

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Металлорежущие станки и инструменты»

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕЗАНИЯ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»  
дневной и заочной форм обучения*

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета  
<http://e.biblio.bru.by/>



Могилев 2019

УДК 338.26  
ББК 65.23  
М 60

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Металлорежущие станки и инструменты»  
«22» ноября 2019 г., протокол № 4

Составитель канд. техн. наук, доц. П. Ф. Котиков  
Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации предназначены к практическим занятиям для  
студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения».

Учебно-методическое издание

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕЗАНИЯ

|                         |                   |
|-------------------------|-------------------|
| Ответственный за выпуск | С. Н. Хатетовский |
| Редактор                | А. Т. Червинская  |
| Компьютерная верстка    | Е. В. Ковалевская |

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2019



## Содержание

|   |    |
|---|----|
| 1 Практическое занятие «Задача поиска кратчайшего пути».....                                  | 4  |
| 2 Практическое занятие «Задача о распределении потоков в сетях»...                            | 8  |
| 3 Практическое занятие «Критический путь».....  | 13 |
| 4 Практическое занятие «Планирование экстремальных экспериментов. Планы второго порядка»..... | 18 |
| Список литературы.....  | 34 |



## 1 Практическое занятие «Задача поиска кратчайшего пути»

Универсальным средством наглядного представления достаточно разнообразных задач может служить граф. При этом под графом понимают совокупность вершин и ребер.

Граф, в котором связь между вершинами имеет направление, т. е. осуществляется с помощью друг друга, называют сетью. Структура сети показывает, какие вершины связаны между собой и каково направление связывающих дуг. Каждую вершину обозначают порядковым номером. Начальную вершину иногда называют источником, а конечную – стоком. Такие названия показывают, что с помощью сетей можно описывать движение потоков.

Дугу обозначают двойной индексацией (рисунок 1).

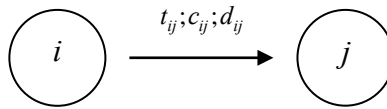


Рисунок 1 – Дуга

В общем случае дугу обозначают  $(i-j)$ , где  $i$  – номер вершины, из которой выходит дуга,  $j$  – номер вершины, в которую входит дуга.

Каждая дуга может иметь свою характеристику.

Например:  $t_{i-j}$  – продолжительность движения по дуге  $i-j$ ;  $c_{i-j}$  – стоимость перемещения;  $d_{i-j}$  – пропускная способность дуги и т. д.

Зная структуру сети (рисунок 2) и характеристики ее дуг, можно решать различные задачи оптимизации.

Необходимо найти кратчайший путь (см. рисунок 2).

Допустим, в пункт  $i$  входят и из него выходят дуги. Чтобы маршрут был непрерывным, в каждый пункт должна входить и из него выходить только одна дуга. Это требование будет выполнено, если будут соблюдены следующие условия:

– для дуг, входящих в пункт,

$$N_{ibx} = \sum_{k=1}^p \delta_{ki} = 1, \quad (1)$$

где  $\delta_{ki}$  соответствует дуге, выходящей из пункта  $k$  и входящей в пункт  $i$ ,

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } k-i \text{ входит в маршрут;} \\ 0, & \text{если дуга } k-i \text{ не входит в маршрут.} \end{cases}$$

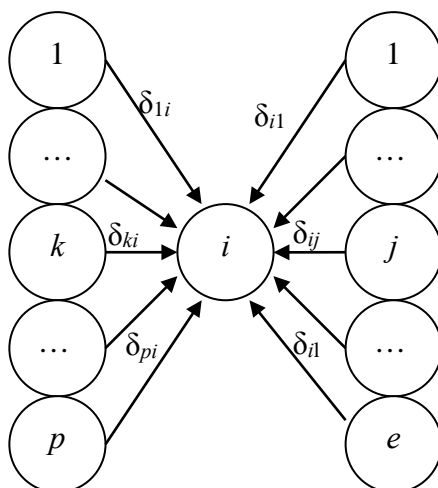


Рисунок 2 – Структура сети

Условие (1) обеспечивает вход в пункт  $i$  только по одной дуге;  
– для дуг, выходящих из пункта,

$$N_{i\text{вых}} = \sum_{j=1}^i \delta_{ij} = 1, \quad (2)$$

где  $\delta_{ij}$  соответствует дуге, выходящей из пункта  $i$  и входящей в пункт  $j$ ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } i-j \text{ входит в маршрут;} \\ 0, & \text{если дуга } i-j \text{ не входит в маршрут.} \end{cases}$$

Условие (2) обеспечивает выход из пункта  $i$  только по одной дуге.

Все пункты маршрута можно подразделить на *начальный, промежуточный и конечный*.

Для этих пунктов должно выполняться условие

$$N_{i\text{вх}} - N_{i\text{вых}} = \begin{cases} -1 & \text{– для начального пункта;} \\ 0 & \text{– для промежуточных пунктов;} \\ 1 & \text{– для конечного пункта.} \end{cases}$$

Для начального пункта  $N_{\text{вх}} = 0$ . Из начального пункта должна выходить только одна дуга. Для промежуточных пунктов условие  $N_{i\text{вх}} = N_{i\text{вых}}$  обеспечивает вход и выход только по одной дуге. Для конечного пункта, для которого  $N_{\text{вых}} = 0$ , приведенное условие обеспечивает вход только по одной дуге.

Для того чтобы маршрут имел при этом кратчайшую длину, необходимо добавить целевую функцию

$$F = \sum_i \sum_j C_{ij} \cdot \delta_{ij},$$

где  $C_{ij}$  – длина пути, а суммирование производится по всем дугам.

Целевая функция и ограничение имеют вид:

$$F = \sum_i \sum_j l_{ij} \cdot \delta_{ij} \rightarrow \min ;$$

$$\sum_{k=1}^p \delta_{ki} - \sum_{j=1}^i \delta_{ij} = \begin{cases} -1 - \text{для начального пункта;} \\ 0 - \text{для промежуточных пунктов;} \\ 1 - \text{для конечного пункта.} \end{cases} \quad (3)$$

$$\delta_{ij} \geq 0.$$

Требование, чтобы  $\delta_{ij} = 0$  или  $\delta_{ij} = 1$ , можно не накладывать, т. к. такая задача благодаря ограничениям обеспечивает получение в решении для  $\delta_{ij}$  только либо 0, либо 1.

С учетом этого система (3) является обычной задачей линейного программирования.

Для краткости записи такую систему удобно представить в виде таблицы, в которой каждой дуге соответствует переменная, а каждому пункту – ограничение. В таблице 1 представлены коэффициенты, с которыми переменные входят в ограничения.

Таблица 1 – Коэффициенты для переменных

| Пункт | Коэффициент   |               |               |               |               |               |               |               |               |               | Знак | Правая часть |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------|--------------|
|       | $\delta_{12}$ | $\delta_{13}$ | $\delta_{14}$ | $\delta_{23}$ | $\delta_{25}$ | $\delta_{32}$ | $\delta_{34}$ | $\delta_{35}$ | $\delta_{43}$ | $\delta_{45}$ |      |              |
| F     | 2             | 6             | 8             | 3             | 7             | 5             | 1             | 5             | 4             | 2             | min  |              |
| 1     | -1            | -1            | -1            |               |               |               |               |               |               |               | =    | -1           |
| 2     | 1             |               |               | -1            | -1            | 1             |               |               |               |               | =    | 0            |
| 3     |               | 1             |               | 1             |               | -1            | -1            | -1            | 1             |               | =    | 0            |
| 4     |               |               | 1             |               |               |               |               | 1             | -1            | -1            | =    | 0            |
| 5     |               |               |               |               | 1             |               |               | 1             |               | 1             | =    | 1            |

В общем случае характеристика дуги  $i-j$  может иметь различный смысл: продолжительность, стоимость, трудоемкость и т. д. При этом к задаче выбора кратчайшего маршрута могут быть сведены самые разнообразные задачи, в том

числе задача выбора оптимального маршрута при разработке технологических процессов.

### **1.1 Исходные данные для выполнения задания**

Для заданного сетевого графика по вариантам (рисунки 3 и 4) определить кратчайший путь.

