МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-40 80 02 «Системный анализ, управление и обработка информации» очной и заочной форм обучения

Могилев 2019

УДК 004.35: 004.3
ББК 32.973.202-04
Т27

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «12» ноября 2019 г., протокол № 4

Составители: д-р техн. наук, доц. А. И. Якимов;
канд. техн. наук, доц. И. В. Акиншева

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Даны методические рекомендации по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория оптимальных систем», приведены задания к ним и список литературы для подготовки.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. .Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т. Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение

Целью преподавания учебной дисциплины «Теория оптимальных систем» является получение углубленных знаний в области методов оптимального управления динамическими системами, освоение методов расчета и построения оптимальных систем управления, в том числе на базе современных компьютерных технологий.

Методы расчета и построения оптимальных систем управления базируются на методах оптимизации, применяемых для решения хорошо структурированных проблем системного анализа – многовариантных по существу и количественно сформулированных проблем, в которых основные зависимости определены настолько четко, что могут быть выражены в числах или символах, а в результате решения получаются количественные оценки.

Методические рекомендации предназначены для помощи студентам в подготовке и выполнении лабораторных работ по дисциплине.

В методических рекомендациях для изучения представлены различные методы оптимизации, при реализации которых особое внимание следует обратить на основную итерационную формулу метода, задаваемые параметры, способы вычисления шага и направления спуска, условия прекращения итерационного процесса и вид точки, получаемой по итогам вычислений. Поскольку не существует универсальных методов оптимизации, необходимо также обращать внимание на то, для решения каких задач целесообразно использовать изучаемый метод, рассмотренный в рекомендациях.

При программной реализации методов требуется знание математики (в частности, матричной и векторной алгебры) и объектно ориентированного программирования.

1 Лабораторная работа № 1. Исследование функции одной переменной на экстремум

Цель работы: изучение основных понятий теории оптимизации для исследования функции одной переменной на экстремум.

Порядок выполнения работы.

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам работы.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету.

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Теоретические сведения.

Под **оптимизацией** понимается процесс поиска наилучшего варианта решения некоторой задачи в условиях множества альтернатив [1–5].

Функция $f(x)$ называется **унимодальной** или **одноэкстремальной** на интервале $L_0 = [a, b]$, если она достигает глобального экстремума на интервале $[a, b]$ в единственной точке x^*. В случае глобального минимума с увеличением x эта функция монотонно убывает при $x < 0$ и монотонно возрастает при $x > 0$. В случае глобального максимума с увеличением x эта функция монотонно возрастает при $x < 0$ и монотонно убывает при $x > 0$. Определению унимодальности могут удовлетворять функции, не являющиеся непрерывными и выпуклыми (рисунок 1.1, *б*).

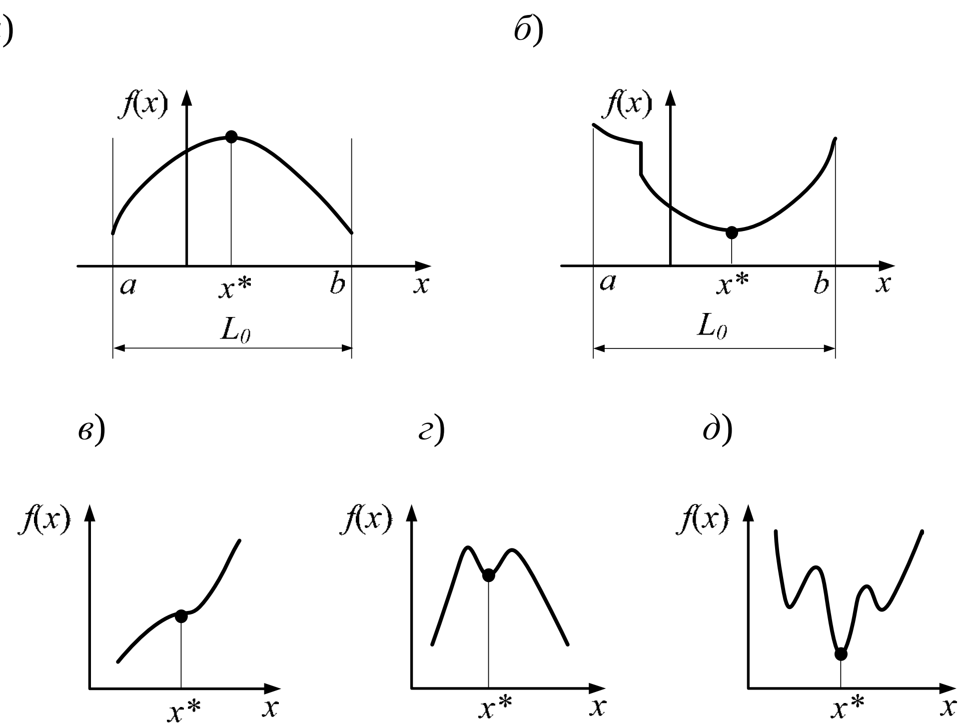
Если функция унимодальна, то локальный экстремум является глобальным. Из рисунка 1.1 видно, что только для унимодальных функций стационарная точка определяет глобальный максимум или минимум.

Для монотонных функций интервалы возрастания и убывания можно найти с помощью ее производной.

Теорема 1 (необходимое условие монотонности). Если функция $y = f(x)$ в интервале (a, b) возрастает (убывает) и дифференцируема, то для всех x из этого интервала $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Замечание 1. Если функция возрастает (убывает) на (a, b), необязательно $f'(x)$ строго больше (меньше) 0. Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси, но ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю в точке $x_0 = 0$.

Теорема 2 (достаточное условие монотонности). Если в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ дифференцируема и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то такая функция возрастает (убывает) в интервале (a, b).



а – глобальный максимум; *б* – глобальный минимум; *в* – точка перегиба; *г* – седловая точка; *д* – многоэкстремальная функция

Рисунок 1.1 – Типы точек x^* (стационарных точек)

Производная функции может сменять свой знак на противоположный только при переходе через точки, в которых функция либо недифференцируема, либо ее производная равна нулю. Поэтому, чтобы отыскать интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции, надо найти точки нулей и разрывов производной, а затем на интервалах, ограниченных этими точками, определить ее знак, например, вычисляя значение производной в одной из точек интервала.

Пример 1 **–** Найти интервалы убывания и возрастания функции

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \le 1; \\ (x-2)^2, & x > 1. \end{cases}$$

Решение

Найдем производную функции

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{3} x^{-2/3}, & x \le 1; \\ 2(x-2), & x > 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ производная равна ∞; при $x = 1$ она не существует, так как односторонние производные не равны друг другу; наконец, при $x = 2$ производная равна 0. Все эти точки разбивают ось абсцисс на интервалы монотонности $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$, причем в интервале $(1, 2)$ производная отрицательна и функция убывает, а в остальных – положительна и функция возрастает.

Экстремумы функции. Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$, для всех точек x которой справедливо неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Если знак неравенства заменить на противоположный, получим определение **точки максимума** функции. Значения функции в точках минимума и максимума называются, соответственно, ее **минимумами** и **максимумами**. Минимумы и максимумы функции называются ее **экстремумами**.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то в этой точке производная функции либо не существует, либо равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Замечание 2. Функция необязательно имеет экстремум в точке, в которой ее производная равна нулю. Производная функции $y = x^3$ равна $y' = 3x^2$ и в точке $x_0 = 0$ обращается в нуль. Но слева от $x_0 = 0$ функция меньше своего значения в этой точке: $x^3 < y(0) = 0$, $x < 0$, а справа больше этого значения: $x^3 > y(0) = 0$, $x > 0$, и, таким образом, экстремум в точке $x_0 = 0$ отсутствует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, образуют множество **критических точек** функции. Обычно множество критических точек конечно. Среди этих точек требуется выделить те, которые действительно являются точками экстремума функции. Это достигается с помощью следующей теоремы.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности $U(x_0)$. Если производная функции $y = f'(x)$ при переходе x через точку x_0 слева направо меняет свой знак с «–» на «+», то в точке x_0 функция имеет минимум; если с «+» на «–» – максимум. Если производная не меняет знак, то у функции в точке x_0 экстремумов нет.

Пример 2 **–** Исследовать на экстремумы функцию

$$y = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Решение

Найдем производную заданной функции:

$$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}(x-4) = \frac{3(x+1)+2x-8}{3\sqrt[3]{x+1}} = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

В точке $x_1 = -1$ производная не существует, а в точке $x_2 = 1$ производная равна нулю. Эти критические точки разбивают ось абсцисс на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1, \infty)$. Вычисляя значения производной в этих интервалах, определяем ее знаки: на интервале $(-\infty; -1)$ значение производной больше нуля, на интервале (–1; 1) – меньше нуля и на интервале (1, ∞) – также больше нуля. Исходя из сказанного выше, можно определить, что $x = x_{max} = -1$ – точка максимума, а $x = x_{min} = 1$ – точка минимума. При этом надо учесть, что функция непрерывна на всей числовой оси. Остается найти значения функции в этих точках: $y_{max} = y(-1) = 0$, $y_{min} = y(1) = -3\sqrt[3]{4}$.

Задания для самостоятельной работы.

Необходимо в письменном виде определить глобальный экстремум функции по варианту из таблицы 1.1.

Таблица 1.1 – Варианты функций

Номер варианта	Функция
1	$f(x) = 2x^2 - 10x - 7$
2	$f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 10$
3	$f(x) = 2x^3 + 10x^2 + x$
4	$f(x) = 5x^3 + 2x + 3$
5	$f(x) = 6x^3 - 4x^2 - 10$
6	$f(x) = 7x^3 + 3x^2 - 5$
7	$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3$
8	$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 5$
9	$f(x) = -6x^3 - 10x^2$
10	$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2$
11	$f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 2x$
12	$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x$
13	$f(x) = -5x^3 + 5x^2 - 2$
14	$f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 10x$
15	$f(x) = 6x^3 - 6x^2 - 6x$
16	$f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 5$

Вопросы для контроля

1 В чем состоит свойство унимодальности функций?
2 Сформулируйте необходимое и достаточное условие монотонности функции.
3 Что такое экстремумы функции?
4 Что такое локальный и глобальный экстремумы функции? В чем отличие?
5 Сформулируйте необходимое и достаточное условие экстремума функции.

2 Лабораторная работа № 2. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

Цель работы: изучение методов определения безусловного и условного экстремума.

Порядок выполнения работы.

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету.

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Сравнение результатов решения задачи с полученными в MathCAD или MS Office Excel.

4 Выводы.

Теоретические сведения.

Как и у функции одного переменного, у функции нескольких переменных могут быть экстремумами.

На рисунке 2.1 показана функция двух аргументов, имеющая два экстремума.

