

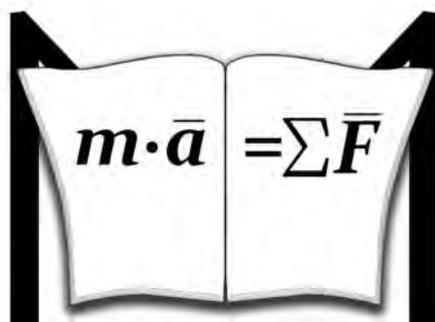
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное
и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные
дороги» очной и заочной форм обучения*

Часть 1



Могилев 2019

УДК 624.04
ББК 38.112
С86

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «4» ноября 2019 г., протокол № 4

Составитель ст. преподаватель В. А. Кемова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации соответствуют рабочей программе дисциплины «Строительная механика» для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» очной и заочной форм обучения. Содержат материалы для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям и контрольным работам, перечень рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое издание

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

| | |
|-------------------------|------------------|
| Ответственный за выпуск | П. Н. Громыко |
| Редактор | А. А. Подошевка |
| Компьютерная верстка | Н. П. Полевничая |

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2019



Содержание

| | |
|--|----|
| Введение..... | 4 |
| 1 Общие положения и понятия строительной механики..... | 5 |
| 2 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета при неподвижной нагрузке..... | 7 |
| 3 Определение усилий от подвижной нагрузки..... | 11 |
| 4 Расчет трехшарнирных арок и рам..... | 14 |
| 5 Расчет плоских ферм..... | 26 |
| 6 Основные теоремы строительной механики и определение перемещений..... | 32 |
| Список литературы..... | 37 |



Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой по курсу «Строительная механика» для студентов специальностей «Промышленное и гражданское строительство» и «Автомобильные дороги».

Цель изучения дисциплины «Строительная механика» – получение студентами знаний, необходимых для проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции инженерных сооружений. Задачами учебной дисциплины являются умение определять внутренние усилия и перемещения в инженерных конструкциях и сооружениях при действии на них статических, подвижных нагрузок, строить линии влияния для простейших конструкций и определять наименее выгодное положение нагрузок на сооружениях.

По всем темам приведены задачи с их подробным решением. По каждой теме приводится один или несколько примеров для самостоятельного решения, вопросы для самопроверки.

Цель методических рекомендаций – закрепление полученных студентами знаний при изучении дисциплины «Строительная механика», в частности, практических методов расчета статически определимых систем, применяемых в строительстве.



1 Общие положения и понятия строительной механики

Пример 1 – Определить число степеней свободы систем, приведенных на рисунке 1.1, и проверить их геометрическую неизменяемость.

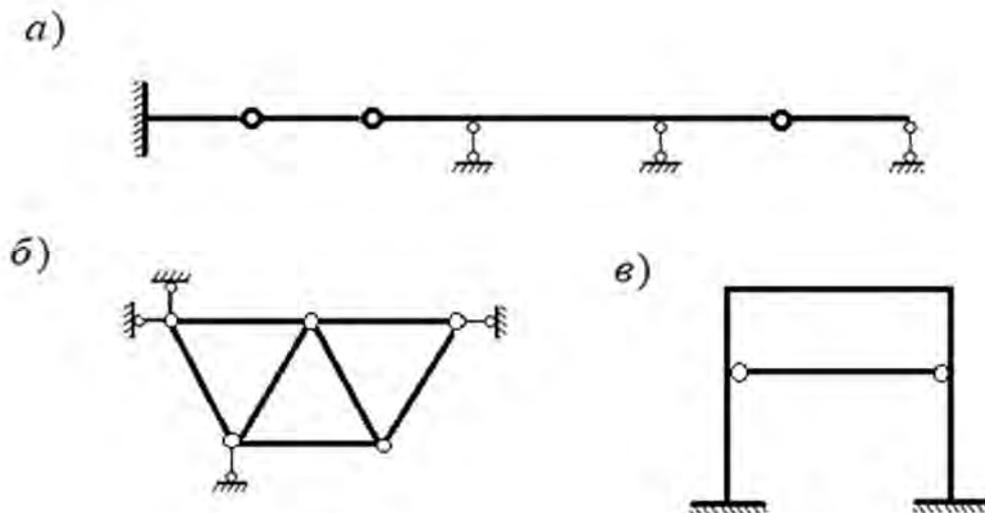


Рисунок 1.1 – К определению числа степеней свободы

Решение

Определяем число степеней свободы системы, показанной на рисунке 1.1, а:

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Балка статически определима и геометрически неизменяема, т. к. первый стержень прикреплен к основанию при помощи заделки. Второй диск прикреплен при помощи стержня к геометрически неизменяемой балке и двумя стержнями к опорной плоскости. Таким образом, три стержня не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу. Последний диск прикреплен к существующей геометрически неизменяемой системе при помощи шарнира и опорного стержня, не проходящего через ось шарнира.

Рассмотрим рисунок 1.1, б:

$$W = 2 \cdot 5 - 7 - 4 = -1.$$

Стержневая система (ферма) состоит из простейших геометрически неизменяемых систем – шарнирных треугольников, каждый узел последовательно присоединен при помощи шарнира и двух стержней, не лежащих на одной линии. Следовательно, ферма геометрически неизменяема. Однако число опорных связей сверх необходимого количества на единицу, т. е. ферма статически неопределима.

Рама, изображенная на рисунке 1.1, в, имеет верно расставленные опорные крепления (т. е. рама геометрически неизменяема) и замкнутый контур, который сразу увеличивает степень статической неопределимости:

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 6 = -2.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить число степеней свободы систем, приведенных на рисунке 1.2, и проверить их геометрическую неизменяемость.

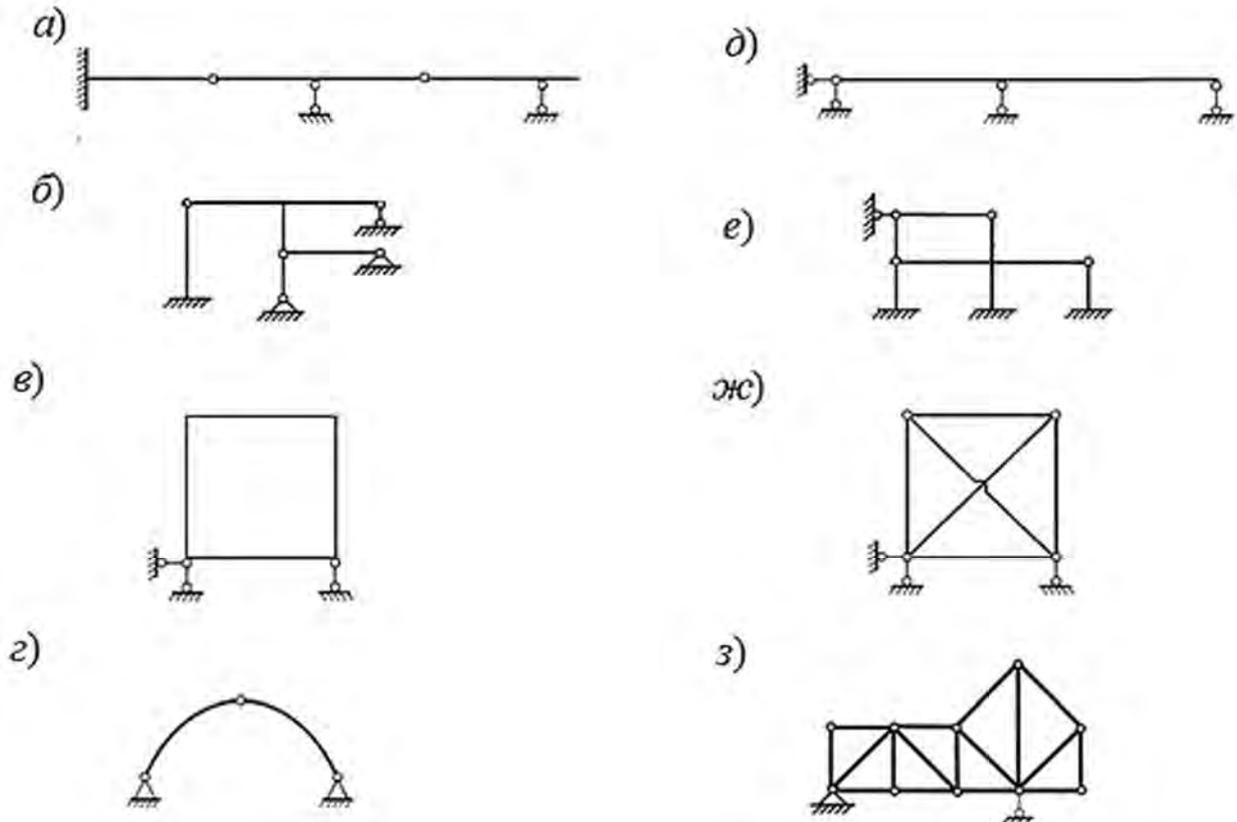


Рисунок 1.2 – К определению числа степеней свободы

Контрольные вопросы

- 1 Что такое расчетная схема сооружения?
- 2 Назовите основные типы стержневых систем.
- 3 Какие гипотезы принимаются для упрощения расчета сооружений?
- 4 Что такое число степеней свободы?
- 5 Какие системы называются геометрически неизменяемыми, изменяемыми и мгновенно изменяемыми?
- 6 В чем заключается необходимое условие геометрической неизменяемости?
- 7 Какие способы образования неизменяемых систем Вы знаете?

2 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета при неподвижной нагрузке

Пример 1 – Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от действия постоянной нагрузки для статически определимой многопролетной балки (рисунок 2.1, а).

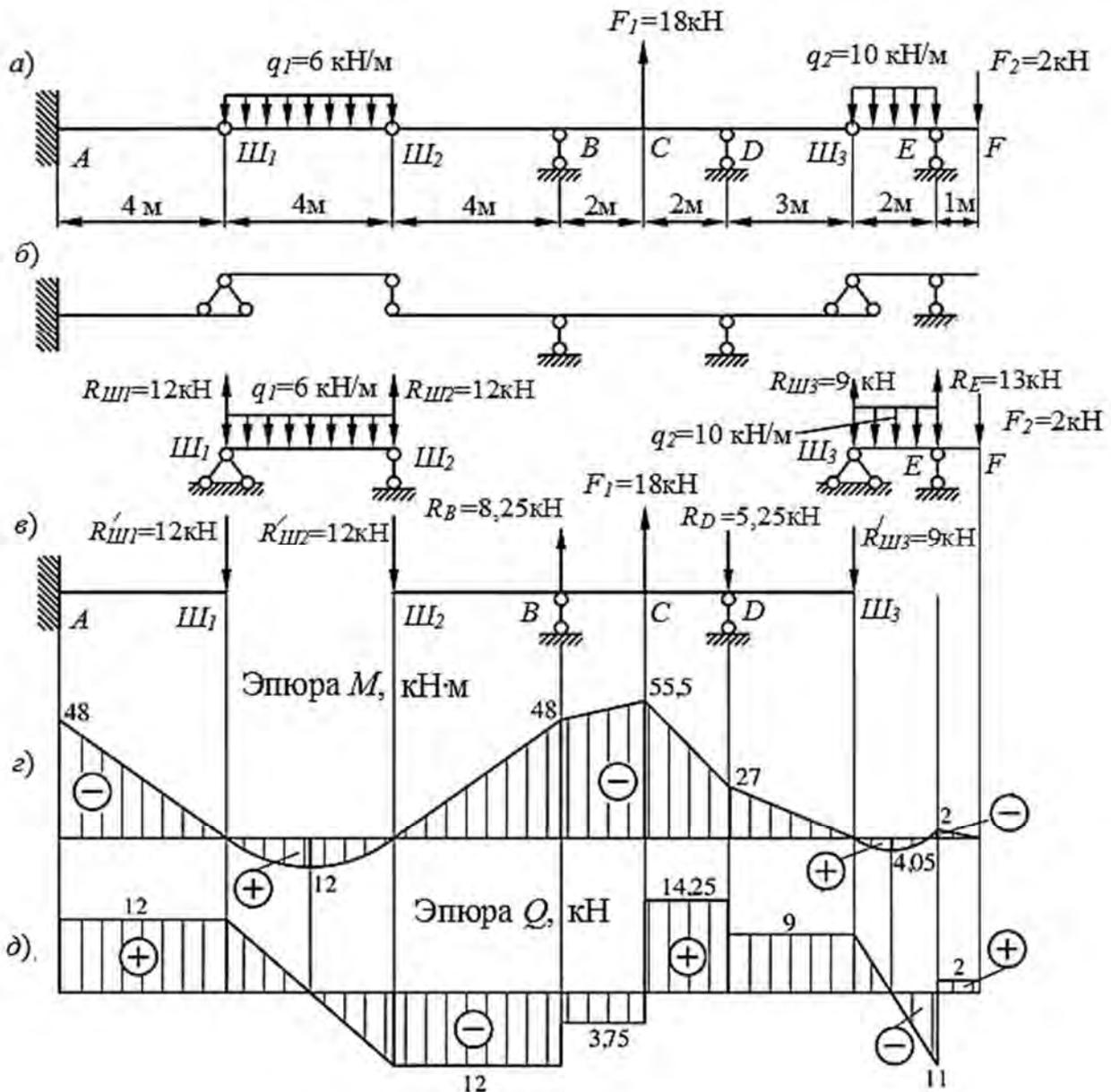


Рисунок 2.1 – К расчету статически определимой многопролетной балки на действие неподвижной нагрузки

