
250000	



После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 4 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи, решаемые в ходе её выполнения;
- построенную зависимость величины эквивалентных напряжений от величины усилия;
- ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Чем обусловлено отклонение в величине напряжений, полученных при помощи твердотельных объемных элементов и тонкостенных?
- 2 Почему вид исследования называется линейным?

5 Анализ контактных взаимодействий в сборочных единицах

Цель лабораторной работы № 5 – выполнение исследования сборочной единицы в контактной постановке.

Задачи, решаемые в ходе выполнения работы:

- корректировка геометрии и создание сборочной единицы средствами SpaceClaim;
- формулировка контактной задачи и выполнение анализа напряженно-деформированного состояния сборочной единицы.

Для выполнения данной работы будем использовать результаты лабораторной работы № 1. Первоначально необходимо создать «болт», контролируемый размер 13 мм (посадочный диаметр) и «перемычку» с размерами 20×30 мм произвольной длины. Используя команду «выровнять» в меню «сборка», соедините детали в сборку. При правильном выполнении операций получите сборочную единицу, представленную на рисунке 15.

Далее производим обновление ранее сохраненного проекта при помощи команды Update project и переходим в ANSYS Mechanical. Необходимо в разделе Outline выделить Connections, вызвать контекстное меню и создать инструмент ContactTools (рисунок 16). Запустите его на расчет контакта. Далее сможете проанализировать состояние сборки. Это особенно актуально для импортированной геометрии и больших сборок.

Задав граничные условия для примера, представленного на рисунке 17, можно в последующем исследовать напряженно-деформированное состояние сборочной единицы и учесть отличия с результатами, полученными ранее в лабораторных работах № 3 и 4.



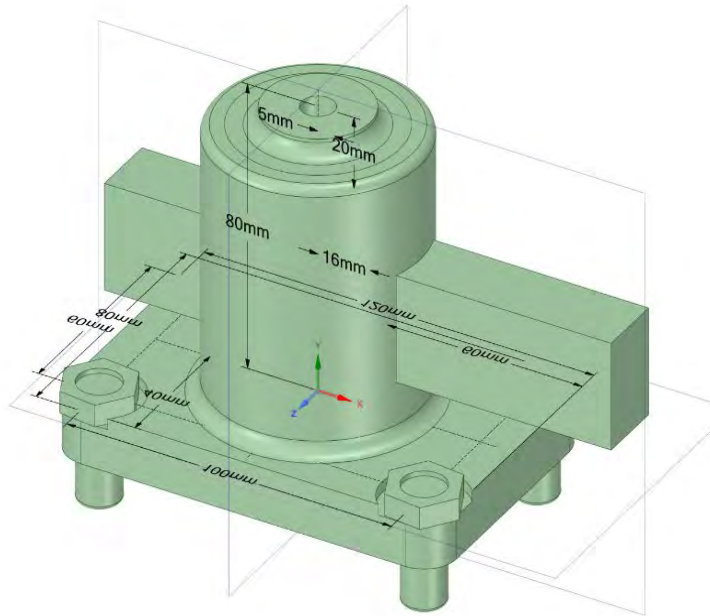


Рисунок 15 – Общий вид сборочной единицы

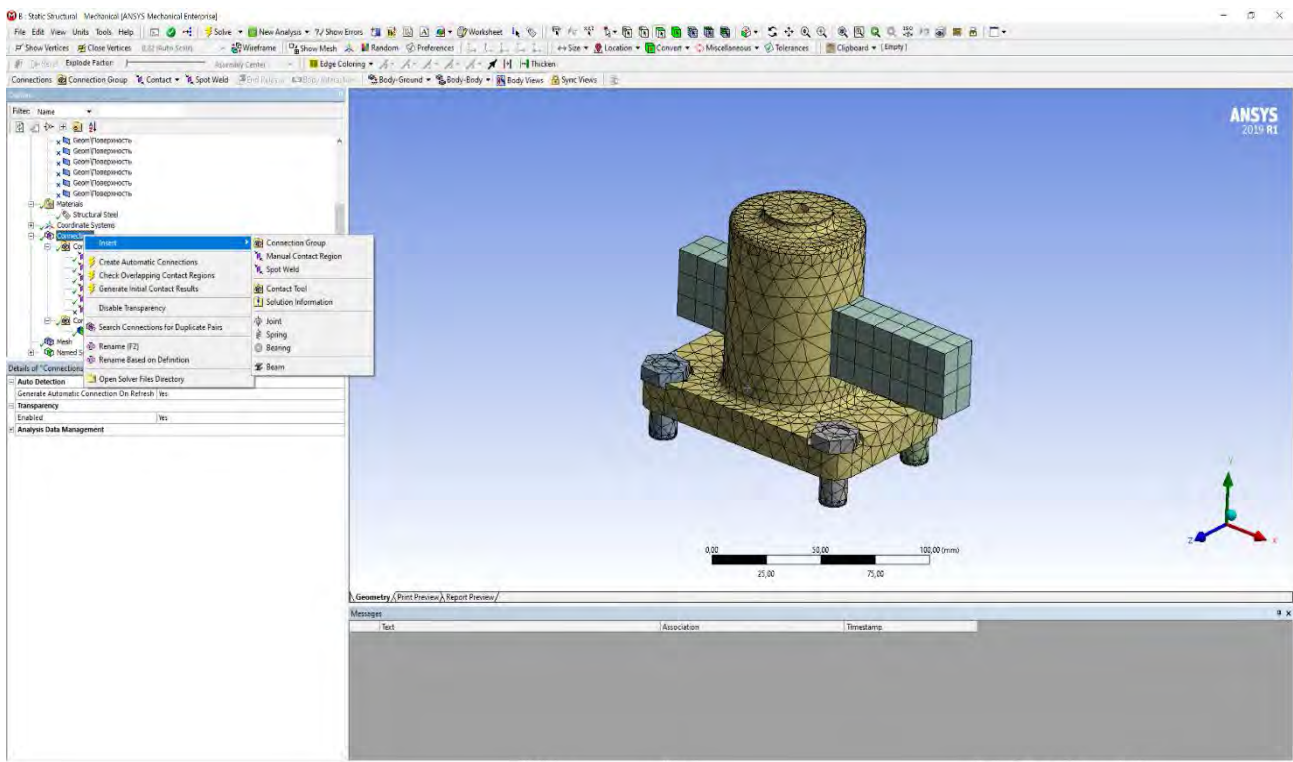


Рисунок 16 – Инструмент ContactTools

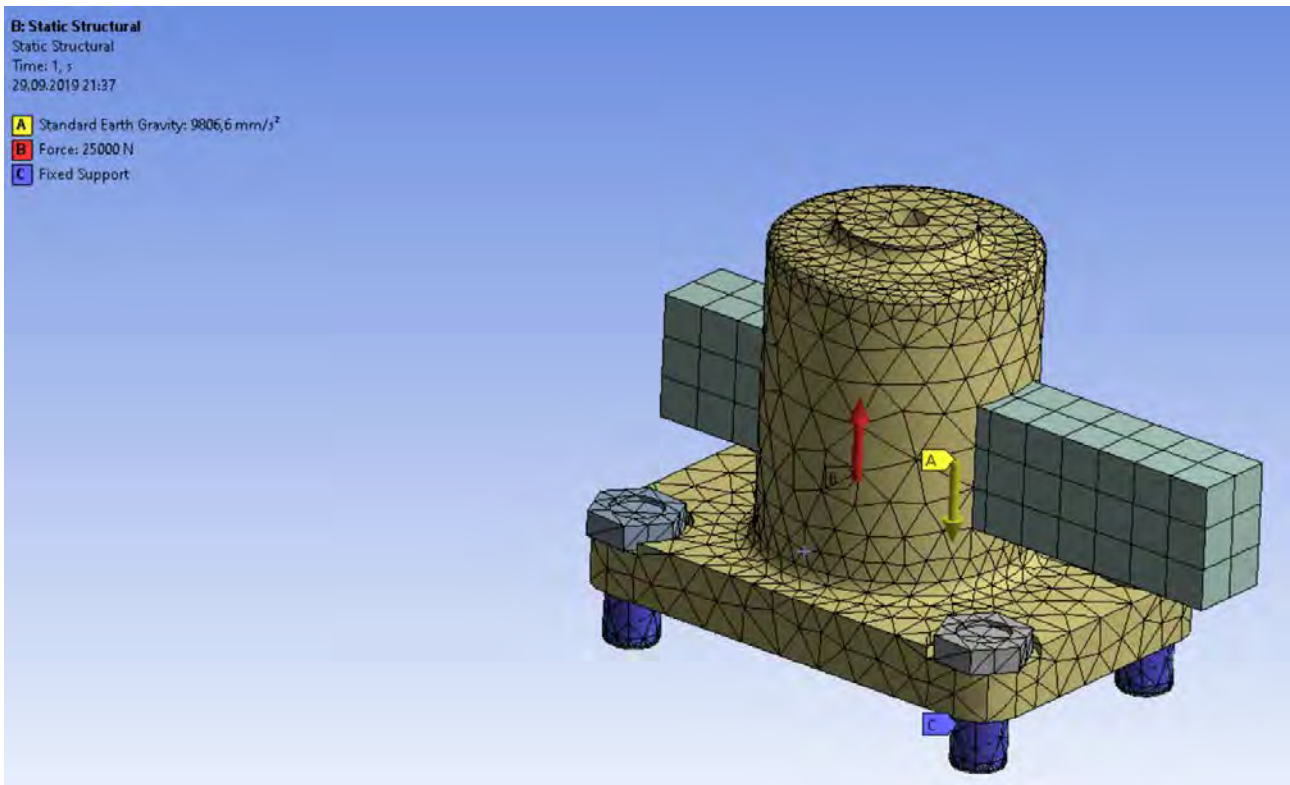


Рисунок 17 – Конечно-элементная сетка типа Shell (визуализация)

Далее, добавив в раздел Solution инструмент Contact Tools, можно анализировать различные данные (рисунок 18) и получать их визуализацию в среде ANSYS Mechanical.

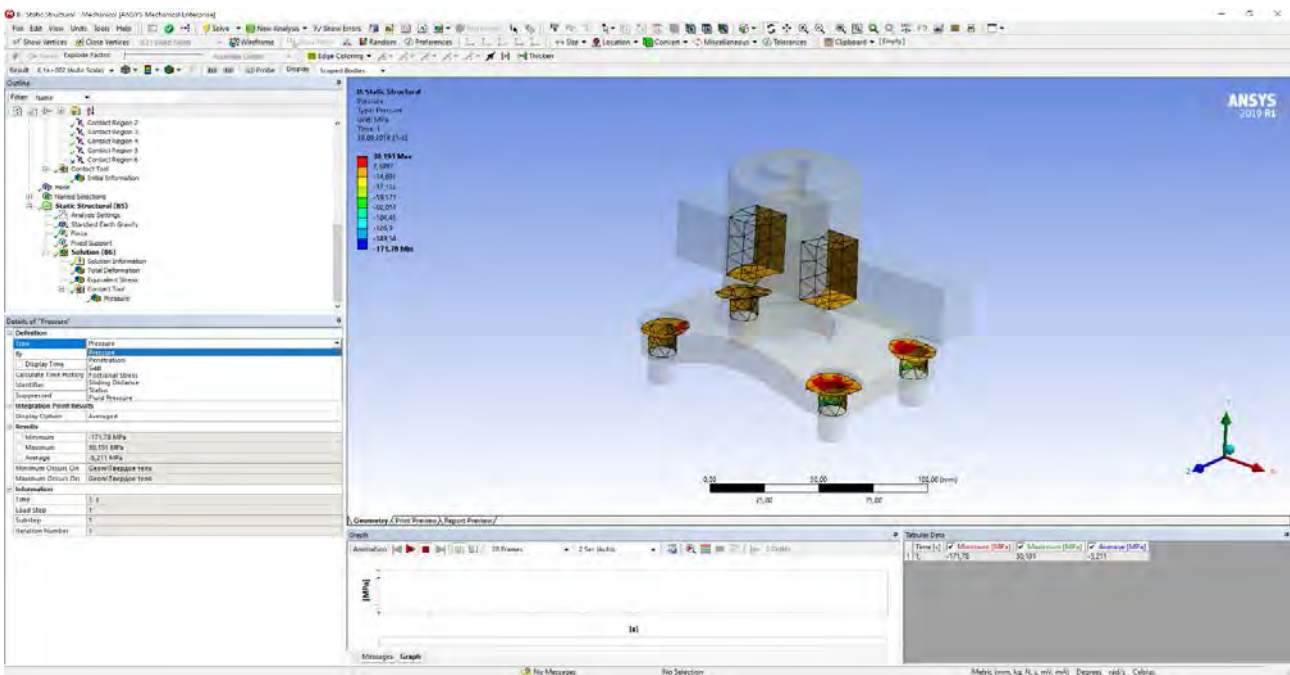


Рисунок 18 – Контактные давления в модели

Проведите исследование для диапазона нагрузок 25, 250, 2500, 250000 Н и заполните таблицу 3.

Таблица 3 – Результаты исследования напряжений и контактных напряжений сборочной единицы

Нагрузка, Н	Эквивалентное напряжение в корпусе, МПа	Контактное напряжение, МПа
25		
250		
2500		
25000		
250000		

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 5 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи, решаемые в ходе её выполнения;
- построенную зависимость величины контактных напряжений от величины усилия;
- ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Какие типы начального контакта используются в ANSYS Mechanical?
- 2 Почему зависимость между усилием и контактными напряжениями имеет линейный вид?

6 Анализ разъемных соединений. Методики моделирования болтовых соединений

Цель лабораторной работы № 6 – изучение моделирования болтовых соединений при исследовании напряженно-деформированного состояния.

Задачи, решаемые в ходе выполнения работы:

- изучение возможностей ANSYS Mechanical в части моделирования болтовых соединений;
- выполнение анализа напряженно-деформированного состояния сборочной единицы с учетом моделирования болтовых соединений.

Задача моделирования болтов в трехмерных конечно-элементных расчетах всегда была довольно сложной и интересной, поскольку подробное представление особенностей геометрии болта обычно приводит к большой размерности моделей и высоким вычислительным затратам. Такое положение вещей вызывает у любого расчетчика естественное желание найти наиболее эффективный для своей задачи метод моделирования болтов.

Подход к моделированию болтов обычно характеризуется следующими аспектами.



Подготовка геометрии: топология и подробность геометрии болта и связанных с ним компонентов.

Сетка: для наилучшего представления требуется получить минимальное число степеней свободы, а также сделать выбор между гексаэлементами и тетраэлементами.

Контакт: должна корректно осуществляться передача нагрузок/напряжений через контактные поверхности.

Определение нагрузки:

- приложение нагрузки затяжки болта (Bolt Pretension Load);
- фиксация болта в нагруженном состоянии (Lock);
- приложение нагрузки к конструкции.

Способ определения геометрии болта оказывает существенное влияние на оптимальную методику моделирования, включая создание сетки, контакта и задания общих настроек расчета (Analysis Settings). В данной работе собрано восемь методов моделирования болтов в ANSYS. Для демонстрации этих методик используется простая модель соединения с восемью болтами, представленная на рисунке 19.