#### **Вариант 1**

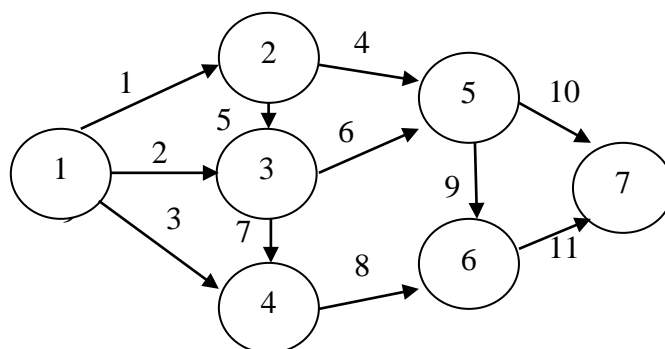


Рисунок 3 – Сетевой график

#### **Вариант 2**

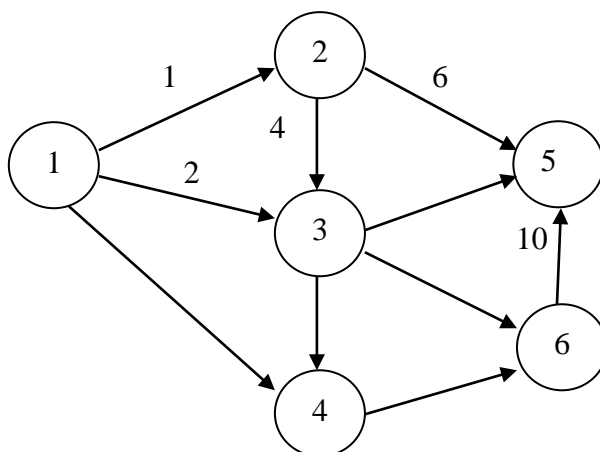


Рисунок 4 – Сетевой график

### **Контрольные вопросы**

- 1 Дайте определение сети.
- 2 Характеристика дуги.
- 3 Что понимают под графом?

## 2 Практическое занятие «Задача о распределении потоков в сетях»

Есть сеть, по которой перемещается продукция. Будем рассматривать перемещение продукции по сети в течение определенного периода времени.

Для составления математической модели принимаем, что элементы сети – дуги и узлы – имеют свои характеристики. Каждая дуга  $i-j$  характеризуется параметрами:

$c_{ij}$  – стоимость транспортировки единицы продукции по дуге;

$D_{ij}$  – пропускная способность дуги, которая в общем случае может находиться в пределах  $0 \leq D_{ij} < \infty$ .

Рассмотрим характеристики узлов (рисунок 5). Каждый узел может быть трех видов: *выпускающий* продукцию; *потребляющий* продукцию; *транзитный*. Характеристиками таких узлов являются:

- для выпускающего  $A_i$  – количество продукции, выпускаемой узлом  $i$  в единицу времени;
- для потребляющего  $B_i$  – количество продукции, потребляемой узлом  $j$  в единицу времени;
- для транзитного  $A_i = B_i = 0$ .

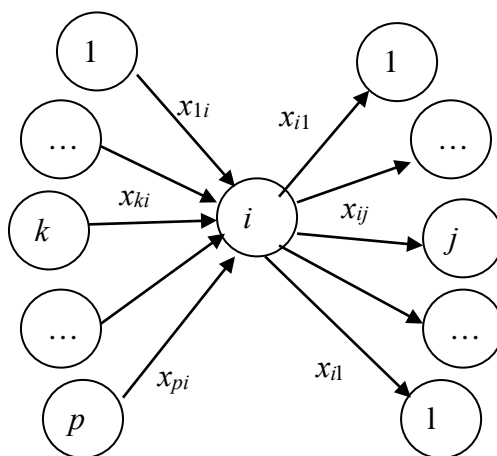


Рисунок 5 – Характеристики узлов

В общем случае в каждый узел входят и выходят потоки.

Суммарные потоки, входящий в  $i$ -й узел и выходящий из него соответственно, определяются как

$$S_{вх} = \sum_{k=1}^p x_{ki};$$

$$S_{вых} = \sum_{j=1}^1 x_{ij}.$$



Для транзитного узла  $S_{\text{вх}} = S_{\text{вых}}$ .

$\sum_{k=1}^p x_{ki} - \sum_{j=1}^l x_{ij} = 0$  – это уравнение называют уравнением сохранения потока

или уравнением материального баланса.

Для выпускающего узла

$$S_{\text{вх}} = A_i + \sum_{k=1}^k x_{ki};$$

$$S_{\text{вых}} = \sum_{j=1}^l x_{ij}.$$

Уравнение материального баланса

$$\sum_{k=1}^p x_{ki} - \sum_{j=1}^l x_{ij} = -A_i.$$

Для потребляющего узла

$$S_{\text{вх}} = \sum_{k=1}^p x_{ki};$$

$$S_{\text{вых}} = \sum_{j=1}^l x_{ij} + B_i.$$

Уравнение материального баланса

$$\sum_{k=1}^p x_{ki} - \sum_{j=1}^l x_{ij} = -B_i.$$

Объединяя уравнения, получим

$$\sum_{k=1}^p x_{ki} - \sum_{j=1}^l x_{ij} = \begin{cases} A_i & \text{– для выпускающего узла;} \\ 0 & \text{– для транзитного узла;} \\ 1 & \text{– для потребляющего узла.} \end{cases} \quad (4)$$

Система ограничений (3) является частным случаем системы (4).

**Пример** – Составить уравнение баланса для случая: в начальном узле  $i = 1$  есть некоторое количество продукции  $A_i$ , все узлы транзитные.

В начальном узле  $i = 1$  входящих дуг нет. Значит,

$$\sum_{k=1}^p x_{k1} = 0.$$

Тогда

$$-\sum_{j=1}^l x_{ij} = -A_i.$$



В конечном узле  $i = n$  выходящих дуг нет. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^1 x_{nj} = 0.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^p x_{kn} = -B_i.$$

Для транзитных узлов

$$\sum_{k=1}^p x_{ki} - \sum_{j=1}^1 x_{ij} = 0.$$

Для оптимизации потока в сети необходимо дополнительно сформулировать целевую функцию и граничные условия. При этом возможны различные постановки задачи оптимизации. Рассмотрим две из них.

### **Минимизация стоимости**

$$\begin{aligned} F &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min; \\ A_1 &= A_{3AD}; \\ 0 &\leq x_{ij} \leq D_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_{ij}$  – стоимость транспортировки единицы продукции по дуге; суммирование проводится по всем дугам;

$D_{ij}$  – пропускная способность дуги.

Такая постановка обеспечивает получение потоков в сети, которые не превышают по каждой дуге ее пропускной способности, а также минимальную стоимость транспортировки.

### **Максимизация потока**

$$\begin{aligned} F &= \sum_i \sum_j B_n \rightarrow \max; \\ A_1 &= A_{3AD}; \\ \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} &\leq C_{3AD}; \\ 0 &\leq x_{ij} \leq D_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

Такая постановка обеспечивает получение максимального потока, стоимость транспортировки которого по всем дугам не превышает заданной стоимости  $C_{3AD}$ .

**Пример** – Распределение потоков в сетях (рисунок 6).



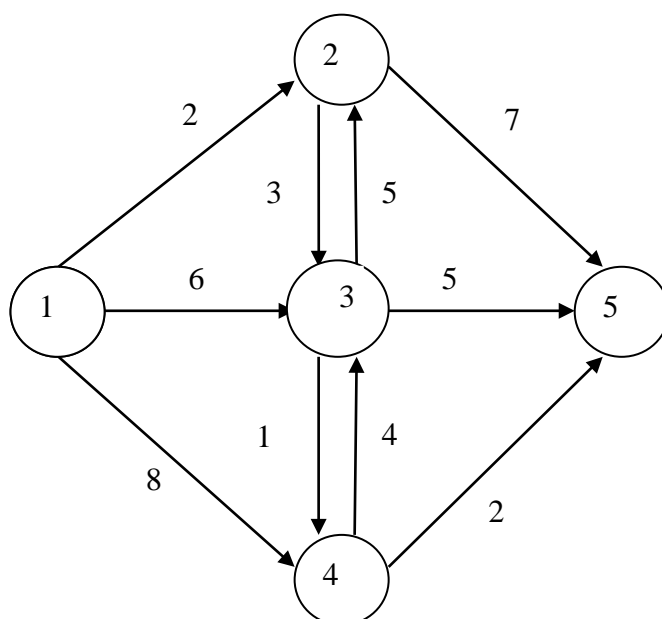


Рисунок 6 – Распределение потоков в сетях

Каждая дуга характеризуется стоимостью транспортировки. Определим поток минимальной стоимости.

Принимаем, что в узле  $A_1$  есть  $A_{34Д} = 100$  ед. продукции. Рассмотрим распределение потоков для случая, когда пропускная способность дуг не ограничена, т. е.  $D_{ij} = \infty$ .

Систему (5) запишем в виде таблицы 2.