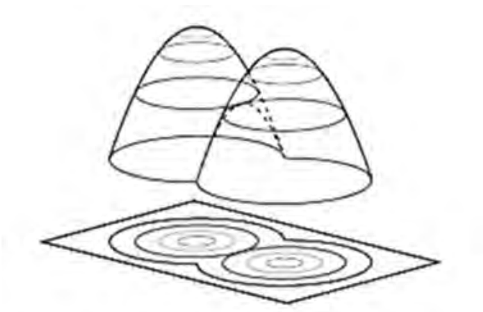


Рисунок 2.1 – Линии уровня функции

Поверхностью уровня функции $f(X)$ называется множество точек, в которых функция принимает постоянное значение, т. е. $f(x) = \text{const}$. Если количество измерений $n = 2$, поверхность уровня изображается **линией уровня** на плоскости R^2.

Градиентом функции многих переменных $f(X)$ называется вектор, составленный из первых частных производных функции по всем переменным:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T .$$

ε-окрестность точки x^k – это множество точек (векторов), которые находятся от точки x^k на расстоянии, не превышающем заданное число $\varepsilon > 0$, т. е. множество таких объектов x, для которых выполняется условие $\|x - x^*\| < \varepsilon$. Таким образом, ε-окрестность – малая положительная величина, характеризующая точность попадания в экстремальную точку евклидова n-мерного пространства R^n. Здесь $\| \cdot \|$ – **евклидова норма вектора *x***, определяемая по формуле $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Вектор – это направленный отрезок, и евклидова норма вектора – это его длина.

Если вектор определен парой точек $x_0 = (5; 6)^T$ и $x_1 = (8; 9)^T$, то евклидова норма данного вектора $\|x_1 - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = = \sqrt{(8-5)^2 + (9-6)^2} = 4{,}24$.

Евклидова норма вектора с координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\| AB \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Функцию $f(X)$ называют **выпуклой**, если она целиком лежит не выше отрезка, соединяющего две ее произвольные точки.

Функцию $f(X)$ называют **строго выпуклой**, если она целиком лежит ниже отрезка, соединяющего две ее произвольные, но не совпадающие точки.

Если функция **сильно выпуклая**, то она одновременно строго выпуклая и выпуклая.

Если функция строго выпуклая, то она одновременно выпуклая.

Непрерывная строго выпуклая функция является унимодальной. Обратное утверждение неверно.

Матрицей Гессе называется квадратная матрица, составленная из вторых частных производных функции $f(X)$ по всем переменным; матрица имеет размерность $(n \cdot n)$, где n – количество переменных функции.

Выпуклость функции можно определить по матрице Гессе:

– если матрица Гессе положительно полуопределена: $H(x) \geq 0 \;\; \forall x \in R^n$, то функция **выпуклая**;

– если матрица Гессе положительно определена: $H(x) > 0 \;\; \forall x \in R^n$, то функция **строго выпуклая**;

– если матрица Гессе положительно полуопределена и при этом выполняется условие $H(x) \geq l\,E \;\; \forall x \in R^n$, где E – единичная матрица, l – некоторое число, то функция **сильно выпуклая**.

Если $f(X)$ выпуклая функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума является точкой ее глобального минимума на X.

Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух различных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти две точки.

Если $f(X)$ строго выпуклая функция на выпуклом множестве X, то она достигает глобального минимума на X не более чем в одной точке.

Точка $x*$ экстремума находится с помощью необходимых условий первого и второго порядков, а также достаточных условий безусловного локального экстремума.

Необходимые условия экстремума первого порядка. Если $x^* \in R^n$ – точка локального безусловного экстремума непрерывно дифференцируемой в точке $x*$ функции $f(x)$, то градиент функции $f(x)$ в точке $x*$ равен нулю: $\nabla f(x)=0$. Точка $x*$, удовлетворяющая данному равенству, называется **стационарной**.

Необходимые условия экстремума второго порядка. Если точка $x*$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и функция $f(x)$ дважды дифференцируема в этой точке, то матрица Гессе $H(x*)$ функции $f(x)$, вычисленная в точке $x*$, является положительно полуопределенной $H(x*)\geq 0$ (если $x*$ – точка локального минимума) или отрицательно полуопределенной $H(x*)\leq 0$ (если $x*$ – точка локального максимума).

Достаточные условия экстремума. Если функция $f(x)$ в точке $x^* \in R^n$ дважды дифференцируема, ее градиент равен нулю ($\nabla f(x*)=0$), а матрица Гессе является положительно определенной $H(x*)>0$ (отрицательно определенной $H(x*)<0$), то точка $x*$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n.

Угловыми минорами называются определители матрицы Гессе, вычисленные в стационарной точке x^*, от первого до n-го порядка:

$$\Delta_1 = h_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

Главными минорами называются определители m-го порядка ($m \leq n$), получающиеся из определителя матрицы $H(x*)$ вычеркиванием каких-либо ($n-m$) строк и ($n-m$) столбцов с одними и теми же номерами.

Для проверки выполнения достаточных условий экстремума и необходимых условий второго порядка используются два способа.

Первый способ (с помощью угловых и главных миноров) (рассмотрен в таблице 1):

– критерий проверки достаточных условий экстремума: (критерий Сильвестра или критерий знакоопределенности матрицы Гессе):

а) для того чтобы матрица Гессе $H(x*)$ была положительно определенной ($H(x*)>0$) и точка $x*$ являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны: $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$;

б) для того чтобы матрица Гессе $H(x*)$ была отрицательно определенной ($H(x*)<0$) и точка $x*$ являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались начиная с отрицательного: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$;

– критерий проверки необходимых условий экстремума второго порядка:

а) для того чтобы матрица Гессе $H(x*)$ была положительно полуопределенной $(H(x*) \geq 0)$ и точка $x*$, может быть, являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя матрицы Гессе были неотрицательны;

б) для того чтобы матрица Гессе $H(x*)$ была отрицательно полуопределенной $(H(x*) \leq 0)$ и точка $x*$, может быть, являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка неположительны.

Второй способ (с помощью собственных значений матрицы Гессе) (рассмотрен в таблице 2.1). **Собственные значения** $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ матрицы Гессе H – это корни характеристического уравнения (алгебраического уравнения n-й степени) вида $\det(H - \lambda E) = 0$.

Таблица 2.1 – Критерии проверки достаточных и необходимых условий второго порядка в задаче поиска безусловного экстремума

Номер строки	$\nabla f(x*)$	Используемое условие экстремума	Первый способ	Второй способ	Знакоопределенность $H(x*)$	Тип стационарной точки $x*$
1	2	3	4	5	6	7
1	0	Достаточные условия	$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, ...,$ $\Delta_n > 0$	$\lambda_1 > 0, ...,$ $\lambda_n > 0$	> 0 положительно определенная	Локальный минимум
2	0	Достаточные условия	$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, ...,$ $(-1)^n \Delta_n > 0$	$\lambda_1 < 0, ...,$ $\lambda_n < 0$	< 0 отрицательно определенная	Локальный максимум
3	0	Необходимые условия второго порядка	Все главные миноры определителя матрицы $H(x*)$ неотрицательны	$\lambda_1 \geq 0, ...,$ $\lambda_n \geq 0$	≥ 0 положительно полуопределенная	Может быть локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	0	Необходимые условия второго порядка	Все главные миноры четного порядка неотрицательны, а нечетного порядка неположительны	$\lambda_1 \leq 0, ...,$ $\lambda_n \leq 0$	≤ 0 отрицательно полуопределенная	Может быть локальный максимум, требуется дополнительное исследование

Окончание таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6	7
5	0	Необходимые условия второго порядка	Матрица Гессе состоит из нулевых элементов	$\lambda_1 = 0, \ldots,$ $\lambda_n = 0$	= 0	Требуется дополнительное исследование
6	0	Необходимые условия второго порядка	Не выполняются условия в строках 1–5	λ_i имеют разные знаки	$< > 0$ знаконеопределенная	Нет экстремума

Для поиска безусловных экстремумов функции необходимо составить и решить систему алгебраических уравнений $\nabla f(x) = 0$. В найденных стационарных точках исследовать на знакоопределенность матрицу Гессе; точки, в которых $H(x) > 0$, являются точками глобального минимума; точки, в которых $H(x) < 0$, являются точками глобального максимума. Также следует проанализировать стационарные точки, в которых матрица вторых производных не является строго знакоопределенной (т. е. $H(x) \geq 0$ либо $H(x) \leq 0$). Если необходимые условия экстремума второго порядка выполняются, точка x^*, может быть, является точкой локального минимума. При проведении дополнительных исследований вычисляется значение целевой функции в точке x^* и рассматривается ε-окрестность точки x^*, а также поведение функции $f(x)$ на множестве R^n. Дальше проверяют выполнение определений локального и глобального минимумов.

Пример 1 – Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ на множестве R^2.

Решение

1 Необходимые условия экстремума первого порядка: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0$; $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 = 0$. В результате решения системы из двух уравнений получена стационарная точка $x^* = (0,\ 0)^T$.

2 Далее необходимо проверить выполнение достаточных условий экстремума и необходимых условий второго порядка.

Первый способ. Матрица Гессе функции имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = h_{11} = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, то достаточные условия экстремума не выполняются (таблица 2.1, строки 1 и 2).

Далее проверяется выполнение необходимых условий 2-го порядка.

Главные миноры первого порядка ($m = 1$) получаются из Δ_2 в результате вычеркивания $n - m = 2 - 1 = 1$ строк и столбцов с одинаковыми номерами: –2, 2.

Главный минор второго порядка (m = 2) получается из Δ_2 в результате вычеркивания $n - m$ = 0 строк и столбцов, т. е. совпадает с Δ_2: –4. Отсюда следует, что необходимые условия экстремума второго порядка не выполняются (таблица 1, строки 3 и 4). Так как матрица Гессе не является нулевой, то можно сделать вывод о том, что в точке x* нет экстремума (строка 6 в таблице 1).

Второй способ. Собственные значения матрицы Гессе

$$\det(H - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) = 0 .$$

Отсюда получены два корня характеристического уравнения $\lambda_1 = 2 > 0$ и $\lambda_2 = -2 < 0$, т. е. собственные значения имеют разные знаки. Поэтому точка x^* не является точкой минимума или максимума (таблица 1, строка 6), а является ***седловой точкой.***

3 Так как экстремум не достигается, $f(x^*)$ не вычисляется.

Задания для самостоятельной работы.

