МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2020

УДК 519 (075.8)
ББК 22.176
Д48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» января 2020 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент В. М. Ковальчук

Методические рекомендации к лабораторным работам содержат необходимые теоретические сведения по курсу «Дискретная математика и математическое моделирование», примеры с решениями и задания для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Лабораторная работа № 1. Множества

Сведения из теории множеств и алгебры.

Основное понятие: *множество*. Множества будем обозначать прописными латинскими буквами: A, B, …, а их элементы – малыми: a, b, … .

Подмножеством A множества S $(A \subseteq S)$ называется любое множество, все элементы которого принадлежат S. Другими словами, $A \subseteq S$, если $a \in A \Rightarrow a \in S$.

Множества A и B *совпадают* или *равны* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Иначе говоря, $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$, но $A \neq B$, то говорят, что A – *собственное подмножество* множества B, и записывают $A \subset B$.

Пустое множество $\varnothing$ – множество без элементов. Очевидно, любое множество содержит в качестве подмножества пустое множество.

Если каждому элементу из множества A поставлен в соответствие некоторый элемент из множества B, то говорят, что задано *отображение* φ из множества A в множество B. Обозначение: $\varphi : A \to B$. Если $b = \varphi(a)$, $a \in A$ и $b \in B$, то b называют образом элемента a при отображении φ, а a – прообразом элемента b.

Два отображения $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ и $\varphi_2 : A_2 \to B_2$ называются *равными*, если $A_1 = A_2$, $B_2 = B_2$ и $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, $\forall a \in A$.

Отображение $\varphi : A \to B$ называется *вложением*, если каждый элемент из B имеет не более одного прообраза, т. е. $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$. Если каждый элемент из B имеет хотя бы один прообраз, то отображение φ называется *наложением*. Отображение, являющееся одновременно включением и наложением, называется *взаимно-однозначным*.

Если $A = B$, то взаимно-однозначное отображение $\varphi : A \to A$ называется *подстановкой*.

Множества могут быть *конечными* (т. е. состоящими из конечного числа элементов) и *бесконечными*. Число элементов в множестве A называется *мощностью* множества A и обозначается $|A|$. Множества A и B *равномощны*, если существует взаимно-однозначное отображение $\varphi : A \to B$.

Конечные множества A такие, что $|A| = n$, будем называть *n-множествами*.

Бесконечное множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел. В дальнейшем будем рассматривать только счетные бесконечные множества.

Операции на множестве.

1 *Объединение* (или *сумма*) $A \cup B$ множеств A и B – множество всех элементов, принадлежащих либо A, либо B, либо A и B одновременно: $A \cup B = \{a \in S \mid a \in A \text{ или } a \in B\}$.

2 *Пересечение* (*произведение*) множеств A и B: $A \cap B = \{a \in S \mid a \in A \text{ и } a \in B\}$.

3 *Дополнение* множества A: $\bar{A} = \{a \in S \mid a \notin A\}$.

4 *Разность* множеств A и B: $A \setminus B = \{a \in S \mid a \in A \text{ и } a \notin B\}$.

5 *Симметрическая разность* множеств A и B: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Постановка задачи. Для тождеств, заданных таблицей 1, построить диаграммы Эйлера-Венна, доказать тождество методом эквивалентных преобразований.

Таблица 1 – Варианты заданий

Вариант	Тождество	Вариант	Тождество
1	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	16	$(A \cup (A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus ((B \cup C) \cap \bar{A}) = A$
2	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$	17	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \Delta (B \cup C)) \setminus (B \cup C)$
3	$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	18	$(A \cap B \cap \bar{C}) \Delta (A \cap B \cap C) = A \cap B$
4	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$	19	$(A \setminus B) \Delta (A \setminus C) = A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap B \cap \bar{C}$
5	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	20	$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \bar{A} \cap (B \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C)$
6	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$	21	$(A \Delta B) \setminus (A \cup C) = B \cap \bar{A} \cap \bar{C}$
7	$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \setminus \bar{C})$	22	$(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$
8	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$	23	$(A \setminus B) \Delta (B \setminus C) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$
9	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	24	$(A \setminus B \setminus C) \Delta (B \cup C) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup B \cap C$
10	$(A \cap \bar{B}) \setminus (A \cap C) = (A \setminus B) \setminus C$	25	$((A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
11	$A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$	26	$(A \Delta B) \cap (B \Delta C) = A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$
12	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$	27	$(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$
13	$((A \cap B) \setminus A) \cup (A \Delta B) = (C \cup B) \setminus (C \cap B)$	28	$(A \setminus B) \Delta (A \cap B) = A$
14	$(A \cap B) \Delta (A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \Delta B)$	29	$(A \Delta B) \Delta (B \Delta C) = A \Delta C$
15	$(A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (B \cap C) = C$	30	$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$

Лабораторная работа № 2. Отношения, функции

Если элементы двух множеств X и Y различной природы сопоставить между собой по какому-либо правилу, т. е. для каждого $x \in X$ указать один или несколько элементов множества Y, то может быть сформировано множество пар $(x; y)$, являющееся подмножеством прямого произведения множеств X и Y, т. е.

$$\{(x; y) \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq (X \times Y).$$

Множество X чаще всего называют областью отправления, а множество Y – областью прибытия. Значение $y \in Y$ называют образом для конкретного значения $x_i \in X$, а значение $x \in X$ – прообразом для конкретного значения $y_j \in Y$.

Свойства отношений.

Бинарное отношение *рефлексивно*, если для любого x_i имеем $r(x_i; x_i) = 1$, т. е. отношение имеет значение «истины» при применении к одному элементу x_i; такими отношениями являются «быть равным», «быть похожим», «быть изоморфным», «быть эквивалентным» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только «1», а при графическом представлении – петли при каждой вершине графа.

Бинарное отношение *антирефлексивно*, если для любого x_i имеем $r(x_i; x_i) = 0$, т. е. отношение имеет значение «ложь» применительно к одному элементу x_i; такими отношениями являются «быть больше», «быть меньше», «быть родителем» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только «0», а при графическом представлении – отсутствие петель при каждой вершине графа.

Бинарное отношение *симметрично*, если для любой пары $(x_i; x_j)$ имеем $r(x_i; x_j) = r(x_j\, x_i) = 1$; это могут быть такие отношения как: «быть похожим», «быть эквивалентным», «быть родственником» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает симметричное расположение «1» относительно главной диагонали, при графическом представлении – отсутствие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j, или их наличия, но в обе стороны.

Бинарное отношение *антисимметрично*, если для любой пары $(x_i; x_j)$ при $i \neq j$ имеем $r(x_i; x_j) \neq r(x_j; x_i)$, а при $i = j$ $r(x_i; x_i) = 1$; такими отношениями являются «быть больше или равным», «быть меньше или равным» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает несимметричное расположение «1» относительно главной диагонали, но наличие их на главной диагонали, при графическом представлении – наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j и наличие петель у вершин графа.

Бинарное отношение *асимметрично*, если для любой пары $(x_i; x_j)$ имеем $r(x_i; x_j) \neq r(x_j; x_i)$; такими отношениями являются «быть больше», «быть меньше», «быть родителем» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает только несимметричное расположение «1» относительно главной диагонали и наличие только «0» на ней, а при графическом представлении –

наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j и отсутствие петель у вершин графа.

Бинарное отношение *транзитивно*, если для любых трех элементов x_i, x_j, x_k имеем $r(x_i; x_j) = 1$ только при условии $r(x_i; x_k) =1$ и $r(x_k; x_j) = 1$; такими отношениями являются «быть больше», «быть меньше», «быть родственником» и т. п.; при матричном представлении это означает, что если $r(x_i; x_k) = 1$ и $r(x_k; x_j) = 1$, то это же отношение можно установить между вершинами x_i и x_j через промежуточную вершину x_k, т. е. найти $r(x_i; x_j) = 1$; при графическом представлении – наличие пути из вершины x_i в вершину x_j через промежуточную вершину x_k, используя ребра $(x_i; x_k)$ и $(x_k; x_j)$.

Типы отношений.

Отношение эквиваленции. Бинарное отношение $R\subseteq(X\times X)$, удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности называют отношением эквиваленции. Такими отношениями могут быть: «быть равным», «быть похожим», «быть одинаковым», «быть родственником» и т. п. Отношение эквиваленции принято обозначать знаком $r_{\sim}(x_i; x_j)$ или $\sim(x_i; x_j)$. Используя отношение эквиваленции, можно формировать классы эквиваленции $K(x_\alpha)$ по заданному образцу x_α в виде подмножеств X_α множества X, т. е. $K(x_\alpha) = X_\alpha =\{x_i \mid r_{\sim}(x_i; x_\alpha) = 1, x_i, x_\alpha\in X\} \subseteq X$.

Отношение порядка. Бинарные отношения $R\subseteq(X\times X)$, удовлетворяющие условиям рефлексивности, антисимметричности и транзитивности называют отношением порядка. Такими отношениями являются «быть не больше», «быть не меньше», «быть не старше» и т. п. Отношение порядка принято обозначать для элементов множества $r_{\leq}(x_i; x_j)$ или $\leq(x_i; x_j)$, а для множеств – $r_{\subseteq}(x_i; x_j)$ или $\subseteq(x_i; x_j)$. Использование отношения порядка на одном множестве X позволяет упорядочить элементы этого множества, т. е., рассматривая отношение на каждой паре элементов множества, устанавливать частичный порядок на всём множестве X. Примерами частично упорядоченных множеств являются множество целых чисел с заданным отношением порядка, т. е. $\{1; 2; 3; ...\}$, множество действительных чисел, в том числе положительных и отрицательных; счетные множества нематематических объектов, упорядоченные по значениям индексов, т. е. X_1, X_2, ...; счетные множества букв и символов, упорядоченные алфавитом; множество подмножеств универсального множества с отношением включения $\subseteq(x_i, x_j)$ и т. п.

Отношение строгого порядка. Бинарное отношение $R_{\subseteq}(X\otimes X)$, удовлетворяющее условиям антирефлексивности, асимметричности и транзитивности называют отношением строгого порядка. Такими отношениями могут быть: «быть больше», «быть меньше», «быть частью», «быть подчиненным» и т. п. Использование отношения строго порядка формирует линейную упорядоченность элементов множества X. Для обозначения отношения строгого порядка приняты символы: между элементами множества – $r < (x_i; x_j)$ или $< (x_i; x_j)$, между множествами – $r_{\subset}(x_i; x_j)$ или $\subset (x_i; x_j)$.

