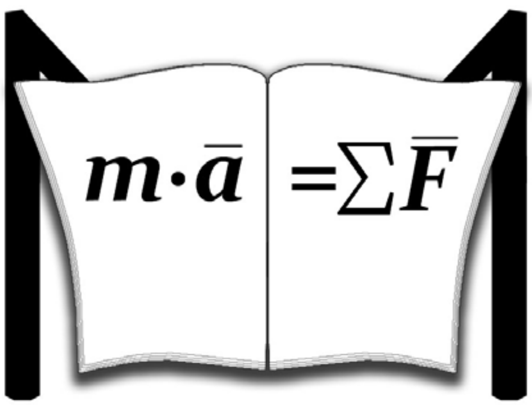
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств» дневной формы обучения



Могилев 2019

УДК 531
ББК 22.21
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «04» ноября 2019 г., протокол № 4

Составитель канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Теоретическая механика» для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств» дневной формы обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов.

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий.
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Указания по подготовке к практическим занятиям

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: механика материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика, сварные конструкции, теория сварочных процессов и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» изучают теоретическую механику на протяжении 2-го и 3-го семестров. Объемы часов лекций, практических занятий и самостоятельной работы, а также формы контроля приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Распределение часов в семестрах по теоретической механике

Курс	Семестр	Лекция, ч	Практическое занятие, ч	Самостоятельная работа, ч	Форма контроля	Всего часов/ зач. ед.
1	2 (весенний)	34	50	36	Зачет	120/3
2	3 (осенний)	34	50	36	Экзамен	120/3

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;
– выполнение и защита индивидуальных заданий;
– выполнение восьми контрольных работ;
– на практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;
– ответить на контрольные вопросы, приведенные в методических рекомендациях;
– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [4, 5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. Студенты защищают индивидуальные задания во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не сдавшие индивидуальные задания, не допускаются к экзамену или зачету по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

2 Статика

2.1 Входной рейтинг-контроль. Связи и их реакции

1 Входной рейтинг-контроль.
2 Основные понятия и задачи статики.
3 Аксиома о связях.
4 Основные типы связей и их реакции.
5 Решить задачи 1.1.5, 1.1.10, 1.1.12, 1.1.31, 1.3.4, 1.3.6, 1.3.9 из [5].

2.2 Равновесие системы сходящихся сил

1 Аксиомы статики.
2 Две основные задачи статики.
3 Дать определение понятий: равновесие тела, связь, реакции связей.
4 Основные типы связей.
5 Дать определение сходящейся системы сил и условия ее равновесия в векторной и аналитической формах.
6 Теорема о трех силах.
7 Проекция силы на ось.
8 Решить задачи 2.6, 2.10, 2.19 из [4], 1.2.9, 1.2.12 из [5].

Задача 1. Какую по модулю силу F_3 надо приложить к сходящимся силам F_1 = 2 Н и F_2 = 4 Н, образующим с осью Ox углы α = 30º и β = 60º, чтобы равнодействующая этих трех сил равнялась нулю (рисунок 1)?

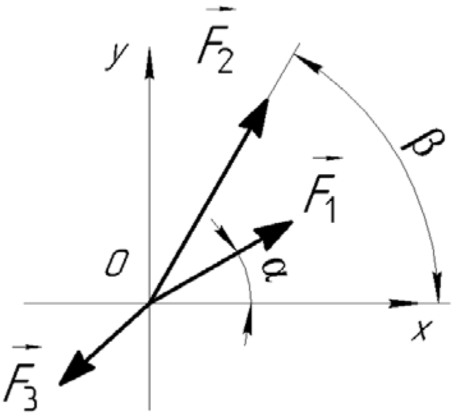


Рисунок 1

Решение

Для нахождения равнодействующей сил, расположенных произвольно в плоскости, необходимо спроецировать уравнение $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ на координатные оси.

Проекция на ось Ox

$$R_X = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta - F_{3X}. \qquad (1)$$

Проекция на ось Oy

$$R_Y = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta - F_{3Y}. \qquad (2)$$

Так как $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$, то равнодействующая будет равна нулю, когда каждое слагаемое будет равно нулю.

$$0 = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta - F_{3X}, \qquad (3)$$

$$0 = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta - F_{3Y}. \qquad (4)$$

Из полученных уравнений находим проекции силы $\vec{F}_3$ на координатные оси *Ox* и *Oy*.

$$F_{3X} = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta = 2 \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot \cos 60^\circ = 3{,}73\,\text{Н};$$

$$F_{3Y} = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta = 2 \cdot \sin 30^\circ + 4 \cdot \sin 60^\circ = 4{,}46\,\text{Н}.$$

Тогда

$$F_3 = \sqrt{F_{3X}^2 + F_{3Y}^2} = \sqrt{3{,}73^2 + 4{,}46^2} = 5{,}81\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_3 = 5{,}81$ Н.

2.3 Приведение системы сил к простейшему виду

1 Момент силы относительно точки.

2 Теорема о моменте равнодействующей силы.

3 Как определяется равнодействующая распределенных сил (прямоугольный, треугольный и трапецеидальный законы распределения)?

4 Понятие о паре сил.

5 Метод Пуансо и основная теорема статики.

6 Решить задачи 7.6, 7.11 из [4], 1.1.4, 1.1.10, 2.2.13, 2.2.19 из [5].

2.4 Равновесие плоской системы сил

1 Главный вектор и главный момент системы сил.

2 Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в векторном виде.

3 Различные формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил в аналитическом виде.

4 Условия равновесия плоской системы параллельных сил.

5 Решить задачи 4.27, 4.29 из [4], 2.3.11, 2.4.2, 2.4.10, 2.4.24 из [5].

Задача 2. Определить реакции опор балки *AB* (рисунок 2), если *F* = 10 кН, *q* = 2 кН/м, *M* = 3 кН·м.

Решение

Рассмотрим равновесие балки *AB* под действием силы *F*, момента *M*, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

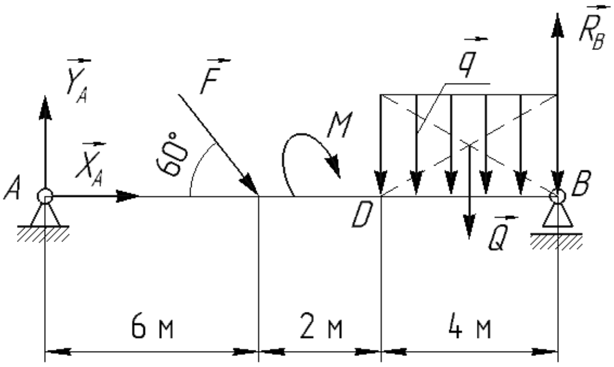


Рисунок 2

Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей *Q* = 4*q* = 8 кН, которая приложена в середине участка *BD*:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + F \cdot \cos 60^\circ = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A - F \cdot \sin 60^\circ - Q + R_B = 0; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -6 \cdot F \cdot \sin 60^\circ - M - 10 \cdot Q + 12 \cdot R_B = 0. \tag{7}$$

Из (5) находим

$$X_A = -F \cdot \cos 60^\circ = -10 \cdot 0{,}5 = -5 \text{ кН},$$

из (7)

$$R_B = \frac{6 \cdot F \cdot \sin 60^\circ + M + 10 \cdot Q}{12} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 10 \cdot 8}{12} = 11{,}25 \text{ кН},$$

из (6)

$$Y_A = F \cdot \sin 60^\circ + Q - R_B = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11{,}25 = 5{,}41 \text{ кН}.$$

Ответ: X_A = -5 кН, Y_A = 5,41 кН, R_B=11,25 кН.

Знак «–» показывает, что направление X_A противоположно направлению, показанному на рисунке 2.

2.5 Определение реакций опор твердого тела

1 Проекция силы на ось.

2 Основные типы связей и их реакции.

3 Момент силы относительно центра.

4 Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.

5 Выполнить индивидуальное задание № 1 «Определение реакций опор твердого тела».

2.6 Равновесие системы тел

1 Дать определение понятия сочлененной системы тел.

2 Статически определимые и статически неопределимые системы.

3 Методика расчета сочлененных систем тел: возможные варианты составления расчетных схем, используемые аксиомы, количество линейно независимых уравнений равновесия.

4 Решить задачи 3.2.11, 3.2.22, 3.3.4 из [5], 4.33, 4.34, 4.35, 4.43 из [4].

Задача 3. Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки (рисунок 3), если $M = 8$ кН/м, $q = 2$ кН/м, $P = 6$ кН.