Необходимо в письменном виде определить глобальный экстремум функции по варианту из таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – Варианты функций

Номер варианта	Функция
1	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy^2 + x + 10$ $f(x,y) = 2x^3 - x^2y^2 + 2y^2$
2	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2 - y - 5$ $f(x,y) = 2x^2 + x^3y^2 + 2xy^2 + x^3$
3	$f(x,y) = x^2 + xy^2 + 2xy + y^2 + 5$ $f(x,y) = x^2 - 5y^2 - 2x^3y^2 - x^3 + 10$
4	$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - 2xy - 5x$ $f(x,y) = x^3 + 2x^2y^2 - 2x^2y - 5x$
5	$f(x) = 6x^3 - 4x^2 - 10$ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy^2 - 3y - 1$
6	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy^2 + 10x + 5$ $f(x,y) = x^4 + 3xy^2 - 2xy$
7	$f(x,y) = 7x^2 + 10y^3 - 5x^2y^2 + 9$ $f(x,y) = 5x^3 + 3xy^2 - 2x^2y^2 + 5x$
8	$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x^2y^2 + 10$ $f(x,y) = x^4 + 2xy^4 + 2x^3y - 5x$

Окончание таблицы 2.2

Номер варианта	Функция
9	$f(x,y)=x^2+y^2+4x^2y-5x-1$ $f(x,y)=4x^4+2x^3y^2-2xy$
10	$f(x,y)=x^2-4xy+4y^2-5y-1$ $f(x,y)=x^3+2x^4y^2-2xy-5$
11	$f(x,y)=x^2-y^2+10x^2y+6$ $f(x,y)=5x^4+2x^3y^2-2xy^2-5x$
12	$f(x,y)=2x^2+y^4-xy-5x-4$ $f(x,y)=x^4+4xy^3-2x^3y+5$
13	$f(x,y)=x^2-2y^2-6xy-5x+4$ $f(x,y)=2x^4+2x^4y^2-2xy$
14	$f(x,y)=x^4+2y^2+10xy^2+8x$ $f(x,y)=x^4+2x^3y^2-2xy^3$
15	$f(x,y)=x^4+y^2-20x^2y+7$ $f(x,y)=x^2+2xy^2-5\sin x$
16	$f(x,y)=x^4+y^2-20x^2y+7$ $f(x,y)=x^3+2xy^2+5\cos x$

Вопросы для контроля

1 Что такое матрица Гессе? Знакоопределенность матрицы Гессе.

2 Как проверить, является ли функция выпуклой?

3 В чем заключаются необходимые и достаточные условия экстремума функции? Каков алгоритм определения глобального экстремума?

3 Лабораторная работа № 3. Исследование основной задачи вариационного исчисления

Цель работы: изучение метода решения задачи вариационного исчисления.

Порядок выполнения работы.

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету.

1 Тема и цель работы.

2 Результаты нахождения экстремума функции.

3 Сравнение результатов решения задачи с полученными в MathCAD или MS Office Excel.

4 Выводы.

Теоретические сведения.

Пусть требуется решить задачу

$$J(y)=\int_a^b F\left(x,y(x),y_x(x)\right)dx\to\min,\quad y\in Y, \tag{3.1}$$

где $Y=\left\{y(x)\in c^1_{[a,b]}:y(a)=c,y(b)=d\right\}$.

Кривую называют **слабой минималью** задачи (3.1), если существует число ε > 0 такое, что

$$J(y^0)\le J(y),\ \forall y\in Y;$$
$$\left|y(x)-y^0(x)\right|\le\varepsilon,\quad \left|y_x(x)-y^0_x(x)\right|\le\varepsilon,\ x\in[a,b].$$

Схема исследования задачи (3.1)

1 Составляем уравнение Эйлера и находим его общее решение:

$$\frac{\partial^2F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2}y_{xx}+\frac{\partial^2F(x,y,y_x)}{\partial y\partial y_x}y_x+\frac{\partial^2F(x,y,y_x)}{\partial x\partial y_x}-\frac{\partial^2F(x,y,y_x)}{\partial y}=0. \tag{3.2}$$

2 Пусть $y=y(x,c_1,c_2)$ общее решение дифференциального уравнения (3.2). Находим экстремали задачи, подбирая произвольные постоянные c_1 и c_2 из условий

$$y(a,c_1,c_2)=c,\quad y(b,c_1,c_2)=d.$$

3 Для каждой экстремали $y^*(x), x \in [a,b]$ проверяем необходимое условие слабого минимума второго порядка Лежандра-Клебша.

$$\frac{\partial^2 F\left(x, y^*, y_x^*(x)\right)}{\partial y_x^2} \geq 0, \quad \forall x \in \left]a,b\right[. \tag{3.3}$$

Экстремали, не удовлетворяющие условию (3.3), не могут быть минималями задачи (3.1). Исключаем их из рассмотрения.

4 Для неособых экстремалей $y^*, x \in [a,b]$ (удовлетворяющих усиленному условию Лежандра-Клебша)

$$\frac{\partial^2 F\left(x, y^*, y_x^*(x)\right)}{\partial y_x^2} > 0, \quad \forall x \in [a,b], \tag{3.4}$$

проверяем условие Якоби:

а) строим уравнение Якоби вдоль $y, x \in [a,b]$

$$a(x)h_{xx}\left(x\right) + b(x)h_x\left(x\right) + c(x)h\left(x\right) = 0, \;\; x \in [a,b], \tag{3.5}$$

где

$$a(x) = \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2}; \;\; b(x) = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2};$$

$$c(x) = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y \partial y_x} - \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y^2}, \;\; x \in [a,b]; \tag{3.6}$$

б) находим общее решение уравнения (3.5) $h = h\left(x, D_1, D_2\right), x \in [a,b]$;

в) из кривых (3.6) выделяем класс кривых $h = h\left(x, D\right),\; x \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $h\left(a, D\right) = 0$;

г) для кривых $h\left(x, D\right) = 0$ находим наименьшую сопряженную с точкой *a* точку x^*, исследуя уравнение

$$h\left(x, D\right) = 0. \tag{3.7}$$

Если для неособой экстремали $y^*(x)$ точка $x \in \left]a, b\right[$, то она не является минималью. Исключаем ее из рассмотрения.

5 Проверяем для неособых экстремалей достаточное условие слабого минимума. Если для некоторой экстремали, удовлетворяющей условию (3.4), не существует точки x^* из отрезка $\left]a, b\right[$, сопряженной с *a*, то эта экстремаль является слабой минималью.

6 Для слабой минимали $y = y^*(x), x \in [a,b]$ вычисляем значение функционала $J^* = J(y^*)$.

Пример **–** Исследовать задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^{\alpha}\left(y_{xx}^2 - y^2 + 4y\sin 2x\right)dx \to \min; \tag{3.8}$$

$$y(0) \in c^{(1)}_{[0,\alpha]},\ \ y(0)=0,\ \ y(\alpha) = -\frac{2}{3}\sin 2a. \tag{3.9}$$

Решение

1 Составляем уравнение Эйлера

$$y_{xx} + y = 2\sin 2x,\ \ x \in [0,\alpha]. \tag{3.10}$$

2 Общее уравнение (3.10) имеет вид:

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{2}{3}\sin 2x,\ \ x \in [0,\alpha].$$

Используя (3.9), находим $c_1 = c_2 = 0$.
Таким образом, экстремаль имеет вид:

$$y^*(x) = -\frac{2}{3}\sin 2x,\ \ x \in [0,\alpha]. \tag{3.11}$$

3 Для экстремали проверяем условие (3.4):

$$\frac{\partial^2 F\left(x, y^*, y_x^*(x)\right)}{\partial y_x^2} = 2 \ge 0.$$

Итак, условие Лежандра-Клебша выполняется в усиленной форме, т. е. экстремаль (если она существует) является неособой и удовлетворяет необходимому условию минимума Лежандра-Клебша.

4 Составляем и решаем уравнения Якоби:

а) $h_{xx}(x) + h(x) = 0,\ \ x \in [0,\alpha]$;

б) общее решение имеет вид:

$$h(x) = D_1 \sin x + xD_2 \cos x; \tag{3.12}$$

в) кривая семейства (3.12), удовлетворяющая условию $h(0)=0$, имеет вид:

$$h = h(x,D) = D\sin x,\ \ x \in [0,\alpha];$$

г) наименьшая сопряженная с точкой α точка кривой (3.12) $x^* = \pi$.

5 Вывод:

а) если α > π, то кривая (3.11) $y(x) = -\frac{2}{3}\sin 2x,\ x \in [0, \alpha]$ – слабая минималь задачи (3.8)–(3.9), так как для нее выполняется достаточное условие слабого минимума;

б) если α = π, то у задачи (3.8)–(3.9) нет слабых минималей, т. к. в этом случае для экстремалей не выполняется необходимое условие Якоби;

в) если α ≥ π, то экстремаль (3.11) остаѐтся подозрительной на слабую минималь.

6 Пусть $\alpha \le \pi$, тогда для кривой (3.11) вычисляем значение функционала $J(y^*)$.

Задания для самостоятельной работы.

Исследовать на экстремум задачи, представленные в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Варианты функций

Номер варианта	Функция
1	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}e^{-2x}y_x^2 + e^{2x}y + \frac{3}{2}e^{-2x}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
2	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}y_x^2 + y_x + y\left(2e^x - x^2\right)\frac{1}{2}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
3	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}y_x^2 + 4xe^x y - \frac{1}{2}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
4	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}e^x y_x^2 + 3e^{2x}xy + e^x y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
5	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}e^{-3x}y_x^2 + e^{-3x}y\sin x + e^{-3x}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
6	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}y_x^2 + 2y_x + 4y\sin x + \frac{1}{2}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
7	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}e^{-5x}y_x^2 + 4x^2e^{-3x}y - 2e^{-5x}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
8	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}y_x^2 + 3y_x + \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{2}y^2 \right) \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
9	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}e^{-4x}y_x^2 + e^{-4x}y + e^{-4x}\left(-18x^2 + 6x\right)y \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
10	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}e^{-5x}y_x^2 + \frac{3}{5}e^{-5x}y_x + \frac{1}{2}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$
11	$\int_0^b \left(\frac{1}{2}y_x^2 + 2y_x + 4e^x y + \frac{1}{2}y^2 \right)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=1$

Окончание таблицы 3.1

Номер варианта	Функция
12	$\int\limits_0^b \left(\frac{1}{2} e^{-2x} y_x^2 + 4e^{-x} y + \frac{1}{2} e^{-2x} y^2 \right) dx,\ y(0) = 0,\ y(b) = 1$
13	$\int\limits_0^b \left(\frac{1}{2} e^{-2x} y_x^2 + \frac{3}{2} e^{2x} y_x + 4e^{x} y + \frac{3}{2} e^{-2x} y^2 \right) dx,\ y(0) = 0,\ y(b) = 1$
14	$\int\limits_0^b \left(\frac{1}{2} e^{-3x} y_x^2 + e^{3x} \left(3e^{2x} + 2x^2 \right) y + e^{-3x} y^2 \right) dx,\ y(0) = 0,\ y(b) = 1$
15	$\int\limits_0^b \left(\frac{1}{2} y_x^2 + 3y_x + 4e^{4x} y + \frac{1}{2} y^2 \right) dx,\ y(0) = 0,\ y(b) = 1$

Вопросы для контроля

1 Постановка основной задачи вариационного исчисления.
2 Определение слабой минимали.
3 Необходимое условие минимума Эйлера.
4 Необходимое условие минимума Лежандра-Клебша.
5 Определение сопряженной точки.
6 Необходимое условие минимума Якоби.
7 Достаточное условие минимума.