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

Задание 1

Пусть M – некоторое множество, S и R – некоторые бинарные отношения, причем $R \subseteq M \times M$. Задать списком отношение R, обратное отношение R^{-1}, дополнение $\overline{R}$. Изобразить графически R и записать его матрицу. Найти $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \circ S$, $S \circ R$ если:

1) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid a \le b\}$, $S = \{(3, 1), (1, 5), (5, 3), (5, 7)\}$;
2) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid a + 2 = b\}$, $S = \{(7, 5), (5, 3), (3, 5), (7, 1)\}$;
3) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid (a + b) / 2 \in M\}$, $S = \{(1, 5), (1, 7), (1, 3)\}$;
4) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b - 1 \in M\}$, $S = \{(1, 3), (1, 7), (3, 5)\}$;
5) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid a - 2 = \mathrm{b}\}$, $S = \{(1, 3), (7, 5), (1, 7), (5, 3)\}$;
6) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $R = \{(a, b) \mid 2a + b \in M\}$, $S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 5), (1, 7)\}$;
7) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid b - a \in M\}$, $S = \{(8, 6), (6, 8), (2, 6), (6, 4)\}$;
8) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid b - 2 = a\}$, $S = \{(6, 4), (4, 6), (2, 8), (4, 4)\}$;
9) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid 1+(a / b) \in M\}$, $S = \{(8, 8), (2, 4), (8, 2)\}$;
10) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid 2b - a \in M\}$, $S = \{(6, 6), (6, 4), (4, 6), (2, 8)\}$;
11) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid b + a \in M\}$, $S = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 8)\}$;
12) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid ab \le 24\}$, $S = \{(4, 4), (6, 4), (8, 4), (8, 6)\}$;
13) $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b - 2 \in M\}$, $S = \{(2, 8), (4, 6), (8, 6), (4, 4)\}$;
14) $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(a, b) \mid b - a < 2\}$, $S = \{(3, 1), (1, 3), (4, 5), (3, 5)\}$;
15) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(a, b) \mid \sin(0{,}5\pi[a+b]) \ne 0\}$, $S=\{(0, 1), (1, 1), (3, 4)\}$;
16) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(a, b) \mid \cos(0{,}5\pi b)=1\}$, $S = \{(0, 3), (2, 4), (4, 0)\}$;
17) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(a, b) \mid (-1)^a + (-1)^b \le 0\}$, $S = \{(0, 3), (2, 2), (4, 2)\}$;
18) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b - \text{четное}\}$, $S = \{(1, 3), (5, 1), (3, 5)\}$;
19) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b - \text{нечетное}\}$, $S = \{(2, 2), (3, 4), (4, 5)\}$;
20) $M = \{у, д, г, о, е, ж\}$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ –гласные}\}$, $S = \{(г, о), (о, е), (е, у)\}$;
21) $M = \{у, д, г, о, е, м\}$, $R = \{(a, b) \mid a - \text{согласная}\}$, $S = \{(г, д), (д, г), (у, у)\}$;
22) $M = \{г, о, е, ж, к, м\}$, $R = \{(a, b) \mid b - \text{гласная}\}$, $S =\{(д, ж), (ж, о), (о, ж)\}$;
23) $M = \{д, о, е, к\}$, $R = \{(a, b) \mid a - \text{гласная}, b - \text{согласная}\}$, $S = \{(к, д), (к, о)\}$;
24) $M = \{д, г, о, е\}$, $R = \{(a, b) \mid a - \text{согласная}, b - \text{гласная}\}$, $S = \{(г, д), (м, м)\}$;
25) $M = \{2, -3, 4, -5\}$, $R = \{(a, b) \mid a + b < 0\}$, $S = \{(-5, 1), (-3, 4), (-3, -5)\}$;
26) $M = \{-1, 2, -3, 4\}$, $R = \{(a, b) \mid ab > 0\}$, $S = \{(-1, 3), (4, 2), (-3, -1), (2, 4)\}$;
27) $M = \{-1, 2, -3, -5\}$, $R = \{(a, b) \mid a + \mathrm{b} > 0\}$, $S = \{(-1, 2), (-3, 2), (-5, -5)\}$;
28) $M = \{-1, -3, 4, -5\}$, $R = \{(a, b) \mid ab < 0\}$, $S = \{(-3, -3), (-3, -5), (-1, 4)\}$;
29) $M = \{-1, 2, 4, -5\}$, $R = \{(a, b) \mid b / a \in Z\}$, $S = \{(-5, -1), (-1, -5), (2, 4)\}$;
30) $M = \{-1, 4, -5\}$, $R = \{(a, b) \mid a / b \in N\}$, $S = \{(-5, -5), (-1, -1), (-1, 4)\}$.

Задание 2

Выяснить свойства отношения, заданного матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&1&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 0&1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 1&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 1&0&0&1&0\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&1&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&1&1&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$

15) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&0&0\\ 1&0&1&1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$

17) $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$

18) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

19) $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

20) $\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$

21) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$

22) $\begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$

23) $\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$

24) $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

25) $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

26) $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$

27) $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$

28) $\begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$

29) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$

30) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}$

31) $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

32) $\begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

Лабораторная работа № 3. Булевы функции

Булевой переменной x называется такая переменная, которая может принимать только два значения: ноль (0) или единица (1), т. е. $x \in \{0;1\}$.

Функцию f, принимающую одно из двух значений, 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений, 0 или 1, будем называть *булевой функцией* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(\tilde{x}^n\right)$ от n переменных.

Две булевы функции f_1 и f_2 называются *равными*, если они принимают одинаковые значения при всех наборах своих переменных.

Функция $f\left(x_1, ..., x_n\right)$ называется *существенно* зависящей от переменной x_i, если имеет место следующее равенство для какого-либо набора значений переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Если $f\left(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n\right) = f\left(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n\right)$ для любого набора значений переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, то x_i – *фиктивная переменная*.

Переменная x_i называется существенной, если при ее удалении изменяется значение функции, и несущественной, если значение функции не меняется.

Рассмотрим основные элементарные булевы функции (таблица 2).

Таблица 2 – Основные элементарные булевы функции

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_0 = const 0 – константа нуля;
$f_1 = xy$ – конъюнкция;
$f_2 = x\overline{y}$ – запрет y;
$f_3 = x$ – повтор x;
$f_4 = \overline{x}y$ – запрет x;
$f_5 = y$ – повтор y;
$f_6 = x \oplus y$ – сложение по модулю 2;
$f_7 = x \vee y$ – дизъюнкция;
$f_8 = x \downarrow y$ – стрелка Пирса;
$f_9 = x \leftrightarrow y$ – эквивалентность;
$f_{10} = \overline{y}$ – отрицание y;
$f_{11} = x \leftarrow y$ – обратная импликация;
$f_{12} = \overline{x}$ – отрицание x;
$f_{13} = x \rightarrow y$ – прямая импликация;
$f_{14} = x|y$ – штрих Шеффера;
f_{15} = const 1 – константа единицы.

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

1 Задать функцию с помощью таблицы, области истинности, набором значений переменных.

2 Выявить фиктивные и существенные переменные функций:

1) $f\left(\tilde{x}^3\right) = (11110000)$;
2) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (1011100111001010)$;
3) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (0111011101110111)$;
4) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (1111000000110101)$;
5) $f\left(\tilde{x}^2\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \rightarrow x_2$;
6) $f\left(\tilde{x}^2\right) = \left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_1 \downarrow x_2\right)$;
7) $f\left(\tilde{x}^3\right) = (00111100)$;
8) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (0011110011000011)$.

9) $f\left(\tilde{x}^4\right)=(0101111100001010)$;

10) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\to\left(x_1\vee x_2\right)\right)\to x_3$;

11) $f\left(\tilde{x}^4\right)=\left(x_1\vee x_2\vee \overline{x}_2x_3\vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\right)x_4$;

12) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\vee\left(x_3\mid x_2\right)\right)\overline{\left(x_3\to x_1\right)}\oplus x_3$;

13) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x}_1\vee x_2\vee x_3\right)\left(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee x_3\right)\left(\overline{x}_1\vee x_2\vee \overline{x}_3\right)\left(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee \overline{x}_3\right)$;

14) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\left(x_1\vee \overline{x}_3\right)\left(x_1\vee x_2\right)\to\left(\overline{x}_1\to x_2\overline{x}_3\right)\right)x_2$;

15) $f\left(\tilde{x}^4\right)=x_1x_2\downarrow x_3\left(x_4\oplus x_1\right)\vee\left(x_2\sim x_3\right)$.

Лабораторная работа № 4. Аналитическое представление булевых функций

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

Для формулы, заданной в таблице 3, построить таблицу истинности, по таблице истинности найти СДНФ.

Таблица 3 – Условия задания

Вари-ант	Формула	Вари-ант	Формула
1	$\left(\left(x_1\vee x_2\right)\leftrightarrow x_3\right)\to\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\vee x_3\right)$	16	$\left(\left(x_1\leftrightarrow x_2\right)\to x_3\right)\vee\left(\left(x_1\to x_2\right)\vee x_3\right)$
2	$\left(\left(x_1\vee x_2\right)\wedge x_3\right)\leftrightarrow\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\vee\neg x_3\right)$	17	$\left(x_1\to\left(x_1\vee x_2\right)\right)\leftrightarrow\left(x_1\vee x_2\vee\neg x_3\right)$
3	$\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\to x_3\right)\wedge\left(\left(x_1\vee x_2\right)\to\left(x_2\wedge x_3\right)\right)$	18	$\left(\neg x_2\to x_3\right)\wedge\left(\left(\neg x_1\vee x_2\right)\to\left(x_2\wedge\neg x_3\right)\right)$
4	$\left(\left(\neg x_1\vee\neg x_2\right)\leftrightarrow\left(x_1\wedge x_3\right)\right)\wedge\left(x_2\vee x_3\right)$	19	$\left(x_3\leftrightarrow\left(\neg x_1\wedge\neg x_2\right)\right)\wedge\left(x_2\to x_3\right)$
5	$\left(\neg x_1\to\left(x_2\leftrightarrow x_3\right)\right)\wedge\left(x_1\vee x_2\right)$	20	$\left(x_1\vee\left(x_2\leftrightarrow x_3\right)\right)\to\left(\neg x_1\wedge x_2\right)$
6	$\left(\left(x_1\wedge x_3\right)\vee x_2\right)\to\left(\left(x_1\leftrightarrow x_2\right)\vee x_3\right)$	21	$\left(x_1\vee x_2\right)\leftrightarrow\left(\left(x_1\to x_3\right)\vee\neg x_3\right)$
7	$\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\to\left(x_1\wedge x_3\right)\right)\leftrightarrow\left(x_2\wedge\neg x_3\right)$	22	$\left(\neg\left(x_1\wedge x_2\right)\to x_3\right)\leftrightarrow\left(\neg x_2\vee x_3\right)$
8	$\left(\left(x_1\vee\neg x_2\right)\leftrightarrow x_3\right)\to\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\leftrightarrow x_3\right)$	23	$\left(x_2\leftrightarrow x_3\right)\vee\left(\left(\neg x_1\wedge x_3\right)\to x_3\right)$
9	$\left(\left(x_1\to\neg x_2\right)\wedge x_3\right)\leftrightarrow\left(\left(x_1\wedge\neg x_2\right)\vee\neg x_3\right)$	24	$\left(\left(\neg x_1\vee x_2\right)\wedge x_3\right)\leftrightarrow\left(x_1\to\neg x_2\right)$
10	$\left(\left(\neg x_1\vee\neg x_2\right)\leftrightarrow\left(x_1\to x_3\right)\right)\vee\left(x_2\wedge\neg x_3\right)$	25	$\left(\left(\neg x_1\leftrightarrow\neg x_2\right)\wedge\left(x_1\to x_3\right)\right)\wedge\left(x_2\vee x_3\right)$
11	$\left(x_1\vee x_2\vee x_3\right)\to\left(x_1\wedge\neg x_3\right)\vee\left(x_2\leftrightarrow x_3\right)$	26	$\left(\neg x_1\vee x_2\right)\to\left(x_1\wedge\neg x_3\right)\wedge\left(x_2\leftrightarrow x_3\right)$
12	$\left(\neg x_1\to\left(x_3\to x_2\right)\right)\wedge\left(\neg x_1\wedge\neg x_3\right)$	27	$\left(x_1\vee\left(x_2\leftrightarrow x_3\right)\right)\wedge\left(x_1\to\neg x_2\right)$
13	$\left(x_3\to\left(x_1\leftrightarrow x_2\right)\right)\leftrightarrow\left(\neg x_3\wedge x_1\right)$	28	$\left(\left(x_1\wedge x_2\right)\to\neg x_3\right)\leftrightarrow\left(\neg x_2\vee x_3\right)$
14	$\left(\left(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\right)\vee\neg x_2\vee\neg x_3\right)\to x_1$	29	$\left(\left(x_1\to\neg x_2\right)\leftrightarrow x_3\right)\to\left(x_1\wedge x_2\right)$
15	$\left(x_1\wedge\left(x_1\leftrightarrow\neg x_3\right)\right)\to\left(x_1\leftrightarrow\neg x_2\right)$	30	$\left(x_2\to\left(\neg x_1\leftrightarrow x_3\right)\right)\wedge\left(\neg x_1\vee x_2\right)$

