МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

Неклассические логики

Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов специальности
1-40 80 02 «Системный анализ, управление и обработка информации»
очной и заочной форм обучения

Могилев 2019

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

УДК 004.8:519.8
ББК 32.973–018
Н27

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «12» ноября 2019 г., протокол № 4

Составители: доц. А. И. Якимов;
ст. преподаватель Е. М. Борчик

Рецензент И. В. Лесковец

Даны методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Неклассические логики» (I семестр), а также приведены контрольные вопросы и список литературы для подготовки.

Учебно-методическое издание

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать 31.12.2019. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,06. Тираж 31 экз. Заказ № 882.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2019

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Содержание

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Введение

Целью преподавания дисциплины «Неклассические логики» является получение углубленных знаний в области формальной логики, в частности, систем неклассической логики (нечеткая логика, модальная логика, темпоральная логика и др.) в приложении к задаче представления знаний; освоение современных инструментов формализации рассуждений и автоматизированного построения вывода.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

1 Лабораторная работа № 1. Реализация вывода в трехзначной логике Лукасевича

Цель работы: овладеть на практике механизмом вывода в многозначной логике Лукасевича.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования вывода в многозначной логике Лукасевича.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Неклассические логики играют существенную роль в теории и практике интеллектуальных систем. Остановимся на многозначных логиках Я. Лукасевича с неопределенностями. Ясно, что n-значная логика при достаточно большом n может вполне удовлетворительно аппроксимировать нечеткую логику Л. Заде. Таким образом, эффективная машина вывода для многозначной логики важна и в плане использования ее для нечеткой логики Заде. Однако имеется два аспекта, касающихся нечеткой логики:

1) использование принципа резолюций ограничено в силу тождества:

$$\alpha \to \beta \equiv val(\alpha) \le val(\beta),$$

где α, β – формулы и $val(\alpha)$, $val(\beta)$ представляют их нечеткие меры;

2) $\alpha \wedge \overline{\alpha}$ не представляет противоречивой формулы в общем случае.

Поэтому концепция противоречивости для таких систем должна быть ясно сформулирована и разрешена.

Основные логические операции задаются в 3-значной логике Лукасевича согласно таблице 1.1 истинности (* – значение «не определено»). Рассмотрим, например, формулу 3-значного исчисления Лукасевича $\alpha \wedge \overline{\alpha}$. Пусть значение a = * (далее символу * будем приписывать числовое значение $\frac{1}{2}$).

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Таблица 1.1

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\overline{a}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	*	0	*	1
1	1	1	1	0
1	*	*	1	0
*	*	*	*	*

По таблице 1.1 устанавливаем, что значение формулы $\alpha \wedge \overline{\alpha}$ в этом случае равно *. Таким образом, видим, что принцип исключенного третьего в 3-значной логике места не имеет. Аналогичным образом логическое произведение $\alpha \wedge \overline{\alpha}$ необязательно равно false. Следовательно, уже в указанных фактах содержится принципиальное отклонение от классической 2-значной логики.

Рассмотрим, как реализовать сведение к классическому исчислению. Введем 2-значное логическое исчисление, эквивалентное 3-значному исчислению Лукасевича с тремя значениями истинности: 0, ½, 1 – и логическими операциями: $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\neg$ (отрицание), $\rightarrow$ (импликация), $\equiv$ (эквивалентность). Это позволяет построить машину вывода стандартным способом. Описываемый подход может быть обобщен для произвольных n-значных логик Лукасевича и, следовательно, применим для нечеткой логики Заде с континуумом значений истинности для формул.

Для достижения поставленных целей потребуется некоторое промежуточное исчисление, названное здесь векторным логическим исчислением со специфически определенной операцией отрицания ($\neg$). Базовая идея, следовательно, такова: любая неклассическая логика может быть заменена эквивалентной ей 2-значной логикой.

Для того чтобы интерпретировать формулы 3-значного исчисления Лукасевича, введем векторную логику с формулами, аргументы которых представляют векторы, причем каждая переменная вектора представляет булевскую переменную, булевскую формулу или константу (0,1). Обозначим векторные формулы v и w как $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ и определим следующие отношения:

$$v = 1 \leftrightarrow (v_1 = 1, v_2 = 1);$$
$$v = 0 \leftrightarrow (v_1 = 0, v_2 = 0);$$
$$v = 1/2 \leftrightarrow (v_1 = 1, v_2 = 0);$$
$$\neg v \leftrightarrow (\neg v_1, \neg v_2);$$
$$v \wedge w \leftrightarrow (v_1 \wedge w_1, v_2 \wedge w_2);$$
$$v \vee w \leftrightarrow (v_1 \vee w_1, v_2 \vee w_2);$$
$$v, w \leftrightarrow v_i, w_i, \forall i = 1, 2;$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$v[\alpha] \leftrightarrow I_1 \vee I_2 \vee \ldots \vee I_t;$$
$$val(v_{I_m}) \geq \alpha, (m = 1, \ldots, t). \tag{1.1}$$

Замечание. Считается, что для каждой векторной формулы α выполняется $\alpha_1 \vee \overline{\alpha}_2$, которое не допускает набор $\alpha = <0, 1>$, исключаемый определением (1.1).

Рассмотрим следующие примеры в качестве пояснения.

Пример 1 – Доказать или опровергнуть утверждение, что из формул $\alpha \vee \beta$ $[\mu = 1]$, $\neg\alpha \vee \beta$ $[\mu \geq 0{,}5]$ можно вывести $\beta\,[\mu \geq 0{,}5]$.

Перепишем $\alpha \vee \beta$ в векторной форме:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \vee (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2) = (1{,}1).$$

Поскольку мера этой формулы равна 1, то можно записать

$$\alpha_1 \vee \beta_1;\ \ \alpha_2 \vee \beta_2. \tag{1.2}$$

Вторая формула $\neg\alpha \vee \beta$ $[\mu \geq 0{,}5]$ переписывается следующим образом:

$$(\neg\alpha_2, \neg\alpha_1) \vee (\beta_1, \beta_2) = (\neg\alpha_2 \vee \beta_1, \neg\alpha_1 \vee \beta_2) = (1, 0) \vee (1, 1),$$

откуда получаем $\neg\alpha_2 \vee \beta_1$, то дает исходную систему посылок в виде

$$\neg\alpha_2 \vee \beta_1;\ \ \alpha_1 \vee \beta_1;\ \ \alpha_2 \vee \beta_2;$$
$$\alpha_1 \vee \neg\alpha_2;\ \beta_1 \vee \neg\beta_2. \tag{1.3}$$

Необходимо показать, что из (1.3) следует формула $\beta = (\beta_1, \beta_2)\,[\mu \geq 0{,}5]$ (т. е. (1, 0) $\vee$ (1,1) или просто β_1). Это можно сделать с помощью стандартной резолюционной стратегии: β_1 действительно следует из (1.3).

Представленный выше подход может быть относительно легко обобщен для случая k-значной логики с $k > 3$. Для начала рассмотрим варианты с $k = 4$ и $k = 5$.