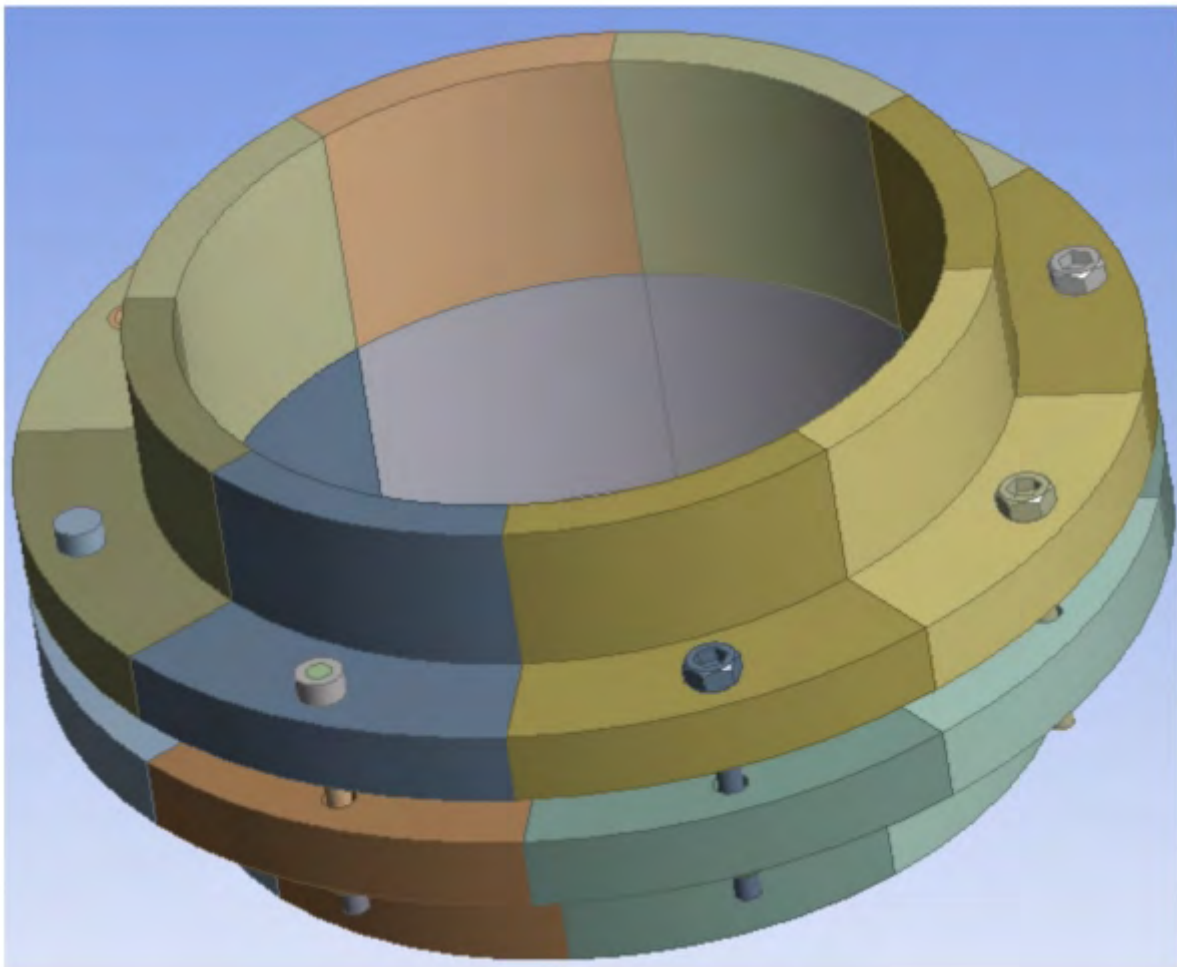


Рисунок 19 – Модель болтового соединения

Модель болта № 1.

Болт со всеми особенностями (рисунок 20), с резьбой, моделируется целиком как 3D-тело. Эта модель при достаточно подробной сетке дает хорошее геометрическое представление жесткости. Ввиду сложности геометрии строится, как правило, тетрасетка, причем элементы в резьбе все равно могут быть весьма плохого качества – за этим нужно внимательно следить. Также для получения хороших результатов сетка должна быть достаточно мелкой. Тип контакта между болтом и фланцем, гайкой и болтом определяется любым, кроме bonded.

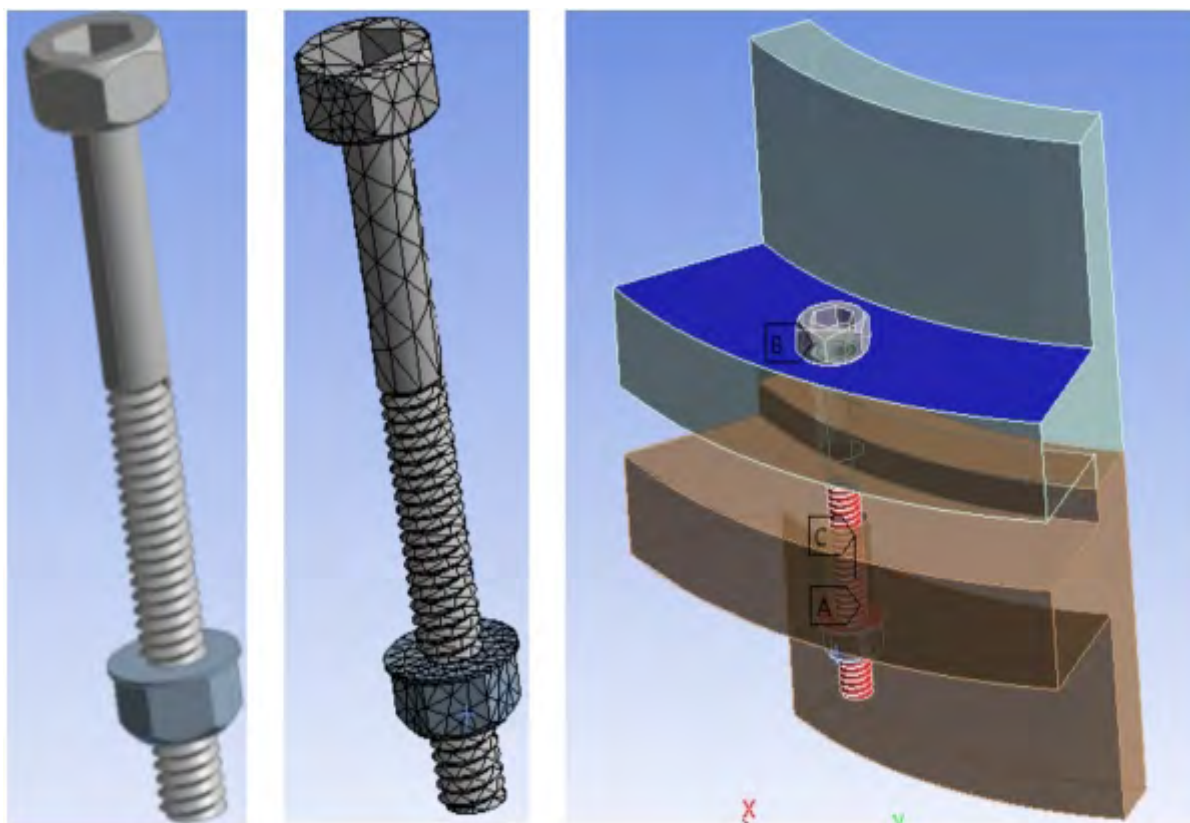


Рисунок 20 – Модель с геометрическим представлением резьбы

Модель болта № 2.

В этой модели геометрическое представление резьбы нужно удалить и со стороны болта, и со стороны гайки, как показано на рисунке 21. Удаление резьбы повлияет на жесткость болта. Используется тетрасетка (по аналогии с моделью болта № 1), но при этом можно обойтись меньшим количеством элементов в резьбе.

Тип контакта между болтом и фланцем, гайкой и болтом определяется любым, кроме bonded.

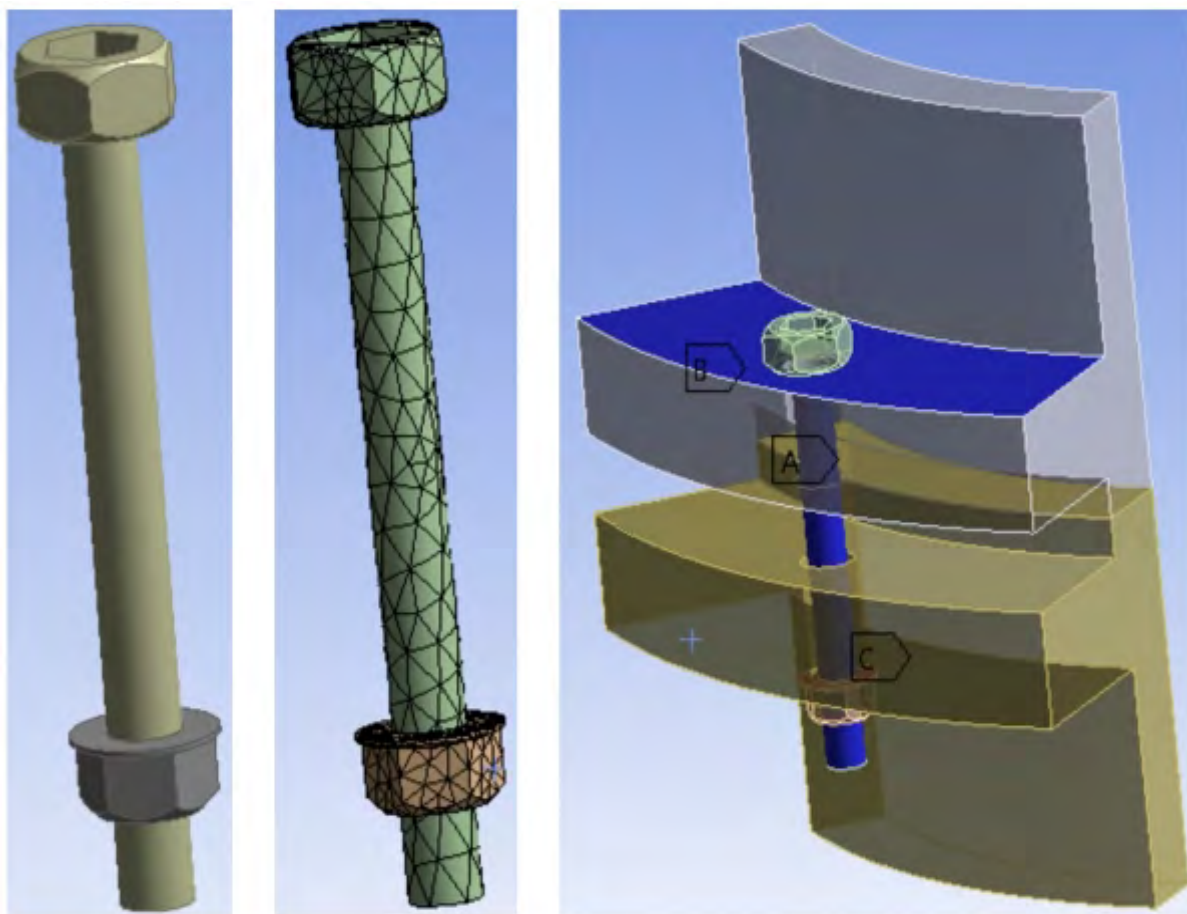


Рисунок 21 – 3D-Solid-модель болта без резьбы

Модель болта № 3.

Геометрическое представление резьбы (рисунок 22) не потребуется, как и в модели № 2.

В ANSYS, начиная с версии 15.0, существует методика виртуальной резьбы bolt thread contact technique для создания контакта между болтом и гайкой. Данный метод определяется на основе всех геометрических характеристик резьбы. Вычислительные затраты на получение аналогичных напряжений в области резьбы снижаются в 10 раз по сравнению с моделью № 1.

Используется тетрасетка (по аналогии с моделью № 1). Для увеличения количества элементов в области резьбы удобно использовать contact sizing.

Тип контактов между болтом и фланцем, гайкой и болтом определяется как bonded с несимметричным поведением (asymmetric behavior) как показано на рисунке 23.

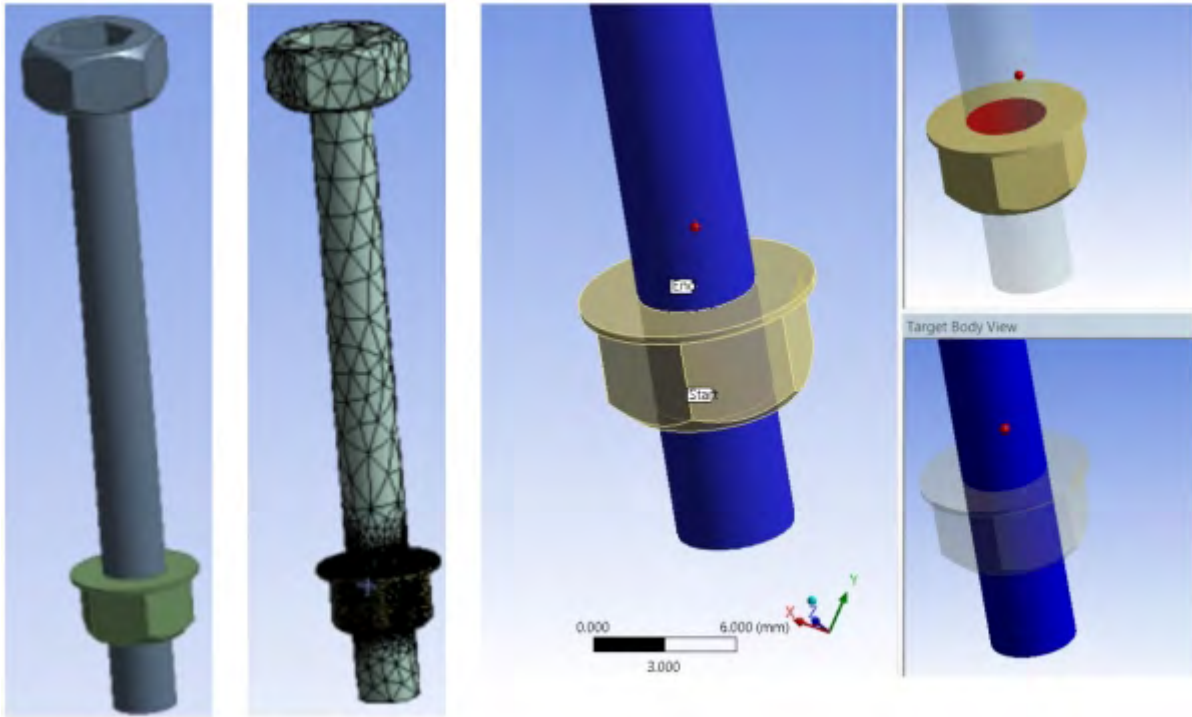


Рисунок 22 – Модель с виртуальной резьбой

Definition	
Type	Bonded
Scope Mode	Automatic
Behavior	Asymmetric
Trim Contact	Program Controlled
Trim Tolerance	0.87298 mm
Suppressed	No
Advanced	
Formulation	Program Controlled
Detection Method	Program Controlled
Penetration Tolerance	Program Controlled
Elastic Slip Tolerance	Program Controlled
Normal Stiffness	Program Controlled
Update Stiffness	Program Controlled
Pinball Region	Program Controlled
Geometric Modification	
Contact Geometry Correction	Bolt Thread
--Orientation	Program Controlled
<input type="checkbox"/> --Mean Pitch Diameter	4.9 mm
<input type="checkbox"/> --Pitch Distance	1. mm
<input type="checkbox"/> --Thread Angle	60. °
--Thread Type	Single-Thread
--Handedness	Right-Handed

Рисунок 23 – Настройки виртуальной резьбы

Модель болта № 4.

В этой модели (рисунок 24) тела болта и гайки упрощены и разрезаны для удобства протягивания сетки (тела теперь являются «протягиваемыми» или sweepable bodies).

Далее нужно добавить ряд настроек и можно получить неплохую гексасетку.

В модели контакта между болтом и гайкой используется методика виртуальной резьбы (аналогично модели № 3) (рекомендуется четыре элемента на один виток резьбы).