Лабораторная работа № 5. Основные классы булевых функций

Система булевых функций $F=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ называется *полной*, если всякая булева функция является некоторой суперпозицией функций $f_1, f_2, ..., f_n$.

Примерами функционально полных систем могут служить следующие системы:

$$\{\neg, \bullet, \vee\}, \{1, \bullet, \oplus\}, \{\neg, \bullet\}, \{\neg, \vee\}, \{/\}, \{\downarrow\} \text{ и др.}$$

Для определения функциональной полноты системы используются так называемые классы Поста.

1 Класс функций, сохраняющих нуль **P₀**. Булева функция называется *сохраняющей нуль*, если

$$f(0, 0, ..., 0) = 0.$$

2 Класс функций, сохраняющих единицу **P₁**. Булева функция называется *сохраняющей единицу*, если

$$f(1, 1, ..., 1) = 1.$$

3 Класс самодвойственных функций **S**. Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}).$$

Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *самодвойственной*, если

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

4 Класс монотонных функций **M**. Булева функция называется *монотонной*, если

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$$

на всех сравнимых наборах, т. е. таких, что $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) < (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.

Причем $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, если при любом i: $\alpha_i \le \beta_i$

5 Класс линейных функций **L**. Булева функция называется *линейной*, если она представима линейным полиномом Жегалкина.

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

Задание 1

Методом неопределенных коэффициентов найти полином Жегалкина для следующих функций:

1) $f\left(\tilde{x}^2\right)=(1001)$;
2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(11111000)$;
3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;
4) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(01101000)$;
5) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1 | x_2) \downarrow x_3$.

Задание 2

Определить к каким классам Поста принадлежат следующие функции:

1) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;
2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \sim x_3$.
3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=((x_1 \to x_2) \vee x_3) | x_1$;

Задание 3

Проверить полноту заданной системы функций. Для функционально полной системы выделить базис:

1) $F=\{f_1, f_2\}$; $f_1 = x_1 \to x_2$, $f_2 = x_1 \to \overline{x}_2 x_3$;
2) $F=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$; $f_1 = \overline{x}_1 x_2$, $f_2 = x_1 \sim x_2 x_3$, $f_3 = 0$, $f_4 = 1$;
3) $F=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$; $f_1 = (x_1 \to x_2) \downarrow (x_2 \sim x_3)$; $f_2 = (x_1 | (x_1 x_2)) \to x_3$; $f_3 = x_1 \oplus x_2$; $f_4 = 0$;
4) $F=\{f_1, f_2, f_3\}$; $f_1 = (01101001)$, $f_2 = (10001101)$, $f_3 = (00011100)$;
5) $F=\{f_1, f_2, f_3\}$; $f_1 = (01000100)$, $f_2 = (11111100)$, $f_3 = (10000000)$.

Лабораторная работа № 6. Минимизация булевых функций

Метод неопределенных коэффициентов. Любую булеву функцию от трех переменных можно представить в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)=K_1^1 x_1 \vee K_2^1 x_2 \vee K_3^1 x_3 \vee K_1^0 \overline{x}_1 \vee K_2^0 \overline{x}_2 \vee K_3^0 \overline{x}_3 \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1 \overline{x}_2 \vee$$
$$\vee K_{12}^{01} \overline{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{00} \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1 \overline{x}_3 \vee K_{13}^{01} \overline{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{00} \overline{x}_1 \overline{x}_3 \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee$$
$$\vee K_{23}^{10} x_2 \overline{x}_3 \vee K_{23}^{01} \overline{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{00} \overline{x}_1 \overline{x}_3 \vee K_{123}^{000} \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee K_{123}^{001} \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{010} \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee$$
$$\vee K_{123}^{011} \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{100} x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3,$$

где коэффициенты K принимают значения «0» или «1».

Чтобы определить коэффициенты K решают следующую систему:

$$\begin{cases} K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = f(0,0,0); \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = f(0,0,1); \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = f(0,1,0); \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = f(0,1,1); \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = f(1,0,0); \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = f(1,0,1); \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = f(1,1,0); \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = f(1,1,1). \end{cases}$$

Систему начинаем решать с тех уравнений, в которых $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Все коэффициенты, входящие в эти уравнения, также равны нулю. Найденные нулевые коэффициенты подставляем в оставшиеся уравнения системы. Для получения урезанной системы ищем минимальное решение, которое, вообще говоря, не единственное. Минимальное решение системы при подстановке его в функцию дает МДНФ $f(x_1, x_2, x_3)$.

Метод Квайна-Мак-Клоски. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \neq 1$ представлена в СДНФ.

1 *Нахождение первичных импликант.* Все элементарные конъюнкции (ЭК) данной СДНФ сравниваются друг с другом попарно. Если ЭК имеют вид $K \wedge x_i$ и $K \wedge \overline{x_i}$, то выписывается ЭК ранга $(n-1)$. Такие ЭК, для которых произошло «склеивание», помечаются «*». После построения всех ЭК ранга $(n-1)$ вновь сравнивают их попарно, выписывая ЭК ранга $(n-2)$, полученные после «склеивания», и помечаются «склеенные» ЭК ранга $(n-1)$ и т. д. Этот процесс производится до тех пор, пока некоторые ЭК ранга $l \leq n$ уже не будут «склеиваться» между собой.

Все не помеченные ЭК называются *первичными импликантами.*

2 *Расстановка меток. Построение таблицы Квайна.* После выполнения первого этапа получаем:

$$f(x_1, ..., x_n) = \underset{i}{\vee} \lambda_i ,$$

где $f(x_1, ..., x_n)$ – данная булева функция,

λ_i – ее первичные импликанты.

Строим таблицу, число строк которой равно числу полученных выше первичных импликант $f(x_1, ..., x_n)$. Число столбцов совпадает с числом ЭК исходной СДНФ $f(x_1, ..., x_n)$. Если в некоторую ЭК входит первичная импликанта, то на пересечении соответствующих столбца и строки ставится метка. Вносим в таблицу все метки.

3 *Нахождение существенных импликант*. Если в каком-то столбце составленной таблицы имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, называется *существенной*. Существенная импликанта не может быть исключена из правой части формулы $f\left(x_1, ..., x_n\right)$. Поэтому из таблицы Квайна исключаем строки, соответствующие существенным импликантам, и исключаем столбцы тех ЭК, которые «покрываются» этими существенными импликантами. Иначе говоря, исключаем те столбцы, которые имеют метки на пересечении со строкой существенной импликанты.

4 *Вычеркивание лишних столбцов*. Рассмотрим таблицу, полученную после третьего этапа. Если в этой таблице есть два столбца, в которых метки стоят в одинаковых строках, то один из них вычеркиваем.

5 *Вычеркивание лишних первичных импликант*. В таблице, полученной после четвертого этапа, рассматриваем строки. Если есть строки, в которых отсутствуют метки, то эти строки исключаем из таблицы, а соответствующие первичные импликанты не принимаем далее во внимание.

6 *Выбор минимального покрытия первичными импликантами*. Рассмотрим таблицу, полученную после пятого этапа. Из оставшихся в этой таблице первичных импликант выбираем такую их совокупность, которая содержит в своих строках метки для всех оставшихся столбцов этой таблицы. Из всех возможных вариантов таких совокупностей выбираем тот, для которого общее число переменных в выбранных первичных импликантах наименьшее.

Идея Мак-Клоски. Вместо ЭК ранга $n, n-1, n-2, ...$ используются их двоичные коды. Например, ЭК $x_1 x_2 \overline{x_3}$ имеет код 110. Все коды разбиваются на непересекающиеся группы по количеству единиц в этих кодах. Теперь попарное сравнение можно производить только между соседними по номеру группами. Вместо исключенных переменных в двоичных кодах ставим прочерк. После выполнения этих действий получаем первичные импликанты.

Метод карт Карно *(графическая минимизация булевой функции)*. Карта Карно есть не что иное, как форма таблицы для определения булевой функции.

Начнем процесс «склейки»: любые две соседние клетки, содержащие «1», обводятся, и «поглотивший» их прямоугольник представляется словом, содержащим знаки «0», «1» и «×». Причем «×» занимает место той переменной, по которой произведена «склейка». Прямоугольники площадью 2 единицы можно «склеивать» в прямоугольники площадью 4 единицы. Причем таблицу мысленно можно «закручивать» в «цилиндр» по обоим направлениям (т. е. «тор») для нахождения соседних элементов.

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

Для булевой функции, заданной в таблице 4, найти:

1) совершенную дизъюнктивную нормальную форму;
2) минимальную ДНФ методом Квайна-Мак-Клоски;
3) минимальную ДНФ методом карт Карно.

Таблица 4 – Условия задания

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0 0 0 0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 0 1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0 0 1 0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
0 0 1 1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0 1 0 0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 1 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0 1 1 0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0 1 1 1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1 0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1 0 0 1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1 0 1 0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1 0 1 1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1 1 0 0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1 1 0 1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1 1 1 0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1 1 1 1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1

Продолжение таблицы 4

Вариант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0 0 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0 0 0 1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 0 1 0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1 1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0 1 0 0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0 1 0 1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0 1 1 0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0 1 1 1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1 0 0 0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1 0 0 1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1 0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1 0 1 1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1 1 0 0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1 1 0 1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1 1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1 1 1 1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1

Лабораторная работа № 7. Основные определения комбинаторики

Введем следующие обозначения:

n-множество – множество из n различных элементов;

(n)*-множество* – множество, содержащее элементы n различных типов (если не оговорено заранее, то предполагается, что число элементов каждого типа достаточно велико);

r-выборка из некоторого множества – совокупность из r (не обязательно различных для (n)-множества) элементов этого множества. Число r называют объемом выборки.