Таблица 2 – Распределение потоков

| Узел  | Потоки   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | Знак | Правая часть |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------|--------------|
|       | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{23}$ | $x_{25}$ | $x_{32}$ | $x_{34}$ | $x_{35}$ | $x_{43}$ | $x_{45}$ | $x_{55}$ |      |              |
| $F$   |          | 2        | 6        | 8        | 3        | 7        | 5        | 1        | 5        | 4        | 2        |          | min  |              |
| $A_1$ | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | =    | 100          |
| 1     | 1        | -1       | -1       | -1       |          |          |          |          |          |          |          |          | =    | 0            |
| 2     |          | 1        |          |          | -1       | -1       | 1        |          |          |          |          |          | =    | 0            |
| 3     |          |          | 1        |          | 1        |          | -1       | -1       | -1       | 1        |          |          | =    | 0            |
| 4     |          |          |          | 1        |          |          |          | 1        |          | -1       | -1       |          | =    | 0            |
| 5     |          |          |          |          |          | 1        |          |          | 1        |          | 1        | -1       | =    | 0            |
| $B_5$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        | =    | 100          |

Для строки 3 таблицы 2 ограничения будут иметь вид:

$$x_{13} + x_{23} - x_{32} - x_{34} - x_{35} + x_{43} = 0.$$

Перед входящими потоками стоит знак плюс «+», а перед выходящими минус «-».



Получены  $x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = 100$ .

При этом стоимость транспортировки составляет 800.

Суммарная стоимость транспортировки единицы продукта из узла 1 в узел 5

$$C_{15} = c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45} = 2 + 3 + 1 + 2 = 8.$$

Стоимость транспортировки всего продукта  $c_{15} = C_{15}x_{15}$  (где  $x_{15}$  – поток, проходящий по сети; при  $x_{15} = 100$   $c_{15} = 8 \cdot 100 = 800$ ).

### 2.1 Исходные данные для выполнения задания

Для заданного сетевого графика по вариантам (рисунки 7 и 8) определить:

- распределение потоков в сетях;
- минимизацию стоимости;
- максимизацию потока.

#### Вариант 1

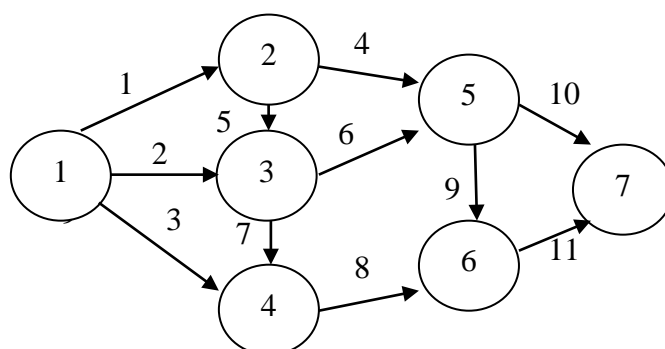


Рисунок 7 – Сетевой график

#### Вариант 2

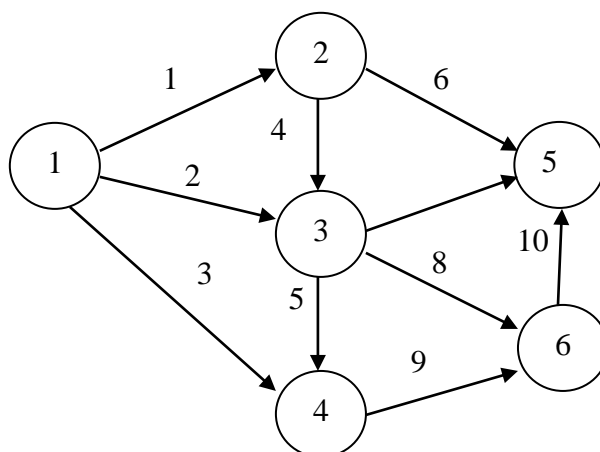


Рисунок 8 – Сетевой график

### Контрольные вопросы

- 1 Назовите виды узлов.
- 2 Условия для оптимизации потока в сети.
- 3 Что обеспечивает получение максимального потока?

### 3 Практическое занятие «Критический путь»

Графическое представление последовательности выполняемых работ называют **сетевым графиком**.

Сетевой график (рисунок 9), как и каждая сеть, состоит из дуг и узлов. Дуге соответствует выполняемая работа; узлу, который принято называть вершиной, – событие, т. е. состояние перед работой и после ее выполнения. Чем больше число работ необходимо выполнить для достижения цели, тем необходимее сетевой график.

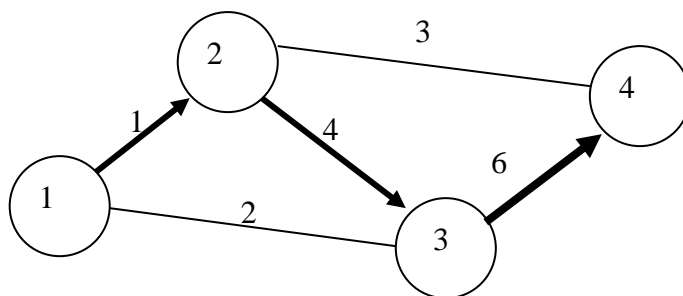


Рисунок 9 – Сетевой график

Основные идеи сетевого графика рассмотрим на примере.

Исходные данные удобно представлять в форме таблицы 3. Такая таблица должна включать последовательность выполнения работ и продолжительность каждой работы.

Работу обозначают двумя индексами  $i$  и  $j$ , где  $i$  – номер события, после которого начинается работа;  $j$  – номер события, которым заканчивается работа. Последовательность работ, в которой конец предыдущей работы совпадает по времени с началом последующей, называют путем. Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называют критическим (таблица 4).

Таблица 3 – Исходные данные

| Работа | Содержание               | Следующая работа | Продолжительность | Обозначение |
|--------|--------------------------|------------------|-------------------|-------------|
| $a_1$  | Получение ЭВМ            | –                | 1                 | 1–2         |
| $a_2$  | Выбор задачи             | –                | 2                 | 1–3         |
| $a_3$  | Монтаж и наладка ЭВМ     | $a_1$            | 4                 | 2–3         |
| $a_4$  | Подготовка пользователей | $a_1$            | 3                 | 2–4         |
| $a_5$  | Решение задачи           | $a_2, a_4$       | 6                 | 3–4         |

Таблица 4 – Критический путь

| Путь | Входящая работа | Продолжительность, ч |
|------|-----------------|----------------------|
| 1    | 1–2; 2–4        | $1 + 3 = 4$          |
| 2    | 1–2; 2–3; 3–4   | $1 + 4 + 6 = 11$     |
| 3    | 1–3; 3–4        | $2 + 6 = 8$          |

Работы, не лежащие на критическом пути, могут быть позже начаты или позже окончены, а также могут иметь большую продолжительность без изменения срока окончания всех работ (рисунок 10). Величину, на которую может быть увеличена продолжительность выполнения такой работы без увеличения времени наступления конечного события, называют *резервом*.

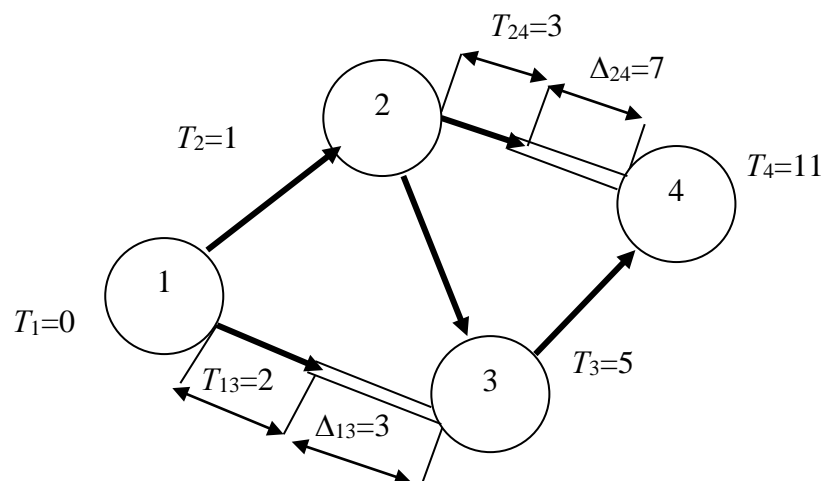


Рисунок 10 – Резервы работ

Время наступления каждого события может быть найдено по следующим зависимостям:

$$T_1 = 0; T_2 = T_1 + t_{12} = 0 + 1 = 1.$$

Поскольку третье событие может наступить после выполнения работ 2–3 и 1–3, имеем

$$\left. \begin{aligned} T_3 &\geq T_1 + t_{13} = 0 + 2 = 2; \\ T_3 &\geq 2; \\ T_3 &\geq T_2 + t_{23} = 1 + 4 = 5; \\ T_3 &\geq 5. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,  $T_3 = 5$ .