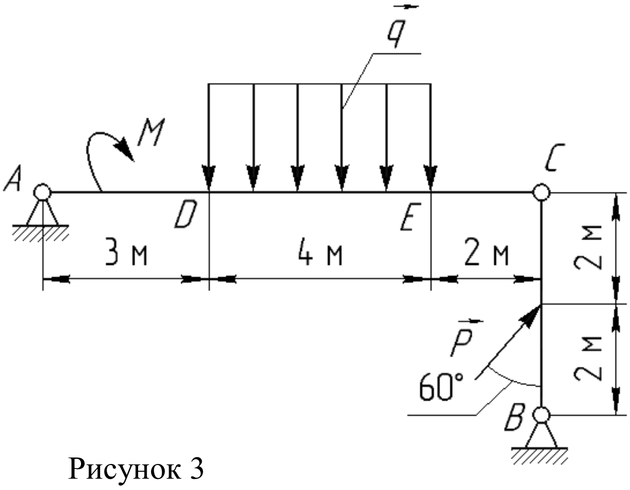


Рисунок 3

Решение

Расчленим составную балку по шарниру C и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q, реакций $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ шарнирно-неподвижной опоры A и реакций $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ шарнира C (рисунок 4).

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 4q = 8$ кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рисунке 4.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + X_C = 0; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A + Y_C - Q = 0; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -M - Q \cdot 5 + Y_C \cdot 9 = 0. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\vec{P}$, реакции шарнирно-неподвижной опоры B и реакции шарнира C (рисунок 5).

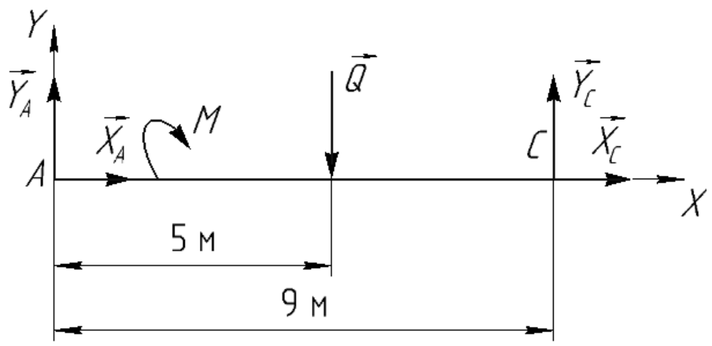


Рисунок 4

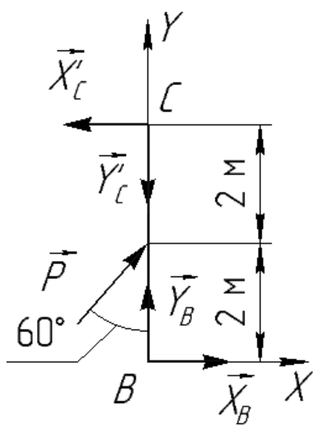


Рисунок 5

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X'_C\ ;\ Y_C = Y'_C\ ;$$

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C\ ;\ \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C\ .$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_B - X'_C + P\cdot\cos 30° = 0\,; \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = -Y'_C + P\cdot\sin 30° + Y_B = 0\,; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = P\cdot 2\cos 30° + X_B\cdot 4 = 0\,. \tag{13}$$

Находим из уравнения (6)

$$X_B = \frac{-P\cdot 2\cos 30°}{4} = \frac{-6\cdot 2\cos 30°}{4} = -2{,}6\ \text{кН},$$

из (11)

$$X'_C = X_B + P\cos 30° = -2{,}6 + 6\cos 30° = 2{,}6\ \text{кН},$$

из (10)

$$Y_C = \frac{M + Q\cdot 5}{9} = \frac{8 + 8\cdot 5}{9} = 5{,}33\ \text{кН},$$

из (12)

$$Y_B = -P\sin 30° + Y'_C = -6\sin 30° + 5{,}33 = 2{,}33\ \text{кН},$$

из (9)

$$Y_A = -Y_C + Q = -5{,}33 + 8 = 2{,}67\ \text{кН},$$

из (8)

$$X_A = -X_C = -2{,}6\,\text{кН}.$$

Ответ: X_A = – 2,6 кН, Y_A = 2,67 кН, X_B = – 2,6 кН, Y_B = 2,33 кН, X_C = 2,6 кН, Y_C = 5,33 кН.

Знак «–» показывает, что реакции X_A и X_B направлены противоположно направлениям, показанным на рисунках 4 и 5.

2.7 Контрольная работа № 1 «Плоская произвольная система сил»

2.8 Произвольная пространственная система сил

1 Векторное выражение для определения момента силы относительно точки.

2 Как определяется момент силы относительно оси?

3 Аналитические формулы для определения момента силы относительно трех координатных осей.

4 Геометрические и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

5 Решить задачи 6.8, 6.17, 8.8, 8.35 из [4], 1.4.6, 5.5.6, 5.5.12, 5.6.4 из [5].

2.9 Произвольная пространственная система сил. Равновесие системы тел

1 Геометрические и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

2 Методика расчета сочлененных систем тел: возможные варианты составления расчетных схем, используемые аксиомы.

3 Количество линейно независимых уравнений равновесия.

4 Решить задачи 8.14, 8.15, 8.16, 8.24 из [4], 5.7.2, 5.7.7, 5.7.9, 5.7.13 из [5].

2.10 Равновесие произвольной пространственной системы сил

1 Проекция силы на ось.

2 Основные типы связей и их реакции.

3 Момент силы относительно оси.

4 Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.

5 Выполнить индивидуальное задание № 2 «Равновесие произвольной пространственной системы сил».

2.11 Контрольная работа № 2 «Пространственная произвольная система сил»

2.12 Равновесие при наличии сил трения

1 Дать определение трения скольжения. В чем разница между силой сцепления и силой трения скольжения?

2 Формула для максимальной силы сцепления.

3 Что называют углом трения, конусом трения?

4 Условия наличия и отсутствия скольжения.

5 Дать определение трения качения.

6 Как определяется момент сопротивления качению?

7 Условия наличия и отсутствия качения.

8 Что Вы знаете о коэффициентах трения скольжения и трения качения, их размерности?

9 Решить задачи 5.2, 5.35, 5.38 из [4], 2.5.3, 2.6.6, 2.6.11, 2.6.16 из [5].

2.13 Центр тяжести тел

1 Центр тяжести твердого тела.
2 Центр тяжести объема, площади, линии.
3 Способы определения положения центров тяжести тел.
4 Решить задачи 9.7, 9.12, 9.27 из [4], 6.1.11, 6.2.8, 6.2.10, 6.3.10 из [5].

3 Кинематика

3.1 Простое движение точки

1 Что изучает раздел «кинематика»?
2 Что означает задать движение точки векторным способом?
3 Что означает задать движение точки координатным способом?
4 Как по уравнениям движения определить траекторию движущейся точки?
5 Что значит задать движение точки естественным способом?
6 Оси естественного трехгранника.
7 Решить задачи 10.12, 10.14, 10.12, 12.19, 12.9, 12.14, 12.18, 12.23 из [4], 7.1.5, 7.2.4, 7.3.10, 7.4.12, 7.5.8, 7.6.9, 7.7.14, 7.8.8, 7.8.18 из [5].

3.2 Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения

1 Формулы для определения скорости и ускорения при векторном и координатном способах задания движения точки.
2 Как определяется скорость точки при естественном способе задания движения?
3 Как определяется ускорение точки при естественном способе задания движения?
4 Частные случаи движения точки.
5 Выполнить индивидуальное задание № 3 «Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения».

3.3 Поступательное движение твердого тела

1 Какое движение тела называется поступательным?
2 Какие траектории описывают точки поступательно движущегося тела.
3 Что можно сказать о скоростях и ускорениях точек тела, движущегося поступательно?
4 Решить задачи 8.1.2, 8.1.8, 8.1.11, 8.1.14 из [5].

Задача 1. Точка A шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ движется по закону $S = 0{,}5\pi t^2$ (рисунок 6). Определить скорость и ускорение точки C стержня AB, если $AC = BC$, $O_1B = OA = 0{,}4$ м, $t = 2$ с.

Решение

Стержень *AB* совершает поступательное движение, т. к. в любой момент времени прямая *AB* остается параллельной самой себе.