При $\boldsymbol{k}$ **= 4** будем использовать векторное представление

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

с операцией отрицания в форме

$$\neg v = (\neg v_1, \neg v_2, \neg v_3)$$

и значениями истинности

$$v = 0 \leftrightarrow (0, 0, 0);$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$v = 1 \leftrightarrow (0, 1, 0);$$
$$v = 2 \leftrightarrow (1, 1, 0);$$
$$v = 3 \leftrightarrow (1, 1, 1).$$

При $\boldsymbol{k}$ = **5** имеем

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4);$$
$$\neg v = (\neg v_2, \neg v_1, \neg v_4, \neg v_3);$$
$$v = 0 \leftrightarrow (0,0,0,0);$$
$$v = 1 \leftrightarrow (0, 0, 1, 0);$$
$$v = 2 \leftrightarrow (0, 1, 1, 0);$$
$$v = 3 \leftrightarrow (1, 1, 1, 0);$$
$$v = 4 \leftrightarrow (1, 1, 1, 1).$$

Общий случай может быть представлен в виде

$$v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n);$$
$$v = 0 \leftrightarrow (0, 0, 0, \dots, 0, 0);$$
$$v = 1 \leftrightarrow (0, 0, 0, \dots, 1, 0);$$
$$v = 2 \leftrightarrow (0, 0, 0, \dots, 1, 1, 0);$$
$$v = n-1 \leftrightarrow (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0);$$
$$v = n-1 \leftrightarrow (1, 1, 1, \dots, 1, 1)$$

с операцией отрицания $\neg v$, удовлетворяющей соотношению

$$val(\neg v) = n - val(v) + 1;$$
$$\neg v = (\neg v_{n-2}, \dots, \neg v_3, \neg v_2, \neg v_1, \neg v_n, \neg v_{n-1}).$$

Корректность операций $\wedge$ и $\vee$ в общем случае устанавливается непосредственно. Таким же образом определяются формулы, устанавливающие только допустимые наборы. Эти формулы таковы:

$$v_I = v_1 + 1 \left(i = 1, 2, \dots, n-2\right);$$
$$v_n = 1 \rightarrow v_i = 1.$$

Они указывают, что «единицы» в векторном представлении могут располагаться только последовательно одна за другой. Рассмотренный здесь общий подход дает ключ к построению машины логического вывода в нечеткой логике посредством аппроксимации нечетких значений значениями многозначной логики, достаточными для практических приложений.

Общая схема проверки выводимости состоит из следующих шагов.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

1 Рассматриваем выводимость в общем виде:

$$\alpha_1[\mu_1]\wedge,\ldots,\wedge\alpha_Z[\mu_Z]=\beta[\mu_\beta]. \qquad (1.4)$$

2 В соответствии с векторным представлением формул получаем систему посылок и заключений для (1.4).

3 Выполняем стандартную резолюционную стратегию в 2-значной логике.

4 Доказательство формулы в форме

$$\alpha_1\,\&\,\alpha_2\&,\ldots,\&\alpha_n\to\beta_1\vee\beta_1\vee,\ldots,\vee\beta_m$$

требует записать каждую формулу α_i,β_j в векторной форме

$$\alpha_i=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}),\quad \beta_j=(\beta_{j_1},\beta_{j_2})$$

и затем показать выводимость

$$\begin{cases}\alpha_{11}\wedge\alpha_{21}\wedge,\ldots,\wedge\alpha_{z1}\to\beta_{11}\vee\beta_{21}\vee,\ldots,\vee\beta_{m1};\\ \alpha_{12}\wedge\alpha_{22}\wedge,\ldots,\wedge\alpha_{z2}\to\beta_{12}\vee\beta_{22}\vee,\ldots,\vee\beta_{m2}.\end{cases}$$

Задания

1 Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha[\mu\geq 0{,}5]\vee\beta[\mu\leq 1];$$
$$\overline{\alpha}[\mu\geq 0{,}5]$$

выводима формула

$$\beta[\mu\leq 0{,}5].$$

2 Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha[\mu\leq 0{,}5]\vee\beta[\mu\leq 1];$$
$$\overline{\alpha}[\mu\geq 0{,}5]$$

выводима формула

$$\beta[\mu=0{,}5].$$

3 Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha[\mu\geq 0{,}5]\vee\beta[\mu\leq 1];$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$\overline{\alpha}[\mu \geq 0{,}5] \vee \varphi[\mu = 1];$$
$$\overline{\alpha}[\mu \geq 0{,}5] \vee \overline{\varphi}[\mu = 1]$$

выводима формула

$$\beta[\mu \leq 0{,}5].$$

4 Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha[\mu \geq 0{,}5] \vee \beta[\mu \leq 1];$$
$$\overline{\alpha}[\mu \leq 0{,}5] \vee \varphi[\mu = 1];$$
$$\overline{\varphi}[\mu = 1]$$

выводима формула

$$\beta[\mu \leq 1].$$

5 Показать или опровергнуть, что из формул

$$\alpha[\mu \geq 0{,}5] \vee \beta[\mu \leq 1] \vee \gamma[\mu \leq 1];$$
$$\overline{\alpha}[\mu \geq 0{,}5] \vee \varphi[\mu = 1];$$
$$\overline{\alpha}[\mu \geq 0{,}5] \vee \overline{\varphi}[\mu = 1];$$
$$\overline{\gamma}[\mu \geq 0{,}5]$$

выводима формула

$$\beta[\mu \leq 0{,}5].$$

Контрольные вопросы

1 Каковы значения истинности трехзначной логики Лукасевича?

2 Приведите примеры применения многозначных логик в повседневной жизни.

3 Докажите следующее утверждение: принцип исключения третьего $(a \vee \overline{a})$ в трехзначной логике места не имеет.

4 Докажите следующее утверждение: формула $(a \wedge \overline{a})$ в трехзначной логике необязательно принимает значение false.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

2 Лабораторная работа № 2. Реализация нечеткого логического вывода

Цель работы: изучить механизм нечеткого логического вывода в системе программирования Пролог.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Исследовать механизм нечеткого логического вывода.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования механизма нечеткого логического вывода.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Рассмотрим следующее предложение языка Пролог:

```
Suit (peter, X): -
	Big_salary (X,_)),
	Good_conditions (X,_).

	Big_salary(mailer, 0.4).
	Big_salary(officer, 0.7).
	Big_salary(bob, 0.8).
	Big_salary(artist, 1.0).

	Good_conditions(mailer, 0.7).
	Good_conditions(officer, 0.3).
	Good _conditions(bob, 0.6).
	Good_conditions(artist, 0.9).
```

В нечетком Прологе вывод осуществляется таким образом, чтобы либо найти ответ с максимальной правдоподобностью, либо «обычным образом», но учитывая, что значение 0,5 и ниже в качестве меры истинности рассматривается как ложное. Рассмотрим, как реализовать два этих подхода.

Подход по принципу 0,5 и ниже – ложь. В этом случае программа должна быть переписана следующим образом:

```
Suit (peter, X): -
	Big_salary (X,Y)),
	Y>=0.5,
```

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

```
        Good_conditions (X,Z),
        Z>=0.5.

        Big_salary(mailer, 0.4).
        Big_salary(officer, 0.7).
        Big_salary(bob, 0.8).
        Big_salary(artist, 1.0).

        Good_conditions(mailer, 0.7).
        Good_conditions(officer, 0.3).
        Good _conditions(bob, 0.6).
        Good_conditions(artist, 0.9).
```

Как видим, изменения в этом случае в тексте программы минимальные.