Тип контактов между болтом и фланцем, гайкой и болтом определяется как bonded с несимметричным поведением (asymmetric behavior).

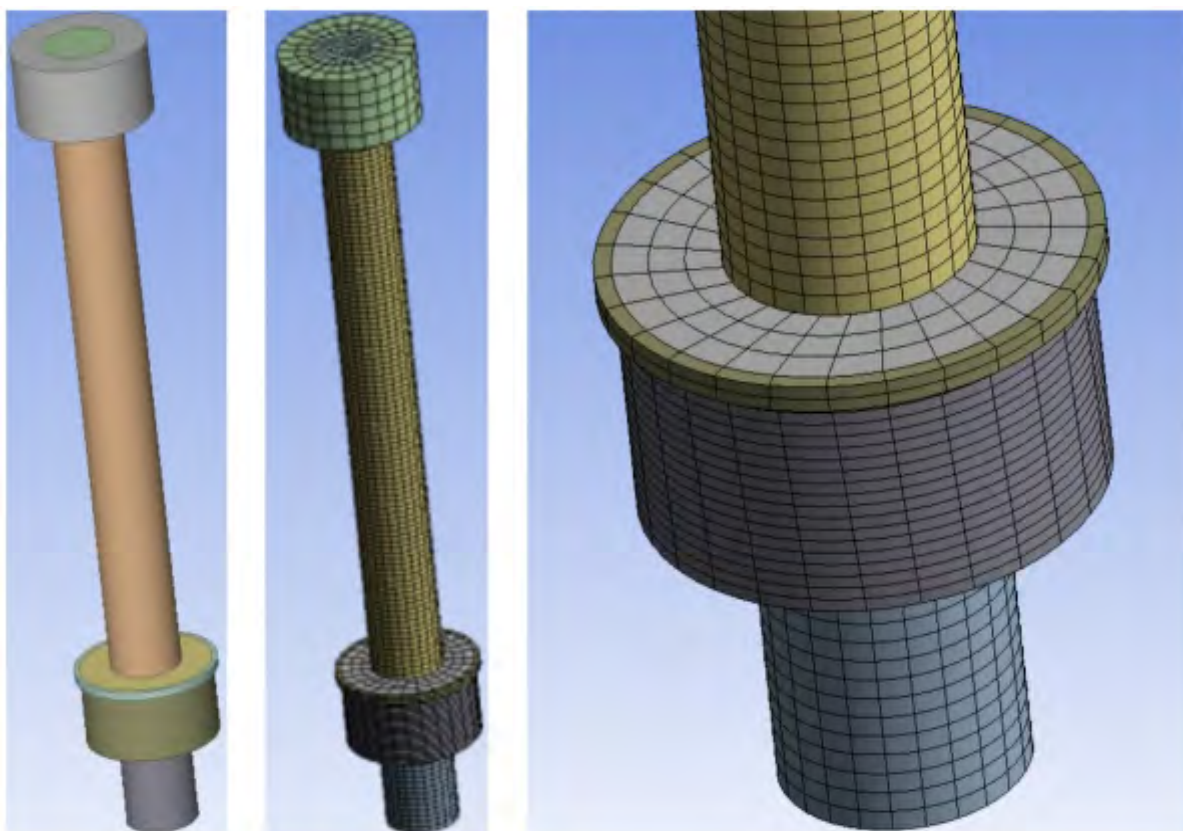


Рисунок 24 – Упрощенная 3D-Solid-модель болта с гексасеткой

Модель болта № 5.

Геометрия (рисунок 25) та же, что и в модели № 4.

Контакт с виртуальной резьбой между болтом и гайкой заменяется на цилиндрический шарнир (cylindrical joint).

С помощью APDL-команд (рисунок 26) тип шарнира меняется на screw joint.

Тип контактов между болтом и фланцем, гайкой и болтом определяется как bonded с несимметричным поведением (asymmetric behavior).

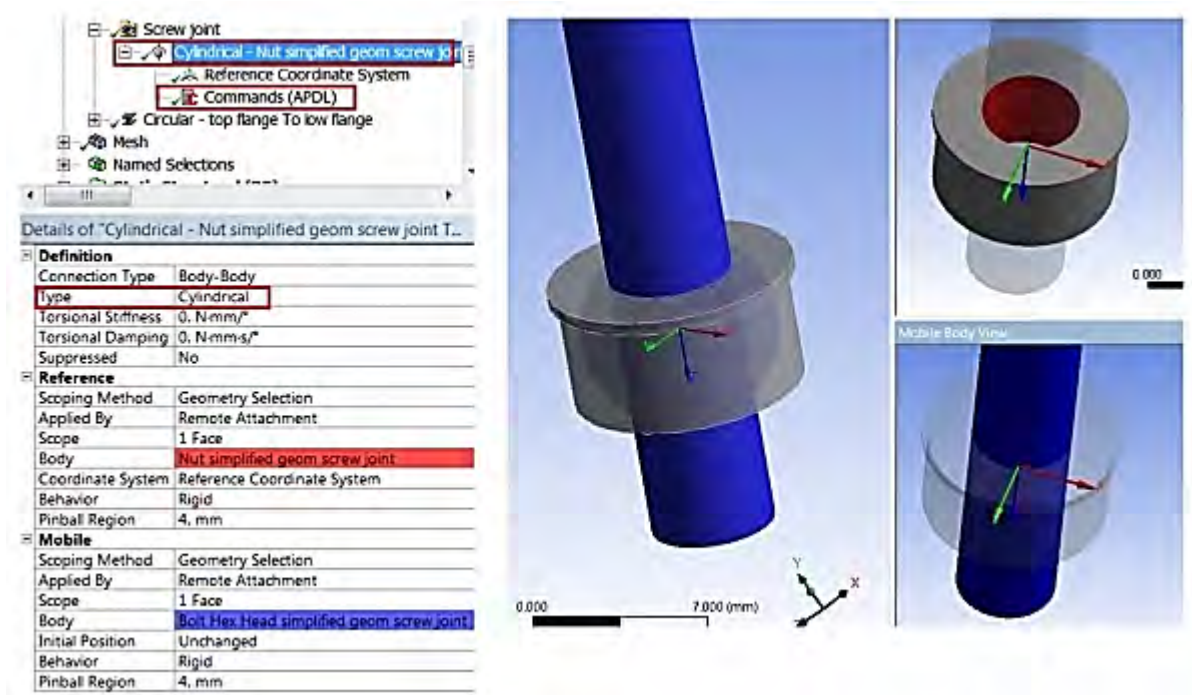


Рисунок 25 – 3D-Solid-модель с использованием screw joint

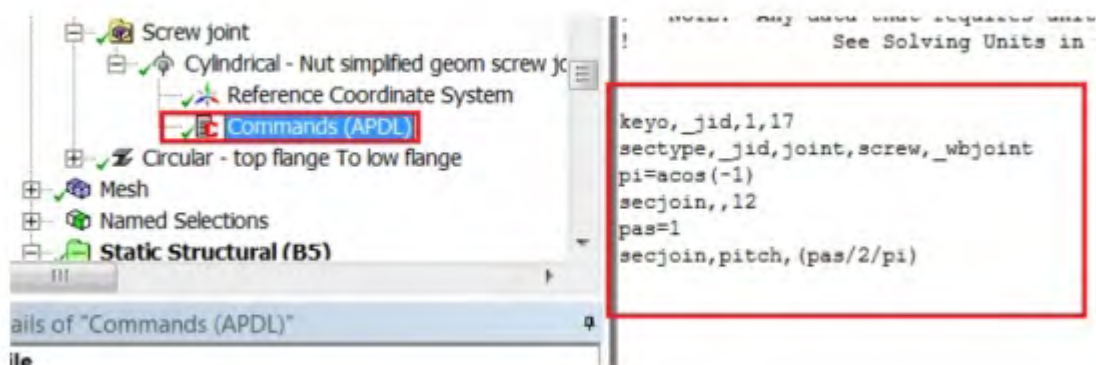


Рисунок 26 – Код APDL для изменения типа joint'a

Модель болта № 6.

Геометрия болта упрощается до одного балочного тела.

Для моделирования пятен контакта на верхней и нижней поверхностях фланца отпечатываются цилиндрические поверхности (рисунок 27).

Для связи цилиндрических областей контакта с концами балочного тела используется Bonded-контакт (MPC) (рисунок 28).

Балочное тело разбивается балочными (beam) элементами, соответственно, размерность модели существенно снижается.

Однако подробности напряженно-деформированного состояния в теле болта таким образом вычислить не получится.

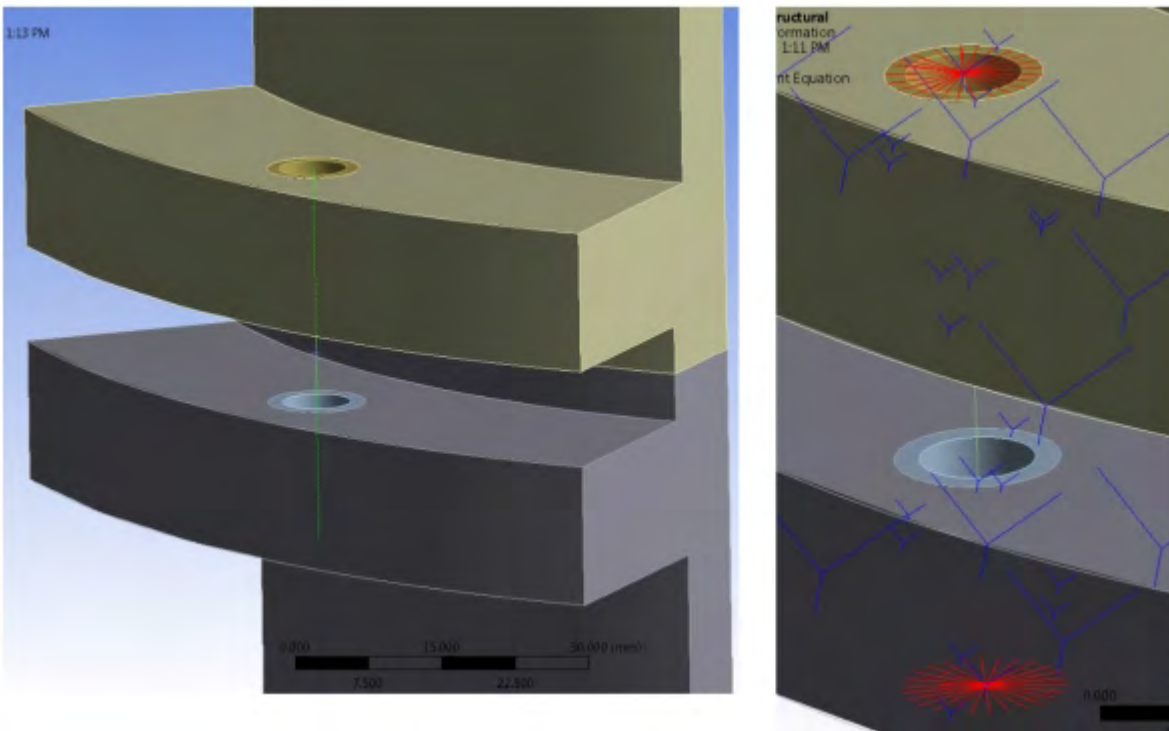


Рисунок 27 – Балочная модель с учетом пятна контакта

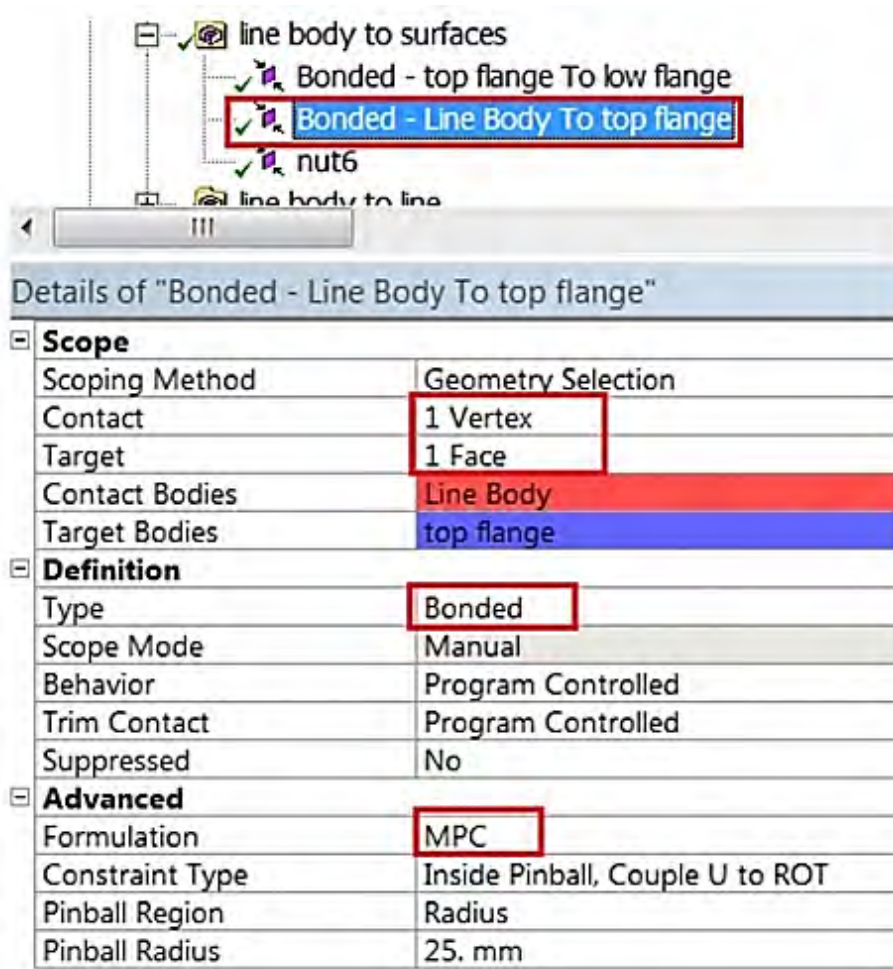


Рисунок 28 – Настройки MPC контакта

Модель болта № 7.

Геометрия болта (рисунок 29) упрощается до балочного тела, как и в модели № 6. Цилиндрические поверхности не отпечатываются.

Для определения контакта между концами балочного тела и цилиндрических ребер болтовых отверстий используется Bonded-контакт (MPC). Радиус Pinball radius должен быть достаточно большим, чтобы охватывать цилиндрические ребра.

Однако подробности напряженно-деформированного состояния в теле болта таким образом вычислить не получится.