В r-выборках в зависимости от условий задачи либо учитывают порядок следования в них элементов (и тогда они называются *r-перестановками*), либо не учитывают (в этом случае их называют *r-сочетаниями*). Например, две выборки из множества $A_n\left(n \geq 5\right)$

$$\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right) \text{ и } \left(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1\right)$$

представляют собой равные 5-сочетания и в то же время разные 5-перестановки.

Вообще, две r-перестановки $a=\left(a_1, a_2, ..., a_r\right)$ и $b=\left(b_1, b_2, ..., b_r\right)$ равны $\left(a=b\right)$, если $a_i = b_i$, $i=1, 2, ..., r$.

В r-выборках возможно повторное появление элементов, и в таком случае они называются соответственно *r-сочетаниями с повторениями* и *r-перестановками с повторениями*.

Число упорядоченных r-выборок из n-множества (r-перестановок)

$$P\left(n,r\right) = A_n^r = \frac{n!}{\left(n-r\right)!}, \quad n \geq r \geq 0,$$

откуда следует $P\left(n,n\right) = n!$

Для полноты результата примем: $P\left(n,0\right) = 0! = 1$.

Число r-выборок из n-множества (r-сочетаний)

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{P\left(n,r\right)}{r!} = \frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}.$$

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

1 Доказать следующие тождества.

а) $C_{n+m}^m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k-1}^k, \; m,n > 0;$

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \; n \geq 0;$

в) $\sum \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} = k^n$, где суммирование распространяется по всем упорядоченным разбиениям n на k слагаемых: $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, $n_i \geq 0$ – целые числа;

г) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \dfrac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}, n \geq 1;$

д) $\sum\limits_{x=0}^{n} \dfrac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \dfrac{2n+1}{n+1}.$

2 n $(n > 2)$ человек садятся за круглый стол. Два размещения по местам будем считать совпадающими, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколько существует способов сесть за стол?

Ответ: $(n-1)!/2$.

3 Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз;
б) ровно один туз;
в) не менее двух тузов;
г) ровно два туза?

Ответ: а) 9279308324; б) 6708426560; в) 2570881764; г) 2264093964.

4 Сколькими способами можно составить три пары из n шахматистов?

Ответ: $n!/(48(n-6)!)$.

5 Сколько существует чисел от 0 до 10^n, в которые не входят две идущие друг за другом одинаковые цифры?

Ответ: $(9^{n+1}-1)/8$.

6 Сколько существует n-значных натуральных чисел, у которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Ответ: C_{n+8}^{8}.

7 Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать четыре экзамена. Он полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 очков. Сколькими способами он сможет сдать экзамены, набрав не менее 17 очков и не получив ни одной двойки?

Ответ: 31.

8 Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 75226522?

Ответ: 265.

9 *Генуэзская лотерея.* Участники этой лотереи покупают билеты, на которых стоят числа от 1 до 90. На некоторых билетах стоят сразу 2, 3, 4 или 5 чисел. В день розыгрыша случайным образом выбирают 5 жетонов с номерами от 1 до 90. Выигрывают те участники, у которых все номера на билетах окажутся среди выбранных. Какова вероятность выигрыша в случае:

а) покупки билета с одним числом;

б) с k числами ($1 < k \leq 5$)?

Ответ: а) $1/18$; б) $2/801$ – при игре на два номера; $1/11748$ – при игре на три номера; $1/511038$ – при игре на четыре номера; $1/43949268$ – при игре на пять номеров.

10 За пересылку бандероли надо уплатить 18 к. Сколькими способами можно оплатить ее марками стоимостью в 4, 6, 10 к., если два способа, отличающиеся порядком марок, считать различными?

Ответ: 8.

11 Сколькими способами можно разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника?

Ответ: $C_{2n}^{n}/(n+1)$.

12 На сколько частей делят плоскость n пересекающихся прямых, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Ответ: $(n^2+n+2)/2$.

13 На плоскости проведено n прямых. Назовем число прямых, проходящих через точку, *кратностью точки*. Заданы числа: k_2 – число вершин кратности 2, k_3 – число вершин кратности 3 и т. д., k_n – число вершин кратности n. Найти число пар параллельных прямых.

Ответ: $n(n-1)/2-\sum\limits_{r=2}^{n} r(r-1)k_r/2$.

14 На плоскости проведено n прямых. Заданы числа: k_2 – число вершин кратности 2, k_3 – число вершин кратности 3 и т. д., k_n – число вершин кратности n. На сколько частей делят эти прямые плоскость?

Ответ: $n+1+\sum\limits_{r=2}^{n}(r-1)k_r$.

Лабораторная работа № 8. Задачи комбинаторики

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

1 Из чисел от 1 до n составлены всевозможные произведения, состоящие из k различных сомножителей (k фиксировано). Сколько полученных произведений делится на простое число $p \le n$?

Ответ: $C_n^k - C_{n-\left[\frac{n}{p}\right]}^{k}$.

2 При условии, что никакие три диагонали выпуклого n-угольника $(n \ge 5)$ не пересекаются в одной точке, найти число отрезков, на которые разбиваются диагонали точками пересечения.

Ответ: $n\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\left[k(n-k-2)+1\right]$, если n – нечетное,

$$n\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}-1}\left[k\left(n-k-2\right)+1\right]+\frac{n}{2}\left(\left(\frac{n-2}{2}\right)^2+1\right),\text{ если } n \text{ – четное.}$$

3 На плоскости дано пять точек. Среди прямых, соединяющих эти точки, нет параллельных, перпендикулярных и совпадающих. Проводим через каждую точку перпендикуляры ко всем прямым, которые можно построить, соединяя попарно остальные четыре точки. Каково максимальное число точек пересечения этих перпендикуляров между собой, не считая данных пяти точек?

Ответ: 310.

4 На окружности дано n точек и проведены всевозможные хорды, соединяющие эти точки. Известно, что никакие три из проведенных хорд не пересекаются в одной точке. На сколько частей разбивается круг?

Ответ: $n+C_n^4+n\left(n-3\right)/2+1$.

5 В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже игравшие между собой?

Ответ: 90.

6 В каждой клетке шахматной доски размером $n\times n$ поставили число, указывающее количество прямоугольников, в которые входит эта клетка. Чему равна сумма всех поставленных чисел?

Ответ: $\left(n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\right)^2/36$.

7 Доказать, что из любых пяти грибов, растущих в лесу и не расположенных на одной прямой, всегда можно найти четыре таких, которые служат вершинами выпуклого четырехугольника.

8 На плоскости взято 9 точек, расположенных в виде квадрата 3×3. Сколько существует треугольников, у которых одна вершина находится в фиксированной точке A, а две другие – в остальных точках?

Ответ: в зависимости от положения точки A треугольников может быть 24, 25 или 26.

9 Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовали по 10 человек, причем никакие два из ее членов не были на заседаниях вместе больше одного раза. Доказать, что число членов комиссии больше 60.

10 После выступления 20 фигуристов каждый из 9 судей распределяет по своему усмотрению места с 1 по 20. Оказалось, что у каждого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитать суммы мест, полученных каждым фигуристом, и расположить их в порядке возрастания: $C_1\le C_2\le\ldots\le C_{20}$. Какое наибольшее значение может иметь C_1?

Ответ: 24.

11 Для окраски граней кубика требуется 5 с. За какое наименьшее время три человека могут выкрасить 188 кубиков (предполагается, что два человека не могут одновременно красить один кубик)?

12 Группа из 41 студента успешно сдала сессию из трех экзаменов. Возможные оценки: 5, 4, 3. Доказать, что по крайней мере пять студентов сдали сессию с одинаковыми оценками.

Лабораторная работа № 9. Основные понятия и определения теории графов

Граф в общем виде можно определить как совокупность множества V (вершин) и отображения α множества $V \times V$ в некоторое множество M.

Если $M = \mathbb{N}$, граф называется *мультиграфом*; если $M = \{0,1\}$ – *обыкновенным графом*; $M = \mathbb{R}^+$ – *сетью*.

Пары $(a,b) \in V \times V$, для которых $\alpha(a,b) > 0$, называются *рёбрами*. Если $\alpha(a,b) > 1$, то ребро (a,b) называется *кратным*, а граф G, содержащий кратные рёбра, – *мультиграфом*, число $\alpha(a,b)$ – *кратностью ребра*. Если $\forall (a,b)$ $\alpha(a,b) \le 1$, говорят, что граф без кратных рёбер.

Если $|V| = n$ – конечное число, то граф называется *конечным*, а число n – его *порядком*.

Если $\forall (a,b) \in V \times V$ $\alpha(a,b) = \alpha(b,a)$, то граф G называется *неориентированным*. В противном случае граф ориентирован – *орграф*.

Если $\forall a \in V$ $\alpha(a,a) = 0$, то говорят, что граф G не имеет *петель*. В противном случае граф G с петлями.

Обыкновенным называется конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер.

$X \subseteq V \times V$ задаёт множество рёбер графа $G(V,X)$.

Вершины $a,b \in V$ графа $G = (V,X)$ называются *смежными*, если $(a,b) \in X$.

Вершина $a \in V$ и ребро $(b,c) \in X$ называются *инцидентными*, если $a = b$ или $a = c$.

Число $|X|$ называется *размерностью* графа $G = (V,X)$.

Матрица $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \alpha(a_i, a_j)$ $(a_i, a_j \in V)$, называется *матрицей смежности* графа $G = (V,X)$.

Для неориентированного графа матрица A обладает условием $a_{ij} = a_{ji}$; для графа без петель $a_{ii} = 0$ $(1 \le i \le |V|)$.

Степенью вершины $a \in V$ называется число $\deg a = |\{b \in V : (a,b) \in X\}|$.

Если $\forall a,b \in V$ $\deg a = \deg b = d$, то граф называется *однородным* (*регулярным*) *степени* d.

Если в графе G имеется k_i вершин степени i, то выражение $\left(1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}\right)$ называется *распределением вершин* графа G по степеням.

Полным графом K_n на n вершинах называется граф $G = (V,X)$, у которого $|V| = n$, $X = (V \times V) \setminus \{(a,a), a \in V\}$ ($|X| = C_n^2$).

Кликой графа называется любой его максимальный полный подграф.

Граф $G = (V,X)$ называется *связным*, если $\forall a,b \in V$ $\exists c_1, \ldots, c_k \in V$ $(a,c_1), (c_1,c_2), \ldots, (c_k,b) \in X$.

Максимальный связный подграф графа G называется его *компонентой связности*.

Граф называется *планарным*, если его вершины и рёбра можно уложить в плоскости так, что рёбра не пересекутся.