Теперь рассмотрим второй подход: поиск ветви с наибольшим значением степени истинности. Для реализации второго подхода следует использовать рекурсию следующим образом:

```
Database
        Job(string)

Suit (peter, R): -
        Big_salary (X,Y)),
        Good_conditions (X,Z),
        T=Y*Z.
        T>R,
        Retractall(_), !,
        Assert(job(X)),
        Suit(peter,T).

        Suit (peter, _): -
           Job(X),
           Write ("VYBRANA RABOTA:",X).
           Big_salary(mailer, 0.4).
           Big_salary(officer, 0.7).
           Big_salary(bob, 0.8).
           Big_salary(artist, 1.0).

           Good_conditions(mailer, 0.7).
           Good_conditions(officer, 0.3).
           Good _conditions(bob, 0.6).
```

Здесь используем предикат базы данных job , в котором хранится выбранная в итоге работа. Цель данной программы должна быть записана в следующем виде:

```
        GOAL

        Suit(peter,0).
```

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Объясним наиболее сложный участок данной программы:

```
Suit (peter, R): -
        Big_salary (X,Y)),
        Good_conditions (X,Z),
        T=Y*Z.
        T>R,
        Retractall(_), !,
        Assert(job(X)),
        Suit(peter,T).
```

Сначала последовательно выполняются предикаты:

```
        Big_salary (X,Y)),
        Good_conditions (X,Z),
        T=Y*Z.
```

Здесь по порядку выбирается работа, а затем выбирается соответствующая ей зарплата и условия. Вычисляется величина $T = YZ$. После этого выполняется проверка

$$T > R, \tag{2.1}$$

которая в случае удачи вызывает смену содержимого предиката базы данных job, записывает в него выбранную работу и снова вызывает предикат suit (peter, T), где T – новая оценка степени истинности правила. Заметим, что хотя бы одна работа всегда будет выбрана. Если нет уже ни одной работы, для которой выполняется условие (*****), то осуществляется выход в правило для вывода найденной работы на экран.

```
Suit (peter, _): -
        Job(X),
        Write ("VYBRANA RABOTA:",X).
```

Задания

1 Заменить критерий $T = Y \cdot Z$ на критерий $T = \min(Y, Z)$.

2 Реализовать в программе выбор значений меры истинности формул с помощью функций полезности, а не прямым заданием внутри формул, как, например, в Good_conditions(mailer, 0.7).

3 Реализовать комбинированную схему вывода с отсечением ветвей, где предикат получает значение меры истинности, меньшее 0,5.

Контрольные вопросы

1 Приведите аксиомы нечеткой логики.

2 Каковы значения истинности условной формулы $\{a \mid b\}$ при $(a, b) = (0, 0)$,

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$(a,b)=(0,1)$, $(a,b)=(0,*)$, $(a,b)=(1,0)$, $(a,b)=(1,1)$, $(a,b)=(1,*)$, $(a,b)=(*,0)$, $(a,b)=(*,1)$, $(a,b)=(*,*)$?

3 Каковы значения истинности следующих формул: $\{a \mid \text{true}\}$, $\{a \mid a\}$, $\{\text{false} \mid b\}$?

3 Лабораторная работа № 3. Решение систем логических уравнений с неопределенностями

Цель работы: научиться находить решения систем логических уравнений с неопределенностями.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Основные теоретические положения

Логическим уравнением с неопределенностью называем всякое уравнение вида

$$x^{\alpha_1} \vee y^{\alpha_2} \vee \ldots \vee w^{\alpha_z}(\mu), \tag{3.1}$$

где (μ) определяет значение меры правдоподобия.

Данное уравнение содержит логические переменные x (y, …, w), причем $x^{\alpha_1}=1$, если (условно говоря) $\alpha_1=1$ и $x^{\alpha_1}=0$ в противном случае.

Значение μ определяет степень правдоподобия данной формулы. Под степенью правдоподобия формулы можно понимать меру выполнимости (истинности) этой формулы в произвольной интерпретации. Таким образом, необходимо определить, что значит решить систему логических уравнений с неопределенностями и как это сделать. Ясно, что решением системы с неопределенностями могут быть привычные нам значения логических переменных, т. е. ложь или истина. В качестве решения можно также рассматривать нечеткие значения, в наибольшей мере удовлетворяющие заданной системе формул с неопределенностями. Рассмотрим уравнение

$$x \vee \sim y \vee z \ (0{,}8).$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Пусть $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Подставив это решение в данное уравнение, получим, что значением уравнения является 1. Нечеткое значение 0,8 следует интерпретировать следующим образом: примерно в 8 случаях из десяти данное уравнение истинно. Следовательно, решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ должно рассматриваться как решение в вероятностном смысле (экспертная оценка может рассматриваться как субъективная вероятность). В вероятностном смысле следует оценивать близость ответа для уравнения (3.1) к вероятностному значению (0,8). Если уравнений много, то вполне можно использовать известные статистические критерии адекватности (например, критерий Фишера или χ^2). Но начнем с рассмотрения способа отыскания решения в стандартных булевских переменных.

Пример – Дана система уравнений:

$$x \vee \sim y \vee z \quad (0{,}8); \quad \sim x \vee y\ (0{,}8);$$
$$\sim x \vee \sim z\ (0{,}4); \quad y \vee z. \qquad (3.2).$$

Прежде всего введем замены для уравнений:

$$T_1 = x \vee \sim y \vee z; \quad T_2 = \sim x \vee y; \quad T_3 = \sim x \vee \sim z; \quad T_4 = y \vee z.$$

Теперь можно записать систему в ином эквивалентном виде:

$$T_1 \to x \vee \sim y \vee z; \quad T_2 \to \sim x \vee y; \quad T_3 \to \sim x \vee \sim z; \quad T_4 \to y \vee z;$$

$$x \vee \sim y \vee z \to T_1; \quad \sim x \vee y \to T_2; \quad \sim x \vee \sim \mathrm{z} \to T_3; \quad y \vee z \to T_4.$$

Здесь $\to$ есть символ эквивалентности. Используя известное соотношение

$$A \to B = \sim A \vee B,$$

получим

$$\sim T_1 \vee x \vee \sim y \vee z; \quad \sim T_2 \vee \sim x \vee y; \quad \sim T_3 \vee \sim x \vee \sim z; \quad \sim T_4 \vee y \vee z; \quad \sim x \vee T_1;$$

$$y \vee T_1; \quad \sim z \vee T_1; \quad x \vee T_2; \quad \sim y \vee T_2; \quad x \vee T_3; \quad z \vee T_3; \quad \sim y \vee T_4; \quad \sim z \vee T_4.$$

Теперь уже можно ввести функционал

$$\boldsymbol{F} = (T_1 - 0{,}8)^2 + (T_2 - 0{,}8)^2 + (T_3 - 0{,}4)^2 \to \min.$$

Функционал означает поиск такого решения системы, которое обеспечивает минимальное отклонение от заданных мер неопределенности для уравнений. Выражение для $\boldsymbol{F}$ можно упростить, если раскрыть скобки и принять во внимание, что $1^2 = 1$ и $0^2 = 0$.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Таким образом, целевая функция будет переписана так:

$$\boldsymbol{F} = -0{,}6 \cdot T_1 - 0{,}6 \cdot T_2 + 0{,}2 \cdot T_3 \rightarrow \min,$$

или (умножив на 10)

$$-6 \cdot T_1 - 6 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 \rightarrow \min.$$

Ограничения системы можно теперь просто переписать как

$$1 - T_1 + x + 1 - y + z \geq 1; \quad 1 - T_2 + 1 - x + y \geq 1;$$
$$1 - T_3 + 1 - x + 1 - \mathrm{z} \geq 1; \quad 1 - T_4 + y + z \geq 1;$$
$$1 - x + T_1 \geq 1; \quad y + T_1 \geq 1; \quad 1 - \mathrm{z} + T_1 \geq 1; \quad x + T_2 \geq 1;$$
$$1 - y + T_2 \geq 1; \quad x + T_3 \geq 1; \quad z + T_3 \geq 1; \quad 1 - y + T_4 \geq 1;$$
$$1 - z + T_4 \geq 1.$$

Таким образом, получаем систему линейных булевских уравнений с линейной целевой функцией. Для ее решения будем использовать систему Excel и пакет ПОИСК РЕШЕНИЯ. Предполагая это известным, покажем теперь, как в Excel оценить статистическую адекватность полученного решения.