4 Лабораторная работа № 4. Применение теоремы Куна-Таккера

Цель работы: изучение метода решения задач с применением теоремы Куна-Таккера.

Порядок выполнения работы.
1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету.
1 Тема и цель работы.
2 Результаты нахождения экстремума функции.
3 Сравнение результатов решения задачи с полученными в MathCAD или MS Office Excel.
4 Выводы.

Теоретические сведения.

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \; x \in X,$$

$$X = \{x : g_i(x) \le 0, \; i = \overline{1,k}; \; g_i = 0, \; i = \overline{k+1,m}, \; x \in X \subset R^n, \tag{4.1}$$

где $f(x), \; g_i(x), \; i = \overline{1,k}$ – выпуклые функции;

$g_i(x), \; i = \overline{k+1,m}$ – линейные функции.

Q – выпуклое множество.

Функция Лагранжа для задачи (4.1) имеет вид

$$F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \; x \in \mathrm{R}^n, \; \lambda \in R^m. \tag{4.2}$$

Теорема Куна-Таккера. Для существования оптимального плана в задаче (4.1) с регулярным множеством планов:

$$\begin{gathered} \forall x^* \in X, \; x^* \in riQ; \\ g_i(x^*) < 0, \; i = \overline{1,k}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где riQ – относительная внутренность множества Q,
необходимо и достаточно существование такого вектора $\lambda^0 \in R, \; \lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,k}$; $\lambda_i^0, \; i = \overline{k+1,m}$– произвольные, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ – седловая точка функции Лагранжа (4.2):

$$\begin{gathered} F(x^0,\lambda) \le F(x^0,\lambda^0) \le F(x,\lambda^0); \\ \forall x \in Q, \; \forall \lambda \in R^m, \; \lambda_i \ge 0, \; i = \overline{1,k} \end{gathered} \tag{4.4}$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i = \overline{1,k}$.

Замечание. Для линейных функций $g_i(x), i = \overline{1,k}$ теорема Куна-Таккера верна без условия Слейтера (4.3).

Схема решения.

1 Проверим, является ли данная задача задачей выпуклого программирования, используя свойства выпуклых функций, выпуклых множеств, критерии выпуклости функций.

2 Записываем задачу в виде (4.1). При этом множество Q строим по ограничениям исходной задачи так, чтобы легко можно было проверить принадлежность ему вектора $x \in R^n$

Обычно $Q = \{x : x_j \ge 0, \; \forall j \in I^* \subset I = \{i = \overline{1,n}\}\}$, I^* является подмножеством I.

3 Проверяем, является ли множество планов регулярным.

4 Ищем стационарные точки функции Лагранжа. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}; \\ \lambda_i, g_i(x) = 0,\ i = \overline{1,k},\ x \in X; \\ g_i(x) = 0,\ i = \overline{k+1,m},\ \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,k}. \end{cases} \qquad (4.5)$$

5 Для каждой стационарной точки проверяем условие (4.4).

6 Если среди стационарных точек найдется седловая точка функции Лагранжа $\{x^*, \lambda^*\}$, то x^* – решение исходной задачи $x^0 = x^*$. Если нет (т. е. $x^0 \in \operatorname{int} Q$), то переходим к п.7.

7 Ищем решение задачи на границе множества Q. Если Q состоит из внутренних точек, то задача решения не имеет. Пусть L – граница множества Q, $L \in Q$ и множества L_i, $i = \overline{1,s}$ – элементы L (например: грани, ребра, угловые точки). Для поиска решения задачи имеем совокупность следующих задач:

$$f(x) \to \min,\ x \in X,\ i = \overline{1,s}, \qquad (4.6)$$

где $X_i = \{x : x \in L_i,\ g_i(x) \leq 0,\ i = \overline{1,k};\ g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m}\}$.

Если X_i, $1 \leq i \leq s$ – выпуклое множество, то задачу (4.6) можно решать по схеме п. 1–6. Каждую стационарную точку задачи (4.6) проверяем на седловую для исходной задачи. Если решения исходной задачи при исследовании всех задач (4.6) не обнаруживается, то у нее решения нет.

Замечания.

1 Если *f(x)* – строго выпуклая функция, то у задачи (4.1) может быть лишь один оптимальный план.

2 Если у задачи (4.1) найдено несколько различных оптимальных планов x^{i0}, $i = \overline{1,l}$, то решением является также любая их выпуклая линейная комбинация:

$$X = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x^{i0},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1.$$

Пример 1 **–** Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 7x_3 \to \min; \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ & 2x_1 + x_3 \leq 4; \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x \in R^3. \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Решение

1 Составляем матрицу вторых производных целевой функции $f(x)$, $\left(f(x)\in C^{(2)}\right)$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^2}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\geq 0.$$

Так как все главные миноры матрицы неотрицательные, то $f(x)$ – выпуклая функция. Ограничения задачи линейны. Следовательно, исходная задача является задачей выпуклого программирования.

2 Задачу (4.7) записываем в виде (4.1). Вводим множество $Q=\{x: x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\}$, $x\in Q$ и имеем

$$\begin{aligned}&f(x)=3x_1^2+x_2^2+x_1x_2-7x_3\to\min;\\&4x_1+x_2-2x_3=5;\\&2x_1+x_3\leq 4.\end{aligned}$$

3 Так как ограничения задачи линейны, то условие Слейтера (4.3) проверять не нужно.

4 Составляем функцию Лагранжа при $x\in Q$, $\lambda\in R^2$, $\lambda_2\geq 0$.

$$F(x,\lambda)=3x_1^2+x_2^2+x_1x_2-7x_3+\lambda_1(4x_1+x_2-2x_3-5)+\lambda_2(2x_1+x_3-4).$$

Составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=6x_1+x_2+4\lambda_1=0;\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2+x_1+\lambda_1+2\lambda_2=0;\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3}=7-2\lambda_1+\lambda_2=0;\\ 4x_1+x_2-2x_3-5=0;\\ \lambda_2(2x_1+x_3-4)=0;\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \lambda_2\geq 0.\end{cases}$$

Если $2x_2+x_3-4=0$, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0; \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 7; \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_3 = 4; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Эта система решения не имеет.

Если $\lambda_2 = 0$, то из 3-го уравнения системы $\lambda_1 = -\dfrac{7}{2}$. Из 1, 2, 4-го уравнений системы находим $x_1 = \dfrac{49}{22},\ x_2 = \dfrac{7}{11},\ x_3 = \dfrac{25}{11}$. Стационарная точка $\{x^1, \lambda^1\} = \left\{\dfrac{42}{22},\ \dfrac{25}{11},\ -\dfrac{7}{2},\ 0\right\}$.

5 Для пары $\{x^1, \lambda^1\}$ проверяем условие (4.4). Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{35}{44} \le \frac{35}{44} \le 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 14x_1 \frac{7}{2} x_2 + \frac{35}{2}, \\ &\forall x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \forall \lambda_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

6 В крайнем справа выражении в (4.8) стоит выпуклая функция, достигающая минимального значения $\dfrac{35}{44}$ в своей стационарной точке $x_1 = \dfrac{49}{22},\ x_2 = \dfrac{7}{11}$. Следовательно, (4.8) является верным неравенством и $\{x^1, \lambda^1\}$ – седловая точка функции Лагранжа (4.2), т. е. $x^0 = x^1$ – оптимальный план задачи (4.7) и $f(x^0) = \dfrac{35}{44}$.

Пример 2 **–** Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \to \min; \\ &x_1 + x_2 \le 2; \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Решение

1 Задача (4.9) – задача выпуклого программирования, т. к. $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$ и ее ограничения линейны.

2 Положим $Q = \{x : x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\}$.

3 Составляем функцию Лагранжа для задачи (4.9):

$$F(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2),$$

где $x \in Q,\ \lambda \geq 0.$

4 Составляем и решаем систему уравнений (4.5):

$$2x_1 + \lambda = -2;$$
$$2x_2 + \lambda = 2;$$
$$\lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0,\ x \in Q,\ \lambda \geq 0.$$

Если $\lambda = 0$, то из 1 и 2 уравнений системы получаем точку $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, которая не принадлежит Q.

Если $\lambda \neq 0$, то из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2; \\ 2x_2 + \lambda = 2; \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

находим при $\lambda = -2$ точку $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, которая также не является стационарной, т. к. не выполняется условие $\lambda \geq 0$. Итак, у функции Лагранжа нет стационарных точек.

5 Ищем решение на границе множества Q. Ее элементы $L_1 = \{x : x_1 = 0,\ x_2 \geq 0\}$, $L_2 = \{x : x_1 \geq 0,\ x_2 = 0\}$, $L_3 = \{x_1 = x_2 = 0\}$. Решаем задачу на границе L_1. Имеем

$$2x_2^2 - 2x_2 \to \min;$$
$$x_2 \leq 2;\ x_2 \geq 0. \tag{4.10}$$

Функция Лагранжа задачи (4.10) имеет вид:

$$F(x,\lambda) = x_2^2 - 2x_2 + \lambda(x_2 - 2),\ x \geq 0,\ \lambda \geq 0.$$

Решаем систему (4.5). Для нее

$$2x_2 + \lambda = 2;$$
$$\lambda(x_2 - 2) = 0.$$

При $\lambda = 0$ стационарная точка $x_2 = 1$.

Проверяем для пары координат точки $\{x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ \lambda = 0\}$ условие (4.4) для исходной задачи. Имеем

$$-1 - \lambda \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2;$$
$$\forall x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ \forall \lambda \geq 0. \tag{4.11}$$

Левое неравенство в (4.11) выполняется для $\forall\lambda \ge 0$. Так как $\left(x_1+1\right)^2 \ge 1$ при $x_1 \ge 0$ и $\left(x_2-1\right)^2 \ge 0$, то правое неравенство выполняется для $\forall x \in Q$.

Итак, $\{0;1;0\}$ – седловая точка функции Лагранжа задачи (4.9) и $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(x^0\right) = -1$.

Задания для самостоятельной работы.