Решение

Проводим геометрический анализ многопролетной балки. Она состоит из четырех элементов. Балка $AIII_1$ имеет заделку, поэтому является основной. Балка BD прикреплена к основанию двумя опорами, поэтому также будет основной

по отношению к балкам III_1III_2 и III_3E . Балка III_1III_2 присоединена к основным балкам $AIII_1$ и BD обоими концами при помощи шарниров, а балка III_3E – одной опорной связью к основанию, следовательно, они являются вспомогательными элементами. Схема взаимодействия элементов представлена на рисунке 2.1, б.

Расчет начинаем с рассмотрения вспомогательных элементов III_1III_2 и III_3E , а затем – основных $AIII_1$ и BD .

Балка III_1III_2 . Так как балка полностью загружена распределенной нагрузкой, то реакции равны между собой и определяются как

$$R_{III_1} = R_{III_2} = \frac{q_1 \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ кН.}$$

При таком виде нагружения значения изгибающего момента по концам балки равны нулю, а его максимальное значение приходится на середину пролета и вычисляется следующим образом:

$$M_{III_1III_2}^{\max} = \frac{q_1 \cdot 4^2}{8} = \frac{6 \cdot 4^2}{8} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Балка III_3E . Определяем опорные реакции:

$$\sum M_{III_3} = q_2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot R_E + 3 \cdot P_2 = 0;$$

$$R_E = \frac{q_2 \cdot 2 \cdot 1 + P_2 \cdot 3}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2} = 13 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 2 \cdot R_{III_3} - q_2 \cdot 2 \cdot 1 + P_2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{III_3} = \frac{q_2 \cdot 2 \cdot 1 - P_2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2} = 9 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = R_{III_3} - q_2 \cdot 2 + R_E - P_2 = 9 - 10 \cdot 2 + 13 - 2 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов:

$$M_{III_3E}^{III_3} = 0; \quad M_{III_3E}^E = R_{III_3} \cdot 2 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EF}^F = 0; \quad M_{EF}^E = -P_2 \cdot 1 = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$



Балка АШ₁. Так как балка консольно закреплена, то ординаты эпюры изгибающих моментов могут быть получены без определения опорных реакций:

$$M_{AШ_1}^{Ш_1} = 0; \quad M_{AШ_1}^A = -R'_{Ш_1} \cdot 4 = -12 \cdot 4 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значение изгибающего момента в сечении I

$$M_1 = -R'_{Ш_1} \cdot 1 = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Балка ВD. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = -R'_{Ш_2} \cdot 4 - P_1 \cdot 2 + 4 \cdot R_D + R'_{Ш_3} \cdot 7 = 0;$$

$$R_D = \frac{R'_{Ш_2} \cdot 4 + P_1 \cdot 2 - R'_{Ш_3} \cdot 7}{4} = \frac{12 \cdot 4 + 18 \cdot 2 - 9 \cdot 7}{4} = 5,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = -R'_{Ш_2} \cdot 8 + 4 \cdot R_B + P_1 \cdot 2 + R'_{Ш_3} \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = \frac{R'_{Ш_2} \cdot 8 - P_1 \cdot 2 - R'_{Ш_3} \cdot 3}{4} = \frac{12 \cdot 8 - 18 \cdot 2 - 9 \cdot 3}{4} = 8,25 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = -R'_{Ш_2} + R_B + P_1 - R_D - R'_{Ш_3} = -12 + 8,25 + 18 - 5,25 - 9 = 0.$$

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов:

$$M_{Ш_2B}^{Ш_2} = 0; \quad M_{Ш_2B}^B = -R'_{Ш_2} \cdot 4 = -12 \cdot 4 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BC}^C = -R'_{Ш_2} \cdot 6 + R_B \cdot 2 = -12 \cdot 6 + 8,25 \cdot 2 = -55,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{Ш_3D}^{Ш_3} = 0; \quad M_{Ш_3D}^D = -R'_{Ш_3} \cdot 3 = -9 \cdot 3 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{Ш_3C}^C = -R'_{Ш_3} \cdot 5 - R_D \cdot 2 = -9 \cdot 5 - 5,25 \cdot 2 = -55,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эюру поперечных сил по участкам:

$$Q_{AIII_1} = \frac{M_{AIII_1}^{III_1} - M_{AIII_1}^A}{4} = \frac{0 - (-48)}{4} = 12 \text{ кН};$$

$$Q_{III_1III_2} = \pm \frac{6 \cdot 4}{2} + 0 = \pm 12 \text{ кН}; \quad Q_{III_1III_2}^{III_1} = 12 \text{ кН}; \quad Q_{III_1III_2}^{III_2} = -12 \text{ кН};$$

$$Q_{III_2B} = \frac{-48 - 0}{4} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{BC} = \frac{-55,5 - (-48)}{2} = -3,75 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = \frac{-27 - (-55,5)}{2} = 14,25 \text{ кН}; \quad Q_{DIII_3} = \frac{0 - (-27)}{3} = 9 \text{ кН};$$

$$Q_{III_3E} = \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{-2 - 0}{2} = \pm 10 - 1 \text{ кН};$$

$$Q_{III_3E}^{III_3} = 10 - 1 = 9 \text{ кН}; \quad Q_{III_3E}^E = -10 - 1 = -11 \text{ кН};$$

$$Q_{EF} = \frac{0 - (-2)}{1} = 2 \text{ кН}.$$

Так как эюра Q на участке III_3E пересекла нейтральную ось, то на эюре моментов будет экстремум.

Балка с определенными реакциями, а также эюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q представлены на рисунке 2.1, в–д.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Построить эюры изгибающих моментов и поперечных сил от действия постоянной нагрузки для статически определимой многопролетной балки (рисунок 2.2, а–з).

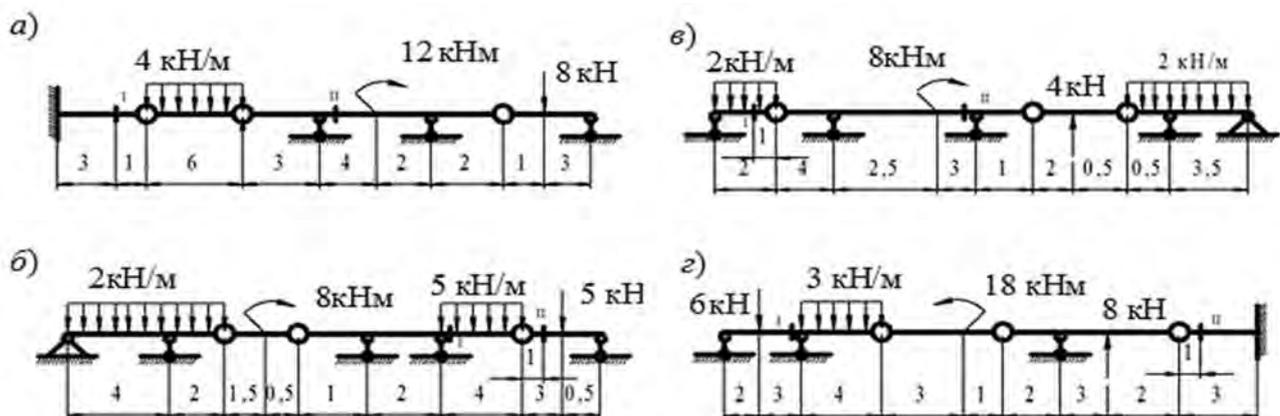


Рисунок 2.2 – К расчету статически определимой многопролетной балки

Контрольные вопросы

- 1 Перечислите основные способы образования геометрически неизменяемых систем.
- 2 Каковы основные принципы построения поэтажной схемы сооружения и порядок его расчета?
- 3 Правило знаков для изгибающего момента и поперечной силы.
- 4 Как строится эпюра поперечных сил?
- 5 Правила контроля правильности построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

3 Определение усилий от подвижной нагрузки

Пример 1 – Построить линии влияния опорной реакции R_B , изгибающих моментов и поперечных сил для указанных сечений. Определить величину изгибающего момента и поперечной силы для сечения I по линиям влияния (рисунок 3.1, а).

Решение

Вначале строится линия влияния для балки, которой принадлежит рассматриваемое сечение, а затем построенная линия влияния продлевается на вспомогательные балки (для вспомогательных балок линия влияния проводится через ноль на нейтральной оси под шарнирными опорами или шарниром).

Сечение I (рисунок 3.1, а) принадлежит консоли основной балки $AШ_1$. Балка $Ш_1Ш_2$ является вспомогательной по отношению к балке $AШ_1$, поэтому линию влияния продолжаем через ноль в шарнире $Ш_2$ (рисунок 3.1, б, в). Определяем значения усилий в сечении I от заданной нагрузки по линиям влияния:

$$M_I = q \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) = -80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_I = q \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 20 \text{ кН}.$$

Аналогично строим линии для остальных сечений и опорной реакции R_B (рисунок 3.1, г–з).