Пусть найдено решение для рассматриваемой системы:

$$x = 1, y = 1, z = 1.$$

Запишем два ряда чисел: один ряд соответствует значениям уравнений системы после подстановки в них найденного решения, второй – исходным значениям неопределенностей (таблица 3.1).

Таблица 3.1

Уравнение	Значение для $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$	Исходная мера μ
$x \vee {\sim}y \vee z$	1	0,8
${\sim}x \vee y$	1	0,8
${\sim}x \vee {\sim}z$	0	0,4
$y \vee z$	1	1

Необходимо оценить, насколько эти ряды чисел близки. Для этой цели можно использовать статистический критерий адекватности Фишера или χ^2.

Вычисляем расчетное значение критерия χ^2 по формуле

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - E_j)^2}{E_j} \approx \chi^2_{k-1},$$

где n_j – фактическое значение j-го уравнения (значение уравнения можно связать с вероятностью принятия им истинного значения); E_j – заданная мера истинности j-го уравнения.

Данное уравнение позволяет найти расчетное значение критерия χ^2. В рассматриваемом случае имеем

$$\chi^2 = \frac{(1-0{,}8)^2}{0{,}8} + \frac{(1-0{,}8)^2}{0{,}8} + \frac{(0-0{,}4)^2}{0{,}4} + 0 = 0{,}5.$$

Это значение следует сравнить с табличной величиной χ^2 для числа степеней свободы, равной числу переменных, поскольку только переменные определяют значения уравнений (но не наоборот). В данном случае число степеней свободы p равно 3. Должно выполняться соотношение «расчетное значение χ^2 не выше табличного».

Чтобы проверить выполнимость этого соотношения, можно воспользоваться статистическими функциями Excel, а именно функцией ХИ2ОБР (рисунок 3.1).

Используя эту функцию, следует ввести число степеней свободы p и вероятность ошибки, например 0,05. Это значение x = 7,814 и будет соответствовать χ^2 табличному. Так, в данном случае заключаем, что найденное точное решение можно рассматривать как *статистически адекватное*.

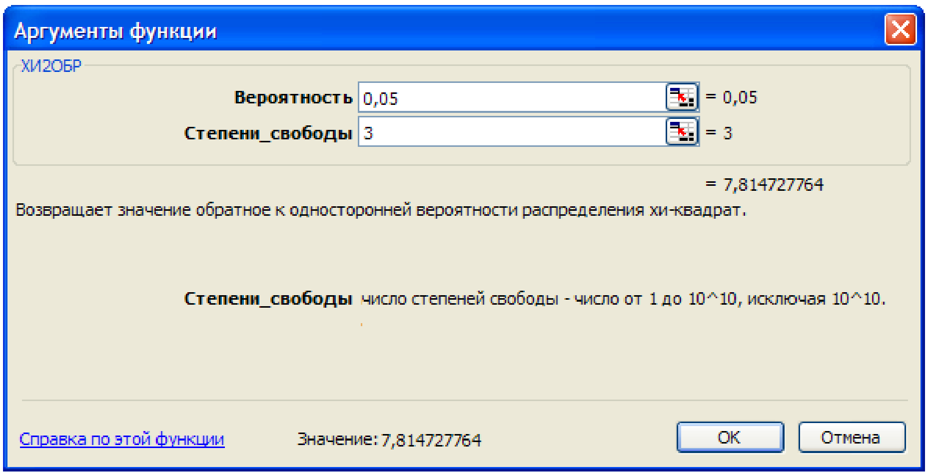

Рисунок 3.1 – Функция ХИ2ОБР

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Задания

1 Найти решение системы:

$$\sim x \vee y \vee \sim z\ (0{,}7);\quad x \vee \sim z\ (0{,}2);\quad \sim x \vee \sim y\ (0{,}9);\quad y \vee z\ (0{,}6).$$

2 Найти решение системы:

$$x \vee y \vee z\ (0{,}9);\quad \sim x \vee \sim z\ (0{,}3);\quad \sim x \vee \sim y\ (0{,}4);\quad y \vee z\ (0{,}6).$$

Контрольные вопросы

1 Какое уравнение называется уравнением с неопределенностью?
2 Что называется мерой правдоподобия? Какие значения она может принимать?
3 Какие значения может принимать логическая переменная?

4 Лабораторная работа № 4. Использование логик с временным параметром

Цель работы: изучить использование логик с временным параметром.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Рассмотрим задачу синтеза алгоритма управления по спецификациям, заданным в форме системы логических уравнений с временным параметром логики вида

$$f(x_{i_1}(t), ..., x_{i_z}(t), y_k(t)) \to x_i(t+1), \tag{4.1}$$

где x_i представляет i-й разряд вектора состояния системы, определяемый в момент t (x_i называется разрядной переменной); y_k соответствует характери-

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

стической переменной, определяющей выбор (при $y_k = 1$) k-й управляющей программы.

Запись

$$S_i \,\&\, y_j(t) \to x_k(t+1)$$

интерпретируется следующим образом: «Если состояние разрядных переменных суть S_i в момент t и выбирается j-я управляющая программа, то k-я разрядная переменная устанавливается в 1 на следующем такте – $(t + 1)$».

Отметим, что запись

$$S_i \,\&\, y_j(t) \to \overline{x}_k(t+1)$$

означает, что при реализации управления $y_i(t)$ k-я разрядная переменная устанавливается в значение 0, а не инвертируется. Это замечание важно, но можно показать, что такое «видение дела» не изменяет его сути. Наконец, хотелось бы отметить, что продукция

$$S_i \,\&\, y_j(t) \to \overline{x}_k(t+1) \,\&\, x_l(t+1)$$

«распадается» на две:

$$S_i \,\&\, y_j(t) \to \overline{x}_k(t+1);$$
$$S_i \,\&\, y_j(t) \to x_l(t+1),$$

так что мы не теряем общности выкладок, используя запись (4.1), но допускаем, что y_k может не изменять часть переменных $x_i(t)$. Переменная t играет роль так товой (номер шага/состояния).

Если y_j используется только в состояниях S_{j_1}, …, S_{j_w}, то мы включаем продукцию

$$\overline{S}_{j_1} \,\&\, \overline{S}_{j_2} \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{S}_{j_w} \to \overline{y}_j$$

наряду с другими, чтобы указать, когда y_j точно не может применяться. Также требуются продукции, которые устанавливают, что если ни одна управляющая программа не используется, то ни одна разрядная переменная не изменяется.

Задача синтеза управления состоит в построении упорядоченной последовательности управляющих программ y_i, реализация которых в заданном порядке переведет систему из начального состояния в конечное состояние, за число шагов, не превышающее заданную величину $k > 0$.

Итак, далее номер шага j ассоциируется с временным параметром индивидуальной управляющей программы, выполняемой на этом шаге.