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

1 Указать порядок, размерность и степень каждой вершины графа n-перестановок. Является ли граф регулярным?

Ответ: $n!$, $\frac{n!}{2}C_n^2$, C_n^2, регулярен.

2 Установить, какие из предложенных изображений графов (рисунок 1) изоморфны.

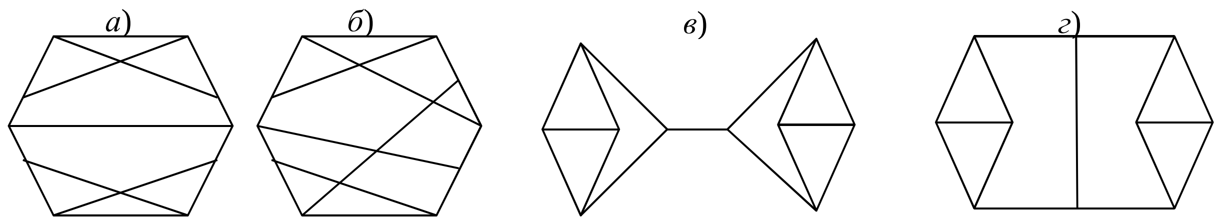


Рисунок 1 – Графы

Ответ: *а*) и *г*).

3 Есть ли изоморфные среди следующих деревьев (рисунок 2)?

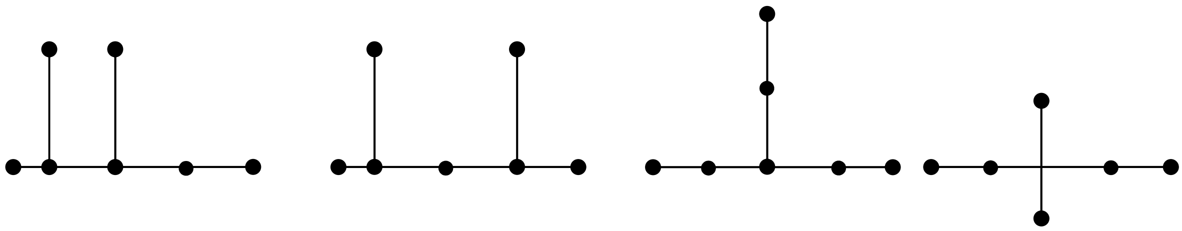


Рисунок 2 – Графы

Ответ: нет.

4 Изобразить графы, соответствующие представленным матрицам смежности вершин. Составить матрицы инцидентности этих графов:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ \text{б) } A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Построить наглядное изображение графа по матрице смежности вершин:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6 Построить наглядное изображение графа по матрице смежности дуг:

а) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7 Составить матрицу смежности вершин графа (рисунок 3).

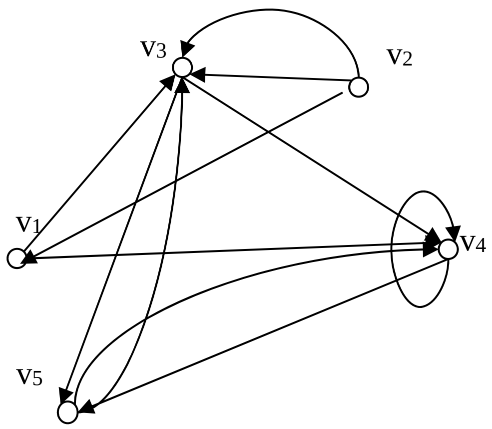


Рисунок 3 – Граф

8 Составить матрицу инцидентности графа (рисунок 4).

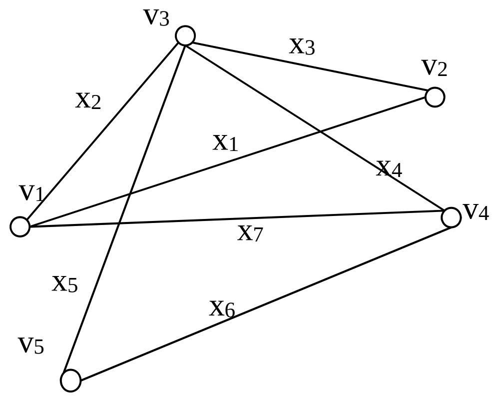


Рисунок 4 – Граф

Лабораторная работа № 10. Способы задания графов

Хроматическим числом $\mathrm{chr}\,G$ $(\chi(G))$ графа G называется такое наименьшее положительное число n, что существует отображение множества V на множество $\{1, 2, ..., n\}$ («цветов»), при котором смежные вершины получают разные «цвета».

Граф $G_1 = (V_1, X_1)$ называется *изоморфным* графу $G_2 = (V_2, X_2)$, если существует такое взаимно однозначное отображение $\beta : V_1 \xrightarrow{\beta} V_2$, при котором $\forall a,b \in V_1$ $(a,b) \in X_1 \Longleftrightarrow (\beta a, \beta b) \in X_2$ $(G_1 \cong G_2)$.

В матричном виде $T^T AT = B$, где $A, B -$ матрицы смежности вершин графов G_1 и G_2 соответственно; $T -$ матрица подстановки, соответствующей отображению β.

Автоморфизм графа $G -$ это изоморфизм графа на себя. В матричном виде $T^T AT = A$.

Постановка задачи. Выполнить следующие упражнения.

Дан орграф $G = (V,U)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ – множество вершин, U – множество дуг. Следует: построить граф; составить матрицу смежности вершин орграфа, матрицу смежности дуг, матрицу инциденций:

1) $U = \{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_5),(v_2,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_5),(v_3,v_6),(v_4,v_3),(v_4,v_6),(v_6,v_5)\}$;
2) $U = \{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_6),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_3,v_4),(v_3,v_6),(v_5,v_3),(v_5,v_4),(v_6,v_4)\}$;
3) $U = \{(v_1,v_6),(v_1,v_4),(v_1,v_5),(v_2,v_6),(v_2,v_5),(v_2,v_1),(v_2,v_3),(v_3,v_1),(v_5,v_4),(v_5,v_6)\}$;
4) $U = \{(v_2,v_4),(v_3,v_1),(v_4,v_3),(v_5,v_1),(v_5,v_2),(v_5,v_4),(v_5,v_6),(v_6,v_1),(v_6,v_2),(v_6,v_3)\}$;
5) $U = \{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_1,v_5),(v_2,v_1),(v_2,v_5),(v_2,v_6),(v_4,v_3),(v_5,v_4),(v_6,v_1),(v_6,v_5)\}$;
6) $U = \{(v_1,v_4),(v_2,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_3,v_6),(v_5,v_4),(v_6,v_1),(v_6,v_5),(v_6,v_2)\}$;
7) $U = \{(v_1,v_2),(v_1,v_4),(v_2,v_4),(v_3,v_2),(v_3,v_4),(v_3,v_6),(v_4,v_6),(v_5,v_1),(v_5,v_2),(v_5,v_3)\}$;

8) $U=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_1,v_6),(v_2,v_5),(v_3,v_2),(v_3,v_4),(v_4,v_2),(v_6,v_3),(v_6,v_2)\}$;

9) $U=\{(v_1,v_6),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_2,v_4),(v_3,v_1),(v_4,v_1),(v_4,v_3),(v_5,v_1),(v_5,v_3),(v_5,v_4)\}$;

10) $U=\{(v_2,v_4),(v_2,v_6),(v_2,v_5),(v_3,v_2),(v_4,v_1),(v_5,v_1),(v_5,v_6),(v_5,v_4),(v_6,v_1),(v_6,v_4)\}$.

Лабораторная работа № 11. Операции над графами. Метрические характеристика графов

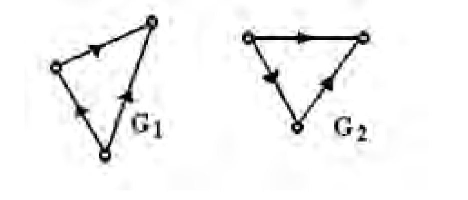
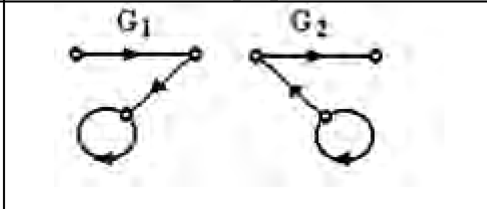
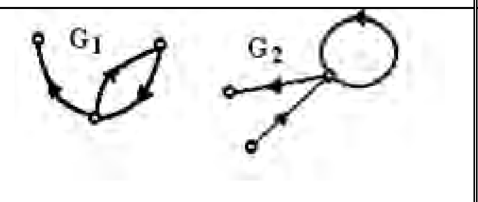
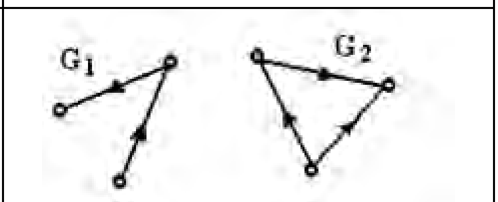
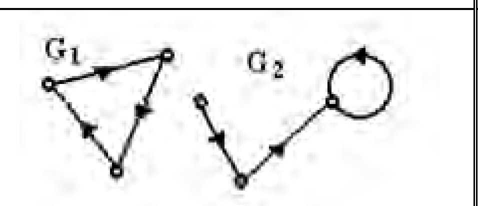
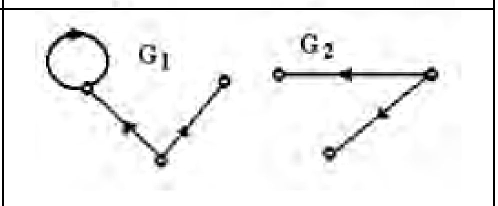
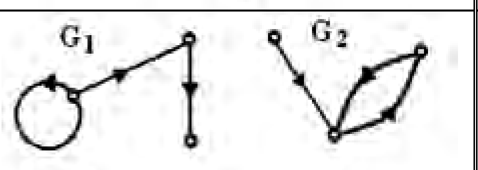
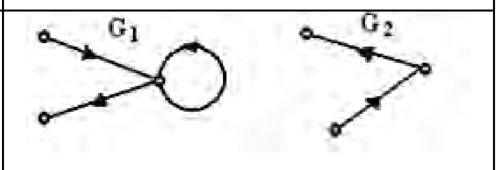
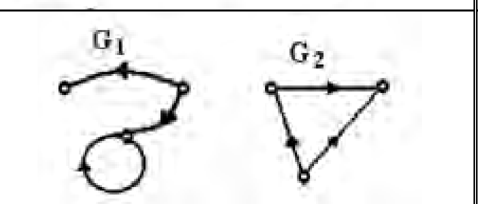
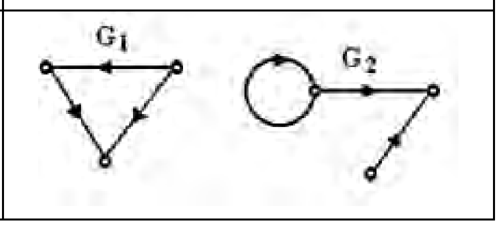
Граф, не содержащий циклов, называется *лесом*.