Следовательно, скорости и ускорения точек *A*, *B*, *C* будут одинаковы:

$$V_C = V_A = \dot{S}; \tag{14}$$

$$V_C = V_A = \pi t;$$

$$a_A^\tau = \dot{V}_A; \tag{15}$$

$$a_A^\tau = \pi = 3{,}14 \ \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{AO}; \tag{16}$$

$$a_A^n = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2}; \tag{17}$$

$$a_C = a_A = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65 \ \text{ м/с}^2.$$

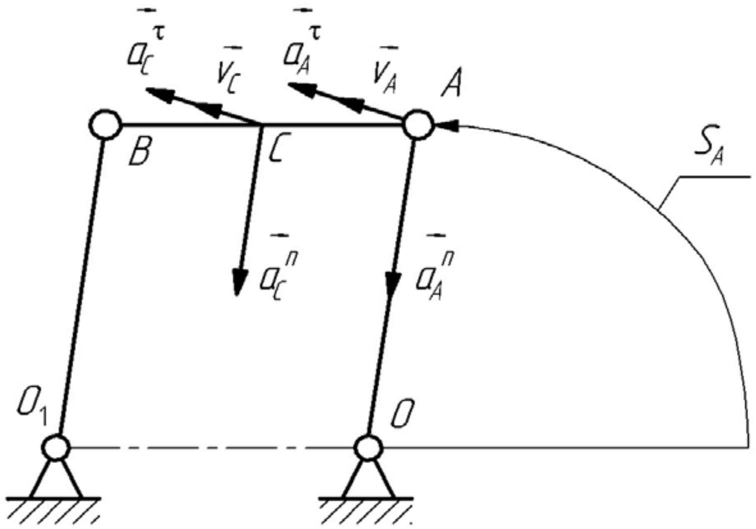


Рисунок 6

Ответ: $V_C = 2\pi$ м/с, $a_C = 98{,}65$ м/с^2.

3.4 Вращательное движение твердого тела

1 Какое движение тела называется вращательным?

2 Как определить кинематические характеристики вращающегося тела:

а) угловую скорость (направление вектора, величину);

б) угловое ускорение (направление вектора, величину)?

3 Как определить кинематические характеристики точек тела, совершающего вращательное движение:

а) скорость точки (направление вектора, величину);

б) ускорение точки (направление вектора, величину)?

4 Формулы для определения угловой скорости, угловой координаты при равнопеременном вращении тела относительно неподвижной оси.

5 Дать определение передаточного механизма (фрикционная, зубчатая, ременная передачи).

6 Что называется передаточным отношением?

7 Решить задачи 13.6, 13.14, 13.15, 13.18, 14.2, 14.5 из [4], 8.2.4, 8.2.13, 8.3.3, 8.3.15 из [5].

Задача 2. Угол поворота тела изменяется по закону $\varphi = 4t^2 + 3t$. Определить полное ускорение точки тела на расстоянии $r = 0{,}25$ м от оси вращения в момент времени $t_1 = 3$ с.

Решение

Так как точка движется по окружности, то ее ускорение можно разложить на составляющие a_τ – касательное, a_n – нормальное.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (18)$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение точки:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4 \cdot t \cdot 2 + 3 \cdot 1; \qquad (19)$$

$$\omega_1 = 4 \cdot t \cdot 2 + 3 \cdot 1\Big|_{t_1 = 3c} = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 27 \ \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 8 \cdot 1 = 8 \ \text{рад/с}^2.$$

Тогда

$$a_1 = 0{,}25 \cdot \sqrt{8^2 + 27^4} = 182{,}26 \ \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 182{,}26$ м/с^2.

3.5 Контрольная работа № 3 «Кинематика точки, поступательное и вращательное движения тела»

3.6 Сложное движение. Скорости точек

1 Дать определения абсолютного, переносного, относительного движений. Как они обозначаются?

2 Дать определения абсолютной, переносной, относительной скоростей точки. Как они обозначаются?

3 Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки.

4 Решить задачи 22.15, 22.17, 22.18, 22.25 из [4], 11.2.9, 11.2.12, 11.2.17, 11.2.20, 11.2.23 из [5].

3.7 Сложное движение. Ускорения точек

1 Дать определения абсолютного, переносного, относительного движений. Как они обозначаются?

2 Дать определения абсолютного, переносного, относительного ускорений точки. Как они обозначаются?

3 Теорема о сложении ускорений для случая поступательного переносного движения.

4 Теорема о сложении ускорений для случая вращательного переносного движения.

5 Как определить ускорение Кориолиса (модуль, направление)?

6 В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

7 Решить задачи 23.8, 23.14, 23.18, 23.36 из [4], 11.3.3, 11.3.14, 11.4.4, 11.5.3, 11.5.5 из [5].

Задача 3. Диск радиусом R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$ рад. По ободу движется точка M по закону $OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3)$ см (рисунок 7). Определить абсолютную скорость точки в момент времени t_1 = 1 с.

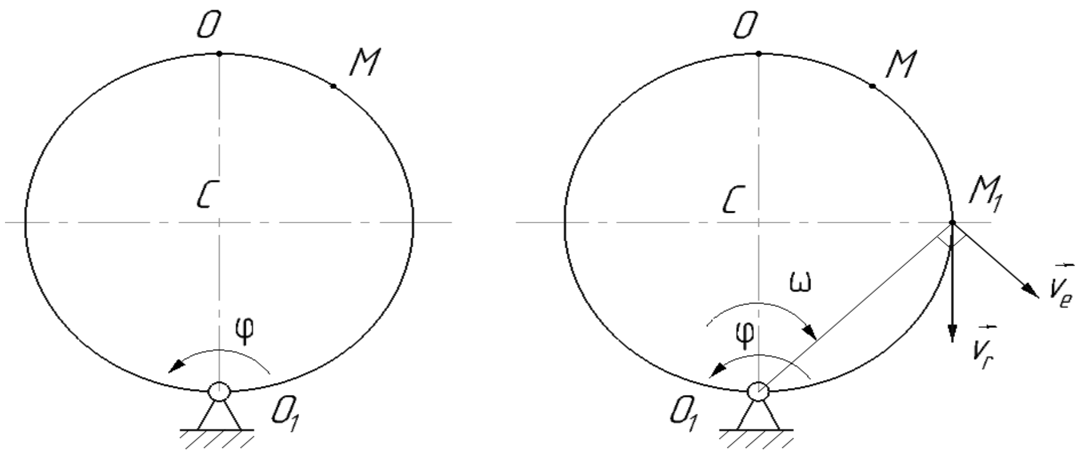


Рисунок 7

Решение

Точка M совершает сложное движение. Движение точки M по ободу диска будет относительным, а движение диска − переносным. Абсолютную скорость точки M находим по формуле

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \tag{20}$$

Определим положение точки M на траектории относительного движения.

При t_1= 1 с

$$OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3) = \frac{\pi \cdot R}{2}.$$

Найдем угол $\angle OCM_1$:

$$\angle OCM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Рассчитаем скорость относительного движения:

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi}{2} R \cdot (4t - 3t^2).$$

При t_1 = 1 с

$$V_r = \dot{S} = \frac{50\pi}{2} \cdot (4 - 3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с}.$$

Так как $V_r > 0$, то вектор $\vec{V}_r$ направлен по касательной к окружности в точке M_1 в сторону увеличения дуги OM (см. рисунок 7).

Определим скорость переносного движения

$$V_e = |\omega| \cdot h, \tag{21}$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При t_1 = 1 с $\omega = -3$ рад/с. Знак «–» показывает, что направление угловой скорости ω противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см},$$

то

$$V_e = |-3| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1O_1}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью (см. рисунок 7). Так как $\angle \vec{V}_e, \vec{V}_r = 45^\circ$, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2 \cdot V_r \cdot V_e \cdot \cos 45^\circ}; \tag{22}$$

$$V_a = \sqrt{211{,}5^2 + 78{,}5^2 + 2 \cdot 211{,}5 \cdot 78{,}5 \cdot 0{,}71} = 272{,}89 \text{ см/с}.$$

Ответ: $V_a = 272{,}89$ см/с.

3.8 Сложное движение

1 Абсолютное, переносное и относительное движения.
2 Теорема о сложении скоростей.
3 Теорема о сложении ускорений.
4 Ускорение Кориолиса (модуль, направление).
5 Выполнить индивидуальное задание № 4 «Определение скоростей и ускорений при сложном движении точки».

3.9 Плоское движение твердого тела. Определение скоростей точек

1 Дать определение плоского движения твердого тела.
2 Из каких простейших движений состоит плоское движение?
3 Кинематические уравнения плоского движения.
4 Теорема о скоростях точек плоской фигуры и следствия из нее.
5 Мгновенный центр скоростей и способы его определения.
6 Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
7 Решить задачи 16.10, 16.18, 16.33, 16.34 из [4], 9.2.7, 9.2.8, 9.4.5, 9.5.3, 9.6.7, 9.6.9 из [5].

Задача 4. Колесо радиусом R = 0,4 м катится по прямолинейному горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω = 2 рад/с (рисунок 8). Центр колеса имеет постоянную скорость $V_C = 0{,}8$ м/с.

Определить скорость точки M обода колеса.