Аналогично найдем время наступления последнего события:

$$\left. \begin{aligned} T_4 &\geq T_2 + t_{24} = 1 + 3 = 4; \\ T_4 &\geq 4; \\ T_4 &\geq T_1 + t_{34} = 5 + 6 = 11; \\ T_4 &\geq 11. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,  $T_4 = 11$ .

Окончательно время наступления событий

$$T_1 = 0; T_2 = 1; T_3 = 5; T_4 = 11.$$

Резерв работы 1–3  $\rightarrow \Delta_{13} = 5 - 2 = 3$ .

Значит, работа 1–3 может быть начата не в начальный момент, а спустя три единицы времени или может продолжаться на три единицы больше.

Аналогично резерв работы 2–4:  $\Delta_{24} = T_4 - (T_2 + t_{24}) = 11 - (1 + 3) = 7$ .

Для работ, лежащих на критическом пути, резерв времени равен нулю, т. е.

$$\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{34} = 0.$$

Для третьего события можно записать

$$T_3 = T_1 + t_{13} + \Delta_{13}.$$

Откуда  $(T_3 - T_1) - \Delta_{13} = t_{13}$ .

Это уравнение с тремя неизвестными. Если записать зависимость для всех событий и работ, получим систему

$$\left. \begin{aligned} (T_2 - T_1) - \Delta_{12} &= t_{12} = 1; \\ (T_3 - T_1) - \Delta_{13} &= t_{13} = 2; \\ (T_3 - T_2) - \Delta_{23} &= t_{23} = 4; \\ (T_4 - T_2) - \Delta_{24} &= t_{24} = 3; \\ (T_4 - T_3) - \Delta_{34} &= t_{34} = 6. \end{aligned} \right\}$$

Эта система, которая описывает структуру сетевого графика, содержит пять линейных уравнений и девять неизвестных. Значит, она имеет бесчисленное множество решений. Чтобы эту систему решить, необходимо к ней добавить граничные условия и целевую функцию. При этом возможны две постановки задачи оптимизации:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= T_4 \rightarrow \min; \\ T_1 &= 0; \\ F_2 &= T_1 \rightarrow \max; \\ T_4 &= 15. \end{aligned} \right\}$$



Обе постановки представляют собой задачи линейного программирования. Чтобы задать сетевой график, надо записать систему, описывающую его структуру. В общем виде такая запись будет иметь вид:

$$(T_j - T_i) - \Delta_{ij} = t_{ij} \text{ для всех } ij.$$

Если обозначить число событий как  $S$ , число работ как  $R$ , то система, описывающая сетевой график, будет включать  $n$  переменных, где  $n = S + R$ , т. к. каждому  $i$ -му событию соответствует неизвестная  $T_i$ , а каждой  $(i-j)$ -й работе соответствует неизвестная  $\Delta_{ij}$ . Число ограничений  $m = R$ , т. е. каждой работе соответствует ограничение.

Формулировка задачи оптимизации в общем виде

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = T_n \rightarrow \min; \\ T_1 \geq T_{133A}; \\ F_2 = T_1 \rightarrow \max; \\ T_n \leq T_{n33A}. \end{array} \right\}$$

Первая постановка обеспечивает решение задачи оптимизации при условии скорейшего завершения всех работ, когда начало работ начинается не раньше заданного момента времени.

Вторая постановка находит самое позднее начало работ и значения всех искомым величин, обеспечивающих завершение всех работ не позже заданного срока.

### 3.1 Исходные данные для выполнения задания

Для заданного сетевого графика (рисунки 11–13) определить критический путь и резервы работ.

#### Вариант 1

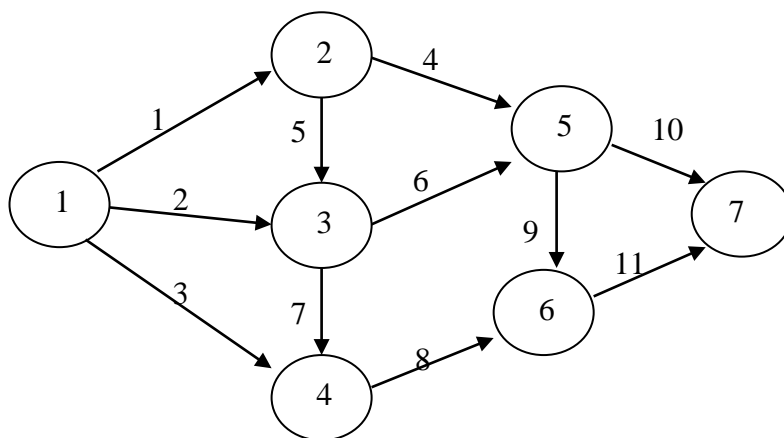


Рисунок 11 – Сетевой график



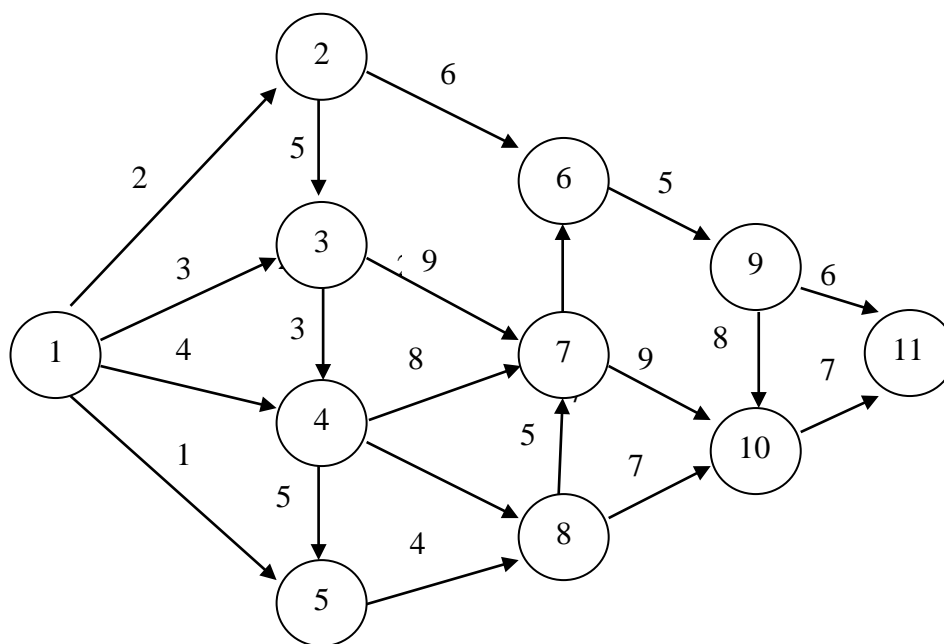
**Вариант 2**

Рисунок 12 – Сетевой график

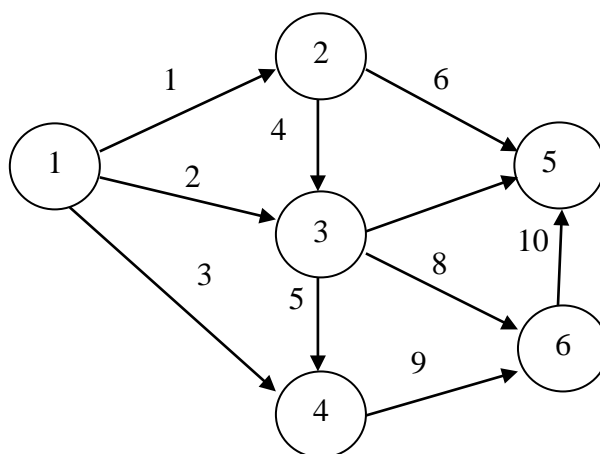
**Вариант 3**

Рисунок 13 – Сетевой график

**Контрольные вопросы**

- 1 Определение сетевого графика.
- 2 Какой путь называют критическим?
- 3 Что такое резерв работы?
- 4 Для чего необходимы граничные условия при решении системы описания структуры сетевого графика?