Исследовать следующие задачи, представленные в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Варианты задач

Номер варианта	Функция
1	$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 2x_2 \le -8$
2	$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 5x_2 = 10$
3	$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 2x_2 \le 0$
4	$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 2x_2 \le 0$
5	$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 \to \min$ при $10x_1 + 20x_2 \le 0$
6	$f(x) = x_1^2 - x_2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $5x_1 + 5x_2 = 15$
7	$f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1 - 2x_2 = 0$
8	$f(x) = \left(2 + x_1\right)^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + x_2 = 10$
9	$f(x) = x_1^2 + \left(7 + x_2\right)^2 + x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + x_2 \le -10$
10	$f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \min$ при $x_1 + 5x_2 = 1$
11	$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1^{\ 2} + 2x_2 = 2$
12	$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 10 \to \min$ при $x_1 + 3x_2 = 20$

Окончание таблицы 4.1

Номер варианта	Функция
13	$f(x)=(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1+5x_2 \le -5$
14	$f(x)=2x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1+x_2{}^2 \le 7$
15	$f(x)=2x_1+(x_1+x_2^2)^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1{}^2+2x_2=0$

Вопросы для контроля

1 Определение выпуклого множества и выпуклой функции.
2 Постановка задачи выпуклого программирования.
3 Определение регулярного множества планов (условие Слейтера).
4 Определение седловой точки.
5 Теорема Куна-Таккера.

5 Лабораторная работа № 5. Исследование задач нелинейного программирования

Цель работы: изучение метода проекции градиента.

Порядок выполнения работы.
1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету.
1 Тема и цель работы.
2 Результаты нахождения экстремума функции.
3 Сравнение результатов решения задачи с полученными в MathCAD или MS Office Excel.
4 Выводы.

Теоретические сведения.
Метод проекции градиента (метод Розена) применяется в задачах поиска условного экстремума с ограничениями типа равенств и неравенств.

1 Применение метода в задачах с ограничениями типа равенств.

Шаг 1. Задать начальную точку x^0, $\varepsilon \geq 0$, предельное число итераций M.

Шаг 2. Принять номер итерации $k = 0$.

Шаг 3. Проверить выполнение неравенства $k \geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен. Вычислить λ^k, проверить необходимые и достаточные условия минимума и оценить результат;

б) если нет, перейти к шагу 4.

Шаг 4. Вычислить матрицу

$$A_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^k} \qquad (5.1)$$

Шаг 5. Вычислить $\tau_k = -g\left(x^k\right) = -\left(g_1\left(x^k\right), \dots, g_m\left(x^k\right)\right)^T$.

Шаг 6. Вычислить $\delta_2 x^k = A_k^T \left(A_k A_k^T\right)^{-1} \tau_k$.

Шаг 7. Вычислить евклидову норму компенсационной составляющей приращения $\left\|\delta_2 x^k\right\|$.

Шаг 8. Вычислить $\nabla f\left(x^k\right)$.

Шаг 9. Вычислить $\Delta x^k = -\left[E - A_k^T \left(A_k A_k^T\right)^{-1} A_k\right] \Delta f\left(x^k\right)$.

Шаг 10. Проверить выполнение условий $\left\|\Delta x^k\right\| \leq \varepsilon$ и $\left\|\delta_2 x^k\right\| \leq \varepsilon$:

а) если $\left\|\Delta x^k\right\| \leq \varepsilon$ и $\left\|\delta_2 x^k\right\| \leq \varepsilon$, то расчет окончен. Перейти к вычислению вектора множителей Лагранжа λ^k по формуле $\lambda^k = -\left(A_k A_k^T\right)^{-1} A_k \nabla f\left(x^k\right)$ и проверке достаточных условий минимума;

б) если $\left\|\Delta x^k\right\| > \varepsilon$ и $\left\|\delta_2 x^k\right\| \leq \varepsilon$, то принять $\delta_2 x^k = 0$ и перейти к шагу 11;

в) если $\left\|\Delta x^k\right\| \leq \varepsilon$ и $\left\|\delta_2 x^k\right\| > \varepsilon$, то принять $\Delta x^k = 0$ и перейти к шагу 13;

г) если $\left\|\Delta x^k\right\| > \varepsilon$ и $\left\|\delta_2 x^k\right\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 11.

Шаг 11. Получить точку $x^k + t_k^* \Delta x^k$.

Шаг 12. Определить оптимальную величину шага t_k^* из условия $f\left(x^k + t_k \Delta x^k\right) \to \min\limits_{t_k}$.

Шаг 13. Вычислить $x^{k+1} = x^k + t_k^* \Delta x^k + \delta_2 x^k$. Принять $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

Замечание. Если ограничения в задаче линейны, то при $k \geq 1$ на шаге 3 перейти к шагу 8. На шаге 10 принять $\left\|\delta_2 x^k\right\| = 0$.

2 Применение метода в задачах с ограничениями типа неравенств.

Шаг 1. Задать начальную точку x^0, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$, предельное число итераций M.

Шаг 2. Принять номер итерации $k = 0$.

Шаг 3. Проверить выполнение неравенства $k \geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен. Вычислить λ^k, оценить результат;

б) если нет, перейти к шагу 4.

Шаг 4. Вычислить $g_j\left(x^k\right),\ j = \overline{1, m}$.

Шаг 5. Проверить выполнение условия $\varepsilon_1 \leq g_j\left(x^k\right) \leq 0,\ j = \overline{1, m}$:

а) если неравенство выполнено хотя бы для одного j, вычислить $\nabla f\left(x^k\right)$. Если $\nabla f\left(x^k\right) \neq 0$, перейти к шагу 7. Если $\nabla f\left(x^k\right) = 0$ при $k > 0$, перейти к шагу 9, а если $\nabla f\left(x^0\right) = 0$, то следует проверить точку x^0 на принадлежность области допустимых решений. Если $x^0 \in X$, перейти к шагу 9. В противном случае задать заново точку x^0 и перейти к шагу 4;

б) если ни одно из условий не выполнено, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить точку x^v, в которой будет выполнено условие $\varepsilon_1 \leq g_j\left(x^v\right) \leq 0$, по крайней мере, для одного значения j: $x^v = x^k + A_k^T\left(A_k A_k^T\right)^{-1}\tau^k$. Принять $x^k = x^v$ и перейти к шагу 7.

Шаг 7. Вычислить $\Delta x^k = -\left[E - A_k^T\left(A_k A_k^T\right)^{-1} A_k\right]\Delta f\left(x^k\right)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия $\left\|\Delta x^k\right\| \leq \varepsilon_2$:

а) если неравенство выполняется, то перейти к шагу 9;

б) если нет, перейти к шагу 10.

Шаг 9. Вычислить вектор множителей Лагранжа λ^k по формуле $\lambda^k = -\left(A_k A_k^T\right)^{-1} A_k \nabla f\left(x^k\right)$. Если $\lambda^k \geq 0$, то расчет окончен, проверить достаточные условия минимума. Если нет, то исключить из состава активных ограничение (оно переводится в пассивные), которому соответствует наибольший по модулю отрицательный множитель, и перейти к шагу 7. При этом из матрицы A^k удаляется строка, соответствующая исключаемому ограничению.

Шаг 10. Получить точку $x^k + t_k\,\Delta x^k$.

Шаг 11. Определить оптимальную величину шага t_k. Для этого следует:

а) вычислить t_k из условия $f\left(x^k + t_k \Delta x^k\right) \to \min\limits_{t_k \geq 0}$.

б) для всех пассивных в точке x_k ограничений, кроме переведенных в пассивные на шаге 9, определить величину t_k^j из условий $g_j\left(x^k + t_k\,\Delta x^k\right) = 0,\ t_k \geq 0$

(если условие $g_j\left(x^k + t_k\,\Delta x^k\right) = 0$ выполняется только при $t_k < 0$, то t_k^j не вычисляется);

в) найти величину $t_{k\,\max} = \min\limits_j \left\{ t_k^j \right\}$;

г) вычислить значение $t_k = \min\left\{ t_k^*, t_{k\,\max} \right\}$.

Шаг 12. Вычислить $x^{k+1} = x^k + t_k\,\Delta x^k$. Принять $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

Пример 1 **–** Найти минимум в задаче

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Решение

Задача имеет следующую особенность: ограничение является линейным (рисунок 5.1).

Шаг 1⁰. Задаем $x^0 = (0;0)^T$; $\varepsilon = 0$; $M = 5$.

Шаг 2⁰. Полагаем $k = 0$.

Шаг 3⁰. Проверяем условие $k \ge M$: $k = 0 < 5 = M$.

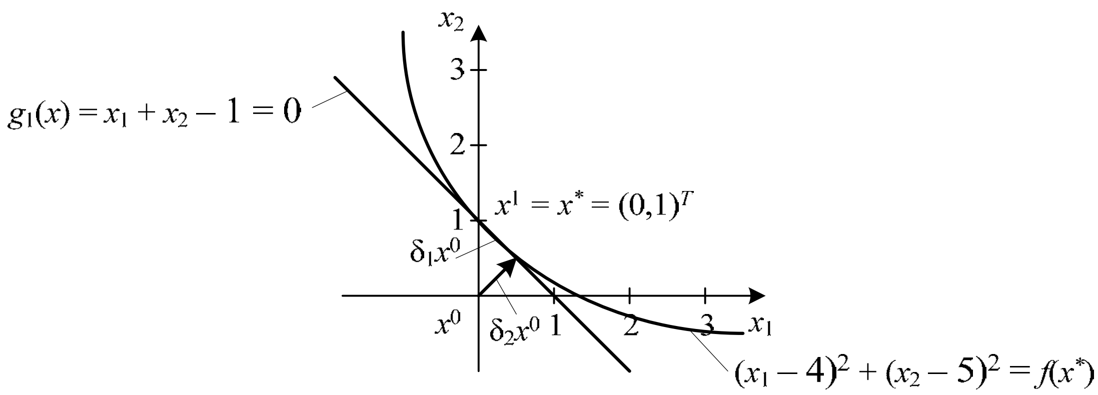


Рисунок 5.1 – Графическое представление задачи

Шаг 4⁰. Вычисляем матрицу A_0: $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 5⁰. Вычисляем $\tau_0 = -g_1(x^0)$: $\tau_0 = 1$.

Шаг 6⁰. Находим $\delta_2 x^0$: $\delta_2 x^0 = (1;1)^T \cdot 0,5 \cdot 1 = (0,5;0,5)^T$.

Шаг 7⁰. Вычисляем $\left\|\delta_2 x^0\right\|$: $\left\|\delta_2 x^0\right\| = 0,707$.

Шаг 8⁰. Вычисляем $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0) = (-8;-10)^T$.

Шаг 9⁰. Вычисляем Δx^0:

$$\Delta x^0 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 10⁰. Проверяем выполнение условий $\left\|\Delta x^0\right\| \le \varepsilon$, $\left\|\delta_2 x^0\right\| \le \varepsilon$:

$$\left\|\Delta x^0\right\| = 1,41 > \varepsilon = 0, \left\|\delta_2 x^0\right\| = 0,707 > \varepsilon = 0.$$

Переходим к шагу 11^0.