Решение

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}. \tag{23}$$

Примем за полюс точку C, скорость которой известна. Тогда вращательная скорость точки M относительно полюса C

$$V_{MC} = \omega \cdot MC = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{V}_{MC}$ перпендикулярен отрезку MC и направлен в соответствии с угловой скоростью. Поэтому вектор $\vec{V}_{MC}$ относительно полюса C должен показывать направление угловой скорости (см. рисунок 8).

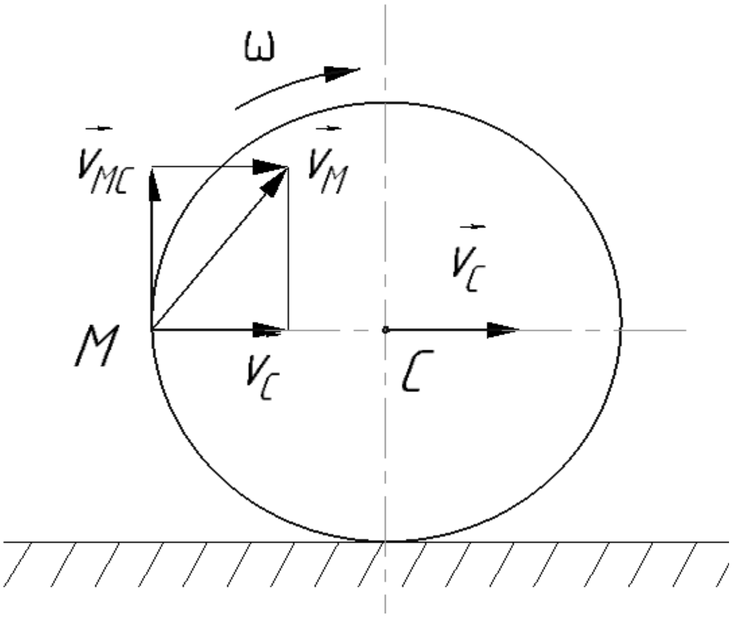


Рисунок 8

Так как $\vec{V}_{MC} \perp \vec{V}_C$, то

$$V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2}\,; \qquad (24)$$

$$V_M = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}8^2} = 1{,}13 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_M = 1{,}13$ м/с.

3.10 Плоское движение твердого тела. Определение ускорений точек

1 Дать определение плоского движения твердого тела.
2 Из каких простейших движений состоит плоское движение?
3 Теорема о сложении ускорений при плоском движении тела.
4 Решить задачи 18.11, 18.22, 18.28, 18.37 из [4], 9.7.4, 9.7.9, 9.7.16, 9.7.21 из [5].

3.11 Плоское движение твердого тела

1 Уравнения плоского движения твердого тела.
2 Мгновенный центр скоростей.
3 Теорема о проекции скоростей точек тела.
4 Теорема о сложении ускорений при плоском движении тела.
5 Выполнить индивидуальное задание № 5 «Плоское движение твердого тела».

3.12 Контрольная работа № 4 «Плоское движение тела, сложное движение точки»

4 Динамика

4.1 Первая задача динамики точки

1 Основные понятия динамики.

2 Основное уравнение динамики для свободной и несвободной материальных точек.

3 Основное уравнение динамики материальной точки в проекциях на естественные и координатные оси.

4 Будет ли изолированная материальная точка сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения?

5 Что можно определить при решении первой задачи динамики материальной точки по заданным массе и уравнениям движения?

6 Охарактеризуйте первую задачу динамики и методику ее решения.

7 Решить задачи 26.9, 26.10, 26.13, 26.15, 26.19 из [4], 13.1.16, 13.1.24, 13.2.11, 13.2.18 из [5].

Задача 1. Материальная точка массой m = 1,4 кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке (рисунок 9).

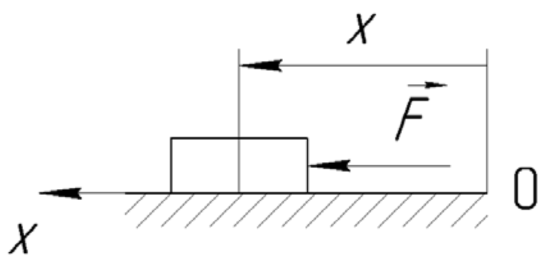


Рисунок 9

Решение

Запишем основное уравнение динамики:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i . \qquad (25)$$

Спроецируем это уравнение на ось X:

$$ma_X = \sum F_{kx} . \qquad (26)$$

Определим значение проекции ускорения на ось X, для чего 2 раза продифференцируем по времени закон движения. Получим

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 12t + 6 \text{ м/с};$$

$$a_X = \frac{dVx}{dt} = 12 \text{ м/с}^2;$$

$$F = 1,4 \cdot 12 = 16,8 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 16,8$ Н.

4.2 Вторая задача динамики точки

1 Что можно определить, зная массу точки и действующие на нее силы?

2 Основные виды сил, действующих на материальную точку. Приведите примеры переменных сил.

3 Постановка второй основной задачи динамики материальной точки и методика ее решения.

4 Последовательность решения второй задачи динамики.

5 Решить задачи 27.2, 27.7, 27.30, 27.39 из [4], 13.3.5, 13.3.13, 13.3.19, 3.3.25 из [5].

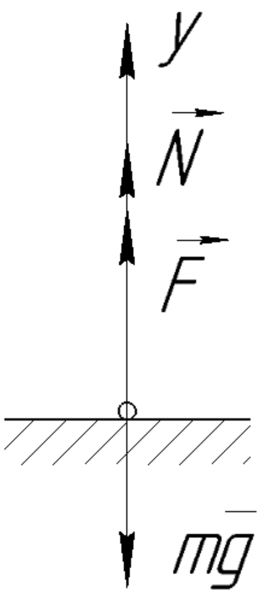


Рисунок 10

Задача 2. На материальную точку массой m = 200 кг, которая находится на горизонтальной поверхности, действует вертикальная подъемная сила $F = 10t^2$ (рисунок 10). Определить время t, при котором начнется движение точки.

Решение

Запишем основное уравнение динамики (25) для условия данной задачи:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}\,. \qquad (27)$$

Спроецируем это уравнение на ось Y:

$$ma_Y = F - mg + N\,. \qquad (28)$$

С учетом того, что в момент отрыва $N = 0$ и $a_Y = 0$, получим

$$0 = F - mg \;\Rightarrow\; F = mg\,.$$

С учетом исходных данных имеем

$$10t^2 = 200 \cdot 9{,}81 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{200 \cdot 9{,}81}{10}} = 14 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 14$ с.

4.3 Свободные колебания материальной точки

1 Под действием какой силы совершаются свободные колебания?

2 Как называются постоянные A, k, β в выражении $x = A \sin(kt + \beta)$?

3 Как определяется собственная частота свободных колебаний?

4 Формула для нахождения периода свободных колебаний.

5 Решить задачи 32.1, 32.15, 32.16, 32.17 из [4], 13.4.4, 13.4.13, 13.4.17,13.4.25 из [5].

Задача 3. Определить период свободных вертикальных колебаний груза массой m = 80 кг, который прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c = 2 кН/м (рисунок 11).

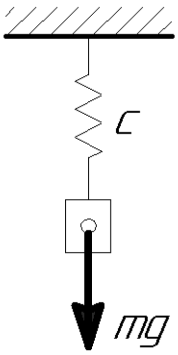


Рисунок 11

Решение

Период колебаний определим по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k}, \tag{29}$$

где k – угловая частота свободных вертикальных колебаний,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}; \tag{30}$$

$$k = \sqrt{\frac{2000}{80}} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} = 1{,}256 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}256$ с.

4.4 Контрольная работа № 5 «Динамика материальной точки»

4.5 Динамика относительного движения материальной точки

1 Уравнение динамики относительного движения материальной точки.

2 Как определяется переносная сила инерции при неравномерном вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси?

3 Формула для определения модуля переносной центробежной силы инерции.

4 Формула для определения модуля кориолисовой силы инерции.

5 Уравнение относительного покоя материальной точки.

6 Решить задачи 33.4, 33.9, 33.10, 33.22 из [4], 13.7.3, 13.7.5, 13.7.8 из [5].

Задача 4. Шарик M массой $m = 0{,}2$ кг движется со скоростью $V = 19{,}62$ м/с относительно вертикальной трубки 2, которая на расстоянии $l = 0{,}5$ м прикреплена к вертикальному валу (рисунок 12). Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с. Определить переносную силу инерции шарика.