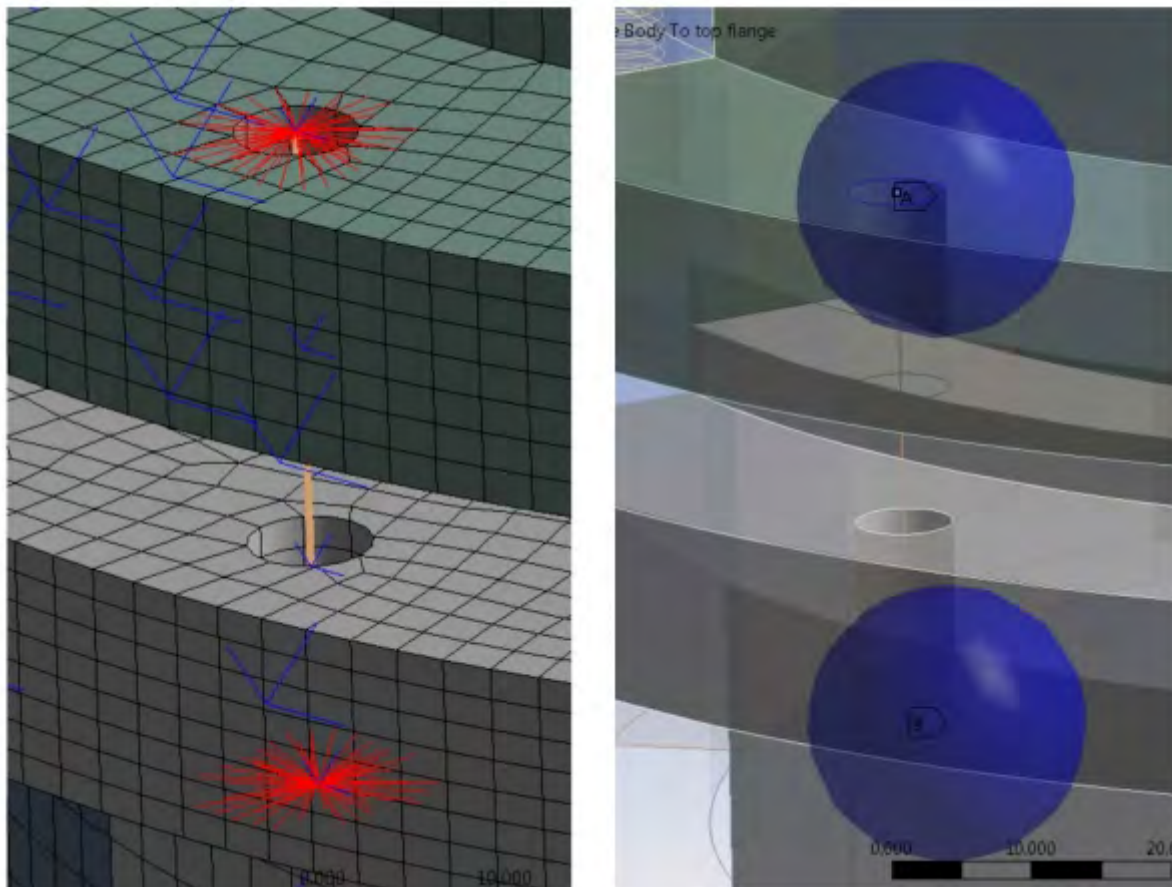


Рисунок 29 – Балочная модель без учета пятна контакта

Модель болта № 8.

Для моделирования болтового соединения (рисунок 30) используется связь Body-Body > beam connecton. Никакой геометрии болта или гайки не потребуется.

Между геометриями mobile/reference создается единственный балочный элемент beam 188.

Для создания балочного соединения нужно прикрепить (Scope) объект к ребру или поверхности болтовых отверстий на фланце.

В данной методике нельзя использовать затяжку болта (bolt-pretension) напрямую. Для задания изначального напряженно-деформированного состояния от усилий затяжки потребуются команды APDL (рисунок 31).

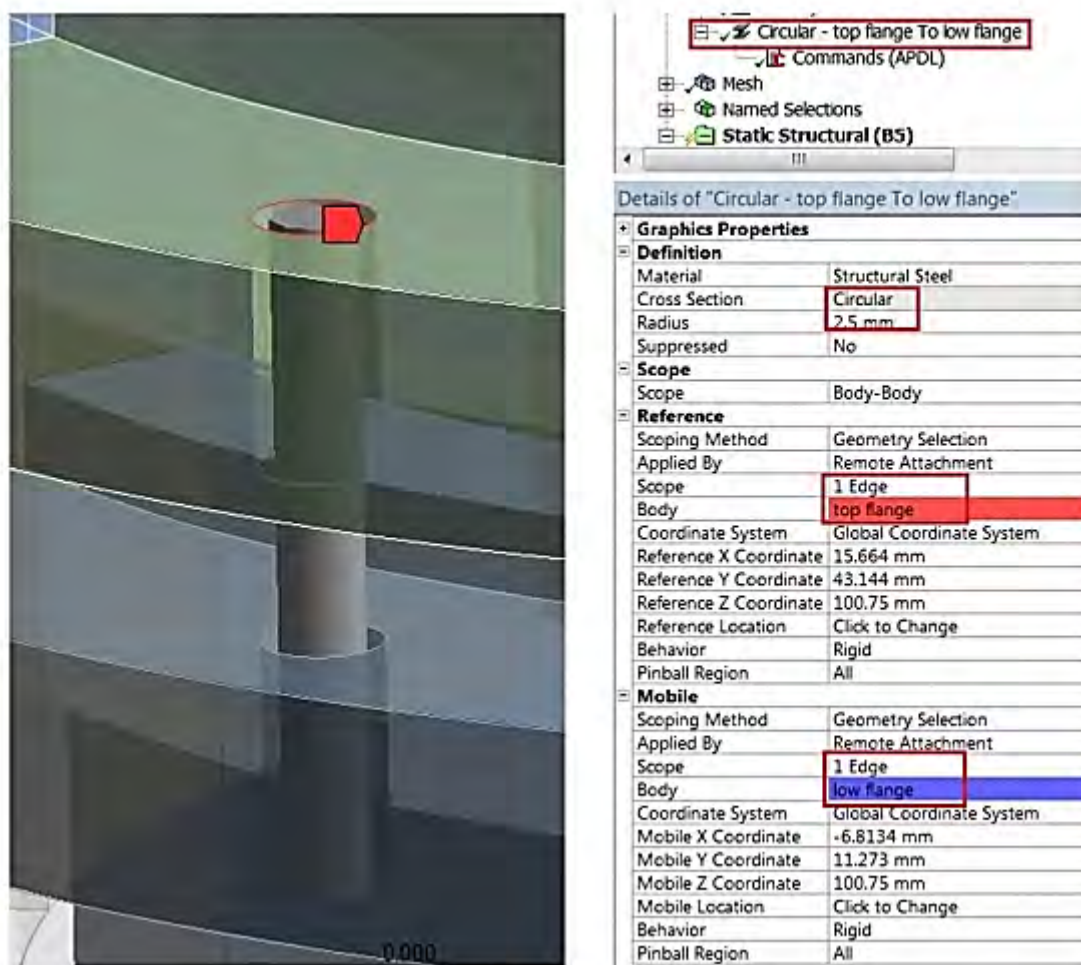


Рисунок 30 – Моделирование болта опцией Beam Connection

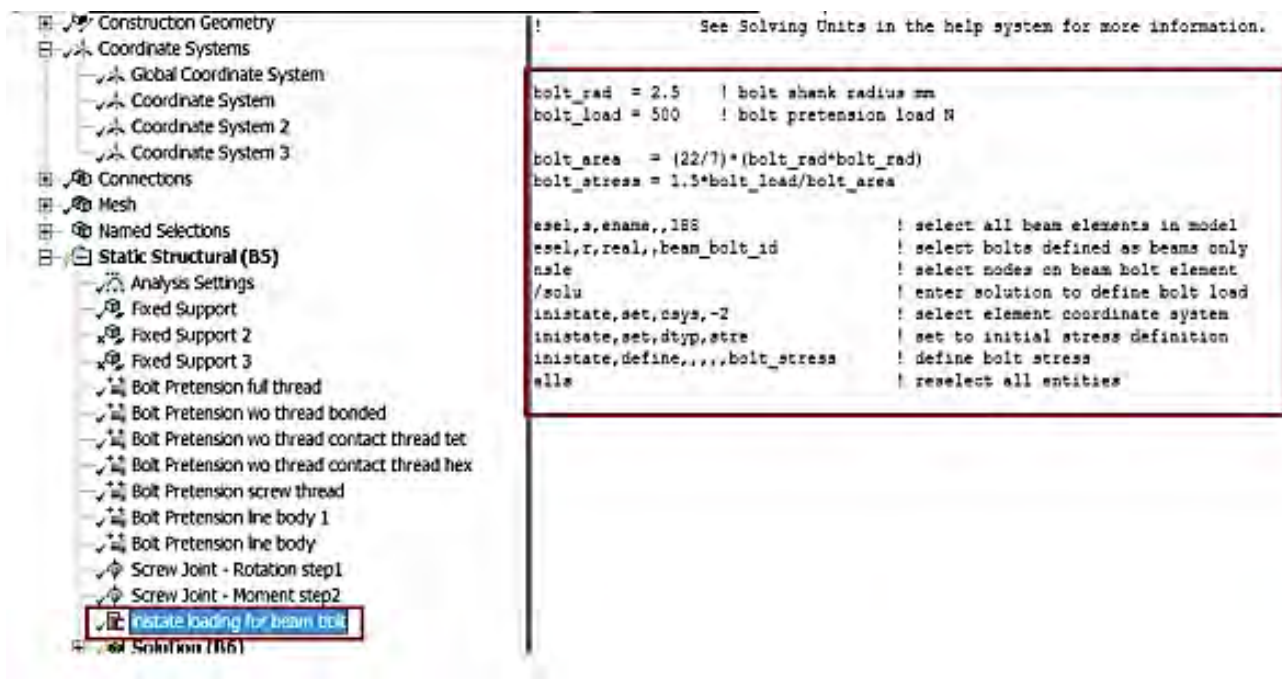


Рисунок 31 – APDL-код для моделирования затяжки болта

Затяжка болта (Bolt Pretension Load)

В рассматриваемой модели конструкции будут присутствовать все восемь вариантов реализации болтового соединения одновременно – по одному на каждый болт. Нагрузка bolt pretension load (500 Н) (рисунок 32) будет приложена ко всем болтам, за исключением модели № 8 (в этой модели будет использован соответствующий код APDL). Для приложения нагрузки нужно выбрать поверхность (трехмерный болт) или ребро (балочное тело) болта.

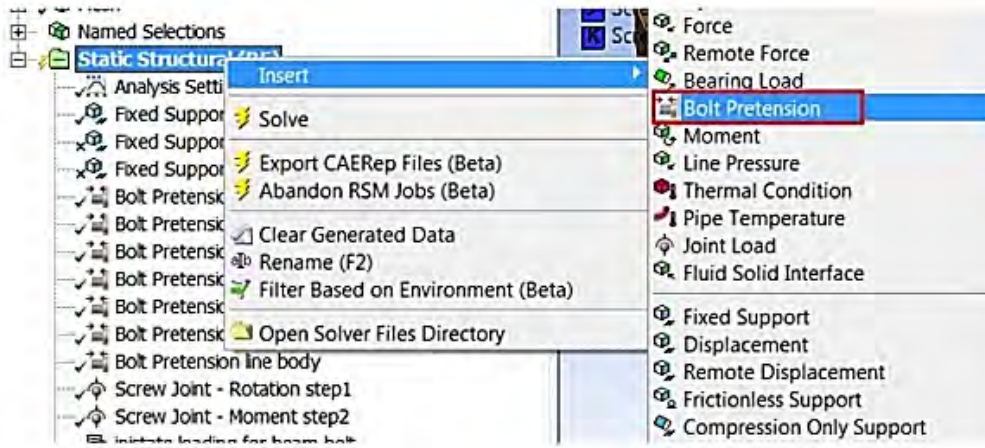
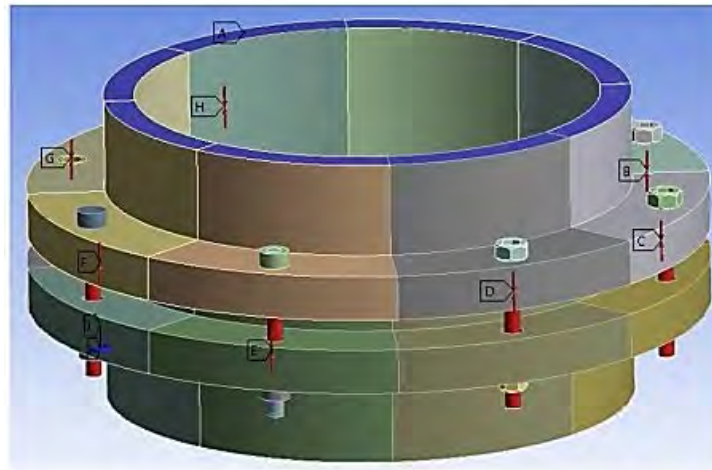


Рисунок 32 – Нагрузка Bolt Pretension

Потребуется два шага нагружения (рисунок 33): на первом шаге прикладывается нагрузка затяжки болта, на втором шаге болт фиксируется в затянутом положении.



Tabular Data				
Steps	Define By	Preload [N]	Preadjustment [mm]	Increment [mm]
1	1. Load	500.	N/A	N/A
2	2. Lock	N/A	N/A	N/A
*				

Рисунок 33 – Задание нагрузки Bolt Pretension

Сравнение результатов.

Смещение верхнего фланца (рисунок 34) является адекватным независимо от выбранного метода моделирования болта.

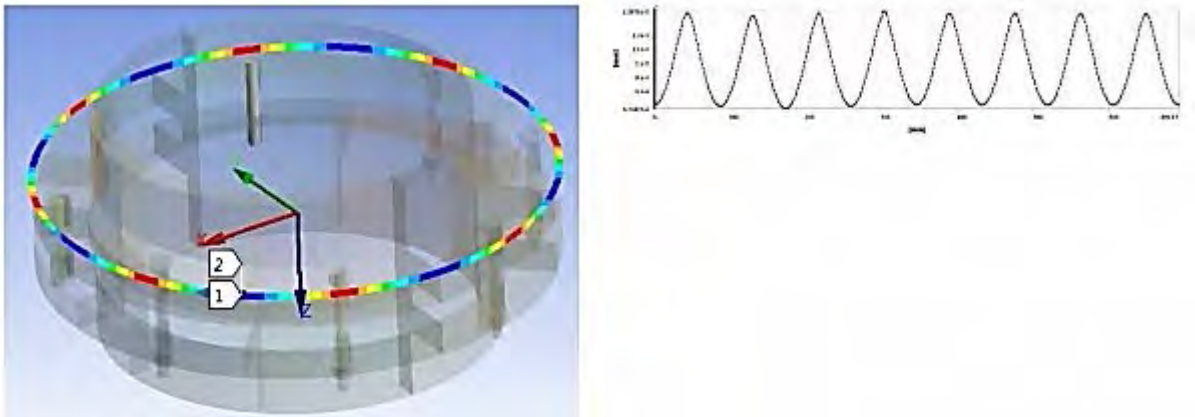


Рисунок 34 – Смещение фланца

Полное перемещение Total deformation (рисунок 35) также осесимметрично независимо от выбранной модели.