## 4 Практическое занятие «Планирование экстремальных экспериментов. Планы второго порядка»

### Центральные композиционные планы

Функцию отклика в области оптимума обычно удается аппроксимировать полиномом второй степени вида

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq k} b_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{i1} x_i^2.$$

Для оценки всех коэффициентов полинома второй степени необходимо, чтобы в плане эксперимента каждый фактор принимал не менее трех значений. Применение планов типа  $3^k$  связано с большим числом опытов. Как показали исследования, более рациональным является центральное композиционное планирование. Центральный композиционный план второго порядка получают достройкой некоторого количества точек к «ядру», образованному линейным планом. При числе  $k$  факторов менее пяти за «ядро» центрального композиционного плана обычно принимают план полного факторного эксперимента типа  $2^k$ . Если число факторов более пяти, то за «ядро» центрального композиционного плана принимают полуреплику от полного факторного эксперимента типа  $2^k$ . Такой вывод «ядра» плана требует отдельной оценки всех линейных эффектов и парных эффектов взаимодействия. Для двух факторов центральный композиционный план второго порядка может быть предоставлен следующей схемой (рисунок 14).

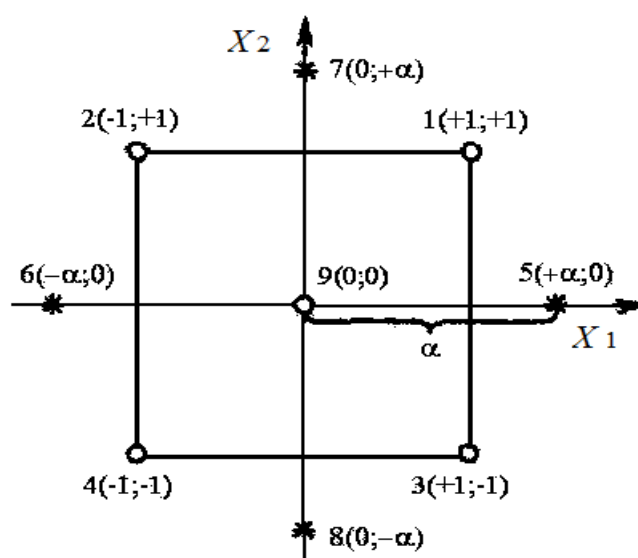


Рисунок 14 – Композиционный план второго порядка для двух факторов

К полному факторному эксперименту  $2^2$  (точки 1, 2, 3, 4) добавляют некоторое число  $n_0$  опытов в центре плана (точка 9) и четыре «звездные» точки 5, 6,

7, 8 с координатами  $(+\alpha; 0)$ ;  $(-\alpha; 0)$ ;  $(0; +\alpha)$ ;  $(0; -\alpha)$ .

План второго порядка для двух факторов (см. рисунок 14) может быть представлен матрицей (таблица 5).

Таблица 5 – Матрица плана второго порядка для двух факторов

| Содержание плана | Номер опыта | $x_0$ | $x_1$     | $x_2$     | $x_1 x_2$ | $x_1^2$    |
|------------------|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|------------|
| План типа $2^2$  | 1           | +     | +         | +         | +         | +          |
|                  | 2           | +     | -         | +         | -         | +          |
|                  | 3           | +     | +         | -         | -         | +          |
|                  | 4           | +     | -         | -         | +         | +          |
| «Звездные» точки | 5           | +     | $+\alpha$ | 0         | 0         | $\alpha^2$ |
|                  | 6           | +     | $-\alpha$ | 0         | 0         | $\alpha^2$ |
|                  | 7           | +     | 0         | $+\alpha$ | 0         | 0          |
|                  | 8           | +     | 0         | $-\alpha$ | 0         | 0          |
| Нулевая точка    | 9           | +     | 0         | 0         | 0         | 0          |

Для трех факторов схема центрального композиционного плана второго порядка изображена на рисунке 15.

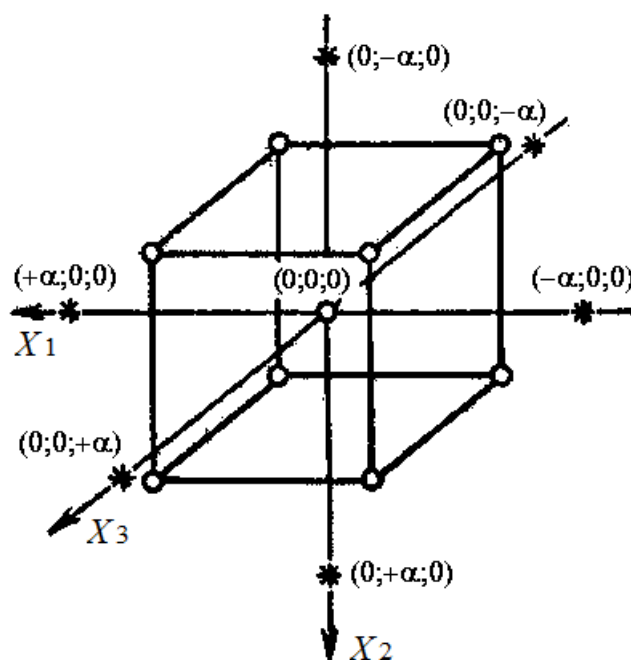


Рисунок 15 – Композиционный план второго порядка для трех факторов

Чтобы получить центральный композиционный план второго порядка для трех факторов, к полному факторному эксперименту добавляют шесть «звездных» точек с координатами  $(+\alpha; 0; 0)$ ;  $(-\alpha; 0; 0)$ ;  $(0; +\alpha; 0)$ ;  $(0; -\alpha; 0)$ ;  $(0; 0; +\alpha)$ ;  $(0; 0; -\alpha)$  и точки в центре плана. Композиционный план второго порядка для трех факторов (см. рисунок 15) может быть изображен матрицей (таблица 6).

Общее число опытов  $N$  центрального композиционного плана второго порядка зависит от числа  $k$  факторов и определяется выражением

$$N = N_k + 2k + n_0.$$

Величину «звездного» плеча  $\alpha$  и число опытов  $n_0$  в центре плана выбирают в зависимости от принятого критерия оптимальности. За критерий оптимальности обычно принимают ортогональность или ротатабельность плана.

Таблица 6 – Матрица плана второго порядка для трех факторов

| Содержание плана | Номер опыта | $x_0$ | $x_1$     | $x_2$     | $x_3$     | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $x_2 x_3$ | $x_1^2$    | $x_2^2$    | $x_3^2$    |
|------------------|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| План типа $2^3$  | 1           | +     | +         | +         | +         | +         | +         | +         | +          | +          | +          |
|                  | 2           | +     | -         | +         | +         | -         | -         | +         | +          | +          | +          |
|                  | 3           | +     | +         | -         | +         | -         | +         | -         | +          | +          | +          |
|                  | 4           | +     | -         | -         | +         | +         | -         | -         | +          | +          | +          |
|                  | 5           | +     | +         | +         | -         | +         | -         | -         | +          | +          | +          |
|                  | 6           | +     | -         | +         | -         | -         | +         | -         | +          | +          | +          |
|                  | 7           | +     | +         | -         | -         | -         | -         | +         | +          | +          | +          |
|                  | 8           | +     | -         | -         | -         | +         | +         | +         | +          | +          | +          |
| «Звездные» точки | 9           | +     | $+\alpha$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $\alpha^2$ | 0          | 0          |
|                  | 10          | +     | $-\alpha$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | $\alpha^2$ | 0          | 0          |
|                  | 11          | +     | 0         | $+\alpha$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0          | $\alpha^2$ | 0          |
|                  | 12          | +     | 0         | $-\alpha$ | 0         | 0         | 0         | 0         | 0          | $\alpha^2$ | 0          |
|                  | 13          | +     | 0         | 0         | $+\alpha$ | 0         | 0         | 0         | 0          | 0          | $\alpha^2$ |
|                  | 14          | +     | 0         | 0         | $-\alpha$ | 0         | 0         | 0         | 0          | 0          | $\alpha^2$ |
| Нулевая точка    | 15          | +     | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0          | 0          |            |

### Ортогональные планы второго порядка

В первых работах, посвященных исследованию области по аналогии с ортогональными планами первого порядка, использовали ортогональные планы второго порядка. Преимущество ортогональных планов состоит в малом объеме вычислений, т. к. все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга. В ортогональных планах сумма построчных произведений элементов двух любых столбцов матрицы планирования равна нулю. В матрице центрального композиционного плана не все столбцы ортогональны, т. к.

$$\sum_{j=1}^N x_{0j} x_{ij}^2 = 0; \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} x_{ij}^2 = 0. \quad (8)$$

В связи с тем, что  $x_0$  всегда равно +1,  $x_{ij}^2 \geq 0$ .