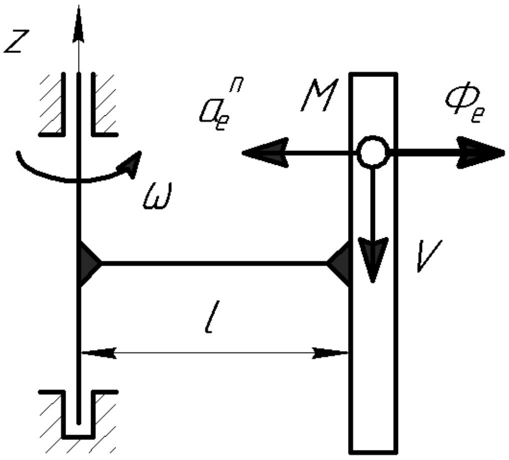


Рисунок 12

Решение

Переносная сила инерции может быть рассчитана согласно формуле

$$\vec{\Phi}_{\text{e}} = m \cdot \vec{a}_e, \tag{31}$$

Определим переносное ускорение точки. Так как переносным движением является вращение трубки вокруг оси Z, то переносным движением точки является движение по окружности радиусом l. При этом ускорение точки можно разложить на два ускорения a_n и a_τ, т. е.

$$a_{\text{e}} = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2}\,; \tag{32}$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot l\,; \tag{33}$$

$$a_e^n = 5^2 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot l\,; \tag{34}$$

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; a_e^\tau = 0 \cdot 0{,}5 = 0 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{\text{e}} = \sqrt{12{,}5^2 + 0^2} = 12{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$\Phi_e = m \cdot a_e = 0{,}2 \cdot 12{,}5 = 2{,}5 \text{ Н}.$$

Ответ: $\Phi_e = 2{,}5$ Н.

4.6 Исследование относительного движения материальной точки

1 Основное уравнение динамики относительного движения материальной точки.

2 Как находятся по модулю и направлению переносная и кориолисова силы инерции?

3 Дать определение абсолютного, переносного, относительного движений.

4 Выполнить индивидуальное задание № 5 «Исследование относительного движения материальной точки».

4.7 Теорема о движении центра масс

1 По какой формуле определяется радиус-вектор центра масс механической системы?

2 По каким формулам определяются координаты центра масс механической системы?

3 Теорема о движении центра масс механической системы.

4 При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя?

5 Может ли главный вектор внешних сил быть отличным от нуля, если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно?

6 Какое движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки, обладающей массой данного тела?

7 Решить задачи 35.4, 35.7, 35.19, 35.20 из [4], 14.1.10, 14.1.13, 14.1.20 из [5].

Задача 5. Тело *1* массой $m_1 = 4$ кг может двигаться по горизонтальной направляющей (рисунок 13). На какое расстояние переместится тело *1*, когда однородный стержень *2* (тело *2*) массой $m_2 = 2$ кг и длиной $l = 0{,}6$ м, опускаясь под действием силы тяжести, займет вертикальное положение. В начальный момент система находилась в покое.

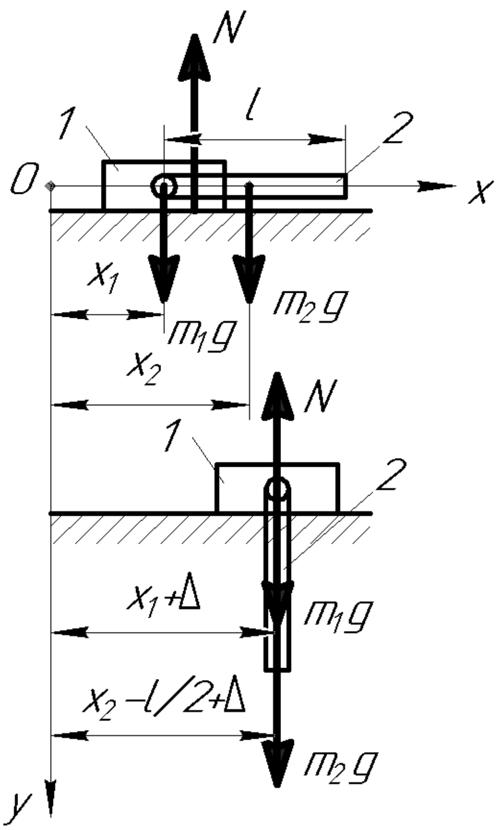


Рисунок 13

Решение

Выберем начало системы отсчета. Расстояние от оси *Oy* до центра масс тела *1* обозначим X_1, а до тела *2* – X_2. Предположим, что при перемещении тела *2* в вертикальное положение вся система сместится вправо на расстояние Δ согласно теореме о сохранении положения центра масс. Координата центра масс первого тела будет равна $X_1 + \Delta$, а второго тела – $X_2 - l/2 + \Delta$.

Запишем уравнения для определения центра масс всей системы для первого и второго положений:

$$X_{C1} = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2}; \qquad (35)$$

$$X_{C2} = \frac{m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta)}{m_1 + m_2}. \qquad (36)$$

Так как $\sum F_{ix}^E = 0$, то $x_{c1} = x_{c2}$,

$$\frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta)}{m_1 + m_2};$$

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta);$$

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = m_1 X_1 + m_1\Delta + m_2 X_2 - m_2 \cdot l/2 + m_2\Delta;$$

$$0 = m_1\Delta - m_2 \cdot l/2 + m_2\Delta;$$

$$\Delta = \frac{m_2 \cdot l/2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}6/2}{4+2} = 0{,}1 \text{ м.}$$

Ответ: $\Delta = 0{,}1$ м.

4.8 Теорема об изменении количества движения

1 Теорема об изменении количества движения точки и системы в конечном виде.

2 Теорема об изменении количества движения материальной точки и системы в проекциях на оси координат.

3 Изменяется ли количество движения механической системы, если главный вектор внешних сил отличен от нуля?

4 Условия, при которых количество движения системы не изменяется.

5 Как определяется импульс переменной силы?

6 Будет ли элементарный импульс силы характеризовать действие силы на материальную точку в течение времени dt?

7 Решить задачи 36.3, 36.6, 36.9, 36.11 из [4], 14.2.11, 14.2.27, 14.3.8, 14.3.19 из [5].

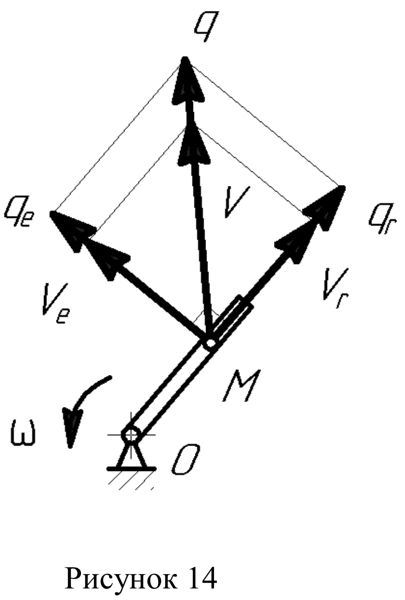


Рисунок 14

Задача 6. Трубка вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с (рисунок 14). Относительно трубки движется шарик M массой $m = 0{,}2$ кг со скоростью $V_r = 4$ м/с. Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние $OM = 0{,}4$ м.

Решение

Количество движения определяется по формуле

$$q = mV, \tag{37}$$

где V – абсолютная скорость точки, которая рассчитывается по формуле (20).

Тогда $V_e = \omega \cdot OM = 10 \cdot 0{,}4 = 4$ м/с.

$$V = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}657 \text{ м/с;}$$

$$q = 0{,}2 \cdot 5{,}657 = 1{,}13\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $q = 1{,}13\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

4.9 Теорема об изменении кинетического момента

1 Какой формулой определяется вектор момента количества движения материальной точки?

2 Какой формулой выражается теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра?

3 При каком условии момент количества материальной точки относительно центра будет сохранять постоянное значение?

4 Чему равен кинетический момент системы относительно центра?

5 Чему равна производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра?

6 При каком условии кинетический момент механической системы относительно центра остается постоянным?

7 Решить задачи: 34.19, 37.5, 37.43, 37.48, 37.50 из [4], 14.4.24, 14.5.13, 14.6.8, 16.1.14, 16.1.23, 16.1.29 из [5].

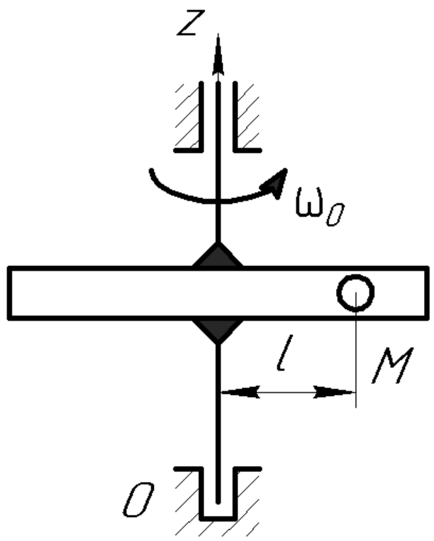


Рисунок 15

Задача 7. Трубка вращается вокруг вертикальной оси Oz, ее момент инерции $I_z = 0{,}075$ кг·м^2 (рисунок 15). По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик M массой $m = 0{,}1$ кг. Когда шарик находится на оси Oz, угловая скорость $\omega_0 = 4$ рад/с. При каком расстоянии l угловая скорость будет равна $\omega_1 = 3$ рад/с?