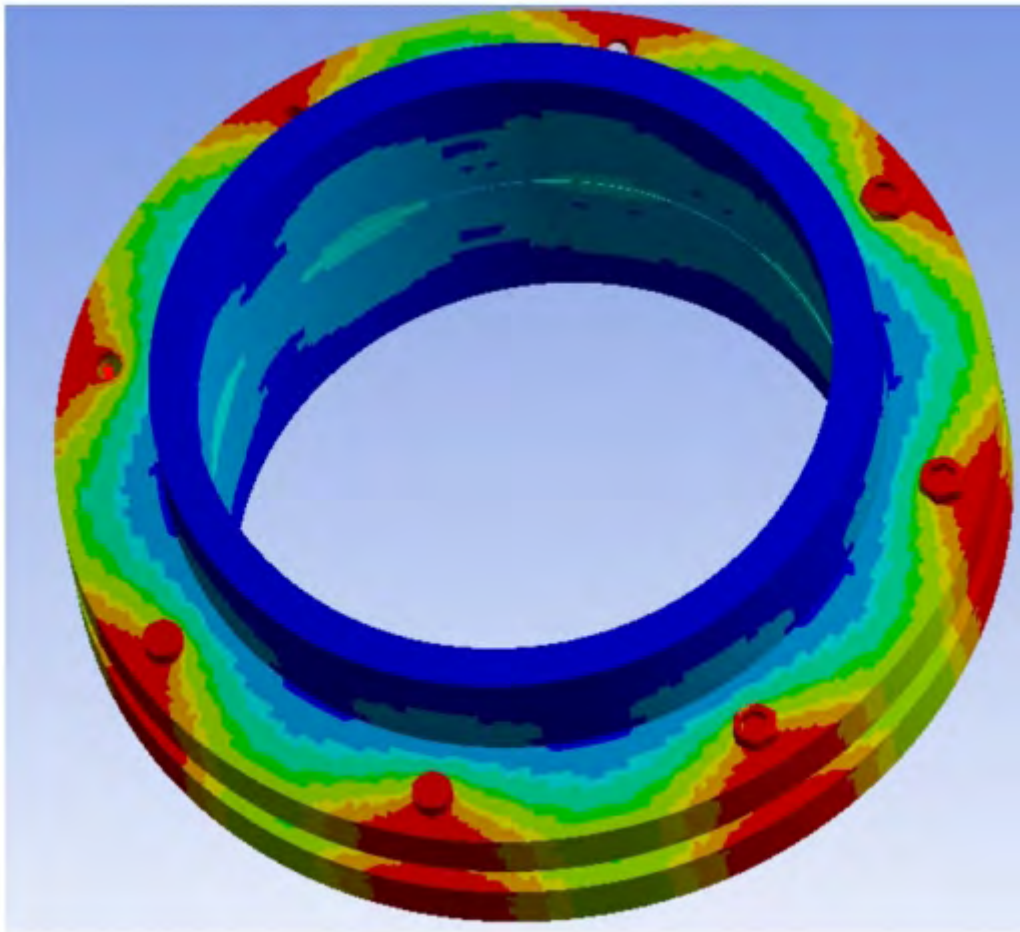


Рисунок 35 – Полное перемещение фланца

Первые пять моделей (трехмерная геометрия болта) показали примерно одинаковое распределение напряжений вдоль болта с максимальным значением около 25 МПа (рисунок 36). Уровень напряжений, посчитанный вручную, составил 25,6 МПа ($500 \text{ Н}/19,537 \text{ мм}^2$). Таким образом, ошибка в модели менее 3 %.

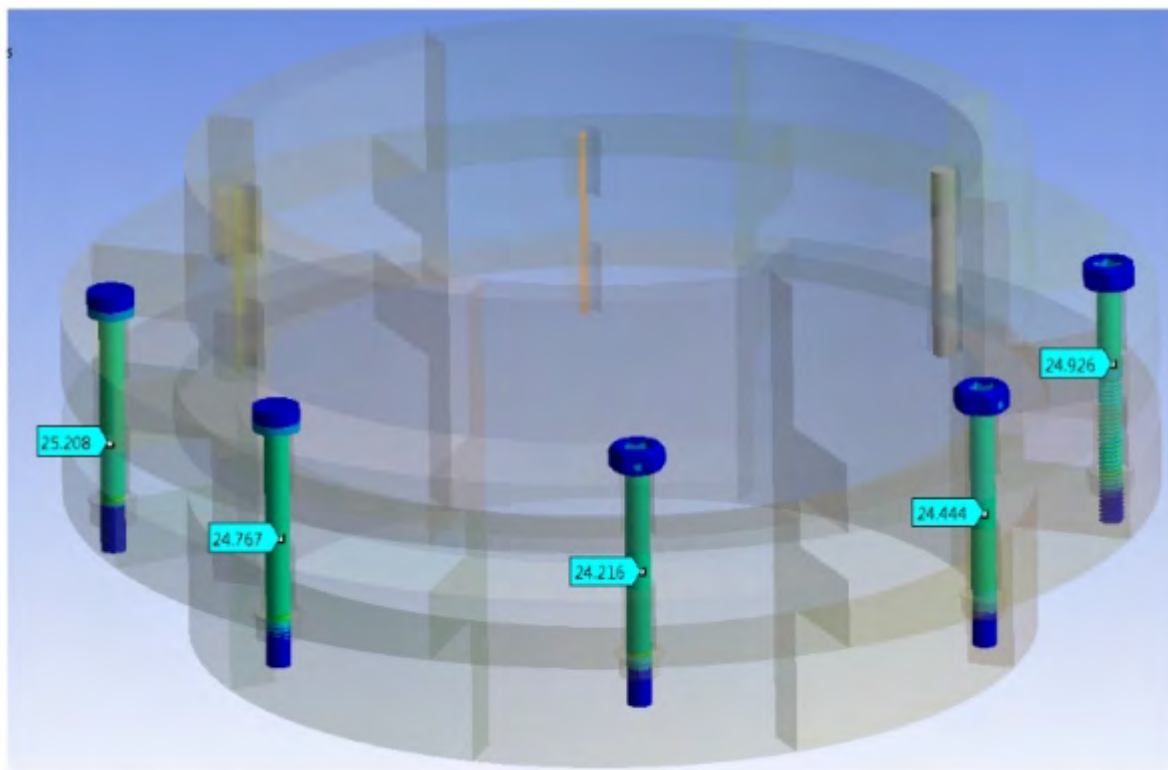


Рисунок 36 – Напряжения в болтах, выполненных Solid-моделями

Для болтов, смоделированных балочными телами, напряжение составило 25,5 МПа (напряжения были получены с помощью инструмента «Beam Tool») (рисунок 37).

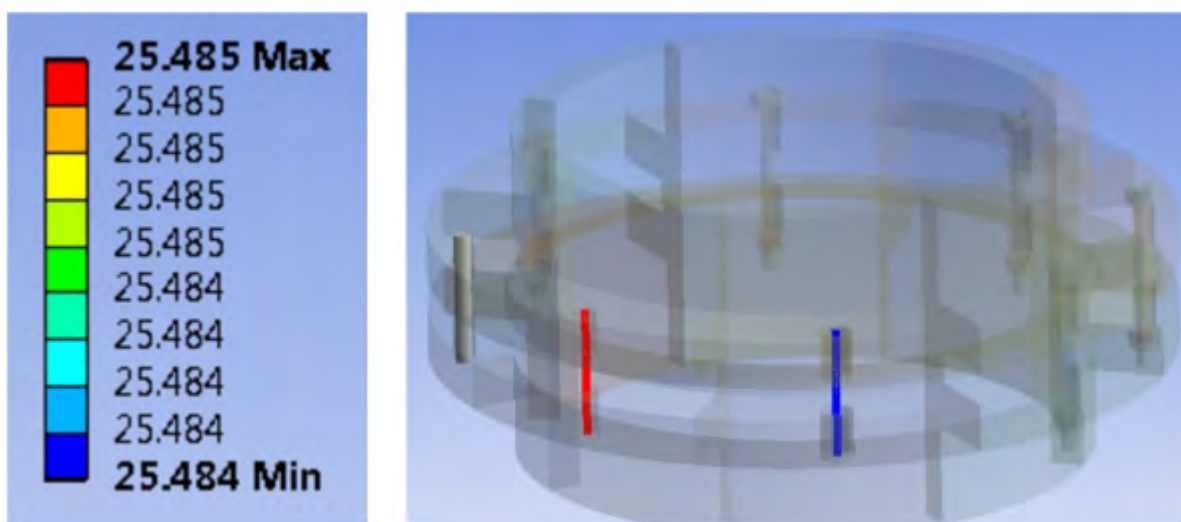


Рисунок 37 – Напряжения в болтах, выполненных балочными моделями

Что касается балочного соединения, то для получения напряжений были использованы команды APDL. Величина составила 25.4 МПа (рисунок 38).



Рисунок 38 – Получение напряжения в болте, смоделированном опцией Beam Connection

В заключение надо сказать, что расчетчику стоит хорошо подумать перед принятием решения о выборе метода моделирования болтового соединения. Что же касается общих рекомендаций, если предметом интереса является поведение всей сборки, а не уровень напряжения в болтовом соединении, то балочные тела/соединения будут наилучшим выбором, поскольку существенно снизят размерность модели.

Если в результате расчета необходимо получить понимание состояния контакта между болтом и фланцем, а также напряжения в болтовом соединении, то рекомендуется твердотельное моделирование, однако не забудьте подготовить геометрию модели и поработать над созданием достаточно мелкой сетки. Метод виртуальной резьбы поможет существенно снизить размерность модели и, соответственно, рекомендуется при работе с большими сборками.

Проведите исследование на модели, используя любой из восьми типов моделирования болтового соединения.

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 6 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи решаемые в ходе её выполнения;
- напряжения в моделируемом болте и описание метода моделирования.

7 Статический нелинейный анализ конструкций. Задание нелинейных свойств материала

Цель лабораторной работы № 7 – изучение основ создания нелинейных свойств материалов.

Задачи, решаемые в ходе выполнения работы:

- изучение графического интерфейса модуля управления материалами;
- задание пластических свойств материалов.

Чтобы запустить модуль управления материалами, нужно вызвать контекстное меню нажатием правой кнопки мыши на строке элемента Engineering Data и выбрать пункт Edit. Вид рабочей области можно настроить через опции View, на рисунке 39 приведена конфигурация модуля управления материалами.

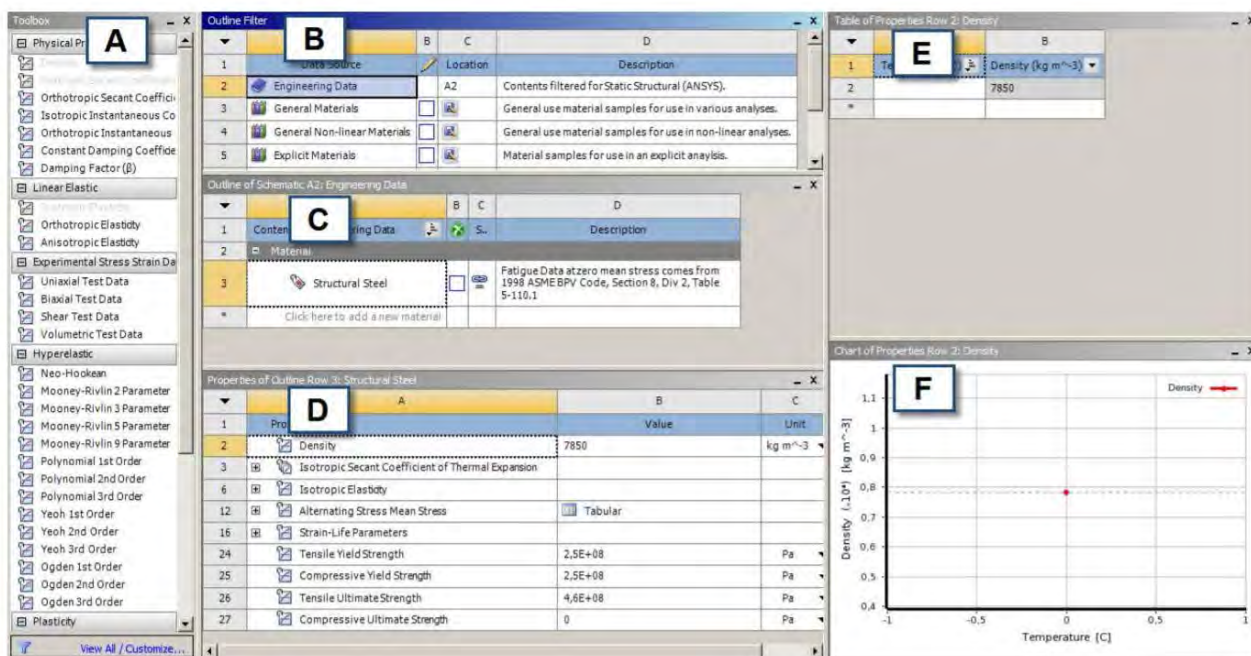


Рисунок 39 – Интерфейс модуля управления материалами

A – Toolbox (содержит свойства, которые могут быть использованы при задании материалов). B – Outline Filter (отображает доступные источники данных о материалах, их местоположение и описание). C – Outline Pane (отображает структуру содержимого выбранного источника данных в окне). D – Properties Pane (отображает свойства выбранного элемента на панели структуры данных). E – Table Pane (отображает табличные данные выбранного элемента). F – Chart Pane (отображает диаграмму элемента, выбранного на панели свойств).

Пластичность – способность материала получать остаточные деформации без разрушения и сохранять их после снятия нагрузки. Когда пластичный материал испытывает напряжения выше предела упругости, он попадает в зону текучести, что соответствует появлению больших остаточных деформаций (рисунок 40).

Для описания пластичности должны использоваться истинные напряжения и деформации, так как они более точно характеризуют состояние материала. Истинные напряжения σ получают отнесением нормальных сил в сечении к площади этого сечения. Для расчета истинных напряжений должно быть измерено мгновенное значение площади сечения. При построении диаграммы растяжения, полученной на основании испытания на растяжение (сжатие) образца, используются условные напряжения $\sigma_{\text{усл}}$, которые определяются отношением нормальных сил к начальной площади сечения.

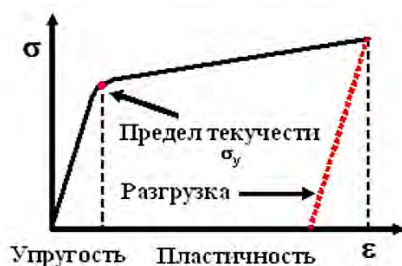
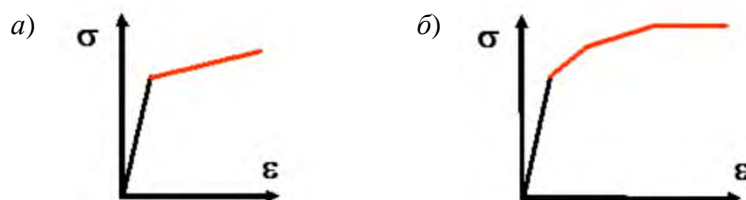


Рисунок 40 – Эффект появления остаточных деформаций

В ANSYS применяются два типа кривых «напряжение – деформация»: билинейная и полилинейная (рисунок 41). Билинейная диаграмма задается модулем упругости, пределом текучести, касательным модулем и дополняется коэффициентом Пуассона. Полилинейная задается с помощью таблицы значений деформаций и соответствующих им истинных напряжений. Модуль упругости и коэффициент Пуассона задаются отдельно. Первая ненулевая точка диаграммы должна с высокой точностью соответствовать модулю упругости.



а – билинейная диаграмма; б – полилинейная диаграмма

Рисунок 41 – Два типа кривых «напряжение – деформация»

Для определения линейных упругих свойств материала должны быть заданы модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Пластичность металлов учитывается через нелинейную модель материала. Далее представлен пример задания пластических свойств материала. Предполагается, что модуль управления материалами уже активизирован.

В окне Toolbox откройте группу Plasticity и выделите одну из моделей пластичности. Например, на рисунке 42 показан выбор билинейной изотропной модели материала. В контекстном меню этой модели выберите пункт Include Property, и модель билинейного изотропного упрочнения Bilinear Isotropic Hardening появится в окне свойств Properties Pate.