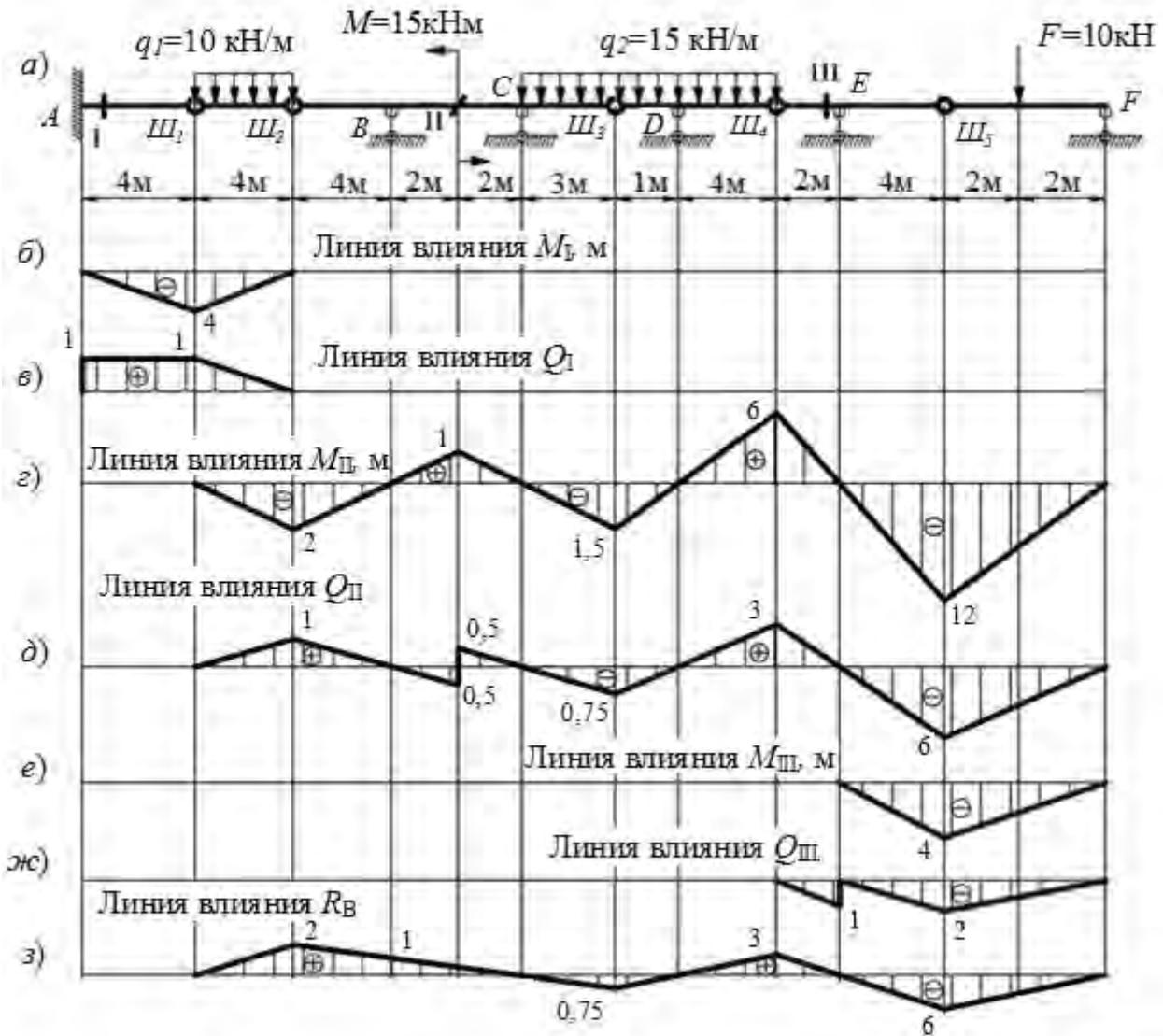


Рисунок 3.1 – К расчету статически определимой многопролетной балки на действие подвижной нагрузки

Пример 2 – Определить величину изгибающего момента и поперечной силы для сечения I (рисунок 3.2, а).

Решение

Вначале изображаем поэтажную схему (рисунок 3.2, б), а затем строим линию влияния изгибающих моментов и поперечной силы для сечения I (рисунок 3.2, в, г). Находим значения усилий в сечении I от заданной нагрузки по линиям влияния:

$$M_I = q_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 1 \cdot 4 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_I = q_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 12 \text{ кН}.$$

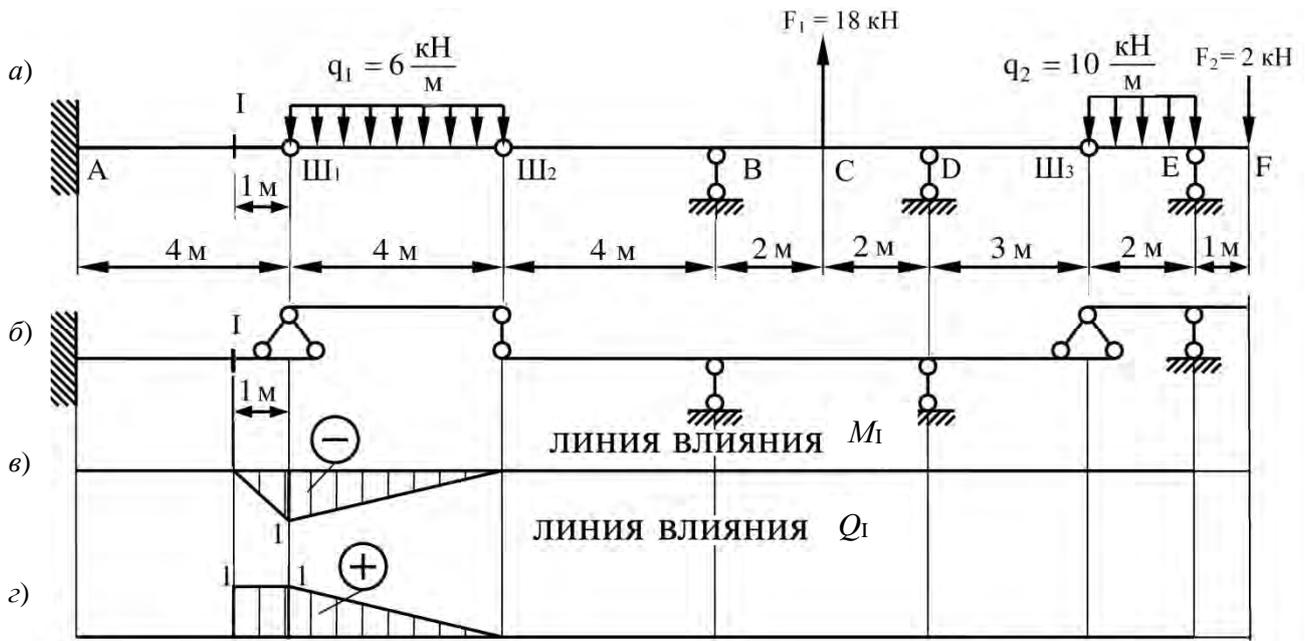


Рисунок 3.2 – К расчету статически определимой многопролетной балки на действие подвижной нагрузки

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Построить линии влияния опорных реакций, изгибающих моментов и поперечных сил для указанных сечений. Определить величины опорных реакций, изгибающих моментов и поперечных сил для указанных сечений по линиям влияния (см. рисунок 2.2, а-г).

Контрольные вопросы

- 1 Что такое линия влияния?
- 2 В чем отличие линии влияния от эпюры?
- 3 В чем преимущество линий влияния?
- 4 В чем отличие линий влияния при узловой передаче нагрузки?
- 5 Как определяется усилие от действия постоянной нагрузки при помощи линий влияния?

4 Расчет трехшарнирных арок и рам

Пример 1 – Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действия постоянной нагрузки для заданной трехшарнирной рамы (рисунок 4.1, а).

Решение

Данная рама является трехшарнирной системой с двумя опорными шарнирами A и B и ключевым шарниром III . Опорные шарниры расположены на разных уровнях, следовательно, опорные реакции можно найти из совместного рассмотрения системы уравнений статики:

$$\begin{aligned}\sum M_A = P_3 \cdot 3 + M + q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 &= 15 \cdot 3 + 6 + 10 \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = \\ &= 111 - R_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B = M - q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 &= 6 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = \\ &= -14 - R_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{III}^{лев.} = M - P \cdot 2 - R_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 &= 6 - 15 \cdot 2 - R_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = \\ &= -24 - R_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = 0;\end{aligned}$$

$$\sum M_{III}^{прав.} = q \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 10 \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 20 - R_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 0;$$

$$\begin{cases} -4 \cdot R_A + 3 \cdot H_A = 14; \\ -2 \cdot R_A + 5 \cdot H_A = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_A = 0,14 \text{ кН}; \\ H_A = 4,86 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot R_B + 3 \cdot H_B = 111; \\ -2 \cdot R_B + 2 \cdot H_B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_B = 20,14 \text{ кН}; \\ H_B = 10,14 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверка (см. рисунок 4.1, б):

$$\sum X = 0: -H_A + P - H_B = -4,86 + 15 - 10,14 = 0;$$

$$\sum Y = 0: -R_A - q \cdot 2 + R_B = -0,14 - 10 \cdot 2 + 20,14 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рисунок 4.1, в):

$$M_{AC}^A = 0; \quad M_{AC}^C = H_A \cdot 3 = 4,86 \cdot 3 = 14,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DC}^D = H_A \cdot 5 - P \cdot 2 = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DIII}^D = H_A \cdot 5 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 + 6 = 0,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$



$$M_{DIII}^{III} = H_A \cdot 5 - R_A \cdot 2 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 0,14 \cdot 2 - 15 \cdot 2 + 6 = 0;$$

$$M_{BE}^E = 0; M_{BE}^E = -H_B \cdot 2 = -10,14 \cdot 2 = -20,28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EIII}^E = -H_B \cdot 2 = -10,14 \cdot 2 = -20,28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EIII}^{III} = -H_B \cdot 2 + R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -10,14 \cdot 2 + 20,14 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

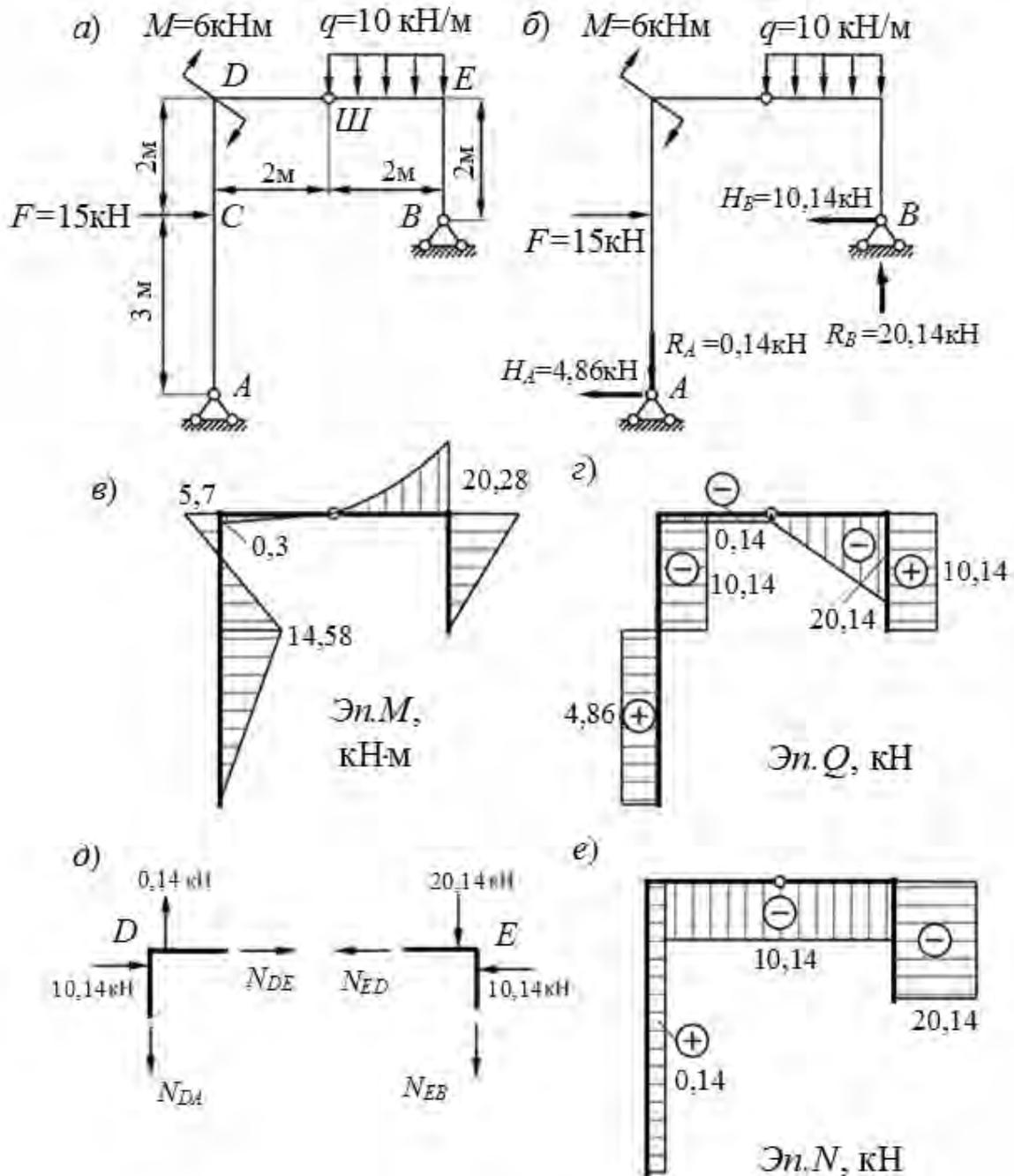


Рисунок 4.1 – К расчету трехшарнирной рамы

Согласно заданной схеме узел D уравнивается внешним моментом M , равным $6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Строим эпюру поперечных сил Q , используя формулу Журавского (рисунок 4.1, z):

$$Q_{AC} = \frac{14,58 - 0}{3} = 4,86 \text{ кН}; \quad Q_{CD} = \frac{-5,7 - 14,58}{2} = -10,14 \text{ кН};$$

$$Q_{DIII} = \frac{0 - 0,3}{2} = -0,14 \text{ кН}; \quad Q_{BE} = \frac{20,28 - 0}{2} = 10,14 \text{ кН};$$

$$Q_{III E} = \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{-20,28 - 0}{2} = \pm 10 - 10,14 \text{ кН};$$

$$Q_{III E}^I = 10 - 10,14 = -0,14 \text{ кН}; \quad Q_{III E}^E = -10 - 10,14 = -20,14 \text{ кН}.$$

Способом вырезания узлов (рисунок 4.1, d) из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил (рисунок 4.1, e):

– узел D :

$$\sum X = 0: 10,14 + N_{DE} = 0; \quad N_{DE} = -10,14 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: 0,14 - N_{DA} = 0; \quad N_{DA} = 0,14 \text{ кН};$$

– узел E :

$$\sum X = 0: -N_{ED} - 10,14 = 0; \quad N_{ED} = -10,14 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: -N_{EB} - 20,14 = 0; \quad N_{EB} = -20,14 \text{ кН}.$$

Пример 2 – Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действия постоянной нагрузки для заданной составной рамы (рисунок 4.2, a).