Например, матрица, представленная в таблице 5, не ортогональна:

$$\sum_{j=1}^9 x_{0j}x_{ij}^2 = 4 + 2\alpha^2; \quad \sum_{j=1}^9 x_{0j}x_{2j}^2 = 4 + 2\alpha^2; \quad \sum_{j=1}^9 x_{2j}x_{2j}^2 = 4 + 2\alpha^2.$$

Для ортогонализации соотношения (7) необходимо преобразовать столбцы матрицы, заменив  $x_i^2$  новой переменной  $x'_i$ . Новую переменную находят по выражению

$$x'_i = x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij}^2}{N} = x_i^2 - x_i^{-2}. \quad (9)$$

После замены  $x_i^2$  на  $x'_i$  будут равны нулю суммы построчных произведений столбцов:

$$\sum_{i=1}^N x_{0j}x'_{ij} = \sum_{i=1}^N x_{ij}^2 - Nx_i^{-2} = 0. \quad (10)$$

Так, например, в матрице центрального композиционного плана для двух факторов (см. таблицу 5) получаем новые переменные:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{1j}^2}{9} = x_1^2 - x_1^{-2} = x_1^2 - \frac{4 + 2\alpha^2}{9}; \\ x'_2 = x_2^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{2j}^2}{9} = x_2^2 - x_2^{-2} = x_2^2 - \frac{4 + 2\alpha^2}{9}. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^9 x_{0j}x'_{ij} = \sum_{j=1}^9 x_{0j}(x_{1j}^2 - x_1^{-2}) = \sum_{j=1}^9 x_{1j}^2 - 9x_1^{-2} = 4 + 2\alpha^2 - \frac{9(4 + 2\alpha^2)}{9} = 0.$$

Аналогично для второй переменной

$$\sum_{j=1}^9 x_{0j}x'_{2j} = 0.$$

Ортогонализация соотношения (8) достигается выбором «звездного» плеча  $\alpha$ . Значения «звездного» плеча  $\alpha$ , вычисленные для различного числа факторов, приведены в таблице 7. Если ортогональность принять за достаточный критерий оптимальности плана эксперимента, то на числе опытов в центре плана не накладывается какого-либо ограничения и обычно  $n_0 = 1$ .



Таблица 7 – Значения «звездного» плеча для различного числа факторов

| Число независимых переменных | «Ядро» плана | Число дополнительных опытов | Величина |
|------------------------------|--------------|-----------------------------|----------|
| 2                            | $2^2$        | 5                           | 1,00     |
| 3                            | $2^3$        | 7                           | 1,21     |
| 4                            | $2^4$        | 9                           | 1,41     |
| 5                            | $2^{5-1}$    | 11                          | 1,54     |

Подставляя  $\alpha = 1$  в соотношения (11), находим новые переменные  $x'_1$  и  $x'_2$ :

$$x'_1 = x_1^2 - \frac{2}{3}; \quad x'_2 = x_2^2 - \frac{2}{3}.$$

Тогда ортогональный центральный композиционный план второго порядка для двух факторов может быть представлен матрицей (таблица 8).

Таблица 8 – Матрица ортогонального композиционного плана второго порядка для двух факторов

| Содержание плана                       | Номер опыта | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1 x_2$ | $x_1^2 - \frac{2}{3}$ | $x_2^2 - \frac{2}{3}$ | $y$   |
|--|-------------|-------|-------|-------|-----------|-----------------------|-----------------------|-------|
| План типа $2^2$                        | 1           | +     | +     | +     | +         | +1/3                  | +1/3                  | $y_1$ |
|  | 2           | +     | -     | +     | -         | +1/3                  | +1/3                  | $y_2$ |
|  | 3           | +     | +     | -     | -         | +1/3                  | +1/3                  | $y_3$ |
|  | 4           | +     | -     | -     | +         | +1/3                  | +1/3                  | $y_4$ |
| «Звездные» точки с плечом $\alpha = 1$ | 5           | +     | +     | 0     | 0         | +1/3                  | -2/3                  | $y_5$ |
|  | 6           | +     | -     | 0     | 0         | +1/3                  | -2/3                  | $y_6$ |
|  | 7           | +     | 0     | +     | 0         | -2/3                  | +1/3                  | $y_7$ |
|  | 8           | +     | 0     | -     | 0         | -2/3                  | +1/3                  | $y_8$ |
| Нулевая точка                          | 9           | +     | 0     | 0     | 0         | -2/3                  | -2/3                  | $y_9$ |

При трех факторах  $\alpha = 1,215$ . Используя соотношение (9), матрицу плана второго порядка для трех факторов, находим новые переменные  $x'_1$ ,  $x'_2$  и  $x'_3$ :

$$x'_1 = x_1^2 - \frac{\sum_{j=1}^{15} x_{1j}^2}{15} = x_1^2 - \frac{8 + 2(1,215)^2}{15} = x_1^2 - 0,73.$$

Аналогично для двух других переменных

$$x'_2 = x_2^2 - 0,73; \quad x'_3 = x_3^2 - 0,73.$$

Матрица ортогонального планирования для трех факторов представлена в таблице 9.



Таблица 9 – Матрица ортогонального композиционного плана второго порядка для трех факторов

| Содержание плана                    | Номер опыта | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1 \times x_2$ | $x_1 \times x_3$ | $x_2 \times x_3$ | $x_1^2 - 0,73$ | $x_2^2 - 0,73$ | $x_3^2 - 0,73$ | $y$      |
|-------------------------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|------------------|------------------|------------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| 1                                   | 2           | 3     | 4     | 5     | 6     | 7                | 8                | 9                | 10             | 11             | 12             | 13       |
| План $2^3$                          | 1           | +     | +     | +     | +     | +                | +                | +                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_1$    |
|                                     | 2           | +     | -     | +     | +     | -                | -                | +                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_2$    |
|                                     | 3           | +     | +     | -     | +     | -                | +                | -                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_3$    |
|                                     | 4           | +     | -     | -     | +     | +                | -                | -                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_4$    |
|                                     | 5           | +     | +     | +     | -     | +                | -                | -                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_5$    |
|                                     | 6           | +     | -     | +     | -     | -                | +                | -                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_6$    |
|                                     | 7           | +     | +     | -     | -     | -                | -                | +                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_7$    |
|                                     | 8           | +     | -     | -     | -     | +                | +                | +                | +0,27          | +0,27          | +0,27          | $y_8$    |
| «Звездные» точки с $\alpha = 1,215$ | 9           | +     | +1,21 | 0     | 0     | 0                | 0                | 0                | +0,746         | -0,73          | -0,73          | $y_9$    |
|                                     | 10          | +     | 5     | 0     | 0     | 0                | 0                | 0                | +0,746         | -0,73          | -0,73          | $y_{10}$ |
|                                     | 11          | +     | -1,21 | +1,21 | 0     | 0                | 0                | 0                | -0,73          | +0,746         | -0,73          | $y_{11}$ |
|                                     | 12          | +     | 5     | 5     | 0     | 0                | 0                | 0                | -0,73          | +0,746         | +0,746         | $y_{12}$ |
|                                     | 13          | +     | 0     | -1,21 | +1,21 | 0                | 0                | 0                | -0,73          | -0,73          | +0,746         | $y_{13}$ |
|                                     | 14          | +     | 0     | 5     | 5     | 0                | 0                | 0                | -0,73          | -0,73          | +0,746         | $y_{14}$ |
|                                     |             |       | 0     | 0     | -1,21 | 5                |                  |                  |                |                |                |          |

Благодаря ортогональности матрицы планирования коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2},$$

где  $i$  – номер столбца матрицы;

$j$  – номер опыта;

$x_{ij}$  – элементы соответствующего столбца матрицы;

$y_j$  – значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте.

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формуле

$$S^2 \{b_i\} = \frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}.$$

Дисперсии коэффициентов не равны, т. к. суммы квадратов элементов столбцов матрицы  $\sum_{j=1}^N x_{ij}^2$  не равны друг другу.



Реализация опытов по матрице планирования с преобразованием квадратичной переменной позволяет построить модель вида

$$y = b'_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq k} b_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{i1} (x_i^2 - x_i^{-2}).$$

Чтобы перейти к обычной форме записи уравнения

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq k} b_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{i1} x_i^2,$$

находят величину  $b_0$  по выражению

$$b_0 = b'_0 - b_{11} x_1^{-2} - \dots - b_{kk} x_k^{-2}$$

с дисперсией

$$S^2 \{b_0\} = S^2 \{b'_0\} + x_1^{-2} S^2 \{b_{11}\} + \dots + x_k^{-2} S^2 \{b_{kk}\}.$$

Проверка адекватности уравнения второго порядка, получаемой после центрального композиционного ортогонального планирования, производится так же, как и проверка адекватности линейной модели, полученной при реализации плана первого порядка.