Шаг 11^0. Получаем точку $x^0 + t_0^* \Delta x^0$: $x^0 + t_0^* \Delta x^0 = (-t_0^*, t_0^*)^T$.

Шаг 12^0. Определяем t_0^* из условия $f(x^0 + t_0^* \Delta x^0) = \min\limits_{t_0} f(x^0 + t_0^* \Delta x^0) : t_0^* = 0,5.$

Шаг 13^0. Вычисляем $x^1 = x^0 + t_0^* \Delta x^0 + \delta_2 x^0$:

$$x^1 = (0;0)^T + (-0,5;0,5)^T + (0,5;0,5)^T = (0;1)^T.$$

Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3^1.

Шаг 3^1. Проверяем условие $k \ge M$: $k = 1 < 5 = M$.

Шаг 8^1. Вычисляем $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1) = (-8;-8)^T$.

Шаг 9^1. Вычисляем Δx^1: $\Delta x^1 = (0;0)^T$.

Шаг 10^1. Проверяем условие $\left\|\Delta x^1\right\| \le \varepsilon$, $\left\|\delta_2 x^1\right\| \le \varepsilon$:

$$\left\|\Delta x^1\right\| = 0 = \varepsilon, \left\|\delta_2 x^1\right\| = 0 = \varepsilon.$$

Расчет окончен. Вычисляем множитель Лагранжа λ^*: $\lambda^* = -(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 \nabla f(x^1) = -(0,5;0,5)(-8;-8)^T = 8$. Проверяем достаточные условия минимума. Второй дифференциал функции Лагранжа равен $d^2 L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. Дополнительное условие: $dx_1 + dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. Подставляя в $d^2 L$, имеем $d^2 L = 4dx_1^2 > 0$. Вывод: точка $x^1 = (1;0)^T = x^*$ – точка минимума.

Пример 2 **–** Найти минимум в задаче

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min;$$
$$g_1(x) = -x_1 - x_2 + 4 \le 0;$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0;$$
$$g_3(x) = -x_2 \le 0.$$

Решение

Шаг 1^0. Задаем $x^0 = (0;0)^T$; $\varepsilon_1 = -0,1$; $\varepsilon_2 = 0,1$; $M = 5$.

Шаг 2^0. Полагаем $k = 0$.

Шаг 3^0. Проверим условие $k \ge M$: $0 < 5$.

Шаг 4^0. Вычисляем $g_j(x^0), j = 1,2,3$: $g_1(x^0) = 4$; $g_2(x^0) = 0$; $g_3(x^0) = 0$.

Шаг 5^0. Проверяем $\varepsilon_1 \le g_j(x^0) \le 0$: $g_1(x^0) > 0$, $\varepsilon_1 < g_2(x^0) = 0$, $\varepsilon_1 < g_3(x^0) = 0$.

Активны второе и третье ограничения, они формируют матрицу A_0; $\nabla f(x^0) \neq 0$.

Шаг 7⁰. Вычисляем Δx^0: $\Delta x^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. к. $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Шаг 9⁰. Вычисляем $\lambda^0 : \lambda^0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$,

удаляем третье ограничение $-x_2 \leq 0$ (оно переходит в пассивное), которому соответствует наибольший по модулю множитель –10, и переходим к шагу 7^1 (при этом из матрицы A_0 удаляется вторая строка).

Шаг 7¹. Вычисляем Δx^0: $\Delta x^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, т. к. $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 8¹. Проверяем условие $\left\|\Delta x^0\right\| \leq \varepsilon_2$: $\left\|\Delta x^0\right\| = 10 \geq \varepsilon_2 = 0{,}1$.

Шаг 10⁰. Находим точку $x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^0 + t_0 \Delta x^0 = (0;10t_0)^T$.

Шаг 11⁰. Определяем t_0^* : $t_0^* = 0{,}5$; т. к. первое ограничение пассивно в точке x^0, то из условий $-100 t_0^{\,2} + 4 = 0$ и $t_0 \geq 0$ находим $t_0^{\,1} = \dfrac{1}{5}$; третье ограничение в аналогичной процедуре не участвует, поскольку переведено в пассивное только на шаге 9^0; $t_{0\max} = \min\limits_j \left\{ t_0^{\,j} \right\} = \dfrac{1}{5}$; $t_0 = \min\left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5} \right\} = \dfrac{1}{5}$.

Шаг 12⁰. Вычисляем $x^1 = x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^1 = (0;2)^T$ (рисунок 5.2).

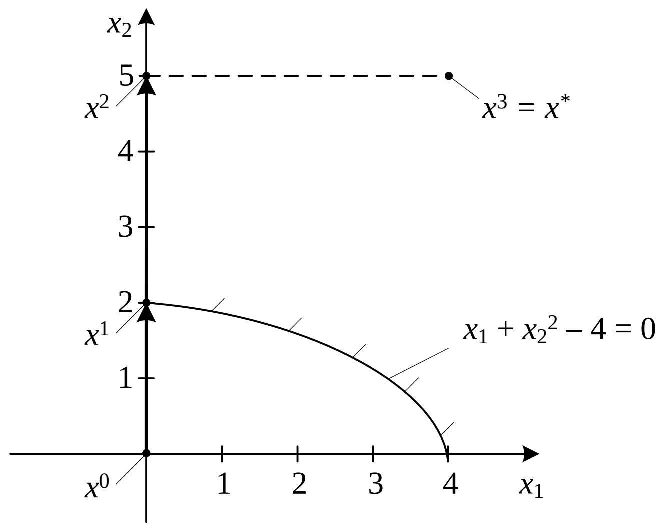


Рисунок 5.2 – Графическое представление задачи

Шаг 2¹. Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3^1.
Шаг 3¹. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$.
Шаг 4¹. Вычисляем $g_j(x^1), j = 1,2,3$: $g_1(x^1) = 0; g_2(x^1) = 0; g_3(x^1) = -2 < 0$.

Шаг 5[1]. Проверяем условие $\varepsilon_1 \le g_j(x^1) \le 0$:

$$\varepsilon_1 < g_1(x^1) = 0,\ \ \varepsilon_1 < g_2(x^1) = 0,\ \ g_3(x^1) < \varepsilon_1 .$$

Активны первое и второе ограничения, поэтому $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\nabla f(x^1) \neq 0$.

Шаг 7[2]. Вычисляем Δx^1:

$$\Delta x^1 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 8[2]. Проверяем условие $\left\|\Delta x^1\right\| \le \varepsilon_2$: $\left\|\Delta x^1\right\| = 0$.

Шаг 9[1]. Вычисляем λ^1: $\lambda^1 = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{4} \\ \frac{30}{4} \end{pmatrix}$.

Удаляем первое ограничение (оно переходит в пассивное), которому соответствует наибольший по модулю отрицательный множитель, и переходим к шагу 7[3] (при этом из матрицы A_0 исключается первая строка).

Шаг 7[3]. Вычисляем Δx^1: $\Delta x^1 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, т. к. $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 8[3]. Проверяем условие $\left\|\Delta x^1\right\| \le \varepsilon_2$: $\left\|\Delta x^1\right\| = 6 \ge \varepsilon_2$.

Шаг 10[1]. Получаем точку $x^1 + t_1 \Delta x^1$: $x^1 + t_1 \Delta x^1 = (0; 2 + 6t_1)^T$.

Шаг 11[1]. Определяем t_1: $t_1^* = 0{,}5$; т. к. третье ограничение пассивно в точке x^1, но условие $-(2 + 6t_1) = 0$ выполняется только при $t_1 < 0$, поэтому t_1^3 не вычисляется; первое ограничение в аналогичной процедуре не участвует поскольку переведено в пассивное только на шаге 9[1]; следовательно, $t_{1\max}$ не вычисляется и $t_1 = t_1^* = 0{,}5$.

Шаг 12[1]. Вычисляем $x^2 = x^1 + t_1 \Delta x^1$: $x^2 = (0; 5)^T$ (рис. 5.2).

Шаг 2[2]. Полагаем $k = 2$ и переходим к шагу 3[2].

Шаг 3[2]. Проверяем условие $k \ge M$: $k = 2 < 5 = M$.

Шаг 4[2]. Вычислим $g_j(x^2), j = 1, 2, 3$: $g_1(x^2) = -21$; $g_2(x^2) = 0$; $g_3(x^2) = -5$.

Шаг 5[2]. Проверяем условие $\varepsilon_1 \le g_j(x^2) \le 0$:

$$g_1(x^2) < \varepsilon_1,\ \ \varepsilon_1 < g_2(x^1) = 0,\ \ g_3(x^2) < \varepsilon_1 .$$

Активно второе ограничение, оно формирует матрицу A_2; $\nabla f(x^2) = (-8,0)^T \neq 0$.

Шаг 7[4]. Вычисляем Δx^2: $\Delta x^2 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. к. $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 8[4]. Проверяем условие $\left\|\Delta x^2\right\| \leq \varepsilon_2$: $\left\|\Delta x^2\right\| = 0$.

Шаг 9[2]. Вычисляем λ^2: $\lambda^2 = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = -8$.

Удаляем второе ограничение $g_2 \leq 0$ и переходим к шагу 7[5].

Шаг 7[5]. Вычисляем Δx^2: $\Delta x^2 = -E\nabla f(x^2) = (8;0)^T$.

Шаг 8[5]. Проверяем условие $\left\|\Delta x^2\right\| \leq \varepsilon_2$: $\left\|\Delta x^2\right\| = 8 \geq \varepsilon_2$.

Шаг 10[2]. Получаем точку $x^2 + t_2\Delta x^2$: $x^2 + t_2\Delta x^2 = (8t_2;5)^T$.

Шаг 11[2]. Вычисляем t_2: $t_2 = t_2^* = 0,5$.

Шаг 12[2]. Вычисляем $x^3 = x^2 + t_2\Delta x^2 : x^3 = (4;5)^T$ (см. рисунок 5.2).

Шаг 2[3]. Полагаем $k = 3$ и переходим к шагу 3[3].

Шаг 3[3]. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 3 < 5 = M$.

Шаг 4[3]. Вычислим $g_j(x^3)$, $j = 1,2,3$: $g_1(x^3) = -25$; $g_2(x^3) = -4$; $g_3(x^3) = -5$.

Шаг 5[3]. Проверяем условие $\varepsilon_1 \leq g_j(x^3) \leq 0$: $g_1(x^3) < \varepsilon_1$, $g_2(x^1) < \varepsilon_1$, $g_3(x^1) < \varepsilon_1$. Вычисляем $\nabla f(x^3) : \nabla f(x^3) = (0;0)^T$.

Шаг 9[3]. Вычисляем λ^3: $\lambda_1^3 = 0$, $\lambda_2^3 = 0$, $\lambda_3^3 = 0$.

Проверяем достаточные условия $d^2L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$. Дополнительные условия отсутствуют, т. к. все три ограничения в точке x^3 пассивны. Точка $x^3 = x^*$ – точка минимума.