Решение

Составим схему взаимодействия основной $ADEFB$ и вспомогательной KLC рам, разрезая составную раму по шарниру K (рисунок 4.2, b).

Расчет начинаем со вспомогательной рамы. Определяем ее опорные реакции:

$$\sum X = H_K - q \cdot 3 = 0; \quad H_K = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН};$$



$$\sum M_K = q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - R_C \cdot 3 = 0; R_C = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 3 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = -q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - R_K \cdot 3 + H_K \cdot 3 = 0; R_K = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3}{3} = 3 \text{ кН}.$$

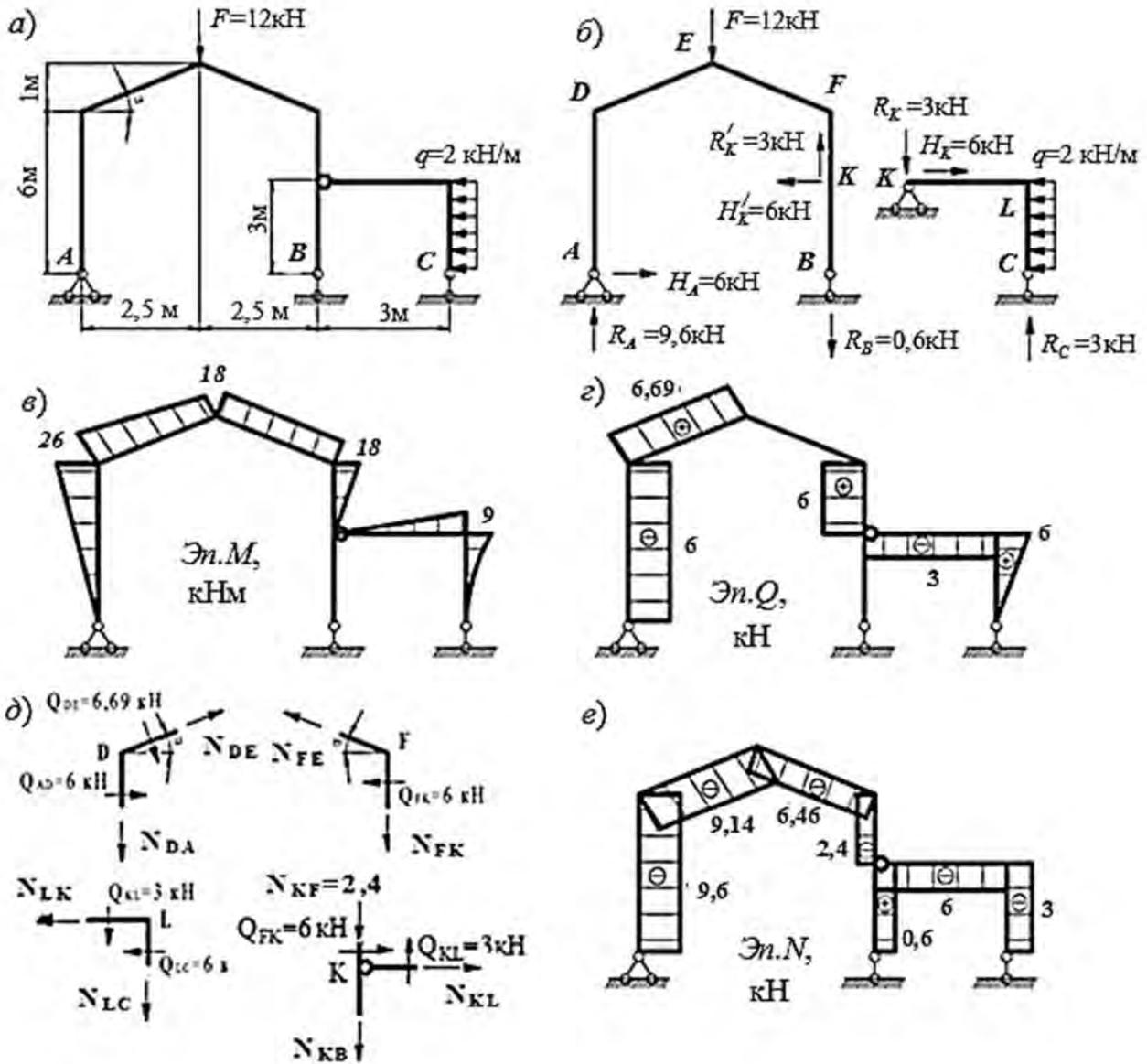


Рисунок 4.2 – К расчету составной рамы

Определяем реакции опор в основной раме. Для этого переносим реакции в шарнире K со вспомогательной рамы на основную, изменив их направление (см. рисунок 4.2, б).

$$\sum M_A = P \cdot 2,5 + R_B \cdot (2,5 + 2,5) - H_K \cdot 3 - R_K \cdot (2,5 + 2,5) = 0;$$

$$R_B = \frac{-12 \cdot 2,5 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 5}{5} = 0,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -P \cdot 2,5 + R_A \cdot (2,5 + 2,5) - H_K \cdot 3 = 0;$$

$$R_A = \frac{12 \cdot 2,5 + 6 \cdot 3}{5} = 9,6 \text{ кН};$$

$$\sum X = H_A - H_K = 0; \quad H_A = 6 \text{ кН}.$$

Строим эпюры изгибающих моментов по участкам для вспомогательной и основной рам (рисунок 4.2, в):

$$M_K = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{KL} = -R_K \cdot 3 = -3 \cdot 3 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{CL} = -q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_A = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{AD} = -H_A \cdot (3 + 3) = -6 \cdot 6 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{AD'} = -H_A \cdot (3 + 3) = -6 \cdot 6 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{AE} = -H_A \cdot (3 + 3 + 1) + R_A \cdot 2,5 = -6 \cdot 7 + 9,6 \cdot 2,5 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{BK} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BF} = -H_K \cdot 3 = -6 \cdot 3 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BF'} = -H_K \cdot 3 = -6 \cdot 3 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BE} = -R_B \cdot 2,5 - H_K \cdot (3 + 1) + R_K \cdot 2,5 = -0,6 \cdot 2,5 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot 2,5 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру поперечных сил Q , используя формулу Журавского (рисунок 4.2, з):

$$Q_{LC} = \frac{0 - (-9)}{3} \pm \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \pm 3 \text{ кН}; \quad Q_{LC}^L = 6 \text{ кН}; \quad Q_{LC}^C = 0 \text{ кН};$$

$$Q_{KL} = \frac{-9 - 0}{3} = -3 \text{ кН}; \quad Q_{AD} = \frac{-36 - 0}{6} = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{DE} = \frac{-18 - (-36)}{2,5} \cdot \cos \alpha = 7,2 \cdot \cos(\arctg(\frac{1}{2,5})) = 6,69 \text{ кН};$$



$$Q_{FE} = \frac{-18 - (-18)}{2,5} = 0 \text{ кН}; \quad Q_{FK} = \frac{0 - (-18)}{3} = 6 \text{ кН}.$$

Способом вырезания узлов из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил (рисунок 4.2, *д*, *е*):

– узел *D*:

$$\sum X = Q_{AD} + Q_{DE} \cdot \sin \alpha + N_{DE} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$N_{DE} = \frac{-6 - 6,69 \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = -9,14 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -Q_{DE} \cdot \cos \alpha - N_{DA} + N_{DE} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$N_{DA} = -6,69 \cdot \cos \alpha - 9,14 \cdot \sin \alpha = -9,6 \text{ кН};$$

– узел *L*:

$$\sum X = -Q_{LC}^L - N_{LK} = 0; \quad N_{LK} = -6 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -Q_{KL} - N_{LC} = 0; \quad N_{LC} = -3 \text{ кН};$$

– узел *F*:

$$\sum X = -Q_{FK} - N_{FE} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{FE} = -\frac{6}{\cos \alpha} = -6,46 \text{ кН};$$

$$\sum Y = N_{FE} \cdot \sin \alpha - N_{FK} = 0; \quad N_{FK} = -6,46 \cdot \sin \alpha = -2,4 \text{ кН};$$

– узел *K*:

$$\sum X = Q_{FK} + N_{KL} = 0; \quad N_{KL} = -6 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Q_{KL} - N_{KF} - N_{KB} = 0; \quad N_{KB} = 3 - 2,4 = 0,6 \text{ кН}.$$

Пример 3 – Для заданной арки, очерченной по параболе (рисунок 4.3, *а*), необходимо построить эпюры распределения внутренних силовых факторов от заданной нагрузки и линии влияния M , Q , N для сечения K .



Решение

Определим реакции в опорах арки от заданной нагрузки:

$$\sum M_A = P \cdot 5 + q \cdot 3 \cdot \left(12 + \frac{3}{2}\right) - R_B \cdot 20 = 0;$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 5 + 10 \cdot 3 \cdot 13,5}{20} = 25,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -P \cdot 15 - q \cdot 3 \cdot \left(5 + \frac{3}{2}\right) + R_A \cdot 20 = 0;$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 15 + 10 \cdot 3 \cdot 6,5}{20} = 24,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{лев.}} = -P \cdot 5 - H_A \cdot f + R_A \cdot 10 = 0;$$

$$H_A = \frac{-20 \cdot 5 + 24,75 \cdot 10}{4,6} = 32,06 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{прав.}} = q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) + H_B \cdot f - R_B \cdot 10 = 0;$$

$$H_B = \frac{-10 \cdot 3 \cdot 3,5 + 25,25 \cdot 10}{4,6} = 32,06 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum X = 0: H_A - H_B = 0;$

$$\sum Y = 0: R_A - P - q \cdot 3 + R_B = 0.$$

Заменяем арку эквивалентной балкой (рисунок 4.3, б) и строим для нее эпюры M^0 и Q^0 как для обычной статически определимой балки (рисунок 4.3, в).

Внутренние силовые факторы M , Q , N в характерных сечениях трехшарнирной арки удобнее вычислять в табличной форме (таблица 4.1, рисунок 4.3, г).

Построение линий влияния M , Q , N для заданной арки для сечения K (рисунок 4.4, а) произведем методом нулевых точек. Для удобства вычисления координат на рисунке 4.4, б представлена заменяющая система.

Построение линии влияния M_K . Определяем расстояние от левой опоры А до нулевой точки:



$$U_M = \frac{L \cdot f \cdot x_k}{L_2 \cdot y_k + f \cdot x_k} = \frac{20 \cdot 4,6 \cdot 6}{10 \cdot 3,86 + 4,6 \cdot 6} = 8,33 \text{ м.}$$

Поскольку сечение K расположено левее точки C , то откладываем вверх X_K над левой опорой A и проводим прямую линию от полученной точки к нулевой точке U_M , на которую сносим характерные точки K и C . Остальные характерные точки определяем из подобия треугольников (рисунок 4.4, в).