### ***Ротатабельное планирование второго порядка***

Как показали исследования, критерий ортогональности не является достаточно сильным критерием оптимизации центрального композиционного плана второго порядка. Информация о поверхности отклика, полученная при ортогональном планировании второго порядка, различна в разных направлениях. В то же время исследователь, начиная эксперимент, чаще всего не знает, какое направление будет представлять преимущественный интерес. В тех случаях, когда нет достоверной информации об ориентации поверхности отклика, наиболее разумным является использование центральных композиционных планов, отвечающих требованию ротатабельности, т. е. планов, с помощью которых можно получать модель, способную предсказывать значение параметра оптимизации с одинаковой точностью независимо от направления на равных расстояниях от центра плана.

Ротатабельность центрального композиционного плана достигается выбором величины «звездного» плеча  $\alpha$ . Величину «звездного» плеча «ядра», содержащего полный факторный эксперимент, определяют из соотношения

$$\alpha = \frac{k}{2^4}, \quad (12)$$





а для «ядра», содержащего дробную реплику,

$$\alpha = \frac{k - p}{2^4}. \quad (13)$$

Для ротатабельного планирования второго порядка важное значение имеет выбор числа опытов в центре плана, т. к. число опытов в центре плана определяет характер распределения получаемой информации о поверхности отклика. Число опытов в центре плана выбирается таким, чтобы обеспечивалось так называемое равномерное планирование. Планирование называется равномерным, если получаемая информация постоянно остается внутри интервала  $0 \leq q \leq 1$  (где  $q$  – радиус информационного контура). Равномерное планирование возможно, если некоторая константа  $\lambda$  не превышает единицы (немного меньше ее):

$$\lambda = \frac{k(n_c + n_0)}{(k + 2)n_c}, \quad (14)$$

где  $n_0$  – число опытов в центре плана (число нулевых точек);

$k$  – число факторов,  $k = N - n_0$  (где  $N$  – общее число опытов).

Все данные, необходимые для построения матриц центрального композиционного ротатабельного планирования второго порядка при числе факторов от двух до семи, табулированы (таблица 10).

Таблица 10 – Матрица центрального композиционного ротатабельного плана второго порядка при числе факторов от двух до семи

| Число факторов $k$ | «Ядро» плана | Число точек «ядра» $n_{я}$ | Число «звездных» точек $n_{\alpha}$ | Число нулевых точек $n_0$ | Величина «звездного» плеча $\alpha$ | Общее число опытов $N$ |
|--------------------|--------------|----------------------------|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| 2                  | $2^2$        | 4                          | 4                                   | 5                         | 1,414                               | 13                     |
| 3                  | $2^3$        | 8                          | 6                                   | 6                         | 1,682                               | 20                     |
| 4                  | $2^4$        | 16                         | 8                                   | 7                         | 2,000                               | 31                     |
| 5                  | $2^5$        | 32                         | 10                                  | 10                        | 2,378                               | 52                     |
| 5                  | $2^{5-1}$    | 16                         | 10                                  | 6                         | 2,000                               | 32                     |
| 6                  | $2^6$        | 64                         | 12                                  | 15                        | 2,828                               | 91                     |
| 6                  | $2^{6-1}$    | 32                         | 12                                  | 9                         | 2,378                               | 53                     |
| 7                  | $2^7$        | 128                        | 14                                  | 21                        | 3,363                               | 163                    |
| 7                  | $2^{7-1}$    | 64                         | 14                                  | 14                        | 2,828                               | 92                     |

Матрица ротатабельного равномерного планирования второго порядка для  $k = 2$  приведена в таблице 11.

Матрицы ротатабельного планирования второго порядка не ортогональны, поэтому объем вычислительной работы при определении коэффициентов



регрессии довольно велик. Вычисление коэффициентов регрессии рекомендуется проводить с помощью электронных вычислительных машин, используя метод наименьших квадратов. Коэффициенты уравнения регрессии определяют по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{A}{N} \left[ 2\lambda^2(k+2) \sum_{j=1}^N y_i - 2\lambda c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_i \right]; \quad (15)$$

$$b_i = \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} y_i; \quad (16)$$

$$b_{ij} = \frac{c^2}{N\lambda} \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{ij} y_i, \quad (17)$$

где

$$\lambda = c = \frac{N}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}.$$

Таблица 11 – Матрица ротатабельного униформ-плана второго порядка

| Номер опыта | $x_0$ | $x_1$  | $x_2$  | $x_1 x_2$ | $x_1^2$ | $x_2^2$ | $y$ |
|-------------|-------|--------|--------|-----------|---------|---------|-----|
| 1           | +     | +      | +      | +         | +       | +       |     |
| 2           | +     | -      | +      | -         | +       | +       |     |
| 3           | +     | +      | -      | -         | +       | +       |     |
| 4           | +     | -      | -      | +         | +       | +       |     |
| 5           | +     | +1,414 | 0      | 0         | 2       | 0       |     |
| 6           | +     | -1,414 | 0      | 0         | 2       | 0       |     |
| 7           | +     | 0      | +1,414 | 0         | 0       | 2       |     |
| 8           | +     | 0      | -1,414 | 0         | 0       | 2       |     |
| 9           | +     | 0      | 0      | 0         | 0       | 0       |     |
| 10          | +     | 0      | 0      | 0         | 0       | 0       |     |
| 11          | +     | 0      | 0      | 0         | 0       | 0       |     |
| 12          | +     | 0      | 0      | 0         | 0       | 0       |     |
| 13          | +     | 0      | 0      | 0         | 0       | 0       |     |

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии находят по формулам:

$$S^2 \{b_i\} = \frac{c}{N} S_y^2; \quad (18)$$

$$S^2 \{b_{ij}\} = \frac{c^2}{\lambda N} S_y^2. \quad (19)$$

Вычислив коэффициенты уравнения регрессии, определяют их доверительные интервалы. После этого, исключив из уравнения статистически незна-

чимые коэффициенты, получают математическую модель. Адекватность полученной модели проверяют с помощью расчетного критерия Фишера  $F_0$ .

Дисперсию параметра оптимизации определяют по результатам опытов в центре плана:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1}, \quad (20)$$

где  $n_0$  – число параллельных опытов в центре плана;

$y_u$  – значение параметра оптимизации в  $u$ -м опыте;

$\bar{y}$  – среднее арифметическое значение параметра оптимизации в  $n_0$  опытах;

$u$  – номер параллельного опыта в центре плана.

Для определения вычисляют сумму  $S_R$  квадратов отклонения расчетных  $\bar{y}_j$  значений функции отклика от экспериментальных:

$$S_R = \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y}_j)^2. \quad (21)$$

Из полученной суммы  $S_R$  вычитают сумму  $S_E$ , использованную для определения дисперсии параметра оптимизации по результатам опытов в центре плана.

$$S_E = \sum_{u=1}^{n_0} (y_j - \bar{y}_j)^2. \quad (22)$$

Полученный результат  $(S_R - S_E)$  делят на число степеней свободы

$$f = N - k' - (n_0 - 1),$$

где  $k'$  – число статистически значимых коэффициентов регрессии. Таким образом,

$$S_{ag}^2 = \frac{S_R - S_E}{f}. \quad (23)$$

Если  $F_0 < F_T$  (при выбранном уровне значимости), то гипотеза адекватности модели принимается. Если гипотеза адекватности модели не принимается, то применяют планирование третьего порядка или повторяют все опыты, сузив интервалы варьирования или изменив основные уровни факторов.

#### 4.1 Исходные данные для выполнения задания

В соответствии с вариантом (таблицы 12–29) построить ортогональный план второго порядка, произвести ротатабельное планирование второго порядка.