Задания для самостоятельной работы.

В соответствии с вариантом задания из таблицы 5.1 необходимо найти решение задачи условной оптимизации.

Таблица 5.1 – Варианты функций

Номер варианта	Функция
1	$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 2x_2 \leq -8$
2	$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 5x_2 = 10$
3	$f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \to \min$ при $x_1 + 2x_2 \leq 0$

Окончание таблицы 5.1

Номер варианта	Функция
4	$f(x)=2x_1^2-x_2^2 \to \min$ при $x_1+5x_2 \le 10$
5	$f(x)=2x_1^2-x_2^2-2x_1x_2 \to \min$ при $10x_1+20x_2 \le 0$
6	$f(x)=x_1^2-x_2+2x_1x_2 \to \min$ при $5x_1+5x_2=15$
7	$f(x)=2x_1^2+5x_2^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1-2x_2=0$
8	$f(x)=(2+x_1)^2-x_2^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1+x_2=10$
9	$f(x)=x_1^2+(7+x_2)^2+x_1x_2 \to \min$ при $x_1+x_2 \le -10$
10	$f(x)=x_1^2-x_2^2 \to \min$ при $x_1+5x_2=1$
11	$f(x)=2x_1^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1^2+2x_2=2$
12	$f(x)=2x_1^2+2x_1x_2+10 \to \min$ при $x_1+3x_2=20$
13	$f(x)=(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1+5x_2 \le -5$
14	$f(x)=2x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2 \to \min$ при $x_1+x_2^2 \le 7$

Вопросы для контроля

1 Для решения каких задач целесообразно использовать метод проекции градиента? Каковы достоинства и недостатки этого метода?

2 Чем отличаются алгоритмы метода в случае ограничений-равенств и ограничений-неравенств?

6 Лабораторная работа № 6. Решение задачи распределения ресурсов методом динамического программирования

Цель работы: изучение метода динамического программирования.

Порядок выполнения работы.

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Теоретические сведения.

Задача распределения ресурсов имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max ; \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = C ; \tag{6.2}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n} , \tag{6.3}$$

где n – число технологических процессов, между которыми нужно распределить сырье в объеме C, с целью получения максимальной прибыли;

x_i – количество сырья, выделяемое на i-й процесс;

$f_i(x_i)$ – прибыль, получаемая в i-м процессе при использовании в нем сырья в объеме x_i, $i = \overline{1, n}$.

Так как целевая функция и ограничения в задаче (6.1)–(6.3) сепарабельны, то к ней применим метод динамического программирования.

Пусть С – целое число и x_i, $i = \overline{1, n}$, могут принимать лишь целые неотрицательные значения. В этом случае для задачи (6.1)–(6.3) удобно использовать следующую табличную реализацию метода динамического программирования.

1 Рассчитываем функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y - z)]; \quad 0 \leq y \leq C \tag{6.4}$$

с начальным условием

$$B_1(y) = f_1(y), \quad 0 \le y \le C. \tag{6.5}$$

Данные заносим в таблицу 6.1, имеющую $c + 1$ столбцов и $n + 1$ строк.

Таблица 6.1 – Данные расчета функции Беллмана

y	1	2	…	K	…	C
$B_1(y)$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	…	$B_1(k)$	…	$B_1(C)$
$B_2(y)$	$B_2(1)$ [$x_2(1)$]	$B_2(2)$ [$x_2(2)$]	…	$B_2(k)$ [$x_2(k)$]	…	$B_2(C)$ [$x_2(C)$]
…	…	…	…	…	…	…
$B_n(y)$	$B_n(1)$ [$x_n(1)$]	$B_n(2)$ [$x_n(2)$]	…	$B_n(k)$ [$x_n(k)$]	…	$B_n(C)$ [$x_n(C)$]

При заполнении таблицы в ее клетке вместе со значениями $B_k(y), \quad 1 \le k \le n, 1 \le y \le n$, записываем также (в квадратных скобках) и величину $x_k(y)$, определяемую как то число z, $0 \le z \le y$, на котором в уравнении (6.4) достигается максимум (если таких чисел несколько, записываем все).

2 Определяем оптимальное значение целевой функции задачи (6.1)–(6.3). Максимальная прибыль равна величине $B_n(C)$.

3 Определяем оптимальное распределение сырья между процессами $i = \overline{1, n}$.

Из таблицы последовательно находим

$$x_n^0 = x_n(C);$$

$$x_n^0 = x_i(C - \sum\nolimits_{j=n}^{i=1} x_j^0), \quad i = n-1, ..., 2; x_i^0 = C - \sum\nolimits_{j=n}^{2} x_0^0 .$$

Решений x_i, $i = \overline{1, n}$ может оказаться несколько.

Замечание. Описанную выше табличную реализацию удобно применять в случае изменения условий задачи (6.1)–(6.3): при сокращении или при упрощении либо количества сырья C, либо чисел n технологических процессов. При сокращении чисел C или n для подсчета решения новой задачи рассматривается соответствующая часть таблицы, получаемая путем вычеркивания ненулевых столбцов или строк. При увеличении C или n для получения решения новой задачи таблицу следует нарастить.

Пример 1 – Решить следующую задачу распределения ресурсов:

$$\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5. \tag{6.6}$$

Решение

Заполняем таблицу, рассчитывая функцию Беллмана $B_k(C)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана.

Имеем $f_1(x)=\dfrac{x_1^2}{2}$, $f_2(x)=x^2-x$, $f_3(x)=2x$, $C=5$, $n=3$.

Для первой строки таблицы

$$B_1(y)-f_1(y)=\frac{y^2}{2},\quad 1\le y\le 5;$$

$$B_1(1)=0{,}5;\ B_1(2)=2;\ B_1(3)=4{,}5;\ B_1(4)=8;\ B_1(5)=12{,}5.$$

Для второй строки

$$B_2(y)=\max\nolimits_{0\le z\le y}[f_2(z)+B_1(y-z)]=\max\nolimits_{0\le z\le y}[z^2-z+\frac{(y-z)^2}{2}];\ 1\le y\le 5;$$

$$B_2(1)=\max\nolimits_{0\le z\le 1}[z^2-z+\frac{(1-z)^2}{2}]=\max[0+0{,}5;\ 0+0]=0{,}5;\ x_2(1)=0;$$

$$B_2(2)=\max\nolimits_{0\le z\le 2}[z^2-z+\frac{(2-z)^2}{2}]=\max[0+2;\ 0+0{,}5;\ 2+0]=2;\ x_2(2)=\begin{cases}0\\2\end{cases};$$

$$B_2(3)=\max\nolimits_{0\le z\le 3}[0+4{,}5;\ 0+2;\ 2+0{,}5;\ 6+0]=6;\ x_2(3)=3;$$

$$B_2(4)=\max\nolimits_{0\le z\le 4}[0+8;0+4{,}5;\ 2+2;\ 6+0{,}5;\ 12+0]=12;\ x_2(4)=4;$$

$$B_2(5)=\max\nolimits_{0\le z\le 5}[0+12{,}5;\ 0+8;\ 2+4{,}5;\ 6+2;\ 12+0{,}5;\ 20+0]=20;\ x_2(5)=5.$$

Для третьей строки

$$B_2(y)=\max\nolimits_{0\le z\le y}[f_3(z)+B_2(y-z)]=\max\nolimits_{0\le z\le y}[2z+B_2(y-z)];\ 1\le y\le 5$$

$$B_3(1)=\max\nolimits_{0\le z\le 1}[2z+B_2(1-z)]=\max[0+0{,}5;\ 2+0]=2;\ x_3(1)=1;$$

$$B_3(2)=4;\quad x_3(2)=2;$$

$$B_3(3)=6;\quad x_3(3)=\begin{cases}0\\3\end{cases};$$

$$B_3(4)=12;\quad x_3(4)=0;$$

$$B_3(5)=20;\quad x_3(5)=0.$$

Полученные в результате расчета данные приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Расчетные данные

y	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	0,5	2	4,5	8	12,5
$B_2(y)$	0,5 [0]	2 [0;2]	6 [3]	12 [4]	20 [5]
$B_3(y)$	2 [1]	4 [2]	6 [0;3]	12 [0]	20 [0]

Ответ: $B_3(5) = 20;\ x_3^0 = x_3(5) = 0,\quad x_2^0 = x_2(5-0) = 5,\quad x_1^0 = 0 - x_2^0 - x_3^0 = 0$.

Пример 2 **–** Найти решение задачи (6.5) при сокращении ресурса на 2.

Из таблицы 6.2 получим $B(3) = 6$.

Имеем два решения: $\overline{x_3^0} = 3,\quad \overline{x_2^0} = 0,\quad \overline{x_1^0} = 0;$

$$\overline{\overline{x_3^0}} = 0,\quad \overline{\overline{x_2^0}} = 3,\quad \overline{\overline{x_1^0}} = 0.$$

Задания для самостоятельной работы.

Записать задачу в виде (6.1)–(6.3).

1 Решить задачу распределения ресурсов при $C = 6$, $n = 3$.

2 Найти по таблице решение в случае сокращения ресурсов на одну единицу; $C = 5$.

3 Определить, эффективно ли введение еще одного дополнительного технологического процесса f_4.

Номер варианта выбирается по таблице 6.3.

Таблица 6.3 – Варианты заданий

i	f_1	f_2	f_3	f_4
1–10	A_i	$Б_i$	$В_i$	$Б_i + 1$
11–17	$A_i - 10$	$Б_i - 9$	$В_i - 8$	$Б_i - 8$
18–24	$A_i - 17$	$Б_i - 15$	$В_i - 16$	$Б_i - 14$
25–28	$A_i - 24$	$Б_i - 21$	$В_i - 20$	$Б_i - 20$
Примечание – i – порядковый номер студента по журналу				

Варианты функций прибыли и количества сырья, приведенные в таблицах 6.4 и 6.5, выбираются на основе данных таблицы 6.3.