Построение линии влияния Q_K . Определяем расстояние от левой опоры A до нулевой точки:

$$U_Q = \frac{L \cdot f}{L_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_k + f} = \frac{20 \cdot 4,6}{10 \cdot 0,37 + 4,6} = 11,11 \text{ м.}$$

Поскольку сечение K расположено левее точки C , то откладываем вверх $\cos\varphi_K$ над левой опорой A и проводим прямую линию от полученной точки к нулевой точке U_Q , на которую сносим характерные точки K и C . Проводим из левой опоры A линию, параллельную полученной, на которую сносим точку K . Остальные характерные точки определяем из подобия треугольников (см. рисунок 4.4, в).

Построение линии влияния N_K . Определяем расстояние от левой опоры A до нулевой точки:

$$U_N = \frac{L \cdot f}{L_2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_k} - f} = \frac{20 \cdot 4,6}{10 \cdot \frac{1}{0,37} - 4,6} = 4,08 \text{ м.}$$

Так как сечение K находится левее точки C , то откладываем вниз $\sin\varphi_K$ под левой опорой A и проводим линию через полученную точку и нулевую точку U_Q , на которую сносим характерные точки K и C . Проводим из левой опоры A линию, параллельную полученной, на которую сносим точку K . Остальные характерные точки определяем из подобия треугольников (см. рисунок 4.4, в).

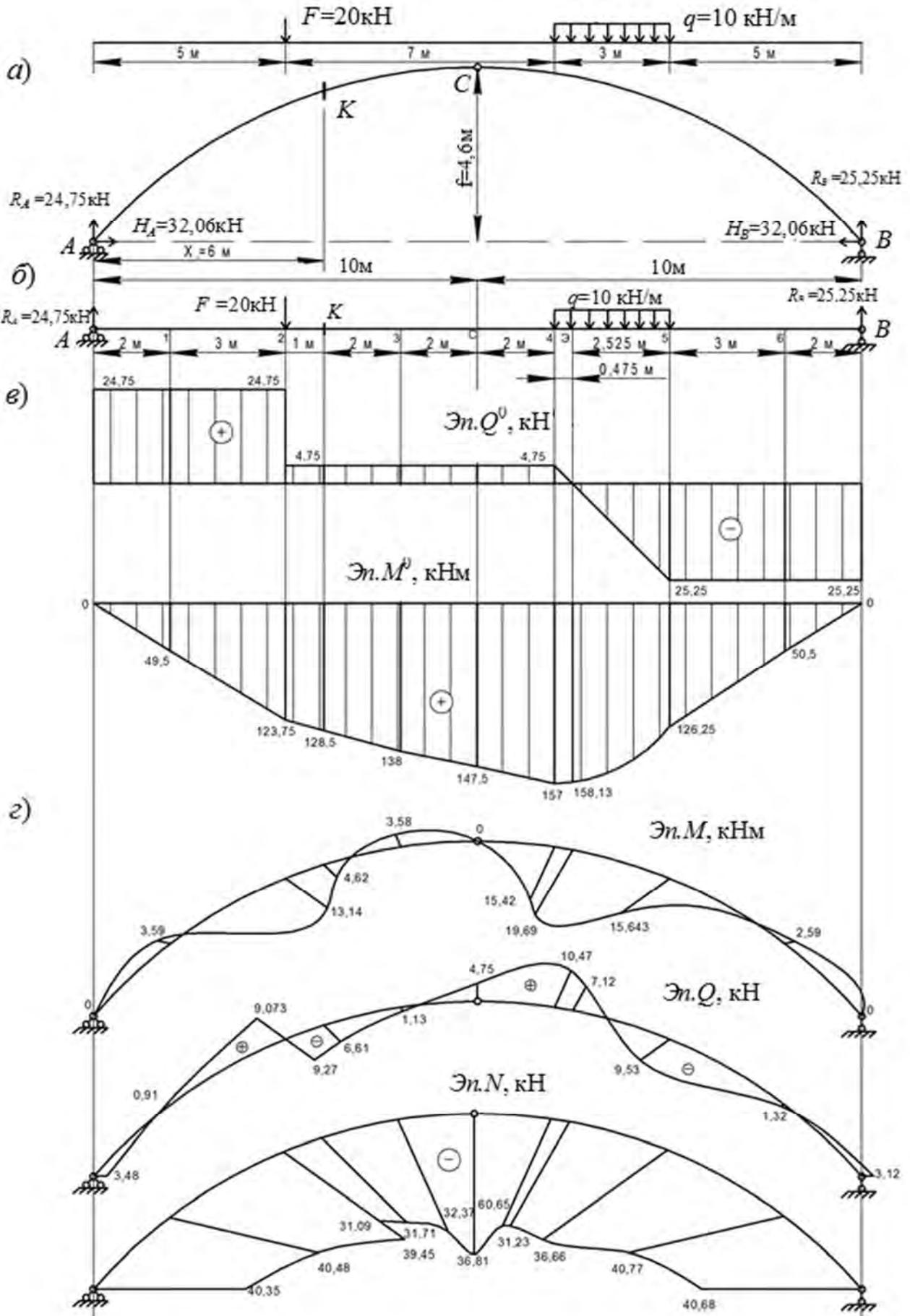


Рисунок 4.3 – К расчету трехшарнирной арки



Таблица 4.1 – Определение ординат эпор для трехшарнирной арки

| Номер точки | $x, м$ | $y, м$ | $tg\varphi$ | $\varphi, град$ | $\sin\varphi$ | $\cos\varphi$ | $Q^0, кН$ | $M^0, кН\cdot м$ | $M, кН\cdot м$ | $Q^0\cos\varphi, кН$ | $H\sin\varphi, кН$ | $Q, кН$ | $Q^0\sin\varphi, кН$ | $H\cos\varphi, кН$ | $N, кН$ |
|-------------|--------|--------|-------------|-----------------|---------------|---------------|-----------|------------------|----------------|----------------------|--------------------|---------|----------------------|--------------------|---------|
| A | 0 | 0 | 0,92 | 42,61 | 0,677 | 0,736 | 24,75 | 0 | 0 | 18,216 | 21,7 | -3,48 | 16,76 | 23,59 | -40,35 |
| 1 | 2 | 1,656 | 0,736 | 36,35 | 0,593 | 0,805 | 24,75 | 49,5 | -3,59 | 19,92 | 19,01 | 0,91 | 14,68 | 25,8 | -40,48 |
| 2 | 5 | 3,45 | 0,46 | 24,7 | 0,418 | 0,908 | 24,75 | 123,75 | 13,14 | 22,473 | 13,4 | 9,073 | 10,34 | 29,11 | -39,45 |
| | | | | | | | 4,75 | | | 4,313 | | | 1,98 | | |
| K | 6 | 3,864 | 0,368 | 20,2 | 0,345 | 0,938 | 4,75 | 128,5 | 4,62 | 4,45 | 11,06 | -6,61 | 1,64 | 30,07 | -31,71 |
| 3 | 8 | 4,416 | 0,184 | 10,43 | 0,181 | 0,983 | 4,75 | 138 | -3,58 | 4,67 | 5,8 | -1,13 | 0,86 | 31,51 | -32,37 |
| C | 10 | 4,6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4,75 | 147,5 | 0 | 4,75 | 0 | 0 | 4,75 | 32,06 | -36,81 |
| 4 | 12 | 4,416 | -0,184 | -10,43 | -0,181 | 0,983 | 4,75 | 157 | 15,42 | 4,67 | -5,8 | 10,47 | -0,86 | 31,51 | -30,65 |
| Э | 12,48 | 4,318 | -0,228 | -12,84 | -0,222 | 0,975 | 0 | 158,13 | 19,69 | 0 | -7,12 | 7,12 | 0 | 31,23 | -31,23 |
| 5 | 15 | 3,45 | -0,46 | -24,7 | 0,418 | 0,908 | -25,25 | 126,25 | 15,64 | -22,93 | -13,4 | -9,53 | 10,55 | 29,11 | -39,66 |
| 6 | 18 | 1,656 | -0,736 | -36,35 | -0,593 | 0,805 | -25,25 | 50,5 | -2,59 | -20,33 | -19,01 | -1,32 | 14,97 | 25,8 | -40,77 |
| B | 20 | 0 | -0,92 | -42,61 | -0,677 | 0,736 | -25,25 | 0 | 0 | -18,58 | -21,7 | 3,12 | 17,09 | 23,59 | -40,68 |

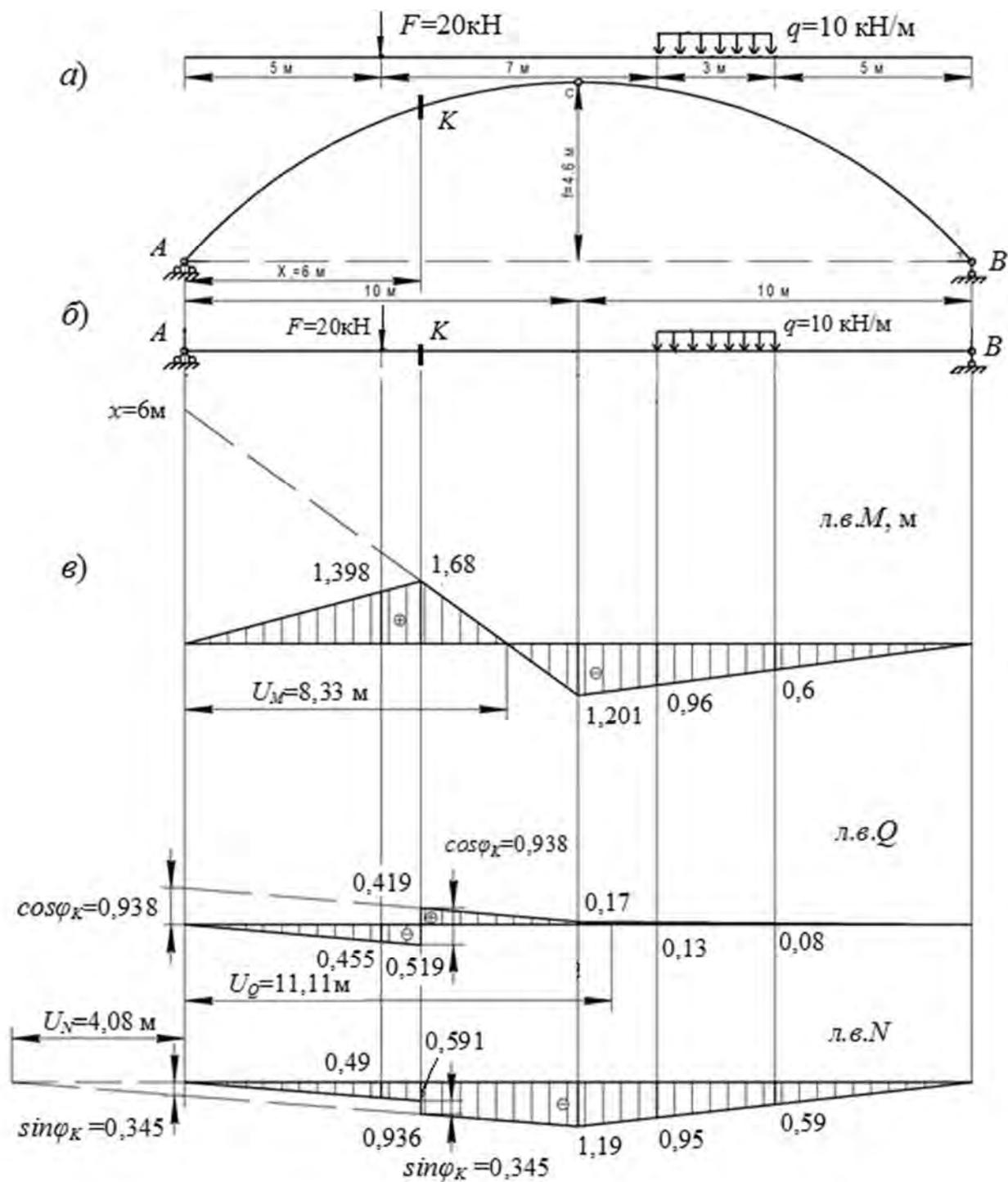


Рисунок 4.4 – К расчету трехшарнирной арки

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Построить эпюры распределения внутренних силовых факторов от действия заданной нагрузки (рисунок 4.5).