**Вариант 1**

Таблица 12 – Матрица для построения ортогонального плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 31,8 |
| 2           | –     | +     | 24,4 |
| 3           | +     | –     | 53,1 |
| 4           | –     | –     | 35,2 |
| 5           | +     | 0     | 41,4 |
| 6           | –     | 0     | 29,1 |
| 7           | 0     | +     | 27,5 |
| 8           | 0     | –     | 42,3 |
| 9           | 0     | 0     | 35,5 |

Таблица 13 – Матрица для ротатабельного плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 31,8 |
| 2           | –     | +     | 24,4 |
| 3           | +     | –     | 53,1 |
| 4           | –     | –     | 35,2 |
| 5           | –1,41 | 0     | 26,5 |
| 6           | 1,41  | 0     | 42,5 |
| 7           | 0     | –1,41 | 24,1 |
| 8           | 0     | 1,41  | 45,1 |
| 9           | 0     | 0     | 34,5 |
| 10          | 0     | 0     | 34,5 |
| 11          | 0     | 0     | 34,5 |
| 12          | 0     | 0     | 37,4 |
| 13          | 0     | 0     | 37,4 |

Таблица 14 – Величина «звездного» плеча

| Уровень факторов      | $\alpha$ , град | $\gamma$ , град |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| Основной              | 20              | 17              |
| Интервал варьирования | 5               | 3               |



**Вариант 2**

Таблица 15 – Матрица для построения ортогонального плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 38,1 |
| 2           | –     | +     | 28,7 |
| 3           | +     | –     | 50,5 |
| 4           | –     | –     | 29,2 |
| 5           | +     | 0     | 40,3 |
| 6           | –     | 0     | 29,4 |
| 7           | 0     | +     | 27,3 |
| 8           | 0     | –     | 42,4 |
| 9           | 0     | 0     | 34,5 |

Таблица 16 – Матрица для ротатабельного плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 38,8 |
| 2           | –     | +     | 28,7 |
| 3           | +     | –     | 50,5 |
| 4           | –     | –     | 29,2 |
| 5           | –1,41 | 0     | 26,4 |
| 6           | 1,41  | 0     | 42,4 |
| 7           | 0     | –1,41 | 24,0 |
| 8           | 0     | 1,41  | 45,0 |
| 9           | 0     | 0     | 34,4 |
| 10          | 0     | 0     | 34,5 |
| 11          | 0     | 0     | 34,4 |
| 12          | 0     | 0     | 34,4 |
| 13          | 0     | 0     | 34,3 |

Таблица 17 – Величина «звездного» плеча

| Уровень факторов      | $\alpha$ , град | $\gamma$ , град |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| Основной              | 18              | 16              |
| Интервал варьирования | 4               | 5               |

**Вариант 3**

Таблица 18 – Матрица для построения ортогонального плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 29,1 |
| 2           | –     | +     | 30,2 |
| 3           | +     | –     | 55,2 |
| 4           | –     | –     | 32,3 |
| 5           | +     | 0     | 40,2 |
| 6           | –     | 0     | 29,3 |
| 7           | 0     | +     | 27,3 |
| 8           | 0     | –     | 42,3 |
| 9           | 0     | 0     | 34,3 |

Таблица 19 – Матрица для ротатабельного плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 29,1 |
| 2           | –     | +     | 30,2 |
| 3           | +     | –     | 55,2 |
| 4           | –     | –     | 32,2 |
| 5           | –1,41 | 0     | 26,5 |
| 6           | 1,41  | 0     | 42,5 |
| 7           | 0     | –1,41 | 24,1 |
| 8           | 0     | 1,41  | 45,1 |
| 9           | 0     | 0     | 34,3 |
| 10          | 0     | 0     | 34,3 |
| 11          | 0     | 0     | 34,4 |
| 12          | 0     | 0     | 34,3 |
| 13          | 0     | 0     | 34,4 |

Таблица 20 – Величина «звездного» плеча

| Уровень факторов      | $\alpha$ , град | $\gamma$ , град |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| Основной              | 14              | 12              |
| Интервал варьирования | 2               | 3               |



**Вариант 4**

Таблица 21 – Матрица для построения ортогонального плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 30,7 |
| 2           | –     | +     | 17,3 |
| 3           | +     | –     | 48,8 |
| 4           | –     | –     | 43,3 |
| 5           | +     | 0     | 40,1 |
| 6           | –     | 0     | 29,4 |
| 7           | 0     | +     | 27,2 |
| 8           | 0     | –     | 42,3 |
| 9           | 0     | 0     | 34,4 |

Таблица 22 – Матрица для ротатабельного плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 30,7 |
| 2           | –     | +     | 17,3 |
| 3           | +     | –     | 48,8 |
| 4           | –     | –     | 43,3 |
| 5           | –1,41 | 0     | 26,4 |
| 6           | 1,41  | 0     | 42,3 |
| 7           | 0     | –1,41 | 24,1 |
| 8           | 0     | 1,41  | 45,0 |
| 9           | 0     | 0     | 34,4 |
| 10          | 0     | 0     | 34,4 |
| 11          | 0     | 0     | 34,5 |
| 12          | 0     | 0     | 34,6 |
| 13          | 0     | 0     | 34,4 |

Таблица 23 – Величина «звездного» плеча

| Уровень факторов      | $\alpha$ , град | $\gamma$ , град |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| Основной              | 14              | 15              |
| Интервал варьирования | 4               | 5               |



**Вариант 5**

Таблица 24 – Матрица для построения ортогонального плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 32,8 |
| 2           | –     | +     | 25,6 |
| 3           | +     | –     | 52,6 |
| 4           | –     | –     | 34,8 |
| 5           | +     | 0     | 40,2 |
| 6           | –     | 0     | 29,3 |
| 7           | 0     | +     | 27,4 |
| 8           | 0     | –     | 42,4 |
| 9           | 0     | 0     | 34,5 |

Таблица 25 – Матрица для ротатабельного плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 32,8 |
| 2           | –     | +     | 25,6 |
| 3           | +     | –     | 52,6 |
| 4           | –     | –     | 34,8 |
| 5           | –1,41 | 0     | 26,4 |
| 6           | 1,41  | 0     | 42,4 |
| 7           | 0     | –1,41 | 24,2 |
| 8           | 0     | 1,41  | 45,0 |
| 9           | 0     | 0     | 34,4 |
| 10          | 0     | 0     | 34,4 |
| 11          | 0     | 0     | 34,5 |
| 12          | 0     | 0     | 34,6 |
| 13          | 0     | 0     | 34,6 |

Таблица 26 – Величина «звездного» плеча

| Уровень факторов      | $\alpha$ , град | $\gamma$ , град |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| Основной              | 14              | 21              |
| Интервал варьирования | 4               | 6               |



**Вариант 6**

Таблица 27 – Матрица для построения ортогонального плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 29,5 |
| 2           | –     | +     | 30,8 |
| 3           | +     | –     | 58,5 |
| 4           | –     | –     | 32,0 |
| 5           | +     | 0     | 40,1 |
| 6           | –     | 0     | 29,1 |
| 7           | 0     | +     | 27,2 |
| 8           | 0     | –     | 42,3 |
| 9           | 0     | 0     | 34,4 |

Таблица 28 – Матрица для ротатабельного плана второго порядка

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | +     | +     | 29,5 |
| 2           | –     | +     | 30,8 |
| 3           | +     | –     | 58,5 |
| 4           | –     | –     | 32,0 |
| 5           | –1,41 | 0     | 26,5 |
| 6           | 1,41  | 0     | 42,4 |
| 7           | 0     | –1,41 | 24,0 |
| 8           | 0     | 1,41  | 45,0 |
| 9           | 0     | 0     | 34,4 |
| 10          | 0     | 0     | 34,5 |
| 11          | 0     | 0     | 34,5 |
| 12          | 0     | 0     | 34,5 |
| 13          | 0     | 0     | 34,3 |

Таблица 29 – Величина «звездного» плеча

| Уровень факторов      | $\alpha$ , град | $\gamma$ , град |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| Основной              | 13              | 15              |
| Интервал варьирования | 3               | 5               |

### **Контрольные вопросы**

- 1 В чем сущность ортогонального центрального композиционного плана и какие математические модели он позволяет построить?
- 2 В чем сущность ротатбельного центрального композиционного плана и какие математические модели он позволяет построить?
- 3 В чем сущность и цель стандартизации масштаба факторов?
- 4 Как составляется и какими свойствами обладает матрица планирования ортогонального центрального композиционного плана?
- 5 Как составляется и какими свойствами обладает матрица планирования ротатбельного центрального композиционного плана?
- 6 Что такое «звездное» плечо и из каких соображений выбирается его значение?
- 7 Как проверить адекватность полученной математической модели?

### **Список литературы**

- 1 **Смирнов, В. А.** Математическое моделирование в машиностроении в примерах и задачах: учебное пособие / В. А. Смирнов. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 364 с.
- 2 **Кангин, В. В.** Математическое моделирование процессов в машиностроении. Лабораторный практикум : учебное пособие / В. В. Кангин, В. Н. Мережук. – Старый Оскол : ТНТ, 2017. – 268 с.
- 3 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск; Москва : Новое знание ; ИНФРА-М, 2016. – 592 с.
- 4 **Барботько, А. И.** Статистические алгоритмы обработки результатов экспериментальных исследований в машиностроении : учебное пособие / А. И. Барботько. – Старый Оскол : ТНТ, 2017. – 404 с.