Приведем следующий иллюстративный пример:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$x_1(t)\ \&\ \bar{x}_2(t)\ \&\ x_3(t)\ \&\ y_1(t) \to \bar{x}_1(t+1);$$
$$x_1(t)\ \&\ \bar{x}_2(t)\ \&\ x_3(t)\ \&\ y_2(t) \to x_2(t+1);$$
$$x_1(t)\ \&\ \bar{x}_3(t)\ \&\ y_1(t) \to x_2(t+1);$$
$$\bar{x}_1(t)\ \&\ \bar{x}_2(t)\ \&\ y_3(t) \to x_3(t+1);$$
$$\bar{x}_1(t)\ \&\ x_3(t)\ \&\ y_1(t) \to x_1(t+1);$$
$$x_2(t)\ \&\ \bar{x}_3(t)\ \&\ y_2(t) \to x_3(t+1);$$
$$x_2(t)\ \&\ x_3(t)\ \&\ y_3(t) \to \bar{x}_3(t+1);$$
$$x_2(t)\ \&\ x_3(t)\ \&\ y_2(t) \to \bar{x}_2(t+1);$$
$$\bar{y}_1(t) \to x_1(t)\ \&\ x_1(t+1) \vee \bar{x}_1(t)\ \&\ \bar{x}_1(t+1);$$
$$\bar{y}_2(t) \to x_2(t)\ \&\ x_2(t+1) \vee \bar{x}_2(t)\ \&\ \bar{x}_2(t+1);$$
$$\bar{y}_3(t) \to x_3(t)\ \&\ x_3(t+1) \vee \bar{x}_3(t)\ \&\ \bar{x}_3(t+1);$$
$$(\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t))\ \&\ (x_1(t) \vee \bar{x}_3(t))\ \&\ (x_1(t) \vee x_2(t)) \to \bar{y}_1(t);$$
$$(\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee \bar{x}_3(t))\ \&\ (\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t))\ \&\ (\bar{x}_2(t) \vee x_3(t)) \to \bar{y}_2(t);$$
$$(x_1(t) \vee x_2(t))\ \&\ (\bar{x}_2(t) \vee \bar{x}_3(t)) \to \bar{y}_3(t).$$

Пусть исходное состояние $S_0 = \{x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0\}$ и целевое состояние $S_I = \{x_1(k) = 1,\ x_2(k) = 1,\ x_3(k) = 1\}$, где k – фиксированная величина, $k \le 3$ (в примере).

Приведенная постановка есть частный пример общего варианта задачи синтеза управления в продукционной экспертной системе.

Рассмотрим упрощенный вариант задачи, включающий следующие операторы:

$$O_1 = (*11*\,0);\ \ O_2 = (1**1*);\ \ O_3 = (00*01);$$
$$O_4 = (*0*10);\ \ O_5 = (***11);\ \ O_6 = (00***).$$

Каждый из этих операторов определяет, как он изменяет значения переменных состояния системы, будучи примененным. Например, оператор $O_1 = (*11*\ 0)$: если его применить, то он не изменит значения переменной x_1 (указана * в первой ячейке, соответствующей переменной x_1); установит в первую, вторую и третью ячейки переменные x_2, x_3, не изменит значения переменной x_4 и установит в нуль переменную x_5. Таким образом, значение * означает, что данный разряд вектора состояния системы не изменяется при применении этого оператора. Проблема состоит в том, чтобы для заданного начального и конечного состояний системы найти цепочку (последовательность) операторов, которая переведет систему из начального состояния в требуемое конечное состояние. Так, пусть

$$S_0 = (00000),\ S_{fin} = (11111).$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Цепочку будем строить без использования двоичных дифференциалов с конца (т. е. от требуемого конечного состояния) в направлении к началу. Смотрим, какой оператор можно применить на последнем шаге. Ясно, что этот оператор не должен устанавливать ни одного 0. Подходящими операторами являются O_2, O_5. Выберем любой из них и поставим на последнее место в синтезируемой цепочке:

$$\text{CH} = < O_2 >.$$

Данный оператор устанавливает в первый и четвертый разряды векторы состояния. Поэтому значения этих разрядов на предпоследнем шаге уже безразличны. Заменим их на *. Теперь требуемое состояние будет таким:

$$S_0 = (00000),\ S_{fin} = (*11*1).$$

К новому конечному состоянию можно применить только один оператор O_5. Оператор O_1 не подходит т. к. он устанавливает в 0 последний пятый разряд и выполняемый последним оператор O_2 это состояние не изменит. Имеем новую цепочку

$$\text{CH} = < O_5, O_2 >$$

и состояния

$$S_0 = (00000),\ S_{fin} = (*11**).$$

Теперь можно применить оператор O_1. Получаем

$$\text{CH} = < O_1, O_5, O_2 >;$$
$$S_0 = (00000),\ S_{fin} = (*****).$$

В финальном состоянии устанавливать больше нечего (все заполнено звездочками). Процесс завершен.

Задания

1 Реализовать алгоритм синтеза на языке Пролог и проверить его на представленном примере.

2 Записать систему в среде Excel и найти все возможные решения. Построить дерево переходов на множестве состояний. Отыскать переход из (000000) в (11111).

Контрольные вопросы

1 Как интерпретируется запись $S_i \,\&\, y_j(t) \to x_k(t+1)$?

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

2 Что означает запись $S_i \,\&\, y_j(t) \to \bar{x}_k(t+1)$?
3 Какова роль переменной t в уравнении (4.1)?

5 Лабораторная работа № 5. Вывод в вероятностной логике

Цель работы: изучить вывод в вероятностной логике.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Пусть дана таблица наблюдений (таблица 5.1).

Таблица 5.1

x_1	x_2	y
1	1	0
1	0	0
1	1	1
0	1	0
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1
0	0	1

По этой таблице легко рассчитать (эмпирические) вероятности выполнимости любых формул. Например, рассчитаем вероятность выполнимости формулы $x_1 \vee x_2 \to y$. Подсчитаем число случаев, когда эта формула выполняется – 6 – и ко-

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

гда не выполняется – 5 (формула $x \to y$ не выполняется, если, и только если $x = 1$, а $y = 0$). Вероятность выполнимости составляет $\frac{6}{11}$.

Основная задача любой неклассической логики – установление выводимости одной формулы из других. Для вероятностной логики это означает следующее. Пусть требуется установить выводимость

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \mapsto \beta.$$

Для этой цели достаточно показать, что вероятность $P(\alpha)$ не превосходит вероятности $P(\beta)$. Вероятности определяем по таблице непосредственно. Воспользуемся формулой

$$P(y) = \frac{a+b+1}{P(x \mid y)} = \frac{P(x) + P(x \to y) - 1}{P(x \mid y)}.$$

Эта формула позволяет рассчитать вероятность заключения в формуле modus ponens

$$\frac{x, x \to y}{y},$$

когда для посылок известны вероятности и требуется найти вероятность заключения.

Задания

1 По таблице 5.1 проверить, выводима ли формула $x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \to y$.

2 Найти вероятность заключения в схеме modus ponens

$$\frac{P(x) = 0{,}7;\ P(x \to y) = 0{,}9}{P(y)}.$$

3 Найти вероятность формулы $(x_1 \vee \bar{x}_2)\ \&\ (\bar{x}_1 \vee x_2)\ \&\ (x_1 \vee x_3)\ \&\ (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

4 Найти вероятностное решение системы дизъюнктов

$$x_1 \vee x_2 (0{,}8);\ \ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 (0{,}7);\ \ x_1 \vee \bar{x}_2 (0{,}3).$$

Найти вероятностное решение, т. е. найти вероятности истинности переменных задачи, удовлетворяющие всем вероятностям представленных в системе дизъюнктов.

Контрольные вопросы

1 В каких случаях не выполняется формула $x \to y$?

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

2 Каким образом рассчитывается вероятность выполнимости формулы $x \to y$ в вероятностной логике?

3 Что значит найти вероятностное решение задачи?