Решение

Согласно теореме об изменении кинетического момента механической системы

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}^{E}_{ГО}. \qquad (38)$$

Так как

$$\sum M_{Гz}^{E} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = \text{const},$$

то

$$I_0 \cdot \omega_0 = I_1 \cdot \omega_1, \qquad (39)$$

где I_0 – момент инерции системы в момент времени, когда шарик находится на оси Oz, $I_0 = I_z + I_{М.Т.0}$;

I_1 – момент инерции системы в момент времени, когда шарик находится на расстоянии l от оси Oz, $I_1 = I_z + I_{М.Т.1}$;

$I_{М.Т.0}$ – момент инерции материальной точки в момент, когда точка находилась на оси вращения, $I_{М.Т.0} = m \cdot l^2 = 0{,}1 \cdot 0^2 = 0$;

$I_{М.Т.1}$ – момент инерции материальной точки в момент, когда точка находилась от оси вращения на расстоянии l, $I_{М.Т.1} = m \cdot l^2 = 0{,}1 \cdot l^2$.

$$I_z \cdot \omega_0 = \left(I_z + 0{,}1 \cdot l^2\right) \cdot \omega_1.$$

$$\frac{I_z \cdot \omega_0}{\omega_1} = I_z + 0{,}1 \cdot l^2; \ \frac{I_z \cdot \omega_0}{\omega_1} - I_z = 0{,}1 \cdot l^2;$$

$$\frac{I_z \cdot \omega_0 - I_z \cdot \omega_1}{0{,}1 \cdot \omega_1} = l^2; \ l = \sqrt{\frac{I_z \cdot \omega_0 - I_z \cdot \omega_1}{0{,}1 \cdot \omega_1}};$$

$$l = \sqrt{\frac{0{,}075 \cdot 4 - 0{,}075 \cdot 3}{0{,}1 \cdot 3}} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 0{,}5$ м.

4.10 Применение теоремы об изменении кинетического момента к исследованию движения механической системы

1 Дать формулировку теоремы об изменении кинетического момента системы.

2 Что такое момент инерции относительно оси?

3 Что обозначает радиус инерции тела?

4 Теорема Гюйгенса-Штейнера.

5 Выполнить индивидуальное задание № 6 «Применение теоремы об изменении кинетического момента к исследованию движения системы».

4.11 Работа и мощность силы

1 Формулы элементарной работы силы F при различных способах задания движения.

2 Чему равна мощность силы F?

3 Формулы работ силы тяжести, силы упругости, силы трения.

4 В каком случае работа силы отрицательная?

5 Решить задачи 38.12 из [4], 15.1.2, 15.1.14, 15.1.16, 15.1.19 из [5].

Задача 8. На тело действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3$ (рисунок 16). Определить работу этой силы при перемещении тела из положения с координатой x_0 = 0 в положение с координатой x_1 = 1 м.

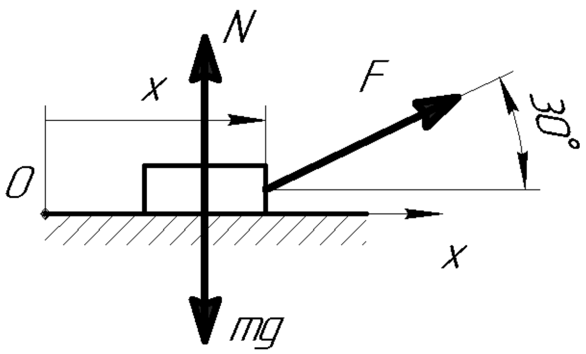


Рисунок 16

Решение

В общем случае работа силы на конечном перемещении M_1M_2

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos\alpha \,. \tag{40}$$

Для данного примера работа силы определяется следующим образом:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F \cdot dx \cdot \cos 30° \,; \tag{41}$$

$$A = \int_0^1 4x^3 \cdot dx \cdot \cos 30° = 4 \cdot \cos 30° \int_0^1 x^3 dx \,;$$

$$A = 4 \cdot \cos 30° \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = 4 \cdot \cos 30° \frac{1^4}{4} = \cos 30° \cdot 1^4 = 0{,}866 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 0{,}866$ Дж.

Задача 9. Цилиндр, масса которого m = 1 кг, радиус r = 0,173 м, катится без скольжения (рисунок 17). Определить суммарную работу силы тяжести и силы сопротивления качению, если ось цилиндра переместилась на расстояние s = 1 м, а коэффициент трения качения $\delta = 0{,}01$ м.

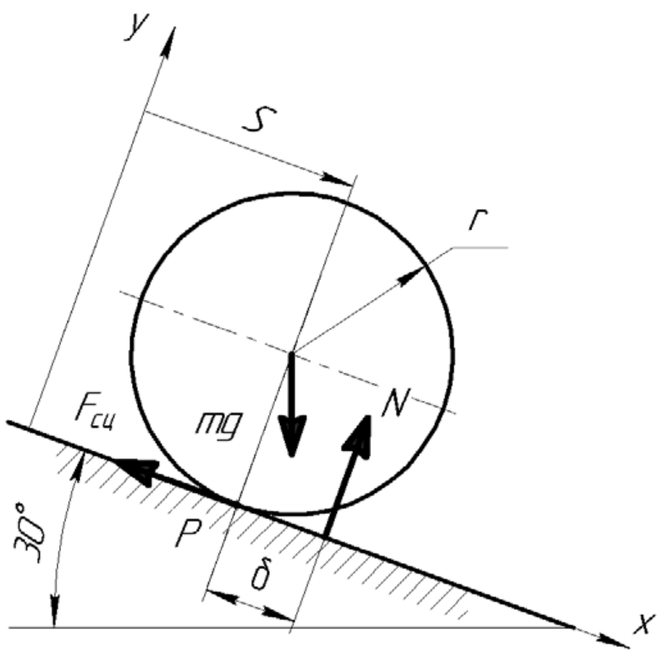


Рисунок 17

Решение

Работа силы тяжести

$$A = \pm mgh, \tag{42}$$

где h – вертикальное перемещение центра тяжести тела.

$$A_{mg} = mg \cdot S \cdot \cos(90 - 30°).$$

Работа момента силы

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \tag{43}$$

Если момент $M_z = \text{const}$, то формула (43) примет вид:

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{44}$$

Работа момента силы сопротивления M

$$A_M = -M\varphi = -N\delta\varphi. \tag{45}$$

Спроецируем все силы на ось OY:

$$\sum F_{iy} = 0;\ N - mg \cdot \cos 30° = 0; \tag{46}$$

$$N = mg\cos 30°;$$

$$S = \varphi \cdot r;\ \varphi = \frac{S}{r};$$

$$A_M = -mg\cos 30^{\circ}\delta\frac{S}{r};$$

$$\sum A = A_{mg} + A_M = mg \cdot S \cdot \cos(90° - 30°) -$$

$$-mg \cdot \cos 30° \cdot \delta \cdot \frac{S}{r} = 1 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot \cos 60° - 1 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 30° \cdot 0{,}01 \cdot \frac{1}{0{,}173} = 4{,}41 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\sum A = 4{,}41$ Дж.

4.12 Кинетическая энергия тела и механической системы

1 Две меры механического движения.

2 Формулы для определения кинетической энергии при поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

3 Чему равна кинетическая энергия механической системы?

4 Решить задачи 38.3, 38.4, 38.2 из [4], 15.4.5, 15.4.7, 15.5.5, 15.5.7 из [5].

Задача 10. Однородный стержень, масса которого $m = 1$ кг и длина $AB = 1$ м, вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 2t^3$ (рисунок 18). Определить кинетическую энергию стержня в момент времени $t = 1$ с.

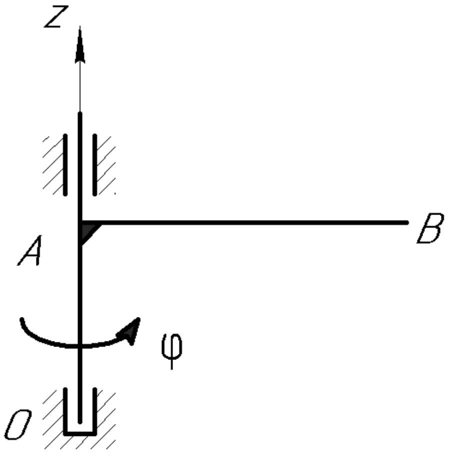


Рисунок 18

Решение

Кинетическая энергия при вращательном движении

$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \qquad (47)$$

где ω – угловая скорость стержня,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(2t^3\right)' = 2 \cdot 3t^2 = 6t^2 = 6 \cdot 1^2 = 6 \text{ рад/с}.$$

Момент инерции стержня, если ось вращении проходит через конец стержня,

$$I_z = \frac{m \cdot l^2}{3}; \qquad (48)$$

$$I_z = \frac{m \cdot AB^2}{3} = \frac{3 \cdot 1^2}{3} = 1 \text{ кг·м}^2.$$

Тогда

$$T = \frac{1 \cdot 6^2}{2} = 18 \text{ Дж}.$$

Ответ: $T = 18$ Дж.