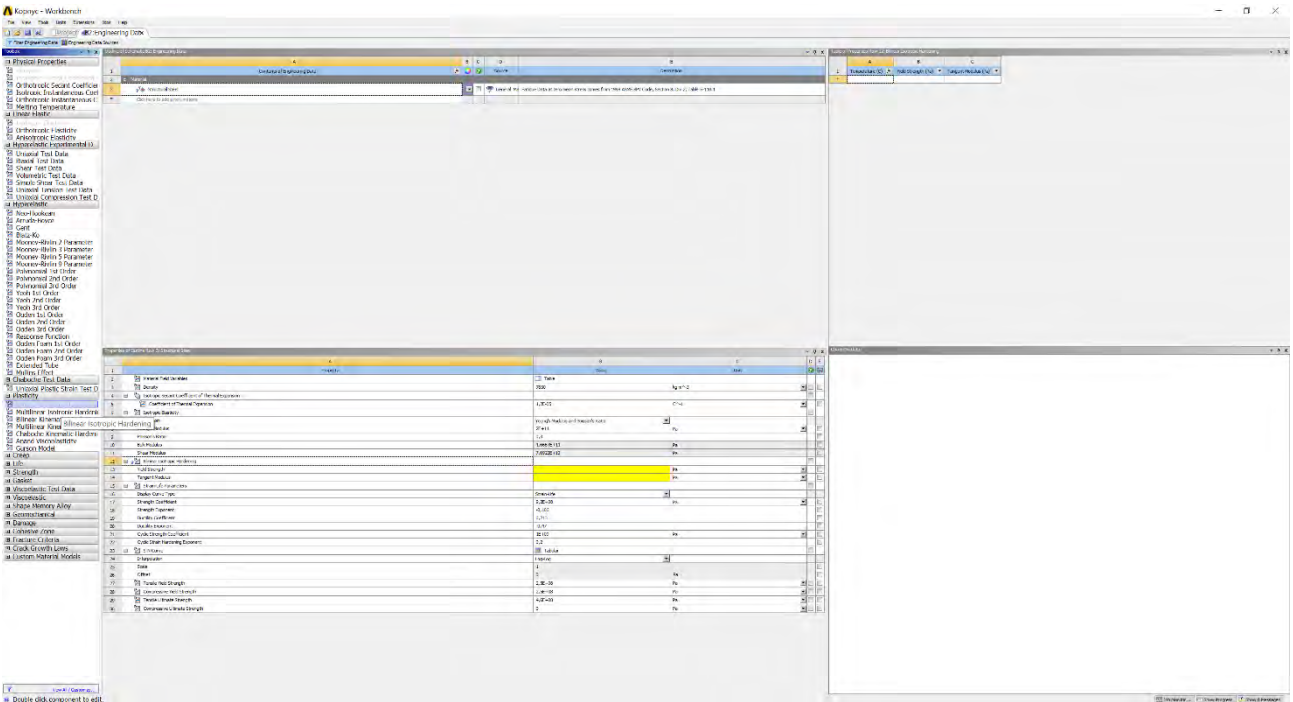


Рисунок 42 – Добавление билинейной изотропной модели материала

Желтые пустые ячейки будут доступны для ввода значений величин предела текучести (Yield Strength) и касательного модуля (Tangent Modulus). По заданным значениям предела текучести и касательного модуля в панели диаграмм (Chart) будет автоматически построена диаграмма (рисунок 43).

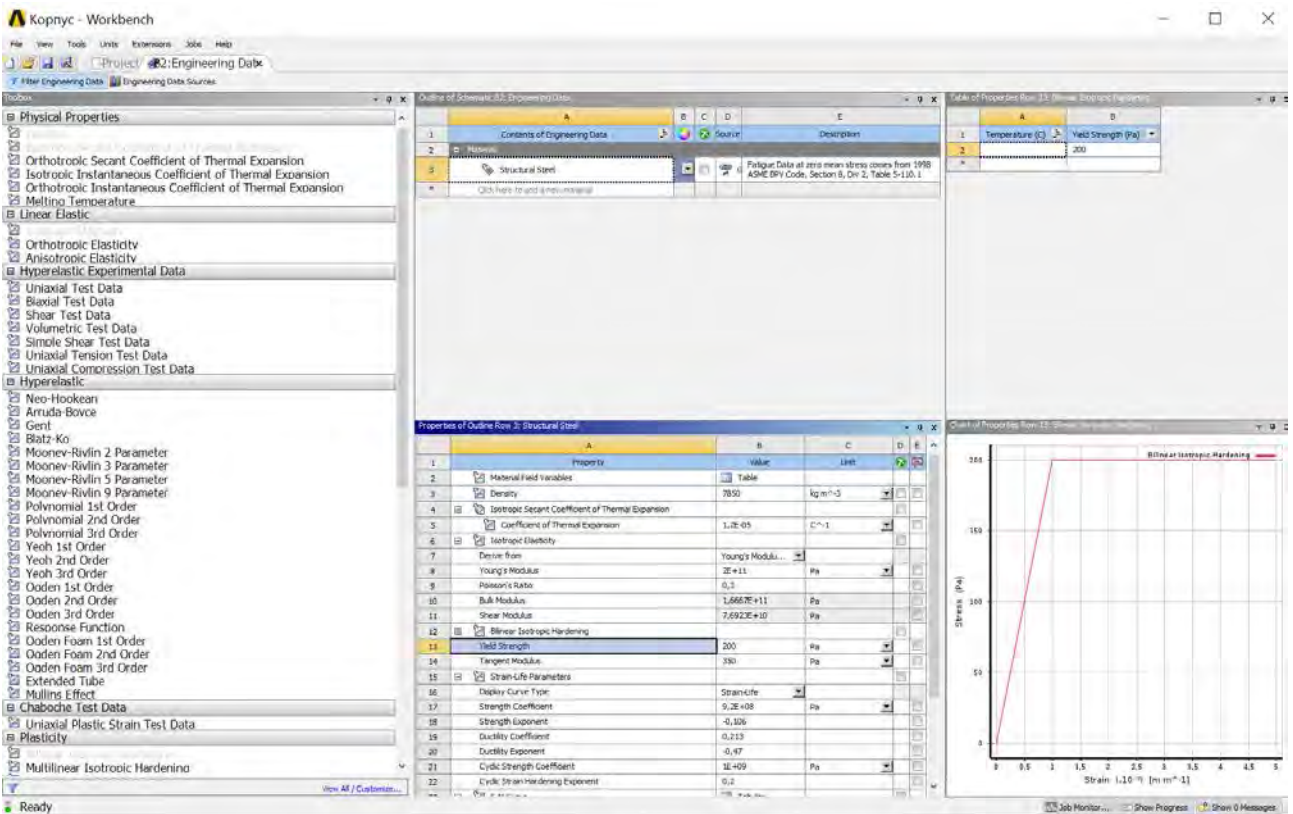


Рисунок 43 – Добавление билинейной изотропной модели материала



Порядок выполнения работы

1 Запустите ANSYS Workbench, создайте новый блок статического прочностного анализа Static Structural. Запустите модуль управления материалами.

2 Создайте новый материал с именем New Matl. Задайте ему упругие свойства (модуль Юнга и коэффициент Пуассона).

3 Измените упругие свойства материала New Matl, сделав модуль Юнга зависящим от температуры. Задайте несколько значений при различных температурах.

4 Добавьте материал Aluminium Alloy из стандартной библиотеки General Materials в текущий набор материалов. Исключите плотность этого материала из перечня свойств.

5 Назначьте Aluminium Alloy в качестве материала, используемого по умолчанию для твердых тел.

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 7 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи, решаемые в ходе её выполнения;
- приведите порядок выполнения работы;
- ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Для чего предназначены окна Outline Filter и Outline Pane?
- 2 В каком окне находятся свойства материалов?
- 3 Что отображается в панелях Table и Chart?
- 4 Какими задаются пластические свойства материала?
- 5 Каким свойством задаются результаты одноосных испытаний материала на растяжение/сжатие?

8 Частотный анализ конструкций

Цель лабораторной работы № 8 – выполнение модального анализа.

Задачи, решаемые в ходе выполнения работы: создание дополнительного исследования в рамках ANSYS Mechanical и проведение исследования.

Модальный анализ проводится для определения частот и форм (мод) собственных колебаний конструкций. Также он может быть первым шагом для других видов динамического анализа, таких как анализ переходных процессов, гармонический и спектральный анализ. Модальный анализ предполагает, что система является линейной.

Все виды нелинейности – нелинейное поведение материала, контактные граничные условия, конечные перемещения – игнорируются. Контакты, в зависимости от своего исходного состояния, остаются открытыми или закрытыми.

Предполагается, что внешние силы и демпфирование равны нулю.



Создадим новый тип анализа «Modal», при этом в окне Workbench схематичное задание типа исследования будет выглядеть, как на рисунке 44.

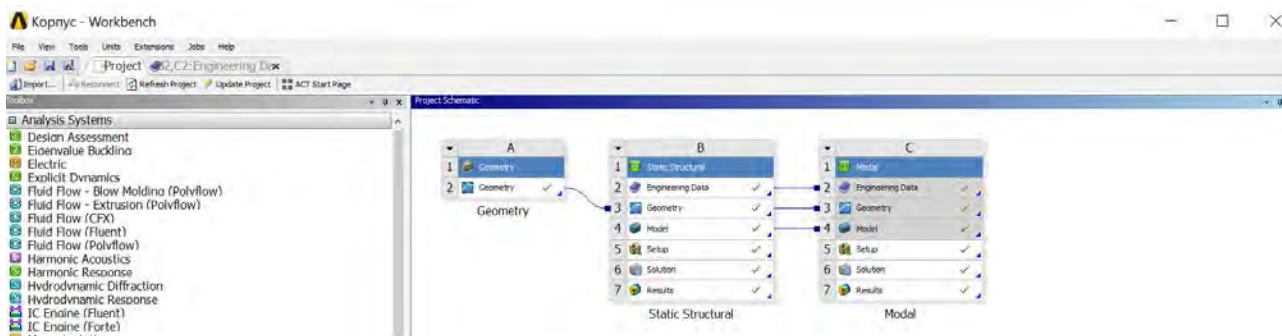


Рисунок 44 – Структура проекта с блоком modal

Далее производим обновление ранее сохраненного проекта и проводим анализ 6 собственных частот конструкции. После окончания расчета необходимо выбрать интересующую форму (от 1 до 6) и вывести результаты на рабочий стол. Пример отображения шестой собственной частоты представлен на рисунке 45.

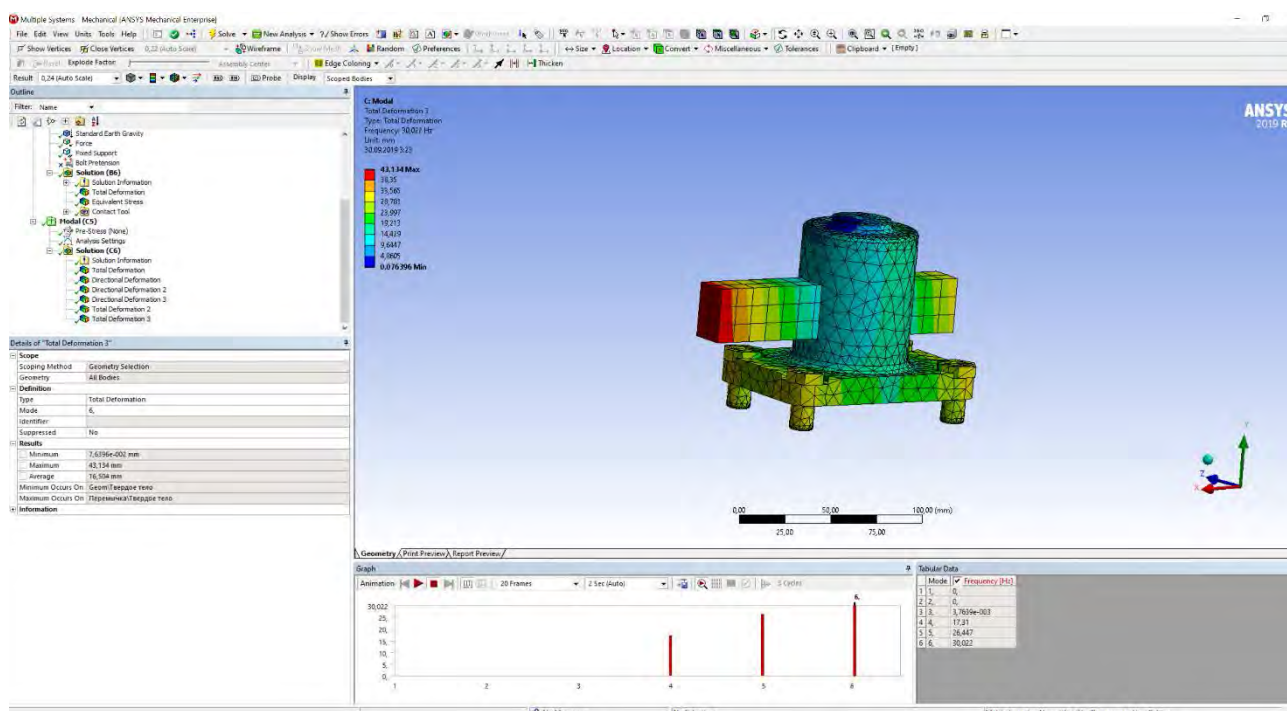


Рисунок 45 – Собственные частоты детали «Корпус»

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 8 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи, решаемые в ходе её выполнения;
- алгоритм проведения частотного анализа и его допущения;
- ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое свободные колебания?
- 2 Что такое вынужденные колебания?

9 Основы CFD (ANSYS CFX). Анализ однофазных изотермических течений. Обработка результатов

Цель лабораторной работы № 9 – ознакомление с возможностями численного моделирования процессов гидрогазодинамики.

Возможности ANSYS Myltiphysics (и большинства прочих пакетов) ограничены почти полным отсутствием методов моделирования переноса тепла излучением. Только иногда, используя угловые коэффициенты и считая среду лучепрозрачной, удастся делать какие-то расчетные оценки. Например, в металлургии большинство агрегатов высокотемпературные, и энергия в них переносится главным образом излучением. При решении трехмерных задач сопряженного теплообмена в объектах со сложной геометрией, требующих детального описания переноса тепла излучением и конвекцией, бесспорны преимущества программного комплекса ANSYS CFX перед другими пакетами программ. Пользователь, составляя программу расчета процессов в конкретном объекте, в частности, имеет возможность выбирать один из четырех методов решения уравнений радиационного теплообмена: метод Росселанда; метод $\pi 1$; метод Discrete Transfer; метод Монте-Карло.

Выбор метода обеспечивает или ускорение вычислений, или увеличение точности результатов моделирования. ANSYS CFX – это профессиональный аналитический комплекс для решения термо-, гидро-, газодинамических задач. В нем используется более 16 моделей турбулентности. Модель движения твердых частиц (Lagrangian Particle Transport) позволяет учесть дискретные примеси в однородном потоке. Модель многофазного тепло- и массообмена дает возможность рассчитывать кипение, испарение и кавитацию. Применение движущихся сеток очень важно для моделирования меняющейся геометрии расчетной области: описание взаимодействия ротор–статор во вращающихся машинах; компрессоры, насосы.

Решим средствами комплекса задачу, связанную со смешиванием жидкости в смесителе. Графически условия решаемой задачи представлены на рисунке 46. Статический смеситель, состоящий из двух впускных труб, подающих воду в смесительный сосуд; вода выходит через выпускную трубу. Общий рабочий процесс устанавливается для анализа потока жидкости в и из смесителя.

Вода поступает через обе трубы с одинаковой скоростью, но при разных температурах. Первая запись со скоростью 2 м/с при температуре 315 К, а вторая запись со скоростью 2 м/с при температуре 285 К. Радиус смесителя 2 м.

Цель – понять, как использовать CFX для определения скорости и температуры воды, когда она выходит из статического смесителя.