6 Лабораторная работа № 6. Вывод в теории Демпстера-Шафера

Цель работы: изучить вывод в теории Демпстера-Шафера.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Основные теоретические положения

Правило комбинирования свидетельств.

Информация в виде различных наборов фокальных элементов с их базовыми вероятностями может быть получена из различных источников. Эти источники предоставляют различные данные об одном и том же объекте или событии, но являются независимыми. Для комбинирования данных, полученных из независимых источников, используется ряд правил. При этом каждое правило имеет свои преимущества и недостатки. Поэтому рассмотрим только наиболее распространенные из них.

Предположим, что имеются два источника данных. Первый источник предоставил N_1 наблюдений (свидетельств) $A_i^{(1)} \subseteq \Omega, i = 1, ..., n_1$, и $c_i^{(1)}$ – число наблюдаемых множеств $A_i^{(1)}, i = 1, ..., n_1$. Второй источник предоставляет N_2 наблюдений (свидетельств) $A_i^{(2)} \subseteq \Omega, i = 1, ..., n_2$, и $c_i^{(2)}$ – число наблюдаемых множеств $A_i^{(2)}, i = 1, ..., n_2$.

Правило комбинирования Демпстера.

Правило комбинирования Демпстера основано на предположении, что источники данных абсолютно независимы. Обозначим базовые вероятности фокальных элементов, полученных из первого и второго источников, следующим образом:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$m_1\left(A_i^{(1)}\right)=\frac{c_i^{(1)}}{N_1};\; m_2\left(A_i^{(2)}\right)=\frac{c_i^{(2)}}{N_2}.$$

Тогда комбинированная базовая вероятность вычисляется по формуле

$$m_{12}(A)=\frac{1}{1-K}\sum_{A_i^{(1)}\cap A_j^{(2)}} m_1\left(A_i^{(1)}\right)m_2\left(A_j^{(2)}\right),$$

где

$$K=\sum_{A_i^{(1)}\cap A_j^{(2)}=\varnothing} m_1\left(A_i^{(1)}\right)m_2\left(A_j^{(2)}\right)$$

и $m_{12}(\varnothing)=0$. Отметим, что если два фокальных элемента из разных источников не пересекаются, т. е. $A_i^{(1)}\cap A_j^{(2)}=\varnothing$, то соответствующие источники противоречат друг другу или конфликтуют. Например, если один эксперт считает, что температура воздуха на следующий день будет в интервале от 10 до 12 град, а другой эксперт полагает, что температура будет в пределах от 16 до 20 град, то становится очевидным, что экспертные оценки противоречивы или конфликтны, т. к. $[10, 12]\cap[16, 20]=\varnothing$. Конфликтность свидетельств учитывается коэффициентом K, который представляет собой общую базовую вероятность, связанную с конфликтными свидетельствами. Если все свидетельства противоречивы, т. е. $K=1$, то полностью противоречивые источники не могут быть объединены при помощи правил комбинирования Демпстера.

Пример 1 – Четыре предприятия ($\Omega=\{1, 2, 3, 4\}$) являются кандидатами для покупки акций. 5 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции первого предприятия; 3 эксперта из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого или второго предприятия; 7 экспертов из второй группы считают, что необходимо покупать акции третьего предприятия, и один эксперт из второй группы считает, что необходимо покупать акции четвертого предприятия. Первый источник:

$$N_1=8,\; c_1^{(1)}=5,\; A_1^{(1)}=\{1\},\; m_1\left(A_1^{(1)}\right)=5/8,\; c_2^{(1)}=3,\; A_2^{(1)}=\{2, 3\},\; m_1\left(A_2^{(1)}\right)=3/8.$$

Второй источник:

$$N_2=16,\quad c_1^{(2)}=8,\quad A_1^{(2)}=\{1, 2\},\quad m_2\left(A_1^{(2)}\right)=8/16,\quad c_2^{(2)}=3,\quad A_2^{(2)}=\{3\};$$
$$m_2\left(A_2^{(2)}\right)=7/16,\; c_3^{(2)}=1,\; A_3^{(2)}=\{4\},\; m_2\left(A_3^{(2)}\right)=1/16.$$

В таблице 6.1 представлены все возможные пересечения $A_i^{(1)}\cap A_j^{(2)}$ фокальных элементов из двух источников и их пересечения.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Таблица 6.1

$A_j^{(2)}$	$A_i^{(1)}$	
	$\{1\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{3\}$	$\varnothing$	$\{3\}$
$\{4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

Коэффициент конфликтности K вычисляется исходя из того, что $A_1^{(1)} \cap A_2^{(2)} = \varnothing$, $A_1^{(1)} \cap A_3^{(2)} = \varnothing$, $A_2^{(1)} \cap A_3^{(2)} = \varnothing$ (см. в таблице 6.1 клетки с элементами «$\varnothing$»), т. е.

$$K = m_1\left(A_1^{(1)}\right)m_2\left(A_2^{(2)}\right) + m_1\left(A_1^{(1)}\right)m_2\left(A_3^{(2)}\right) + m_1\left(A_2^{(1)}\right)m_2\left(A_3^{(2)}\right) =$$
$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{7}{16} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{16} = 0{,}336.$$

Отсюда $1 - K = 1 - 0{,}336 = 0{,}664$. Из таблицы 6.1 также видно, что непустые пересечения имеют вид $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Тогда

$$m_{12}(\{1\}) = \frac{m_1\left(A_1^{(1)}\right)m_2\left(A_1^{(2)}\right)}{0{,}664} = 0{,}4706;$$

$$m_{12}(\{2\}) = \frac{m_1\left(A_2^{(1)}\right)m_2\left(A_1^{(2)}\right)}{0{,}664} = 0{,}2824;$$

$$m_{12}(\{3\}) = \frac{m_1\left(A_2^{(1)}\right)m_2\left(A_2^{(2)}\right)}{0{,}664} = 0{,}2470.$$

Из полученных базовых вероятностей можно вычислить функции доверия и правдоподобия:

$$Bel(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) = Pl(\{1\}) = 0{,}4706;$$

$$Bel(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) = Pl(\{2\}) = 0{,}2824;$$

$$Bel(\{3\}) = m_{12}(\{3\}) = Pl(\{3\}) = 0{,}2470.$$

Правило дисконтирования.

Как было отмечено ранее, правило комбинирования Демпстера предполагает абсолютную надежность источников информации. Однако существует всегда сомнение, что источники абсолютно надежны. Для того чтобы учесть надежность источников, Шейфер предложил использование дисконтирования

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

базовых вероятностей некоторым коэффициентом $\alpha \in [0,1]$, характеризующим надежность источника, т. е. умножение базовой вероятности на α. В результате для каждого фокального элемента A получаем новые базовые вероятности $m^{\alpha}(A) = (1-\alpha)m(A)$. Если коэффициент дисконтирования равен 1, то источник является абсолютно ненадежным и $m^{\alpha}(A) = 0$. Наоборот, если $\alpha = 0$, то источник является абсолютно надежным и $m^{\alpha}(A) = m(A)$. Чтобы выполнить условие нормирования базовых вероятностей (сумма базовых вероятностей всех фокальных элементов равна 1), при дисконтировании добавляется базовая вероятность всего множества Ω, т. е. $m^{\alpha}(\Omega) = \alpha + (1-\alpha)m(\Omega)$. Фактически добавление ненулевой базовой вероятности Ω не меняет информации, имеющейся в распоряжении. Если эксперт говорит, что «любой элемент Ω» может быть «истинным» значением случайной величины, то он не дает никакой дополнительной информации.