Дерево – это связный граф без циклов.

Графом n*-перестановок* назовём граф, вершины которого – все перестановки элементов n- множества и две вершины смежны в том и только том случае, когда одна из них преобразуется в другую транспозицией двух элементов.

Постановка задачи. Для графов G_1 и G_2, заданных в таблице 5, найти $G_1 \cup G_2$; $G_1 \cap G_2$; $G_1 \times G_2$.

Таблица 5 – Условия задания

Вариант	Граф	Вариант	Граф
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Лабораторная работа № 12. Упорядочивание элементов графа

Упорядоченный граф – граф изоморфный исходному, для которого характерны следующие правила:

1) вершины графа расположены по слоям;
2) вершины первого слоя не имеют предшествующих вершин;
3) вершины последнего слоя не имеют последующих вершин;
4) вершины i-го слоя соединяются дугами с вершинами (i + 1)-го слоя;
5) вершины, находящиеся на одном слое не соединяются.

Упорядочим граф, представленный на рисунке 5.

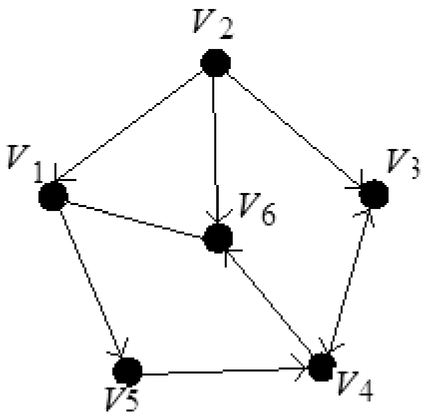


Рисунок 5 – Граф

Рассмотрим алгоритм упорядочения графа.

1 Находим в графе вершины, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первый слой. Удаляем из графа эти вершины и дуги, из них исходящие.

2 В полученном графе находим вершины, в которые не входит ни одна дуга. Получаем вершины второго слоя. Удаляем эти вершины и дуги, из них исходящие.

3 Аналогично для остальных вершин повторяем п. 2 алгоритма.

4 Процесс продолжается до тех пор, пока из исходного графа не будут удалены все вершины и дуги (рисунок 6).

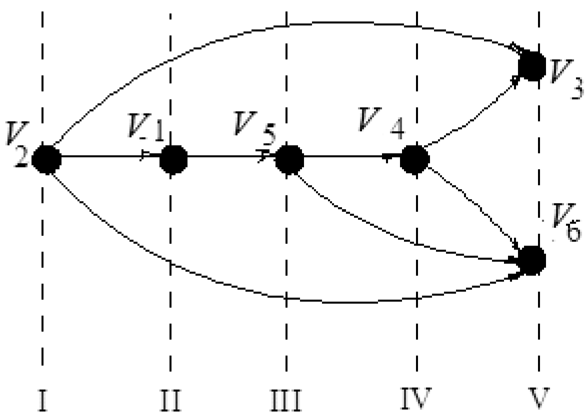


Рисунок 6 – Упорядоченный граф

Аналогичным способом можно упорядочить не только вершины, но и дуги графа.

Упорядочение производится по матрице смежности вершин графа.

1 Строим вектор x_1, компонентами которого является сумма элементов столбцов матрицы смежности.

2 В этом векторе x_1 находим нулевую координату, т. е. вершину, соответствующую нулевой компоненте, находящейся на первом слое.

3 Из матрицы смежности вычёркиваем строку, соответствующую вершинам первого слоя.

4 Находим компоненты вектора x_2 (сумму столбцов без вычеркнутой строки).

5 Нулевые компоненты вектора x_2 образуют вершины второго слоя.

6 Вычёркивая из матрицы строки, соответствующие вершинам второго слоя, находим компоненты вектора x_3 и т. д.

7 Процесс продолжается до тех пор, пока все строки матрицы не будут вычеркнуты.

Постановка задачи. Упорядочить вершины орграфа и построить изоморфный граф, заданный в условии лабораторной работы № 10.

Лабораторная работа № 13. Кратчайший путь в графе

Алгоритмы поиска кратчайшего пути на графе позволяют найти путь из заданной вершины графа в указанную вершину графа. Простейшие алгоритмы перебирают всевозможные варианты на основании некоторых дополнительных данных и выбирают оптимальный путь.

Постановка задачи. Для графа, длины дуг которого заданы таблицей 6, найти наикратчайший путь и его длину.

Таблица 6 – Длины дуг графа *G*

Вариант	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{24}	c_{25}	c_{34}	c_{36}	c_{46}	c_{47}	c_{57}	c_{58}	c_{67}	c_{68}	c_{78}
1	9	5	12	19	6	14	6	14	5	9	2	15	3	13	12
2	5	7	4	15	15	5	6	12	7	2	8	9	5	10	5
3	7	6	9	12	12	7	10	11	9	5	6	7	7	8	7
4	4	10	5	17	11	6	12	7	9	8	5	10	6	7	8
5	6	13	8	21	10	7	7	9	11	8	7	11	8	7	5
6	8	7	5	15	11	5	13	7	9	5	7	9	4	8	6
7	3	10	4	9	7	8	11	4	8	3	9	12	6	11	10
8	2	5	5	10	6	7	6	9	3	8	5	11	4	10	11
9	8	11	5	16	5	6	9	7	8	6	5	7	7	7	6
10	7	8	6	12	7	5	5	7	10	8	7	4	7	5	4

Лабораторная работа № 14. Остовы и деревья

Остов (каркас, скелет) графа G – это остовный подграф графа G, задающий дерево на каждой компоненте связности графа G.

Для связного графа остов – это дерево, покрывающее все вершины исходного графа.

Пусть есть некоторый граф G (рисунок 7).

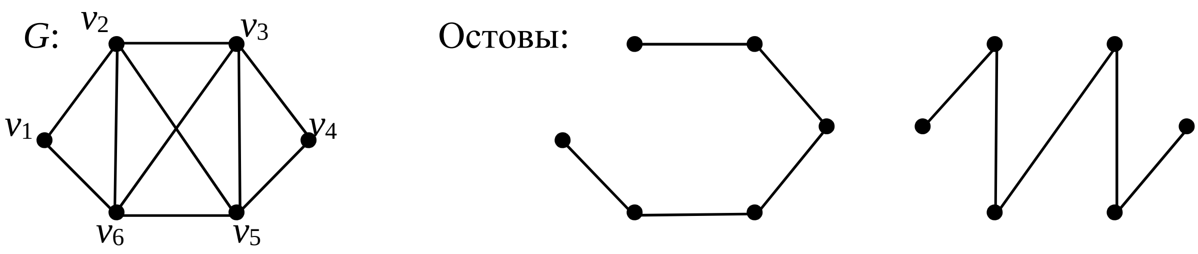


Рисунок 7 – Графы

Очевидно, что в каждом графе существует остов, в общем случае не один. Его можно получить, разрушая циклы в каждой компоненте связности.

Удаление ребер исходного графа.

Очередное удаляемое ребро не должно делать граф не связным, но должно соблюдать ацикличность дерева (рисунок 8).

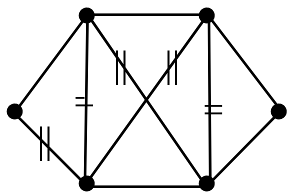


Рисунок 8 – Граф

Добавление ребра пустому графу.

Очередное добавляемое ребро не должно приводить к образованию цикла (рисунок 9).

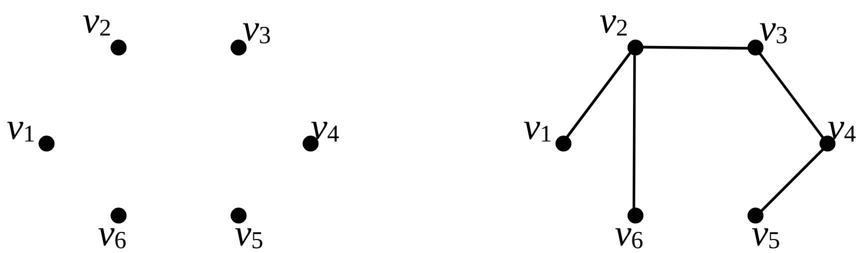


Рисунок 9 – Граф

Постановка задачи. Найти остов минимального и максимального веса графа, заданного на рисунке 10.

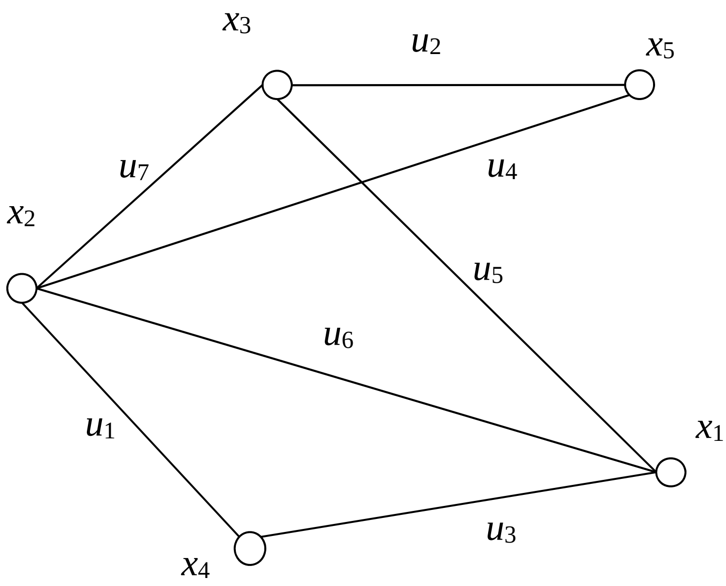


Рисунок 10 – Граф

Веса ребер графа заданы в таблице 7.

Таблица 7 – Веса дуг графа

Вариант	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
1	5	3	8	9	7	5	2
2	6	8	7	4	2	3	9
3	9	5	4	7	6	2	8
4	3	5	1	2	4	8	9
5	4	7	5	6	8	3	6
6	9	8	4	3	1	4	9
7	9	6	3	5	8	7	3
8	2	3	6	5	8	4	1
9	6	2	3	4	7	6	3
10	6	7	5	7	8	3	2

Лабораторная работа № 15. Сети

Сетью называют ориентированный связный граф $G(V, E)$ с множеством вершин V и множеством дуг E, где каждой дуге $(v_i, v_j) \in E$ придается числовая характеристика r_{ij}, называемая *пропускной способностью*. В G выделяют две фиксированные вершины – s и t; s называют *истоком*, t – *стоком*, а остальные вершины – *промежуточными*. Пропускная способность дуги $r_{ij} \geq 0$, и если $(v_i, v_j) \notin E$, то $r_{ij} = 0$.

Множество чисел $X=\{x_{ij}\}$ называют *потоком по сети*, а сами x_{ij}, определенные на дугах $(v_i,v_j)\in E$, – *потоками в дугах*, если выполняются следующие условия:

1) $x_{ij}=-x_{ji}$;

2) $x_{ij}\le r_{ij}$ (поток в дуге (v_i,v_j) не может превышать пропускной способности этой дуги);

3) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=0\left(v_i\ne s,t\right)$ (условие сохранения потока в промежуточных вершинах).