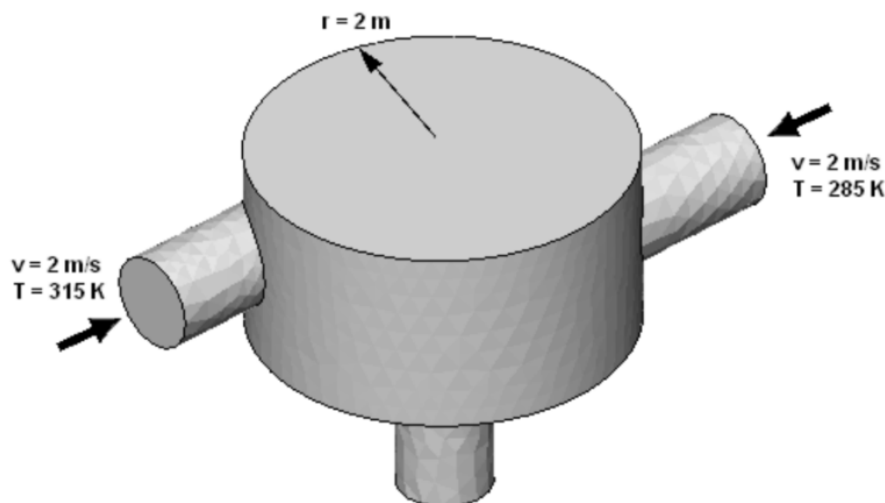


Рисунок 46 – Геометрические и граничные условия для смесителя

Создадим геометрию смесителя в SpaceClaim и далее в ANSYS Workbench – проект и связи для выполнения исследования. При правильном и пошаговом выполнении получим следующую структуру проекта, представленную на рисунке 47.

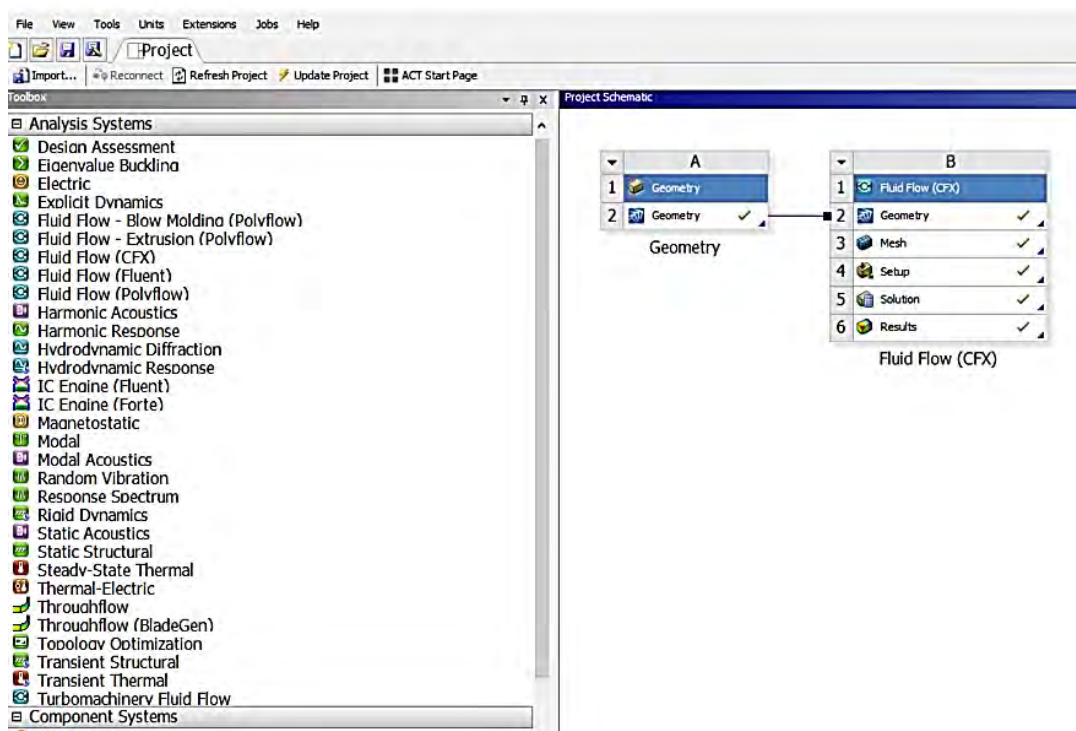


Рисунок 47 – Структура проекта, решаемого средствами CFX

На следующей стадии выполним создание файла конечно-элементной геометрии средствами ANSYS Mechanical, сохраним его при сохранении проекта. Настройки создания сетки не изменять (!). Затем выполните обновление данных по проекту и запустите п. 4 Setup. Загрузится среда CFX-Pre, графический интерфейс которой представлен на рисунке 48.

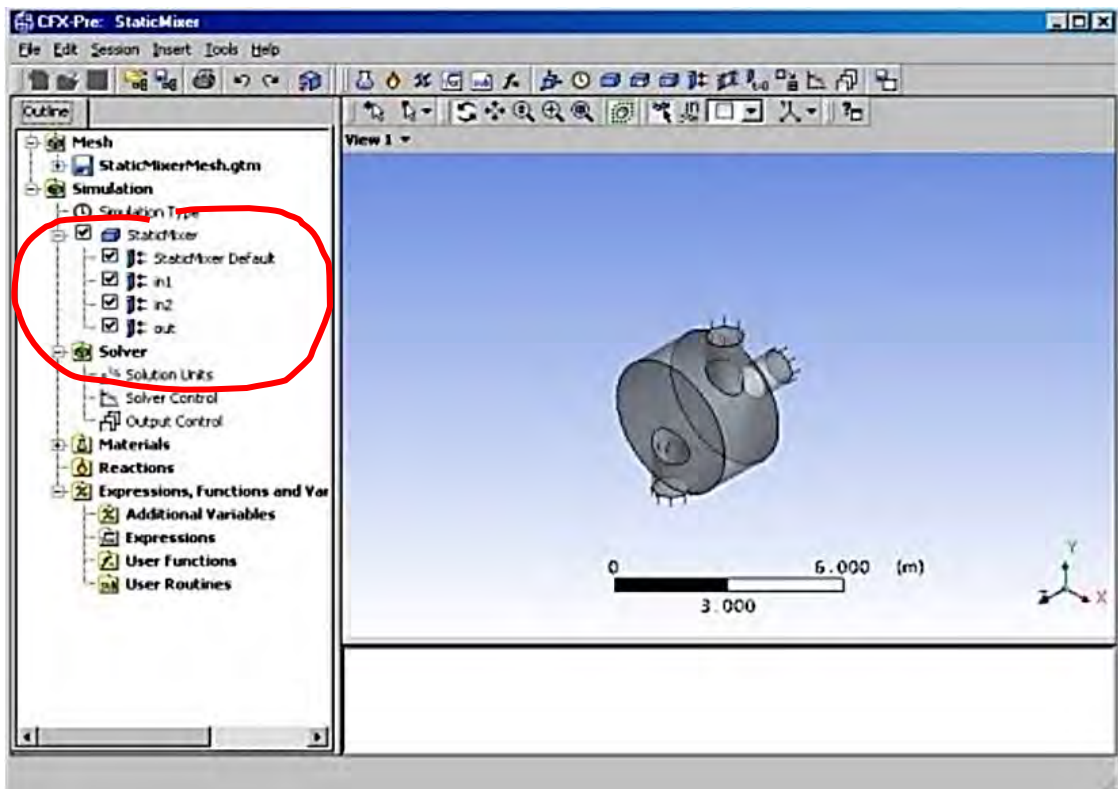


Рисунок 48 – Графический интерфейс среды CFX-Pre

Произведите задание граничных условий модели в соответствии с рисунком 48. Далее переходите к решателю и по двойному щелчку мыши на п. 5 запустится CFX-Solver Manager (рисунок 49).

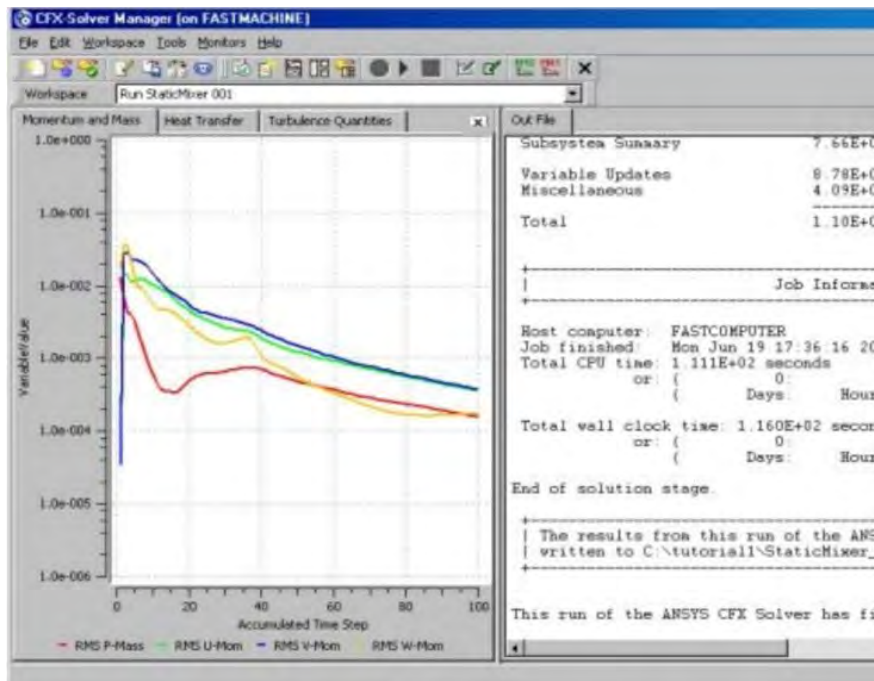


Рисунок 49 – Сходимость показателей для CFX-Solver

Когда завершится расчет, можно будет просмотреть результаты исследования в среде CFX-Post. Изменяя тип переменной на закладке Countour, можно вывести показатели, представленные на рисунке 50.

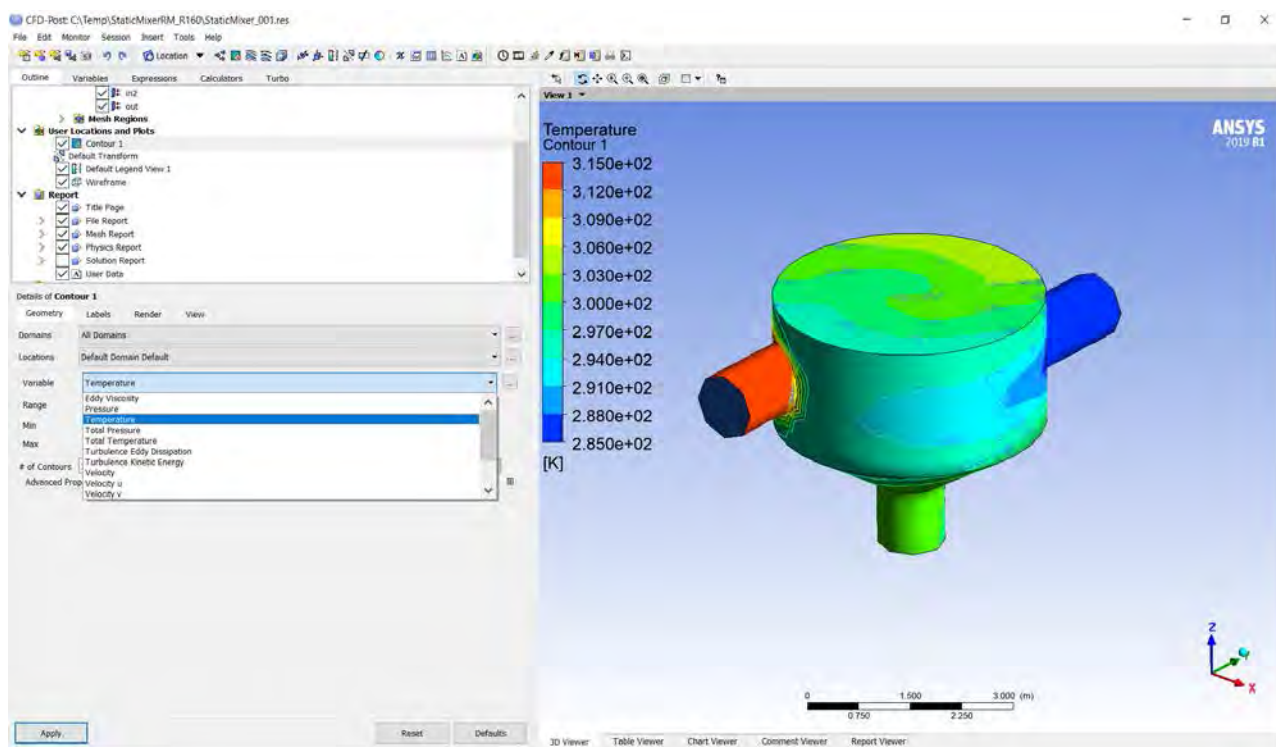


Рисунок 50 – Графический интерфейс среды CFX-Post

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 9 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи решаемые в ходе её выполнения;
- алгоритм проведения однофазных изотермических течений и его допущения.

10 Анализ сопряженного теплообмена. Постановка задачи. Решение и анализ результатов

Цель лабораторной работы № 10 – ознакомление с возможностями численного моделирования процессов сопряженного теплообмена.

Данная лабораторная работа демонстрирует способность ANSYS CFX моделировать сопряженную теплопередачу. Теплообменник используется для моделирования передачи тепловой энергии от электрически нагретого твердого вещества. Есть жидкий домен для воды и твердый домен для катушки. Катушка изготовлена из меди.

Жидкий домен является кольцевым. Область, которая охватывает катушку, имеет воду с начальной температурой 300 К, протекающую через нее со скоростью 0,4 м/с. Медная катушка имеет разность электрических потенциалов 4,4 В

от одного конца к другому и нагрета до температуры 550 К. Предположим, что медь имеет однородную электропроводность $59,6 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ и на нагревательной катушке имеется осадок карбоната кальция толщиной 1 мм.

Параметры материала для задания карбоната кальция:

- MolarMass – 100,087 кг/кмоль;
- плотность – $2,71 \text{ г/см}^{-3}$;
- удельная теплоемкость – $0,9 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$;
- теплопроводность – $3,85 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Графически решаемая задача представлена на рисунке 51.

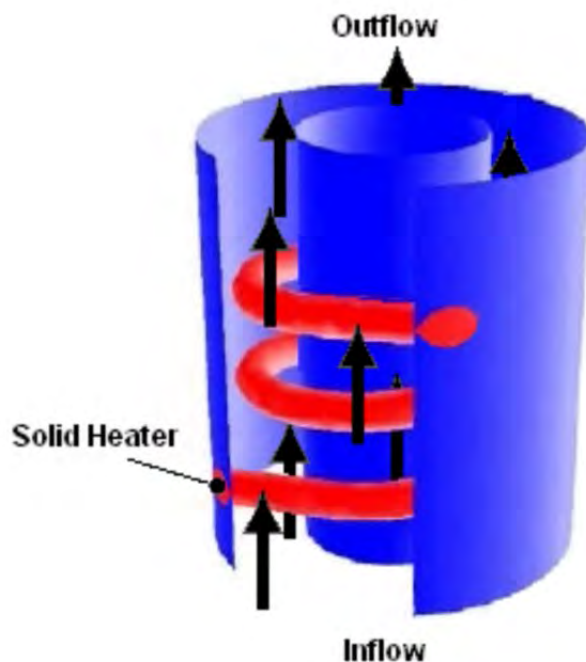


Рисунок 51 – Графическое представление объектов исследования

Соответствие функций компонентов используемым настройкам исследования CFX приведены на рисунке 52.

Исходные данные для задачи сведем в графическое представление и разделим на компоненты CFX для удобства ориентирования.

Теперь, представляя параметры для каждого этапа решаемого исследования, начнем с создания геометрии в среде SpaceClaim. Далее на втором этапе производим создание конечно-элементной сетки объекта с последующим обновлением файла проекта и переходом на стадию корректировки задания электро-механических свойств материала.