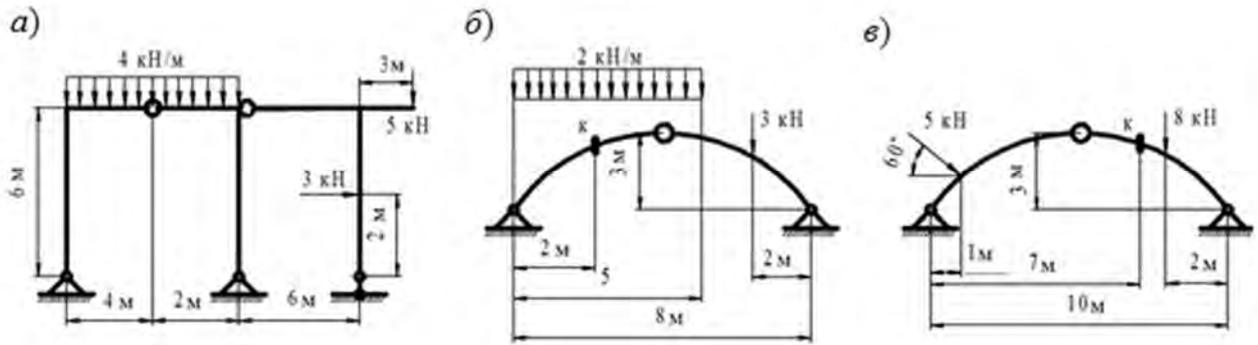


Рисунок 4.5 – К расчету трехшарнирных и составных систем

Контрольные вопросы

- 1 Что такое трехшарнирная система?
- 2 Каковы особенности трехшарнирных систем?
- 3 Что такое распорная система?
- 4 В чем преимущества трехшарнирных систем?
- 5 Дайте определения понятиям «высокая затяжка», «низкая затяжка».
- 6 Для чего нужна затяжка?

5 Расчет плоских ферм

Пример 1 – Для шпренгельной фермы (рисунок 5.1) необходимо во всех стержнях второй панели справа аналитически определить усилия от действия заданной нагрузки; построить для этих стержней линии влияния и определить по ним усилия в стержнях.

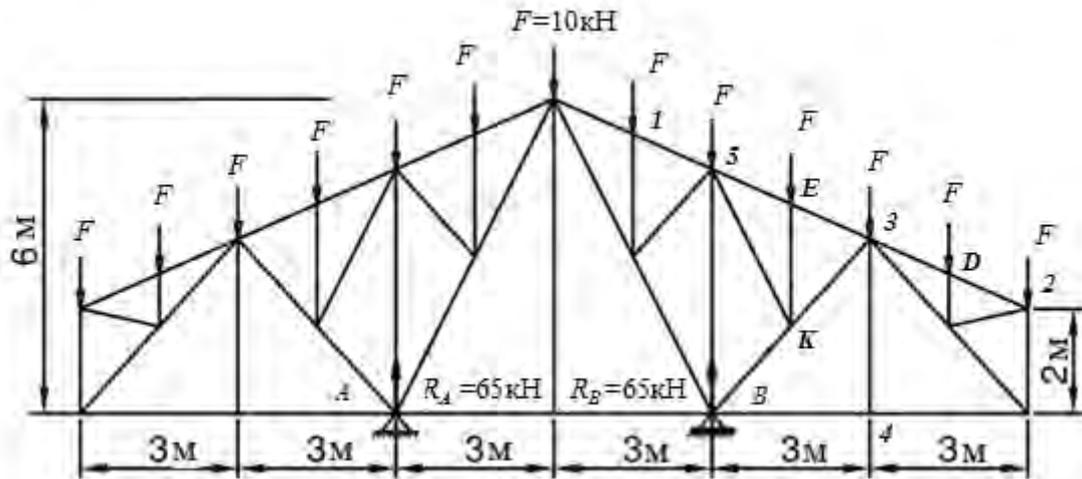


Рисунок 5.1 – К расчету плоской фермы

Решение

Определяем реакции в опорах фермы:

$$\sum M_A = -F \cdot (1,5 + 3 + 4,5 + 6) + F \cdot (1,5 + 3 + 4,5 + 6 + 7,5 + 9 + 10,5 + 12) - R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = R_A = 65 \text{ кН.}$$

Прежде чем определять усилия в стержнях заданной панели, необходимо установить, к какому типу относится каждый из исследуемых стержней. Для этого рассмотрим отдельно основную ферму и шпренгель.

Основная ферма представлена на рисунке 5.2. Определим усилия во всех стержнях ее второй панели, считая справа.

Рассмотрим равновесие правой отсеченной части основной фермы относительно сечения I-I (рисунок 5.3, а) и определим усилия в стержнях первого типа.

Определим методом моментной точки усилия в стержнях 3-5, 3-B, B-4:

$$\sum M_B = 20 \cdot 3 + 15 \cdot 6 - N_{3-5} \cdot 4,258 = 0; \quad N_{3-5} = 35,228 \text{ кН;}$$

$$\sum M_O = -20 \cdot 7,5 - 15 \cdot 4,5 - N_{3-B} \cdot 7,8 = 0; \quad N_{3-B} = -27,88 \text{ кН;}$$

$$\sum M_3 = 15 \cdot 3 - N_{B-4} \cdot 3,33 = 0; \quad N_{B-4} = 13,51 \text{ кН.}$$

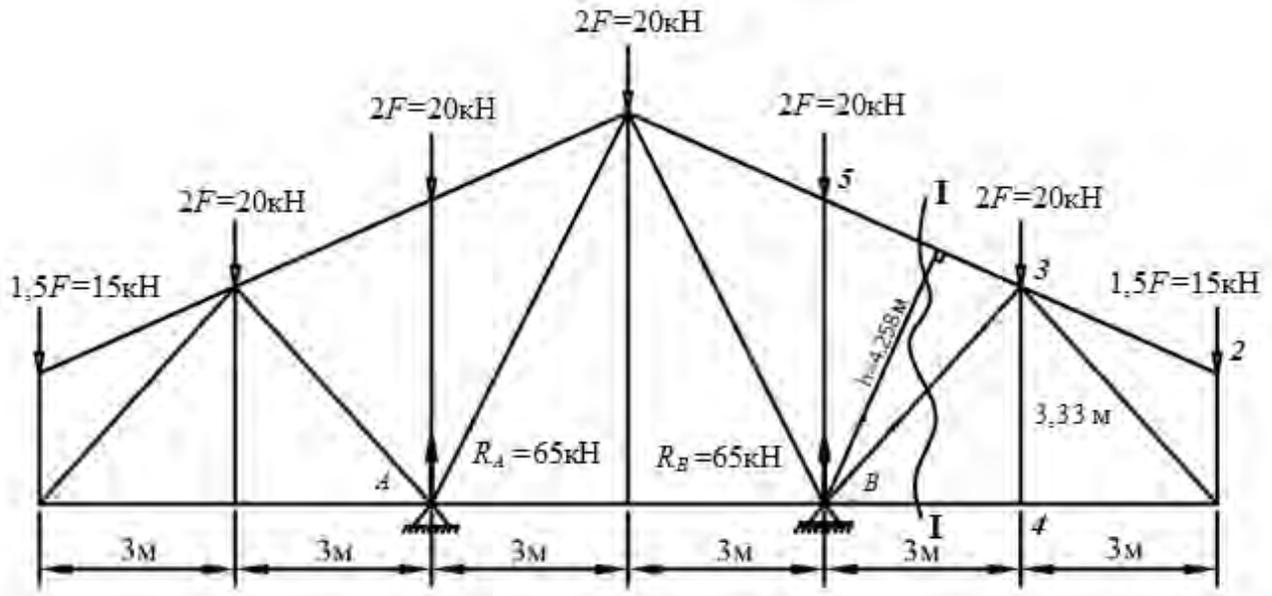


Рисунок 5.2 – Основная ферма

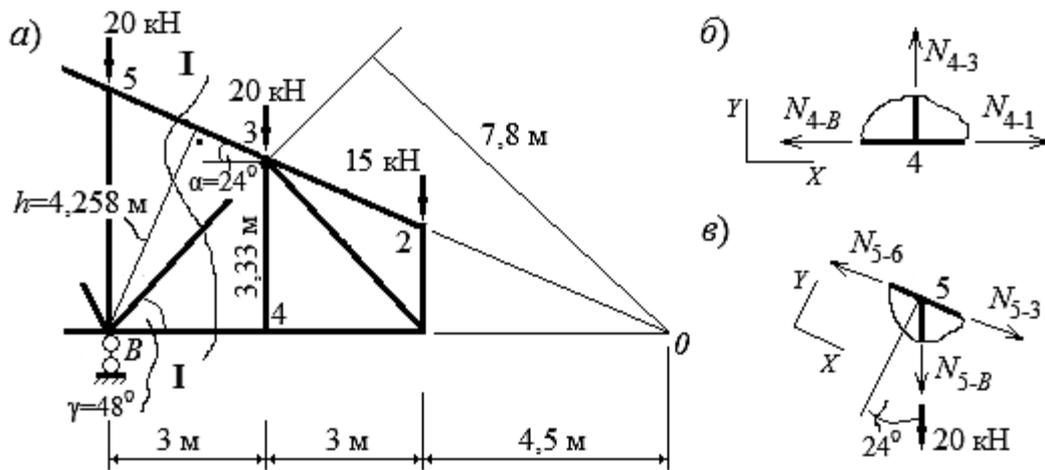


Рисунок 5.3 – К определению усилий в стержнях плоской фермы от действия заданной нагрузки

Усилия в стержнях 3–B и B–4 могут быть определены и методом проекций при значениях углов $\alpha = 24^\circ$; $\gamma = 48^\circ$:

$$\sum Y = -20 - 15 + 35,228 \cdot \sin \alpha - N_{3-B} \cdot \sin \gamma = 0; \quad N_{3-B} = -27,88 \text{ кН};$$

$$\sum X = -N_{3-5} \cdot \cos \alpha - N_{3-B} \cdot \cos \gamma + N_{B-4} = 0; \quad N_{B-4} = 13,51 \text{ кН}.$$

Найдем усилия в стержнях 4–3, 5–B методом вырезания узлов (рисунок 5.3, б, в):

$$\sum Y = N_{4-3} = 0 \text{ кН}; \quad \sum Y = 20 \cdot \cos 24^\circ + N_{5-B} \cdot \cos 24^\circ = 0; \quad N_{5-B} = -20 \text{ кН}.$$

Рассмотрим шпренгель (рисунок 5.4) и определим усилия в стержнях второго типа $K-E$, $K-5$, $3-E$:

$$\sum M_5 = -5 \cdot 3 - N_{K-E} \cdot 1,5 = 0; \quad N_{K-E} = -10 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 5 \cdot 1,5 + N_{K-5} \cdot 1,04 = 0; \quad N_{K-5} = -7,21 \text{ кН};$$

$$\sum M_K = -5 \cdot 1,5 - N_{3-E} \cdot 2,13 = 0; \quad N_{3-E} = -3,52 \text{ кН}.$$

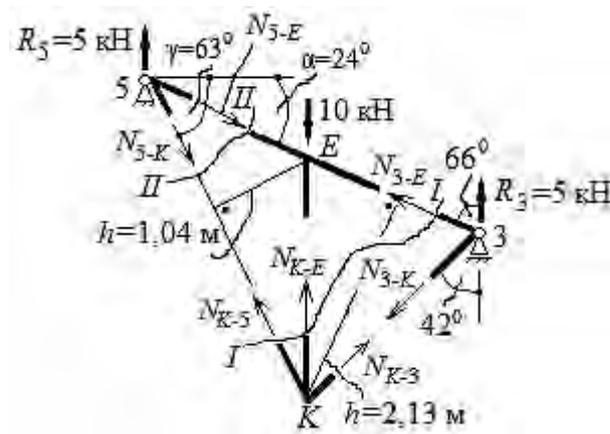


Рисунок 5.4 – К определению усилий в стержнях плоской фермы от действия заданной нагрузки

Усилие в стержне $5-E$ определяется методом проекций ($\alpha = 24^\circ$; $\gamma = 63^\circ$):

$$\sum Y = -5 - N_{5-E} \cdot \sin \alpha - N_{5-K} \cdot \sin \gamma = 0; \quad N_{5-E} = -3,52 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне $3-K$ определяется методом вырезания узла (узел 3):

$$\sum Y = 5 + N_{3-E} \cdot \cos 66^\circ - N_{3-K} \cdot \cos 42^\circ = 0; \quad N_{3-K} = 4,80 \text{ кН}.$$

Определяем усилия в стержнях третьей категории $5-3$ и $3-B$:

$$N_{5-3} = N_{3-5} + N_{5-E} = 35,228 - 3,520 = 31,708 \text{ кН};$$

$$N_{B-3} = N_{3-B} + N_{K-3} = -27,88 + 4,80 = -23,08 \text{ кН}.$$

Построение линий влияния

Условимся, что сила $F = 1$ перемещается по верхнему поясу.