Таблице 6.4 – Варианты функций прибыли

Номер варианта	A_i	$Б_i$
1	$\begin{cases} x^2-1, & x=1,2,3 \\ 2x+1, & x=4,5,6 \end{cases}$	$\frac{1}{2}(x^2-3x)$
2	$\begin{cases} 4+x^2-2x, & x=1,2,3 \\ 2x+3, & x=4,5,6 \end{cases}$	$\frac{1}{18}(x^3-x^2)$
3	$\begin{cases} 2^x-2, & x=1,2,3 \\ \frac{x^2}{2}-2x+6, & x=4,5,6 \end{cases}$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$
4	$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+2x, & x=1,2,3 \\ x+6, & x=4,5,6 \end{cases}$	$\frac{1}{2}x$
5	$\begin{cases} 3^{x-2}, & x=1,2,3 \\ 2^x-2, & x=4,5,6 \end{cases}$	$0,3[2^x-(x-1)^2]$
6	$\begin{cases} 2x-2, & x=1,2,3 \\ 2^{x-3}+3, & x=4,5,6 \end{cases}$	$0,2(x^2+3x)$
7	$\begin{cases} x^2, & x=1,2,3 \\ 9, & x=4,5,6 \end{cases}$	$2(7x-x^2)$
8	$\begin{cases} \frac{x^2}{3}+1, & x=1,2,3 \\ x+2, & x=4,5,6 \end{cases}$	$0,05[3^{x-1}-\frac{(x-1)^2}{3}]$
9	$\begin{cases} 2x+1, & x=1,2,3 \\ \frac{x^2}{4}+3, & x=4,5,6 \end{cases}$	$2x$
10	$\begin{cases} 3x, & x=1,2,3 \\ 10, & x=4,5,6 \end{cases}$	$0,3(x^2+2x)$

Таблица 6.5 – Количество сырья B_i

Номер варианта	x					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	2	4	8
2	2	3	4	5	8	11
3	2	2	4	5	6	9
4	2	4	6	8	8	8
5	0	4	5	5	9	10
6	1	1	4	6	8	11

Окончание таблицы 6.5

Номер варианта	x					
	1	2	3	4	5	6
7	2	3	5	7	9	10
8	1	3	5	7	9	10
9	0	2	4	6	8	12
10	0	0	3	5	7	9

Вопросы для контроля

1 Постановка задачи распределения ресурсов.
2 Определение функции Беллмана.
3 Уравнение Беллмана.
4 Идея метода динамического программирования.

7 Лабораторная работа № 7. Адаптивный фильтр Калмана

Цель работы: изучение метода оптимизации по статистическим критериям.

Порядок выполнения работы.
1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету.
1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования в среде MathCad.
4 Выводы.

Теоретические сведения.
Основной проблемой, возникающей при любых измерениях, является их недостаточная точность. Имеется два пути решения этой проблемы: повышение точности измерительных приборов и повышение точности путем статистической обработки избыточного числа измерений, в результате которой получают оценку измеряемой величины. Повышение точности измерительных приборов требуют существенных затрат, в то время как статистическая обработка измерения при наличии компьютерной техники стоит дешево и проводится достаточно быстро.

В 1961 г. американский математик Калман разработал оптимальный фильтр для линейных нестационарных систем. Преимуществом фильтра Калмана является то, что он решает задачу во временной, а не частотной области.

Фильтр Калмана применяется для многомерных задач. Формулировка задачи, как правило, задается в матричной форме.

Фильтр Калмана существует в непрерывной и в дискретной формах. Рассмотрим дискретный фильтр Калмана. Блок-схема исследуемого процесса имеет вид, представленный на рисунке 7.1.

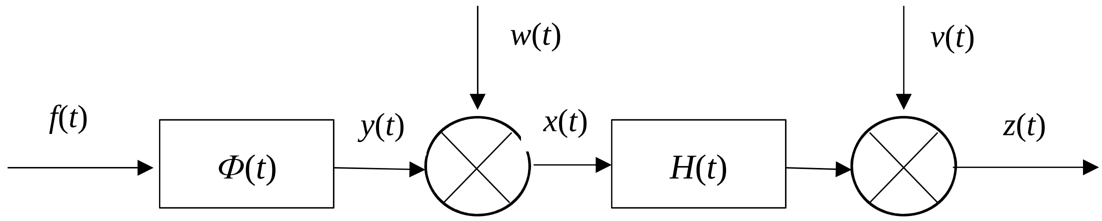


Рисунок 7.1 – Блок-схема объекта

Здесь $\Phi(t)$ – линейный объект (т. е. объект, описываемый линейными соотношениями), на выходе которого вырабатывается неслучайный сигнал $y(t)$. На выходную величину воздействует аддитивный (в виде слагаемого) шум $w(t)$. Шум $w(t)$ – это какие-то случайности внутри системы. После шума на выходе имеем выходную величину $x(t)$ – выходной сигнал системы, равный сумме неслучайного процесса $y(t)$ и шума, т. е. случайный процесс. Необходимо определить неизвестную случайную выходную величину $y(t)$. Физически измеряется величина $z(t)$, прошедшая через линейный блок $H(t)$, а не случайная выходная величина $y(t)$. Данный процесс представляет собой косвенные измерения.

Шумы $w(t)$ и v(t) – нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, то есть $M(w(t)) = 0$, $M(v(t)) = 0$, и с постоянными дисперсиями $Q(w(t)) = \text{const}$, $R(v(t)) = \text{const}$ соответственно.

Величина $x(t)$ также является нормально распределенной, то есть любое линейное преобразование нормально распределенной величины, есть нормально распределенная случайная величина, также шум $w(t)$ подчиняется нормальному закону распределения. Измерения производятся с ошибкой $v(t)$.

Таким образом, в действительности измеряется величина

$$z(t) = H\left(x(t) + w(t)\right) + v(t),$$

где $z(t)$ – случайно распределенная величина.

Требуется построить фильтр, после которого будет получена наилучшая оценка величины $y(t)$. Программа решения данной задачи в MathCad приведена на рисунке 7.2.

В программе каждое последующее состояние определяется предыдущим:

$$x_{k+1} = x_k e^{-\frac{\Delta t}{T}}.$$

$$
Z := \left|
\begin{array}{l}
y \leftarrow 0 \\
x1 \leftarrow 0 \\
Q \leftarrow 0.1 \\
R \leftarrow 0.1 \\
z \leftarrow \mathrm{dnorm}\left(\mathrm{rnd}\left(2\cdot\sqrt{Q}\right), y, \sqrt{Q}\right) + \mathrm{dnorm}\left(\mathrm{rnd}\left(2\cdot\sqrt{R}\right), 0, \sqrt{R}\right) \\
P \leftarrow \dfrac{Q\cdot R}{Q+R} \\
x1 \leftarrow \dfrac{Q\cdot z + R\cdot x1}{Q+R} \\
T \leftarrow 5 \\
\left[
\begin{array}{l}
\text{for } k \in 1..100 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x1 \leftarrow 1 - \exp\left(\dfrac{-1}{T}\right) + x1\cdot\exp\left(\dfrac{-1}{T}\right) \\
P \leftarrow P - \dfrac{P^2}{P+Q+R} \\
y \leftarrow 1 - \exp\left(\dfrac{-1}{T}\right) + y\cdot\exp\left(\dfrac{-1}{T}\right) \\
z \leftarrow \mathrm{dnorm}\left(\mathrm{rnd}\left(2\cdot\sqrt{Q}\right), y, \sqrt{Q}\right) + \mathrm{dnorm}\left(\mathrm{rnd}\left(2\cdot\sqrt{R}\right), 0, \sqrt{R}\right) \\
x1 \leftarrow \dfrac{(P\cdot z + R\cdot x1)}{P+R} \\
P \leftarrow P\cdot\dfrac{R}{P+R} \\
Z_k \leftarrow z \\
Y_k \leftarrow y \\
X1_k \leftarrow x1 \\
k
\end{array}
\right.
\end{array}
\right] \\
Z
\end{array}
\right.
$$

y – «незашумленная» переменная; *X*1 – оцениваемая переменная; *Z* – измеряемая переменная

Рисунок 7.2 – Программа фильтрации фильтром Калмана в MathCad

Программа составлена для $Q(w(t)) = R(v(t)) = 0{,}1$. Для оценки качества фильтрации в программе решается также уравнение «незашумленного», якобы «неизвестного» процесса.

В доцикловой части первым оператором присваивается начальное значение «незашумленной» и оцениваемой переменной, причем начальное значение оцениваемой переменной берется «с потолка», вводятся постоянные значения дисперсий обоих шумов и постоянной времени системы, производится первое измерение z и вычисляется первая оценка математического ожидания и дисперсии.

Измерение рассматривается как сумма двух псевдослучайных величин, каждая из которых образуется с помощью двух функций: функция rnd(x) возвращает равномерно распределенное случайное число в диапазоне 0…x, функция dnorm(x,y,w) возвращает нормально распределенное псевдослучайное число для аргумента x с математическим ожиданием y и z.

В первой функции dnorm за математическое ожидание принято значение y – «незашумленной» переменной, во второй – математическое ожидание равно 0.

В цикловой части программы производится перевод оцениваемых переменной и дисперсии в новое состояние системы, затем переводится в новое состояние «незашумленная» переменная, производится новое измерение z и вычисляется новое значение оцениваемой переменной и дисперсии. В последних операторах цикловой части производится накапливание измерений, оцениваемой и «незашумленной» переменной в массивы, с целью вывода их в фигуру после окончания решения.

Задание для самостоятельной работы.

В соответствии с рисунком 7.2 составить программу в MathCad и построить графики функций с использованием фильтрации и без нее. График строить в координатах $X1(j)$, $Y(j)$ и $Z(j)$, при j = 0…100 с шагом 1.

Вопросы для контроля знаний.

1 Постановка задачи фильтрации.
2 Описать блок-схему системы.
3 Пояснить назначение используемых переменных.
4 Провести анализ построенных графиков.

Список литературы

1 Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / Под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2011. – 430 с.

2 **Орлова, И. В.** Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Вузовский учебник; ИНФРА-М, 2013. – 140 с.

3 **Есипов, Б. А.** Методы исследования операций: учебное пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. – 304 с.

4 **Скиена, С.** Алгоритмы. Руководство по разработке: пер. с англ. / С. Скиена. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. – 720 с.

5 **Дорогов, В. Г.** Введение в методы и алгоритмы принятия решений: учебное пособие / В. Г. Дорогов, Я. О. Теплова; под ред. Л. Г. Гагариной. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2016. – 240 с.

6 **Аттетков, А. В.** Методы оптимизации : учебное пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2017. – 270 с.

7 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Задачник: учебное пособие для академ. бакалавриата / Д. П. Ким. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2017. – 331 с.

8 **Вайтехович, П. Е.** Моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования: учебно-методическое пособие / П. Е. Вайтехович, В. С. Францкевич. – Минск: БГТУ, 2014. – 268 с.

9 **Катаргин, Н. В.** Экономико-математическое моделирование: учебное пособие / Н. В. Катаргин. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018. – 256 с.

10 **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 4-е изд., испр. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2015. – 512 с.

11 **Учаев, П. Н.** Оптимизация инженерных решений в примерах и задачах: учебник для вузов / П. Н. Учаев, С. А. Чевычелов, С. П. Учаева; под общ. ред. проф. П. Н. Учаева. – Старый Оскол: ТНТ, 2014. – 176 с.

12 **Островский, Г. М.** Оптимизация технических систем: учебное пособие для вузов / Г. М. Островский, Н. Н. Зиятдинов, Т. В. Лаптева. – Москва: Кнорус, 2012. – 432 с.