Задача 11. Груз массой $m = 4$ кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиусом $R = 0{,}4$ м (рисунок 19). Момент инерции цилиндра относительно оси вращения $I = 0{,}2$ кг $\cdot$ м^2. Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза $V = 2$ м/с.

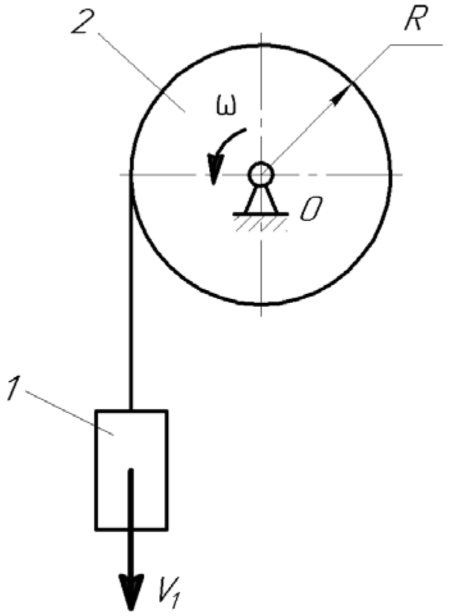


Рисунок 19

Решение

Кинетическая энергия системы состоит из суммы кинетических энергий двух тел:

$$\sum T = T_1 + T_2. \qquad (49)$$

Груз совершает поступательное движение, а кинетическая энергия твердого тела в случае его поступательного движения определяется по формуле

$$T = \frac{Mv_C^2}{2}, \qquad (50)$$

где v_C – скорость центра масс твердого тела;
M – масса твердого тела.

Тогда кинетическая энергия груза *1*

$$T_1 = \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 8 \text{ Дж.}$$

Так как груз движется со скоростью V, то и трос движется с такой же скоростью, соответственно, угловая скорость цилиндра

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{2}{0,4} = 5 \text{ рад/с.}$$

Цилиндр совершает вращательное движение, и его кинетическая энергия определится по формуле (47):

$$T_2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 5^2}{2} = 2,5 \text{ Дж.}$$

Тогда кинетическая энергия механической системы

$$\sum T = 8 + 2,5 = 10,5 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\sum T = 10,5$ Дж.

4.13 Теорема об изменении кинетической энергии

1 Формулы элементарной работы силы F при различных способах задания движения.

2 Чему равна мощность силы F?

3 Чему равен дифференциал кинетической энергии материальной точки?

4 Чему равна производная по времени от кинетической энергии механической системы?

5 Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в интегральном виде для системы с идеальными связями.

6 Решить задачи 38.20, 38.27, 38.30, 38.31, 38.44 из [4], 15.3.4, 15.3.13, 15.6.10, 15.7.7, 15.7.9 из [5].

Задача 12. Определить скорость груза *2* в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $s = 4$ м, если массы грузов $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг (рисунок 20). Система тел сначала находилась в покое.

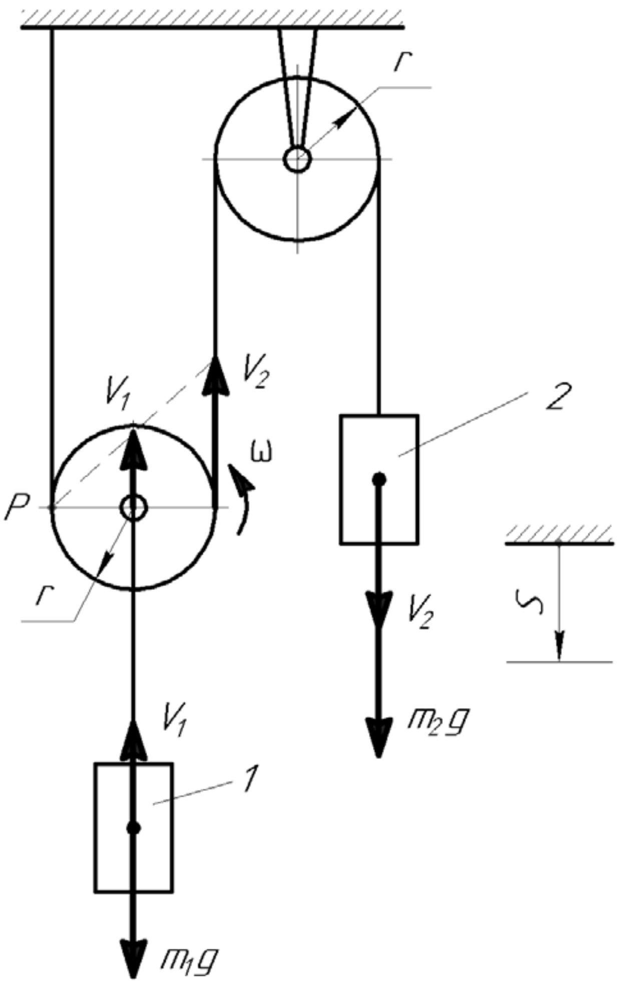


Рисунок 20

Решение

Согласно теореме об изменении кинетической энергии для механической системы с идеальными связями

$$T - T_0 = \sum A^E. \qquad (51)$$

Так как система в начальный момент времени находилась в покое, то ее кинетическая энергия в этот момент времени была равна нулю. Определим кинетическую энергию механической системы в конечный момент времени:

$$T = T_1 + T_2, \qquad (52)$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия первого и второго грузов соответственно.

Так как грузы совершают поступательное движение, то их кинетическая энергия будет определяться по формуле (50).

Скорость первого тела выразим через скорость второго тела:

$$V_1 = \frac{V_2}{2}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{m_1 \frac{V_2^2}{4}}{2} = m_1 \frac{V_2^2}{8};\; T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2};$$

$$T = m_1 \frac{V_2^2}{8} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right).$$

Определим работу внешних сил, приложенных к системе.

Работа силы тяжести первого тела будет отрицательной, т. к. направление силы не совпадает с направлением его перемещения. Работа силы тяжести второго тела будет положительной, т. к. сила совпадает с направлением перемещения s:

$$A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{s}{2};\; A_2 = m_2 \cdot g \cdot s;$$

$$A = A_1 + A_2 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{s}{2} + m_2 \cdot g \cdot s = -2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 143{,}15 \text{ Дж.}$$

Подставим найденные величины в (51):

$$V_2^2 \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) = 143{,}15;$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{143{,}15}{\left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right)}} = 7{,}56 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_2 = 7{,}56$ м/с.

4.14 Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы

1 Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

2 Чему равна работа постоянной по модулю и направлению силы?

3 Формулы для определения кинетической энергии при поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

4 Чему равна кинетическая энергия механической системы?

5 Выполнить индивидуальное задание № 7 «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы».

4.15 Контрольная работа № 6 «Общие теоремы динамики»

4.16 Динамика плоского движения твердого тела

1 Теорема об изменении кинетического момента механической системы в ее относительном движении по отношению к центру масс.

2 Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

3 Какие две основные задачи решаются с помощью этих дифференциальных уравнений?

4 Решить задачи 39.15, 39.19, 39.8, 39.20 из [4], 16.2.9, 16.2.15, 16.2.16 из [5].

4.17 Принцип Даламбера

1 Векторное выражение принципа Даламбера для материальной точки.

2 Как определяется сила инерции материальной точки?

3 Как определяется величина касательной составляющей силы инерции материальной точки?

4 Как определяется величина нормальной составляющей силы инерции материальной точки?

5 Чему равна величина касательной составляющей силы инерции точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

6 Чему равен главный вектор сил инерции твердого тела при поступательном движении?

7 Чему равен момент силы инерции относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела?

8 Решить задачи 41.10, 41.16, 41.17, 41.21 из [4], 17.1.13, 17.1.17, 17.3.7, 17.3.11, 17.3.13, 17.3.25 из [5].

Задача 13. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0{,}6t^2$ (рисунок 21). Определить натяжение каната, если радиус r = 0,4 м.