В ходе подготовки исходных данных для исследования формируем два домена: SolidZone и WaterZone. После их формирования получаем следующий результат, представленный на рисунке 53.

Component	Feature	Details
CFX-Pre	User Mode	General mode
	Analysis Type	Steady State
	Fluid Type	General Fluid
	Domain Type	Multiple Domain
	Turbulence Model	k-Epsilon
		Shear Stress Transport
	Heat Transfer	Thermal Energy
	Heat Transfer Modeling	Conjugate Heat Transfer (via Electrical Resistance Heating)
	Boundary Conditions	Inlet (Subsonic)
		Opening
Wall: No-Slip		
Wall: Adiabatic		
CEL (CFX Expression Language)		
Timestep	Physical Time Scale	
CFD-Post	Plots	Contour
		Cylindrical Locator
		Isosurface
		Temperature Profile Chart
	Other	Changing the Color Range
		Expression Details View
	Lighting Adjustment	
	Variable Details View	
	Exporting Results to ANSYS	

Рисунок 52 – Соответствие функций компонентов исследования CFX

Далее запускаем расчет исследования и после получения файла результатов сможем его изучить в CFX-Post. На рисунке 54 представлены результаты распределения давления внутри водяного контура.

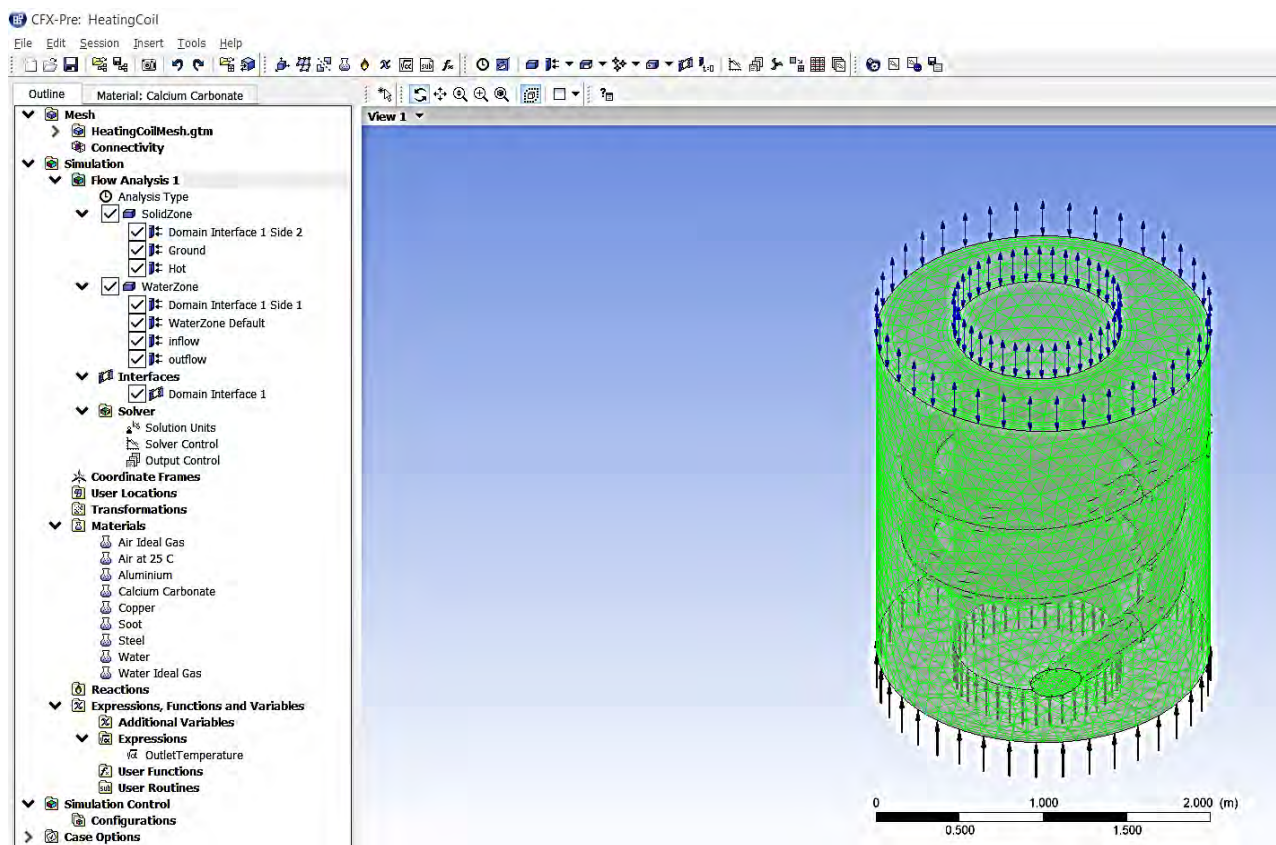


Рисунок 53 – Графический интерфейс CFX-Pre

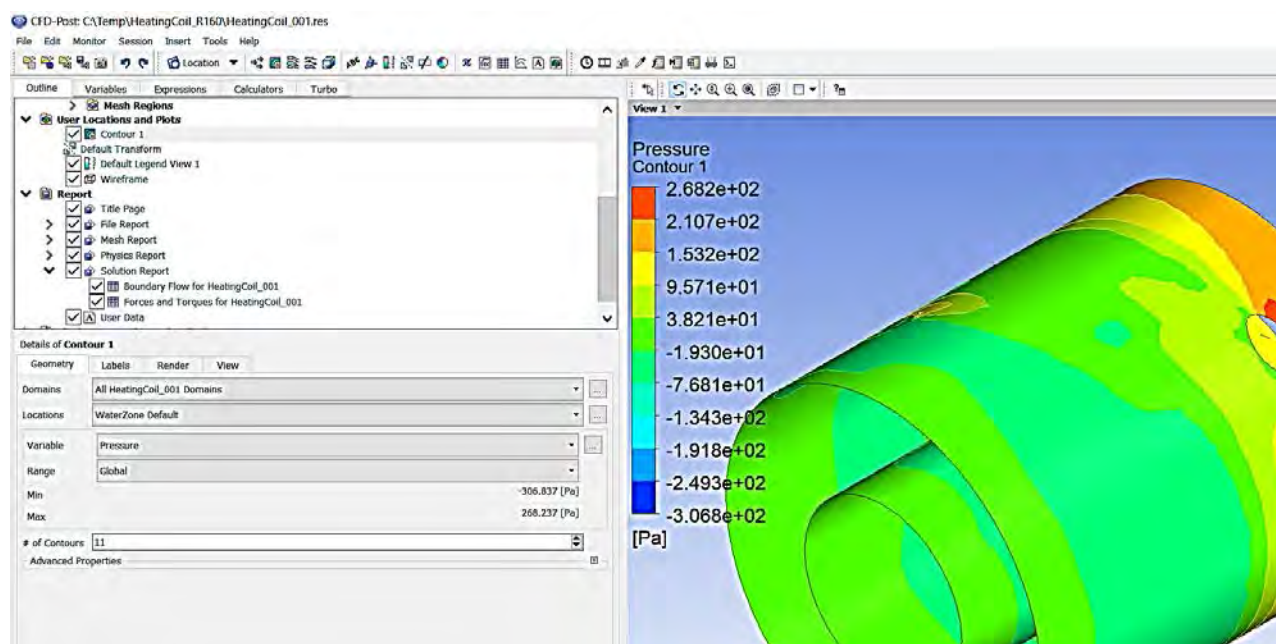


Рисунок 54 – Результаты моделирования, представленные в CFX-Post

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 10 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи, решаемые в ходе её выполнения;
- алгоритм проведения задачи сопряженного теплообмена и его допущения.

11 Передача тепловых и механических нагрузок в ANSYS Workbench

Цель лабораторной работы № 11 – выполнение алгоритма по экспорту результатов исследования в ANSYS Mechanical/ANSYS Workbench.

Данная лабораторная работа демонстрирует способность ANSYS CFX передавать файлы результатов для последующего проведения связанного исследования в среде Workbench/Mechanical.

Данный шаг экспорта является обязательным для проведения связанного исследования в рамках среды ANSYS. Существуют два возможных способа экспорта данных в ANSYS.

1 Использовать CFX-Solve Manager для экспорта данных.

2 Использовать CFD-Post для экспорта данных. Это включает в себя следующее.

2.1 Импортируйте поверхностную сетку из ANSYS в CFD-Post и свяжите поверхность с соответствующей 2D-областью в файле результатов CFX-Solve.

2.2 Экпортируйте данные в файл, содержащий команды SFE, которые представляют тепловой элемент поверхности или значения механического напряжения.

2.3 Визуализируйте результаты в среде ANSYS.

Используйте команды Export, Export External Data File и Export Mechanical Load File, представленные на рисунке 55, для экспорта файла результатов.

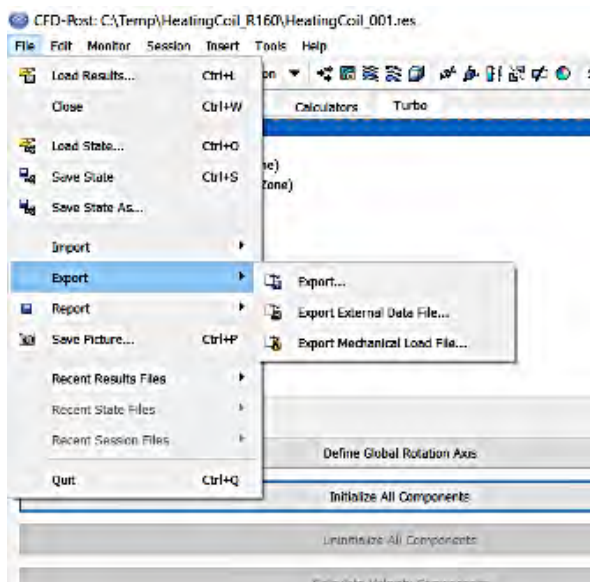


Рисунок 55 – Диалоговое меню экспорта в среде CFX-Post

При использовании вышеперечисленных команд возникают запросы, приведенные на рисунке 56. Из рекомендаций можно отметить следующее – выбирайте только те параметры которые необходимы для дальнейшего связанного анализа.

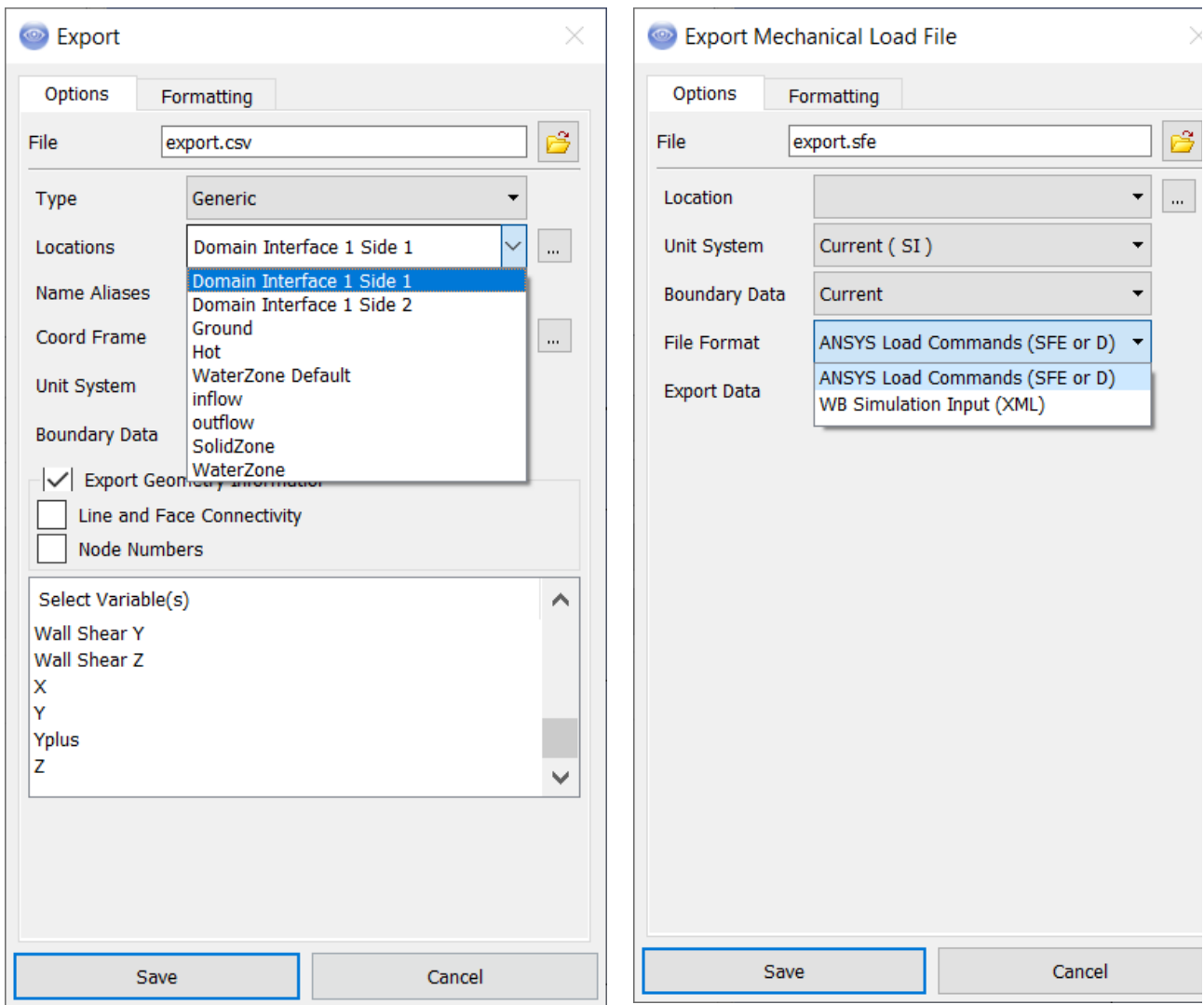


Рисунок 56 – Диалоговое меню экспорта в среде CFX-Post

После выполнения задания оформите отчет по лабораторной работе. Отчет по лабораторной работе № 11 должен содержать следующие атрибуты:

- титульный лист;
- цель лабораторной работы и задачи, решаемые в ходе её выполнения;
- алгоритм выполнения экспорта результатов исследования задачи в лабораторной работе № 11 для последующего проведения прочностного анализа нагревательного элемента.

Список литературы

- 1 **Соколов, С. А.** Металлические конструкции подъемно-транспортных машин : учебное пособие / С. А. Соколов. – Санкт-Петербург : Политехника, 2005. – 423 с.
- 2 **Дементьев, Ю. В.** САПР в автомобиле- и тракторостроении : учебник / Ю. В. Дементьев, Ю. С. Щетинин ; под ред. В. М. Шарипова. – Москва : Академия, 2004. – 224 с.
- 3 Вычислительные методы в механике разрушения: пер. с англ. / Под ред. С. Алтури. – Москва : Мир, 1990. – 392 с.
- 4 **Шимкович, Д. Г.** Расчет металлоконструкций в MSC/Nastran for Windows / Д. Г. Шимкович. – Москва : ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
- 5 **Галлагер, Р.** Метод конечных элементов. Основы: пер. с англ. / Р. Галлагер. – Москва : Мир, 1984. – 428 с.
- 6 **Деклу, Ж.** Метод конечных элементов: пер. с фр. / Ж. Деклу. – Москва : Мир, 1976. – 96 с.
- 7 **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – Москва : Мир, 1975. – 543 с.
- 8 **Зенкевич, О.** Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – Москва : Мир, 1986. – 318 с.
- 9 **Courant, R.** Variational Method for the solution of Problems of Equilibrium and Vibration / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc., 49. – 1943. – P. 1–43.