Поскольку опорные реакции в балочной ферме такие же, как в простой балке, то и линии влияния для них будут одинаковыми.

Построим линию влияния для **стержня 5–3**. Так как этот стержень относится к первому типу, то будем рассматривать основную ферму. Рассмотрим случай расположения силы $F = 1$ левее узла 5 и составим уравнение равновесия для правой отсеченной части фермы:

$$\sum M_B = -N_{5-3} \cdot 4,258 = 0; \quad N_{5-3} = 0.$$

Отложим полученное значение левее узла 5 фермы, т. е. линия влияния усилия N_{5-3} левее узла 5 совпадает с осью.

Рассмотрим случай расположения силы $F = 1$ правее узла 3 и составим уравнение равновесия для левой отсеченной части фермы:

$$\sum M_B = N_{5-3} \cdot 4,258 + R_A \cdot 6 = 0; \quad N_{5-3} = -1,41 \cdot R_A.$$

Таким образом, линия влияния правее узла 3 аналогична линии влияния опорной реакции R_A , ординаты которой умножены на $-1,41$. Сносим узлы 3 и 5 на построенные линии и соединяем полученные точки передаточной прямой (рисунок 5.5, *г*).

Построим линию влияния для **стержня 4–3**. Для этого вырежем узел 4 (рисунок 5.5, *з*). При расположении силы $F = 1$ правее и левее узла 4 усилие $N_{4-3} = 0$ (поскольку сила $F = 1$ перемещается по верхнему поясу, ее расположение в самом узле 4 не рассматривается). Следовательно, линия влияния для этого стержня равна нулю.

Построим линию влияния для **стержня E–K**. Для этого вырежем узел *E* (рисунок 5.5, *и*). При расположении силы $F = 1$ правее и левее узла *E* усилие $N_{E-K} = 0$. Определяем усилие N_{E-K} при расположении силы $F = 1$ в узле *E*:

$$\sum Y = 1 \cdot \cos 25^\circ + N_{E-K} \cdot \cos 25^\circ = 0; \quad N_{E-K} = -1.$$

Построим линию влияния для **стержня K–5**. Так как этот стержень относится ко второму типу, будем рассматривать шпренгель (рисунок 5.5, *к*). При положении силы $F = 1$ в узлах 5 и 3 усилие $N_{K-5} = 0$. Определяем усилие N_{K-5} при расположении силы $F = 1$ в узле *E*:

$$\sum M_E = N_{K-5} \cdot 1,04 + R_5 \cdot 1,5 = 0; \quad N_{K-5} = -0,72.$$

Аналогично строятся линии влияния для остальных стержней (рисунок 5.5, *д–о*).



Определим усилие в стержне 3–B по линии влияния:

$$N_{3-B} = -0,58 \cdot 15 - 0,96 \cdot 20 = -27,9 \text{ кН.}$$

Аналогичный расчет выполняется для остальных стержней.

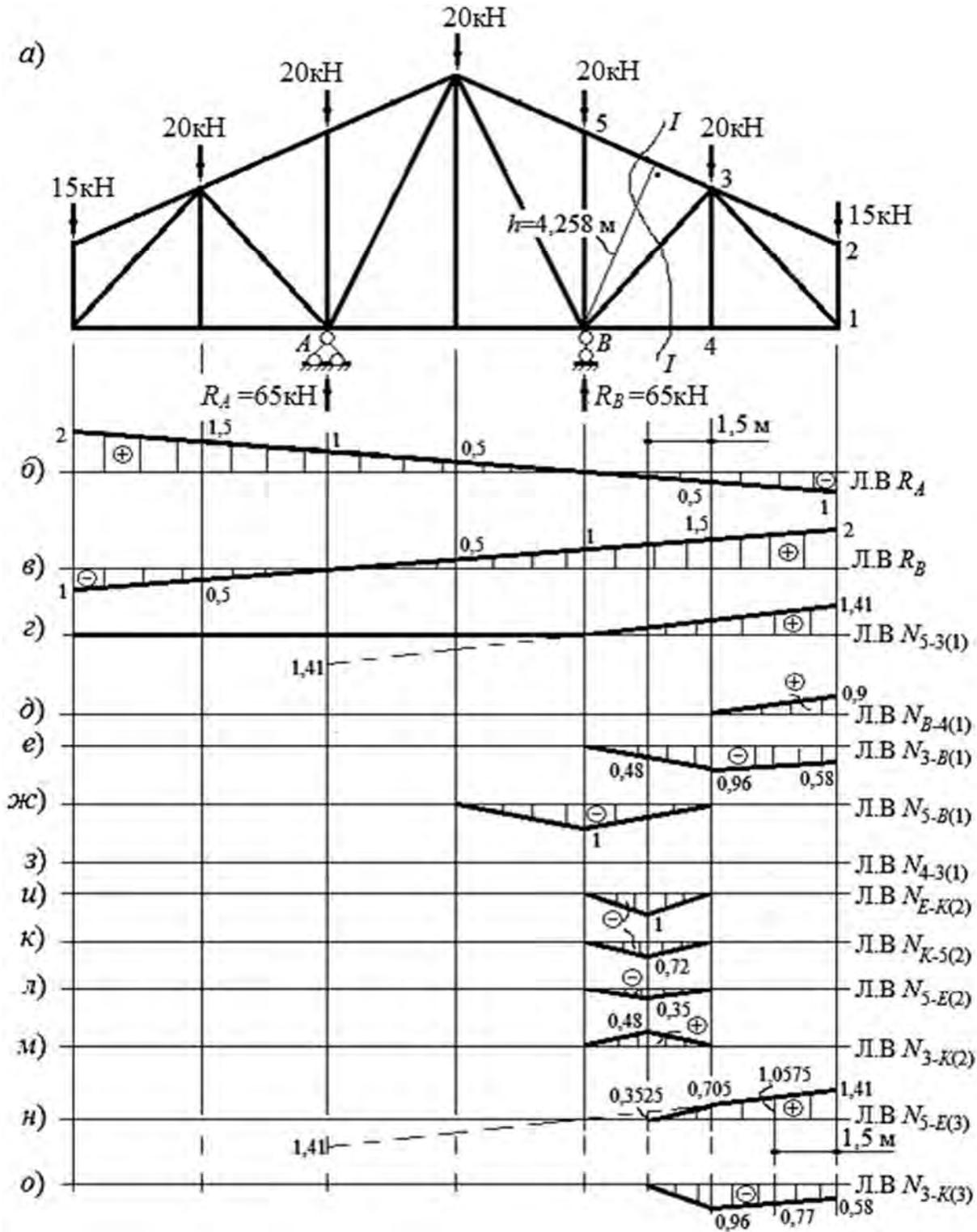


Рисунок 5.5 – К построению линий влияния для стержней плоской фермы

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить усилия в выделенных стержнях, а также построить для них линии влияния (рисунок 5.6).

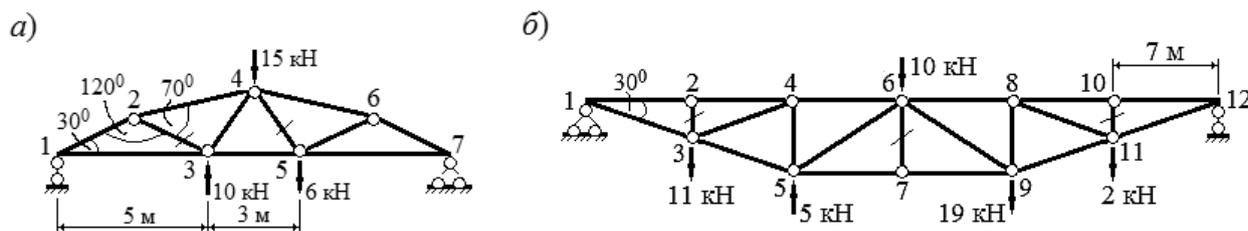


Рисунок 5.6 – К расчету плоской фермы

Контрольные вопросы

- 1 Что такое ферма? Классификация ферм.
- 2 В чем принципиальное отличие при расчете ферм с жесткими и шарнирными узлами?
- 3 Какого рода деформации испытывают стержни фермы при узловом приложении внешних нагрузок?
- 4 Перечислите основные аналитические методы определения усилий в стержнях фермы и особенности их применения.
- 5 Как строятся линии влияния в зависимости от расположения ездового пояса фермы?
- 6 Дайте определение шпренгельной ферме и поясните назначение шпренгелей.
- 7 В чем состоит особенность расчета шпренгельных ферм?
- 8 Дайте определение термину «передаточная прямая».
- 9 Особенности построения линий влияния в стержнях шпренгельных ферм.
- 10 Как определяются усилия по линиям влияния от действия неподвижных нагрузок?

6 Основные теоремы строительной механики и определение перемещений

Пример 1 – Для заданной балки определить прогиб и угол поворота в промежуточном шарнире B (рисунок 6.1, a).

Решение

Разобьем балку на две части для определения реакций на опорах (рисунок 6.1, b). Грузовая эпюра изгибающих моментов M_F показана на рисунке 6.1, $в$.

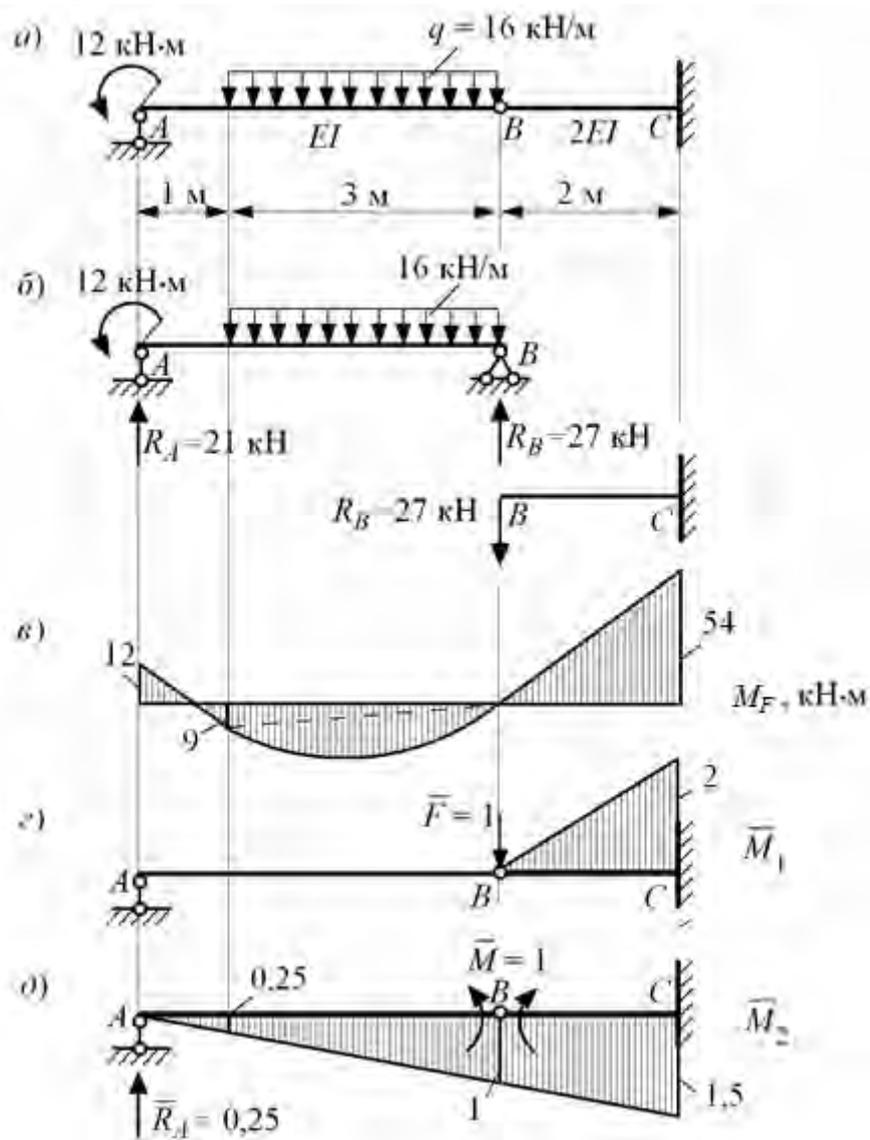


Рисунок 6.1 – К определению прогиба и угла поворота шарнира

Для определения прогиба в шарнире B составим вспомогательную систему (рисунок 6.1, $г$), для которой построим единичную эпюру \bar{M}_1 .