Решение

Согласно принципу Даламбера,

$$\vec{F} + \vec{\Phi} + \vec{R} = 0. \qquad (53)$$

Спроецируем данное уравнение на ось x:

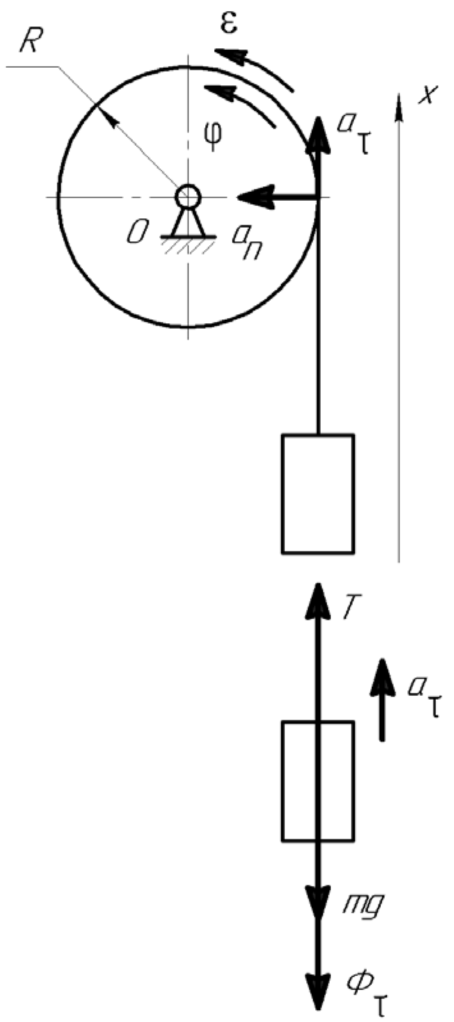


Рисунок 21

$$-mg - \Phi_\tau + T = 0 \Rightarrow T = mg + \Phi_\tau .$$

На тело действует только касательное ускорение, поэтому Φ_τ – сила инерции груза, которая определяется как

$$\Phi_\tau = m \cdot a_\tau . \qquad (54)$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r , \qquad (55)$$

где ε − угловое ускорение барабана,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 1,2 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_\tau = 1,2 \cdot 0,4 = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$T = m \cdot g + m \cdot a_\tau = m(g + a_\tau) =$$

$$= 60(9,81 + 0,48) = 617,4 \text{ Н}.$$

Ответ: $T = 617,4$ Н.

4.18 Контрольная работа № 7 «Дифференциальные уравнения плоского движения тела и принцип Даламбера»

4.19 Принцип возможных перемещений

1 Указать число обобщенных координат свободной материальной точки.

2 Указать число обобщенных координат свободного твердого тела.

3 Как называются связи, наложенные на механическую систему, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении системы равна нулю?

4 Виды уравнений работ, характеризующих принцип возможных перемещений.

5 Решить задачи 46.1, 46.3, 46.10, 46.20, 46.21 из [4], 18.2.4, 18.3.9, 18.3.23 из [5].

4.20 Общее уравнение динамики

1 Какой вид имеет общее уравнение динамики механической системы?

2 Общее уравнение динамики в векторной и аналитической формах для механической системы с идеальными связями.

3 От размерности какой величины зависит размерность обобщенной силы?

4 Какие принципы объединяет общее уравнение? Запишите эти принципы.

5 Чему равна сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции точек механической системы на любом возможном ее перемещении?

6 Решить задачи 47.1, 47.5, 47.11, 47.15 из [4], 19.1.4, 19.1.8, 19.2.5, 19.3.7, 19.3.22 из [5].

Задача 14. На клин *3* действует сила $F = 100$ Н (рисунок 22). Определить, с какой силой толкатель *2* прижимает деталь *1* к опорной плоскости в положении равновесия, если угол $\alpha = 11^\circ$.

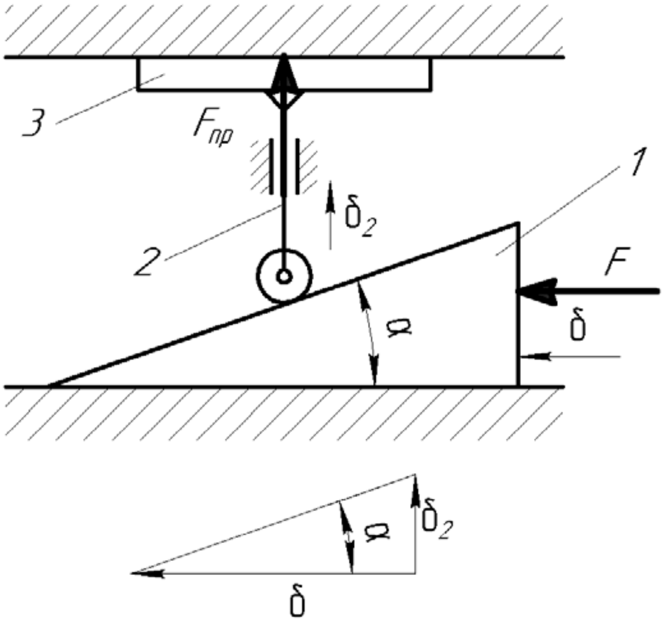


Рисунок 22

Решение

Предположим, что под действием силы F клин *3* переместится на расстояние δ, тогда толкатель *2* сместится на расстояние δ_2, эти перемещения связаны между собой зависимостью

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\delta_2}{\delta} \Rightarrow \delta_2 = \mathrm{tg}\alpha \cdot \delta .$$

Для системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A_i^E + \sum \delta A_i^\Phi = 0 . \qquad (56)$$

Запишем общее уравнение динамики применительно к данному случаю:

$$F\delta - F_{ПР}\delta_2 = 0;$$

$$F_{\text{ПР}} = \frac{F\delta}{\delta_2} = \frac{F\delta}{tg\alpha \cdot \delta} = \frac{100}{tg 11^\circ} = 514,45\,\text{Н}.$$

Ответ: $F_{\text{ПР}} = 514,45$ Н.

4.21 Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы

1 Какой вид имеет общее уравнение динамики механической системы?

2 Дать определение понятия «возможное перемещение тела».

3 Что такое обобщенная сила?

4 Какие принципы объединяет общее уравнение?

5 Выполнить индивидуальное задание № 8 «Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы».

4.22 Уравнения Лагранжа второго рода

1 Что такое обобщенные координаты?

2 Что называется обобщенной силой?

3 Какую размерность имеет обобщенная сила, если за обобщенную координату принять угловое перемещение?

4 Как определяется обобщенная сила, если система имеет несколько обобщенных координат?

5 Для механических систем с какими связями применяется уравнение Лагранжа второго рода?

6 Уравнение Лагранжа второго рода для системы с двумя степенями свободы (обобщенные координаты S, φ). Поясните все входящие в запись величины.

7 Решить задачи 48.1, 48.6, 48.26, 48.31 из [4], 20.3.9, 20.3.13, 20.6.17, 20.6.18 из [5].

4.23 Контрольная работа № 8 «Элементы аналитической механики»

4.24 Малые колебания систем

1 Какие движения механической системы называют колебательными?

2 Какие положения равновесия механических систем вы знаете?

3 Что такое малые колебания механических систем?

4 Дифференциальное уравнение свободных колебаний механических систем и его решение.

5 Затухающие колебания (дифференциальное уравнение и его решение).

6 Параметры, характеризующие затухающие колебания механических систем.

7 Решить задачи 21.1.4, 21.1.5, 21.1.10, 21.1.13 из [5]; 54.1, 54.2, 55.5 из [4].

4.25 Основы теории удара

1 Что называют ударом?

2 Ударная сила и ударный импульс?

3 Теорема об изменении количества движения при ударе.

4 Коэффициент восстановления при ударе.

5 Косой удар.

6 Что называют потерянной скоростью?

7 Решить задачи 44.1, 44.5, 44.10, 44.16 из [4], 22.1.2, 22.1.7, 22.2.9, 22.2.10 из [5].

Список литературы

1 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. − 4-е изд., перераб. и доп. − Москва: КУРС : ИНФРА-М, 2016. – 368 с.

2 **Чигарев, А. В.** Теоретическая механика. Решение задач: учебное пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, И. С. Крук. – Минск: Минфин, 2016. – 478 с.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Теория. Задания. Подробные примеры решения задач : учебное пособие / Б. Е. Ермаков [и др.] : под общ. ред. Б. Е. Ермакова. – Москва: ЛЕНАНД, 2015. – 464 с.

4 **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 46-е изд., стереотип. – Москва: Лань, 2006. – 448 с.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для вузов / Под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 368 с.

6 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва : Наука, 1990. – Т. 1–3.

7 **Кирсанов, М. Н.** Теоретическая механика. Сборник задач : учебное пособие / М. Н. Кирсанов. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 430 с.