Следует отметить, что использование дисконтирования даже при очень малых значениях α делает коэффициент K в правиле комбинирования Демпстера не равным 1 и, следовательно, позволяет всегда найти комбинированную оценку независимо от количества противоречивой информации. Одной из причин этого факта является ненулевая базовая вероятность Ω. С одной стороны, оценка Ω не дает никакой дополнительной информации. С другой стороны, она размывает конечный результат и за счет этого делает его более осторожным.

Пример 2 – Вернемся к примеру 1 о покупке акций четырех предприятий. 100 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго предприятия; 60 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого предприятия. Первый источник:

$$N_1 = 160,\ c_1^{(1)} = 100;\ A_1^{(1)} = \{2\},\ m_1\left(A_1^{(1)}\right) = 100/160;\ c_2^{(1)} = 60,\ A_2^{(1)} = \{2, 3\};$$
$$m_1\left(A_2^{(1)}\right) = 60/160.$$

Второй источник:

$$N_2 = 8,\ c_1^{(2)} = 8,\ A_1^{(2)} = \{1\},\ m_2\left(A_1^{(2)}\right) = 1.$$

Очевидно, что

$$K = m_1\left(A_1^{(1)}\right)m_2\left(A_1^{(2)}\right) + m_1\left(A_2^{(1)}\right)m_2\left(A_1^{(2)}\right) = 1.$$

Следовательно, невозможно получить комбинированную опеку, используя правило комбинирования Демпстера. Поэтому применим правило дисконтиро-

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

вания с учетом надежности источников. Так как первый источник содержит намного больше экспертов, чем второй, то можно считать его более надежным по сравнению с первым источником (подход для анализа коэффициентов дисконтирования, используемый в примере, основан на подсчете относительного соотношения количества оценок каждого источника). Примем $\alpha_1 = 1 - 160/168 = 0{,}048$ и $\alpha_2 = 1 - 8/168 = 0{,}952$. Отметим, что вовсе необязательно, чтобы сумма коэффициентов дисконтирования была равна 1. Тогда

$$m_1^{\alpha_1}\left(A_1^{(1)}\right) = (1-\alpha_1)\cdot\frac{100}{160} = 0{,}595;$$
$$m_1^{\alpha_1}\left(A_2^{(1)}\right) = (1-\alpha_1)\cdot\frac{60}{160} = 0{,}357;$$
$$m_1^{\alpha_1}(\Omega) = \alpha_1 = 0{,}048;$$
$$m_2^{\alpha_2}\left(A_1^{(2)}\right) = (1-\alpha_2)\cdot 1 = 0{,}048;$$
$$m_2^{\alpha_2}(\Omega) = \alpha_2 = 0{,}952.$$

Теперь можно использовать правило комбинирования Демпстера, согласно которому

$$K = m_1^{\alpha_1}\left(A_1^{(1)}\right)m_2^{\alpha_2}\left(A_1^{(2)}\right) + m_1^{\alpha_1}\left(A_2^{(1)}\right)m_2^{\alpha_2}\left(A_1^{(2)}\right) = 0{,}595\cdot 0{,}048 + 0{,}357\cdot 0{,}048 = 0{,}046;$$
$$1 - K = 0{,}954;$$
$$m_{12}(\{1\}) = \frac{m_1^{\alpha_1}(\Omega)m_2^{\alpha_2}\left(A_1^{(2)}\right)}{1-K} = \frac{0{,}048\cdot 0{,}048}{0{,}954} = 0{,}002;$$
$$m_{12}(\{2\}) = \frac{m_1^{\alpha_1}\left(A_1^{(1)}\right)m_2^{\alpha_2}(\Omega)}{1-K} = \frac{0{,}595\cdot 0{,}952}{0{,}954} = 0{,}594;$$
$$m_{12}(\{2,\ 3\}) = \frac{m_1^{\alpha_1}\left(A_2^{(1)}\right)m_2^{\alpha_2}(\Omega)}{1-K} = \frac{0{,}357\cdot 0{,}952}{0{,}954} = 0{,}356;$$
$$m_{12}(\Omega) = \frac{m_1^{\alpha_1}(\Omega)m_2^{\alpha_2}(\Omega)}{1-K} = \frac{0{,}048\cdot 0{,}952}{0{,}954} = 0{,}048.$$

Следует отметить, что

$$m_{12}(\{1\}) + m_{12}(\{2\}) + m_{12}(\{2,\ 3\}) + m_{12}(\Omega) = 1.$$

Найдем функции доверия и правдоподобия для всех предприятий:

$$Bel(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) = 0{,}002;$$
$$Pl(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) + m_{12}(\{\Omega\}) = 0{,}005;$$
$$Bel(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) = 0{,}594;$$
$$Pl(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) + m_{12}(\{2,\ 3\}) + m_{12}(\{\Omega\}) = 0{,}998;$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$Bel(\{3\}) = 0;$$
$$Pl(\{3\}) = m_{12}(\{2, 3\}) + m_{12}(\Omega) = 0{,}404;$$
$$Bel(\{4\}) = 0;$$
$$Pl(\{4\}) = m_{12}(\Omega) = 0{,}048.$$

Теория Демпстера-Шейфера является достаточно мощным инструментом для моделирования неточности и неопределенности. Она позволяет моделировать полное отсутствие исходной информации. Функции доверия и правдоподобия некоторого события можно рассматривать как верхнюю и нижнюю границы вероятности этого события. С этой точки зрения теория Демпстера-Шейфера не является альтернативой теории вероятностей, а дополняет и обобщает ее.

Принятие решений при неточных исходных данных и сравнение интервалов.

Далее будет рассмотрен очень важный с практической точки зрения случайных неточных или интервальных наблюдений или экспертных оценок состояний природы в задаче принятия решений. При этом неточность может быть слишком существенной, чтобы заменить эти оценки некоторыми точечными значениями $\{\omega_j\}$. Говоря о неточной оценке $A_i \subseteq \Omega$ состояний, предполагают, что состояние природы, которое реализовывалось в действительности, неизвестно, но это состояние находится в интервале A_i. Источником таких оценок могут быть как экспертные суждения, так и статические наблюдения. Одним из возможных математических аппаратов для решения задачи принятия решений в рассматриваемой ситуации является теория Демпстера-Шейфера.

Пусть имеется c_i интервальных оценок $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, ..., M$. При этом $\sum_{k=1}^{M} c_i = N$. Если состояния природы являются дискретными, то целесообразно также ввести множество J_i индексов состояний природы, принадлежащих A_i, т. е. $A_i = \{\omega_j : j \in J_i\}$.

Так как точное распределение вероятностей состояний природы неизвестно, то очевидно, что только интервал ожидаемой полезности может быть получен на основе имеющейся информации. При этом если известны базовые вероятности $m(A_i) = c_i / N$ соответствующих интервалов A_i, $i = 1, ..., M$, то нижняя и верхняя границы математического ожидания функции полезности (ожидаемой полезности) в случае использования чистой стратегии могут быть найдены из выражений

$$\underline{\mathrm{E}}h(X) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \cdot \inf_{x \in A_i} h(x);$$
$$\overline{\mathrm{E}}h(X) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \cdot \sup_{x \in A_i} h(x).$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Заменив функцию h на функцию полезности альтернативы с номером r, получим

$$\underline{\mathrm{E}}u_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot m(A_i) = \frac{1}{N} \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot c_i ;$$

$$\overline{\mathrm{E}}u_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot m(A_i) = \frac{1}{N} \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot c_i .$$

Таким образом, для каждой альтернативы вычисляется нижняя и верхняя границы ожидаемой полезности. Далее решение задачи сводится к сравнению интервалов $[\underline{\mathrm{E}}u_r, \overline{\mathrm{E}}u_r]$ для всех r.