Определим прогиб по способу Верещагина, перемножив грузовую

и единичную эпюры:

$$y_B = \sum \frac{\omega_P y_c}{EI} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} 54 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 \right) = \frac{36}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Направление прогиба совпадает с направлением единичной силы.

Для определения угла поворота в шарнире B составим вспомогательную систему (рисунок 6.1, δ), для которой построим единичную эпюру \bar{M}_2 . Для перемножения эпюр M_F и \bar{M}_2 балку разобьем на три участка. Воспользуемся формулой трапеции, представив треугольник как трапецию с нулевой стороной:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} (2 \cdot 9 \cdot 0,25 - 12 \cdot 0,25) + \frac{3}{6} (2 \cdot 9 \cdot 0,25 + 9 \cdot 1) + \frac{16 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{0,25 + 1}{2} \right) -$$

$$- \frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{6} (2 \cdot 54 \cdot 1,5 + 1 \cdot 54) \right) = - \frac{6,5}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Знак «минус» (–) означает, что направление угла поворота на промежуточном шарнире B не совпало с направлением единичного момента.

Пример 2 – Для изображенной на рисунке 6.2, a рамы определить полное перемещение и угол поворота точки C , а также горизонтальное смещение опоры B (x_B) способом Верещагина, если жесткость вертикальных элементов рамы равна $2EI$, а горизонтальных – EI .

Решение

После определения реакций на опорах построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F (рисунок 6.2, b).

Полное перемещение точки C определяется условием

$$y_c^{\text{полн}} = \sqrt{(y_c^{\text{верт}})^2 + (y_c^{\text{гор}})^2}.$$

Для определения вертикального перемещения точки C приложим к ней вертикальное усилие, равное единице, найдем опорные реакции и построим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рисунок 6.2, $в$). Перемножая ее с грузовой эпюрой изгибающих моментов M_F по правилу Верещагина, находим величину вертикального перемещения точки C :



$$y_c^{вверх} = \frac{M_F \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 30 \cdot 0 + 2 \cdot 10 \cdot 1 - 30 \cdot 1 + 10 \cdot 0) - \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \\ + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{20 \cdot 1^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{-57,5}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Знак «минус» (–) говорит о том, что точка C перемещается в сторону, противоположную направлению единичного вертикального усилия, т. е. вверх.

Для определения горизонтального перемещения точки C приложим к ней горизонтальное единичное усилие, найдем опорные реакции и построим единичную эпюру изгибающих моментов \overline{M}_2 (рисунок 6.2, з). Также перемножая ее с грузовой эпюрой изгибающих моментов M_F по правилу Верещагина, найдем величину горизонтального перемещения точки C :

$$y_c^{зоп} = \frac{M_F \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 30 \cdot 3 + 2 \cdot 10 \cdot 0 + 30 \cdot 0 - 30 \cdot 3) + \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) + \\ + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{305}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Знак «плюс» (+) в ответе свидетельствует о том, что точка C перемещается в сторону, совпадающую с направлением единичного горизонтального усилия, т. е. смещаться она будет вправо.

Таким образом, полное перемещение точки C

$$y_c^{полн} = \sqrt{(y_c^{вверх})^2 + (y_c^{зоп})^2} = \sqrt{\left(\frac{-57,5}{EI}\right)^2 + \left(\frac{305}{EI}\right)^2} = \frac{310,37}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Для определения угла поворота точки C приложим к ней единичный изгибающий момент, рассчитаем опорные реакции и построим единичную эпюру изгибающих моментов \overline{M}_3 (рисунок 6.2, д). Перемножим эпюры M_F и \overline{M}_3 :

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{6} (2 \cdot 10 \cdot 1 - 30 \cdot 1) - \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{20 \cdot 1^3}{12} \cdot 1 \right) = \frac{-56,67}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Направление угла поворота θ_C происходит в сторону, противоположную направлению единичного момента.

Для определения горизонтального смещения опоры B приложим к ней горизонтальную единичную силу и построим единичную эпюру изгибающих моментов \overline{M}_4 (рисунок 6.2, е). Перемножим эпюры M_F и \overline{M}_4 по способу Верещагина:



$$y_B^{zop} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 30 \cdot 3 - 2 \cdot 10 \cdot 3 + 30 \cdot 3 - 10 \cdot 3) + \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot 3 \right) = \frac{485}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Знак «ПЛЮС» (+) указывает на то, что опора Bx_B смещается вправо.

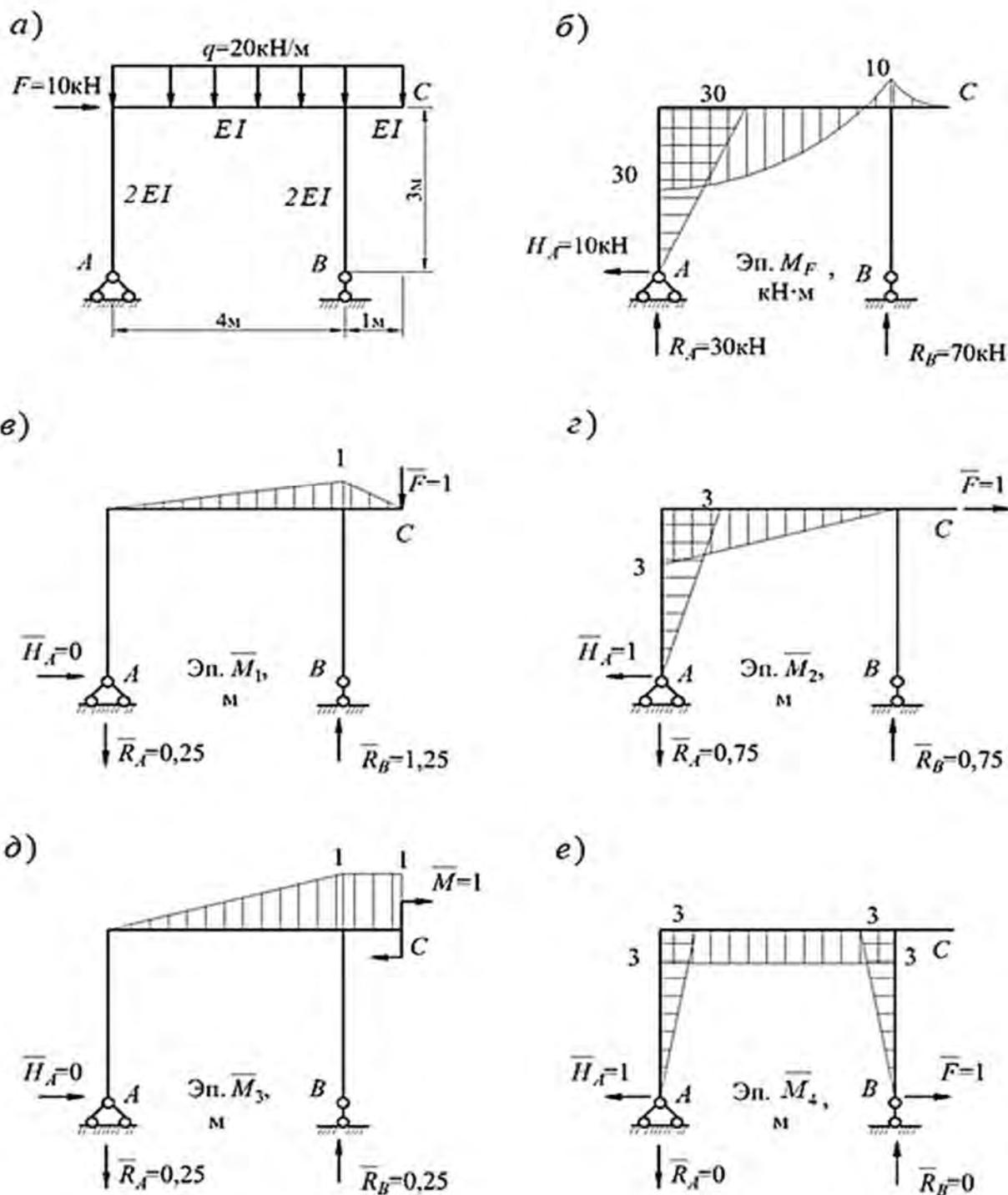


Рисунок 6.2 – К определению прогиба и угла поворота в раме

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Для балки, показанной на рисунке 6.3, а, определить вертикальное перемещение и угол поворота для точки С. Для рамы, показанной на рисунке 6.3, б, определить вертикальное, горизонтальное перемещение и угол поворота для точки С.

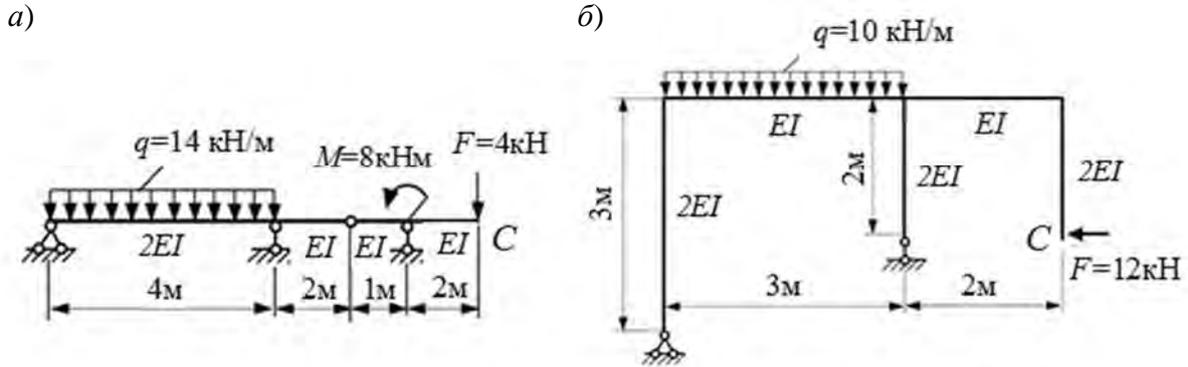


Рисунок 6.3 – К определению прогиба и угла поворота сечений

Контрольные вопросы

- 1 Как определяется действительная работа внешних и внутренних сил?
- 2 Как определяется потенциальная энергия деформаций системы?
- 3 Работа внутренних и внешних сил на обобщенных перемещениях. Теорема взаимности работ. Теорема взаимности перемещений.
- 4 Определение перемещений упругих систем. Интеграл Мора. Формула Симпсона. Способ Верещагина.
- 5 Какие существуют особенности при определении перемещений в балках, рамах, арках и фермах?
- 6 Как находятся температурные перемещения?

Список литературы

1 **Дарков, А. В.** Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 656 с.: ил.

2 **Смирнов, В. А.** Строительная механика: учебник для вузов / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий; под ред. В. А. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2018. – 423 с.

3 **Шапошников, Н. Н.** Строительная механика: учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков; под общ. ред. Н. Н. Шапошникова. – 13-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2017. – 692 с.: ил.