Если $x_{ij}<r_{ij}$ то дуга (v_i,v_j) называется *ненасыщенной*, если же $x_{ij}=r_{ij}$ – *насыщенной*.

Суммарный поток из истока s равен суммарному потоку в сток t, т. е.

$$f=\sum_{j=1}^{n} x_{kj}=\sum_{i=1}^{n} x_{il}\ \left(v_k=s, v_l=t\right),$$

где v_j – конечные вершины дуг, исходящих из s;

v_i – начальные вершины дуг, входящих в t.

Функцию f называют *мощностью потока* на сети.

Разрез сети $S/\overline{S}$ – множество дуг, для которых выполняются следующие требования:

1) $s\in S$; $t\in\overline{S}$;

2) $S\cap\overline{S}=\varnothing$;

3) $S\cup\overline{S}=V$.

Пропускная способность разреза $R\left(S/\overline{S}\right)$ равна сумме пропускных способностей r_{ij} всех дуг, входящих в разрез.

Поток через разрез $X\left(S/\overline{S}\right)$ равен сумме потоков x_{ij} по всем дугам, входящим в разрез.

Теорема Форда-Фалкерсона: максимальный поток по заданной сети равен минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s от t.

Постановка задачи. Для сети, пропускные способности r_{ij} которой указаны в таблице 8, найти максимальный поток от истока $v_1 = s$ до стока $v_7 = t$.

Таблица 8 – Пропускная способность дуг сети

Вариант	$r_{ij}^{i,j}$													
1	$18^{1,2}$	$16^{1,3}$	$9^{1,6}$	$8^{2,3}$	$11^{2,4}$	$7^{2,5}$	$13^{2,7}$	$13^{3,5}$	$19^{3,7}$	$10^{4,3}$	$15^{4,6}$	$17^{5,4}$	$28^{5,6}$	$14^{6,7}$
2	$12^{1,2}$	$9^{1,3}$	$11^{1,6}$	$12^{2,3}$	$7^{2,4}$	$12^{3,4}$	$10^{3,5}$	$18^{3,7}$	$12^{4,5}$	$15^{4,6}$	$6^{4,7}$	$8^{5,2}$	$15^{5,7}$	$4^{6,7}$
3	$9^{1,2}$	$11^{1,4}$	$17^{1,6}$	$6^{2,3}$	$8^{2,5}$	$12^{2,7}$	$7^{3,7}$	$5^{4,2}$	$5^{4,6}$	$4^{4,7}$	$7^{5,7}$	$9^{6,7}$		
4	$10^{1,2}$	$5^{1,3}$	$8^{1,6}$	$3^{2,4}$	$3^{2,5}$	$4^{2,7}$	$4^{3,4}$	$5^{3,5}$	$10^{3,6}$	$4^{4,5}$	$9^{4,7}$	$5^{5,6}$	$6^{5,7}$	$7^{6,7}$
5	$5^{1,3}$	$15^{1,5}$	$9^{1,6}$	$6^{2,5}$	$7^{2,7}$	$3^{3,2}$	$4^{3,4}$	$7^{3,6}$	$8^{4,6}$	$3^{4,7}$	$9^{5,6}$	$18^{5,7}$	$5^{6,7}$	
6	$10^{1,2}$	$9^{1,5}$	$26^{1,7}$	$7^{3,2}$	$11^{3,2}$	$8^{4,3}$	$12^{4,6}$	$11^{4,7}$	$13^{5,4}$	$10^{5,6}$	$14^{6,3}$	$8^{6,7}$		
7	$10^{1,2}$	$8^{1,4}$	$8^{2,3}$	$12^{2,4}$	$10^{2,5}$	$6^{2,7}$	$5^{3,6}$	$11^{3,7}$	$4^{4,5}$	$12^{4,6}$	$5^{5,3}$	$9^{5,7}$	$6^{6,5}$	$7^{6,7}$
8	$10^{1,3}$	$18^{1,4}$	$8^{1,5}$	$6^{2,3}$	$11^{2,5}$	$15^{2,6}$	$19^{2,7}$	$12^{3,5}$	$13^{3,7}$	$5^{4,7}$	$18^{5,4}$	$7^{5,6}$	$9^{6,7}$	
9	$7^{1,2}$	$9^{1,3}$	$8^{1,6}$	$11^{2,3}$	$14^{2,4}$	$10^{2,5}$	$6^{2,7}$	$9^{3,5}$	$11^{3,6}$	$19^{3,7}$	$12^{4,6}$	$8^{5,4}$	$14^{5,6}$	$10^{6,7}$
10	$5^{1,2}$	$8^{1,3}$	$9^{2,5}$	$17^{2,6}$	$6^{3,2}$	$10^{3,5}$	$24^{3,7}$	$15^{4,5}$	$6^{4,7}$	$8^{5,6}$	$12^{5,7}$	$7^{5,7}$		

Лабораторная работа № 16. Планарные графы

Математической основой сетевого планирования является граф.

Сетевой график (***сеть***) – характеризуется наглядным изображением (в виде графа изображается некоторый проект, показывающий технологическую связь между работой).

Сетевой график (***сеть***) – это граф без петель и контуров, который имеет одну или несколько числовых характеристик.

Основными понятиями сетевого планирования является ***работа и событие***.

Работа – процесс, который характеризуется затратами времени и ресурсов, и приводит к определённым результатам (дуги).

Событие – результат выполнения одной или нескольких работ (вершины).

Существуют несколько подходов по построению сетевого графика:

1) в терминах событий (вершины – события, дуги – взаимосвязь между событиями);

2) в терминах работ (вершины – работы, дуги – взаимосвязь между работами);

3) в терминах событий и работ (вершины – события, дуги – работы).

События бывают:

– исходные – события, с которых начинается выполнение всего комплекса работ;

– завершающие – события, которыми заканчивается выполнение работ;

– промежуточные – все остальные события.

Постановка задачи. Сетевой график (орграф) задан матрицей смежности работ a_i (дуг) (таблица 9). Построить сетевой график и перенумеровать события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона. Найти критический путь и резервы времени полных путей. Построить линейный график и найти по нему работы критического пути. Для некритических работ определить полные и свободные резервы времени.

Таблица 9 – Условия задач

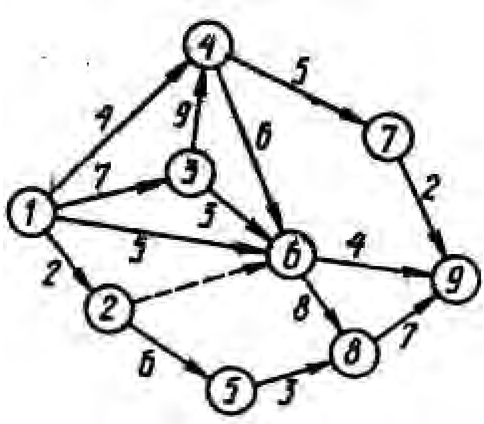
i	j									t_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	8
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	7
4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	6
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	9
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12

В таблице 9 указаны номера предшествующих i и последующих j работ, а также указана продолжительность работ t_i.

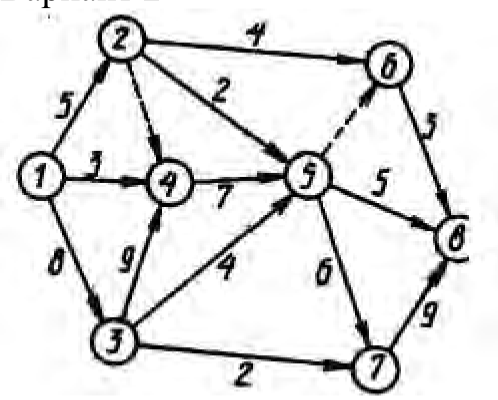
Лабораторная работа № 17. Элементы сетевого планирования

Постановка задачи. Рассчитать непосредственно на сетевом графике комплекса работ (рисунок 11) ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, минимальное время выполнения комплекса (критический срок). Выделить на сетевом графике критический путь. Для некритических работ найти полные и свободные резервы времени.

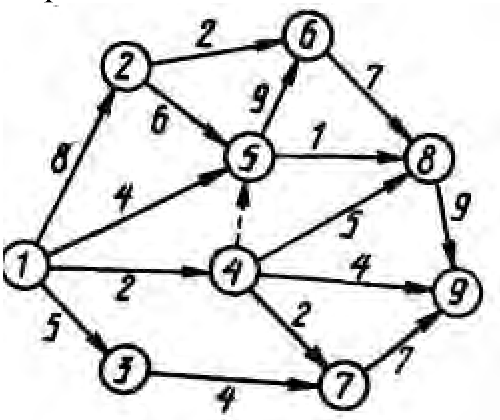
Вариант 1



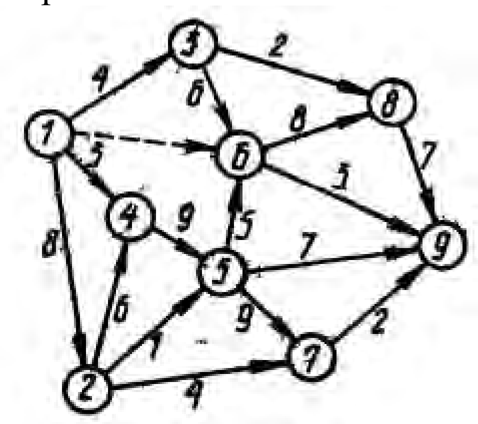
Вариант 2



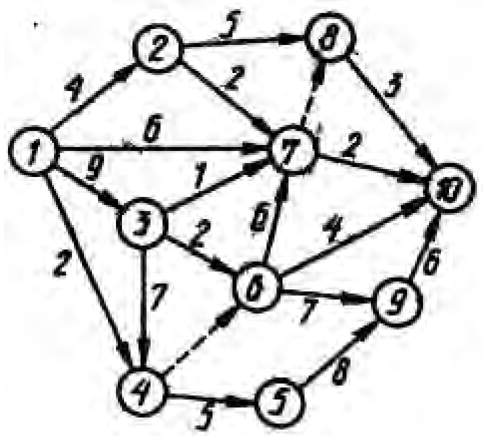
Вариант 3



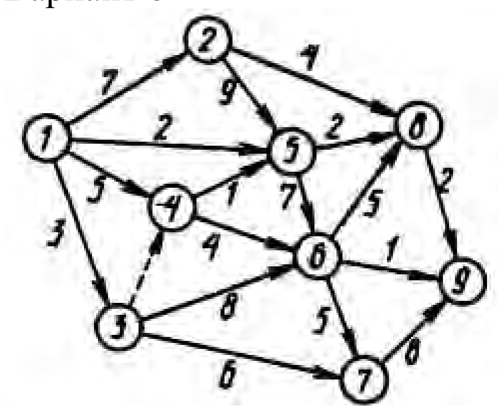
Вариант 4



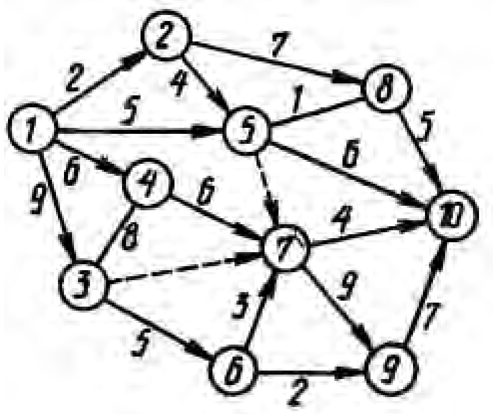
Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7