Пример 3 – Рассмотрим задачу об инвестициях (см. пример 1). Три эксперта предоставили следующие оценки: два эксперта ($c_1 = 3$) считают, что в экономике будут наблюдаться «средний подъем» или «быстрый подъем», ($A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$), один эксперт ($c_2 = 1$) полагает, что будет наблюдаться «средний подъем» или «неизменное состояние» ($A_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$). Здесь $M = 2$, $N = 4$.

Можно вычислить нижние и верхние границы ожидаемой полезности для каждого действия:

$$\underline{\mathrm{E}}u_1 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \min(12, 8) + 1 \cdot \min(8, 6)\big) = 7{,}5 ;$$

$$\overline{\mathrm{E}}u_1 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \max(12, 8) + 1 \cdot \max(8, 6)\big) = 11 ;$$

$$\underline{\mathrm{E}}u_2 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \min(15, 7) + 1 \cdot \min(7, 3)\big) = 6 ;$$

$$\overline{\mathrm{E}}u_2 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \max(15, 7) + 1 \cdot \max(7, 3)\big) = 13 ;$$

$$\underline{\mathrm{E}}u_3 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \min(7, 7) + 1 \cdot \min(7, 7)\big) = 7 ;$$

$$\overline{\mathrm{E}}u_3 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \max(7, 7) + 1 \cdot \max(7, 7)\big) = 7 .$$

В итоге получаем три интервала значений ожидаемой полезности [7,5, 11], [6, 13], [7, 7].

Результатом большинства расчетов при неточных исходных оценках является интервальный характер значений ожидаемой полезности. Если первую и третью альтернативу в рассмотренном примере можно сравнить, то соотношение остальных альтернатив находится под вопросом. Это связано с тем, что сравнение интервалов в общем случае не может быть однозначным, например, сравнение интервалов [7,5, 11] и [6, 13]. Существует большое количество методов сравнения интервалов. Большинство методов основано на сопоставлении

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

интервалов и некоторых точных чисел, которые далее можно сравнивать без особых трудностей. Далее рассмотрен один из методов, который в большей степени отражает субъективный характер принятия решений.

Рассмотрим два интервала $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$. Поставим в соответствие каждому интервалу точное число, вычисленное по формуле

$$\gamma a_i + (1-\gamma)\, b_i,\ i = 1, 2$$

Здесь $0 \le \gamma \le 1$ является коэффициентом пессимизма, который аналогичен тому, что использовался в критерии Гурвица. Если $\gamma = 1$, то сравниваются только нижние границы интервалов и принимается пессимистическое решение. Если $\gamma = 0$, то сравниваются только верхние границы интервалов и принимается оптимистическое решение. В общем случае имеет место неравенство $[a_1, b_1] \ge [a_2, b_2]$, если выполняется неравенство

$$\gamma a_1 + (1-\gamma)\, b_1 \ge \gamma a_2 + (1-\gamma)\, b_2 .$$

Пример 4 – Возвращаясь к интервальным результатам примера 3 и принимая $\gamma = 0{,}6$, получим точечные значения ожидаемой полезности альтернатив:

$$0{,}6 \cdot 0{,}75 + (1-0{,}6) \cdot 11 = 8{,}9;$$
$$0{,}6 \cdot 6 + (1-0{,}6) \cdot 13 = 8{,}8;$$
$$0{,}6 \cdot 7 + (1-0{,}6) \cdot 7 = 7 .$$

Отсюда – оптимальной является первая альтернатива.

Предлагаемый подход можно также использовать для решения задачи на основе критерия минимума ожидаемых сожалений. Используя ранее введенные обозначения для сожалений, запишем выражение для расчета нижней и верхней границ ожидаемого сожаления для r-го действия:

$$\underline{E}\Delta u_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i:\omega_i \in \Omega} \Delta u_{ri} \cdot m(A_i);$$
$$\overline{E}\Delta u_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i:\omega_i \in \Omega} \Delta u_{ri} \cdot m(A_i).$$

Пример 5 – Возвращаясь к примеру 3 и используя результаты примера 1, можно получить

$$\underline{\mathrm{E}}\Delta u_1 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \min(3, 0) + 1 \cdot \min(0, 1)\big) = 0;$$
$$\overline{\mathrm{E}}\Delta u_1 = \frac{1}{4}\big(3 \cdot \max(3, 0) + 1 \cdot \max(0, 1)\big) = 2{,}5 .$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Аналогичным образом получим $\underline{E}\Delta u_2 = 0{,}25$, $\overline{E}\Delta u_2 = 1{,}75$, $\underline{E}\Delta u_3 = 0{,}75$, $\overline{E}\Delta u_3 = 6{,}25$. Для вычисления точечных значений полученных интервалов необходимо обратить внимание, что оптимальная альтернатива соответствует минимальному значению ожидаемых сожалений. Поэтому, принимая $\gamma = 0{,}6$ для поиска максимума, следует взять $\gamma^/ = 1 - \gamma = 0{,}4$ для поиска минимума, т. к. пессимистическим теперь будет сравнение по верхним границам. Отсюда получаем

$$\gamma^/ \underline{E}\Delta u_1 + \left(1-\gamma^/\right)\overline{E}\Delta u_1 = 0{,}4 \cdot 0 + (1-0{,}4)\cdot 2{,}5 = 1{,}5;$$
$$\gamma^/ \underline{E}\Delta u_2 + \left(1-\gamma^/\right)\overline{E}\Delta u_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}25 + (1-0{,}4)\cdot 1{,}75 = 1{,}15;$$
$$\gamma^/ \underline{E}\Delta u_3 + \left(1-\gamma^/\right)\overline{E}\Delta u_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}75 + (1-0{,}4)\cdot 6{,}25 = 4{,}05.$$

Следовательно, оптимальной является вторая альтернатива.

Задания

1 Имеются две альтернативы: купить акции предприятия и держать деньги в банке. Имеются также два состояния природы: спад в экономике и рост. В случае спада потери от акций – 10 у. е, доход от банка – 15 у. е. В случае подъема доход от акций – 40 у. е., а от банка – 15 у. е. 3 эксперта считают, что будет рост экономики, 7 экспертов не знают. Какое действие является оптимальным при коэффициенте пессимизма 0,6?

2 Коэффициент рентабельности первого предприятия от 5 до 20 %, второго предприятия – 10 %. Какое предприятие имеет больший коэффициент рентабельности при коэффициенте пессимизма 0?

3 Коэффициент рентабельности первого предприятия – интервал [2,2 %, 5 %], второго предприятия – [6 %, 7 %]. При каком коэффициенте пессимизма рентабельности равны?

Контрольные вопросы

1 В чем заключается правило дисконтирования Демпстера?
2 С какой целью было введено правило дисконтирования?
3 Как производится принятие решений при неточных исходных данных?

Список литературы

1 **Кузьмин, Е. В.** Неклассические логики высказываний: учебное пособие / Е. В. Кузьмин ; – Ярославль : ЯрГУ, 2016. – 160 с.

2 **Герман, О. В.** Неклассические логические исчисления : учеб.-метод. пособие / О. В. Герман. – Минск : БГУИР, 2012. – 124 с.

3 **Ахметов, Б. С.** Нечеткие системы и сети / Б. С. Ахметов, В. И. Горбаченко, О. Ю. Кузнецова. – Алматы: LEM, 2014. – 104 с.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/