Вариант 8

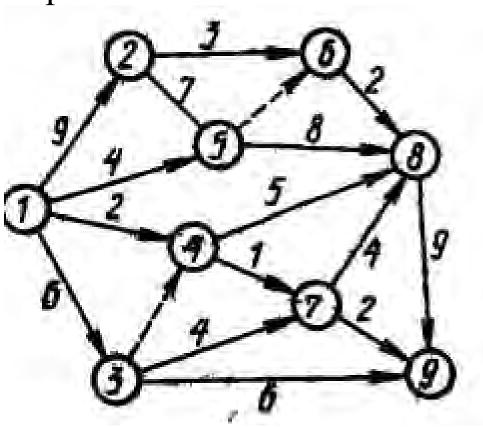
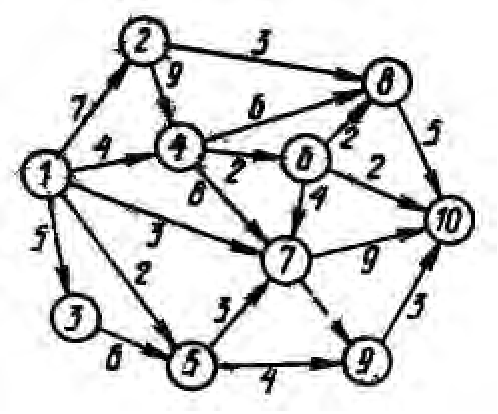
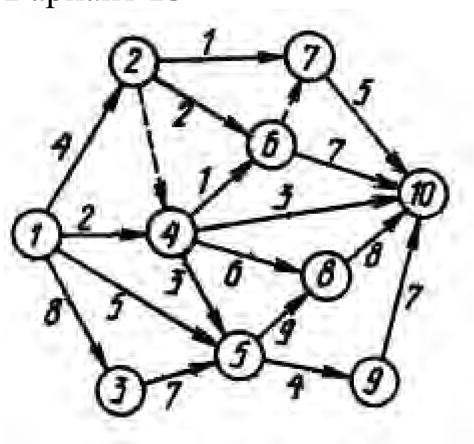


Рисунок 11 – Сеть

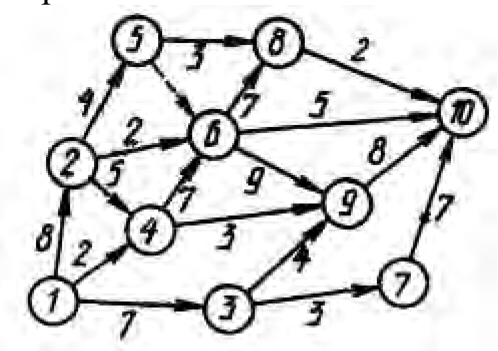
Вариант 9



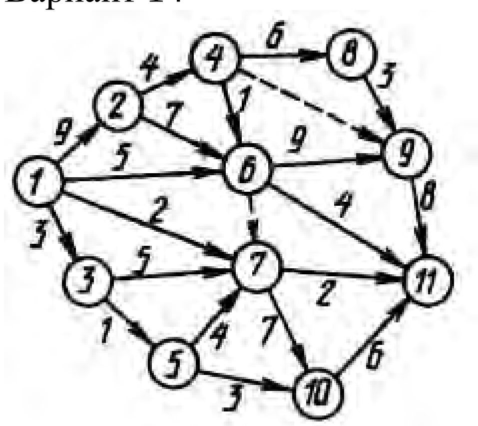
Вариант 13



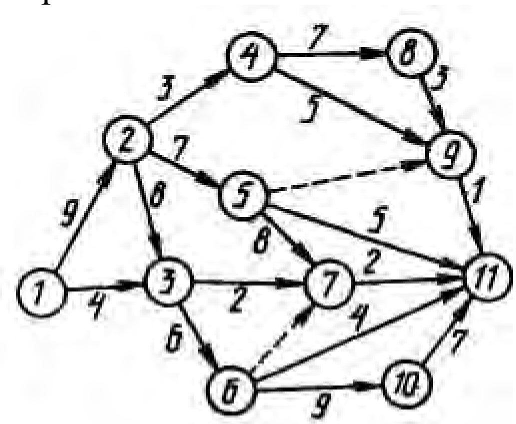
Вариант 10



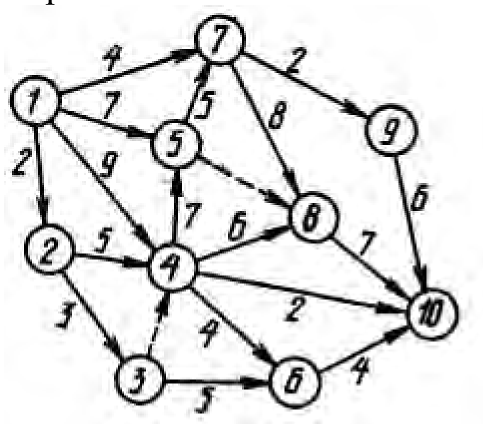
Вариант 14



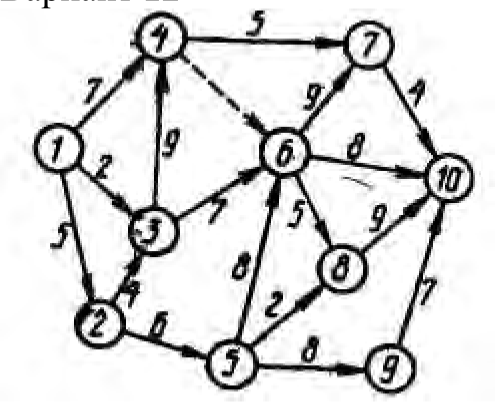
Вариант 11



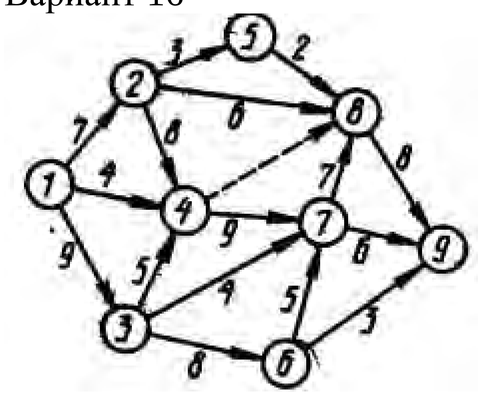
Вариант 15



Вариант 12

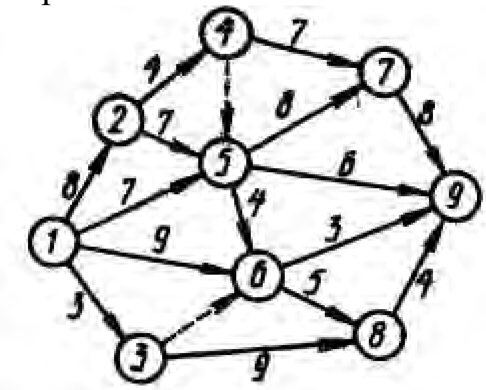


Вариант 16

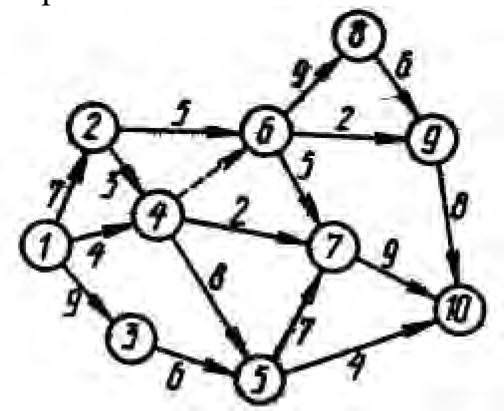


Продолжение рисунка 11

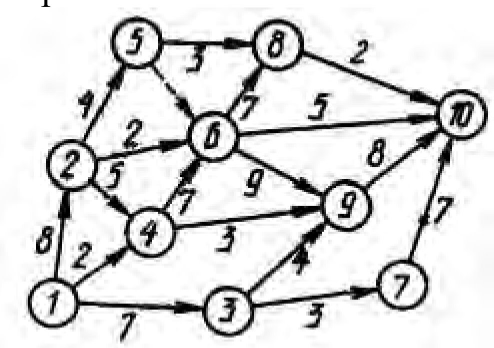
Вариант 17



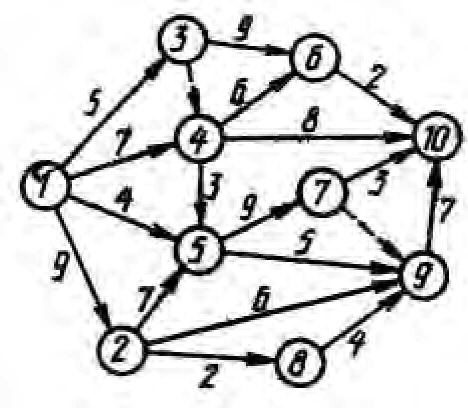
Вариант 18



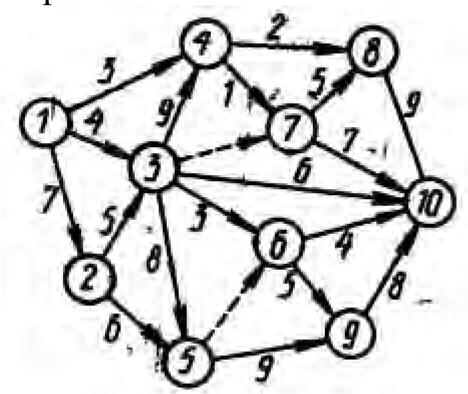
Вариант 19



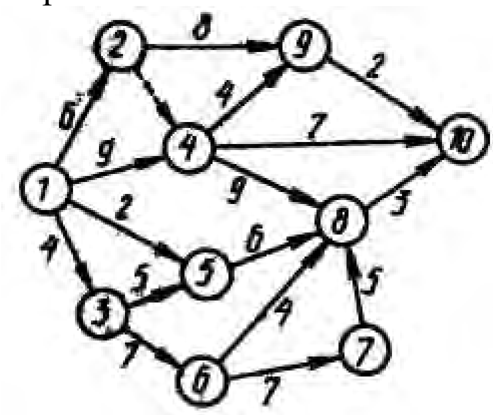
Вариант 20



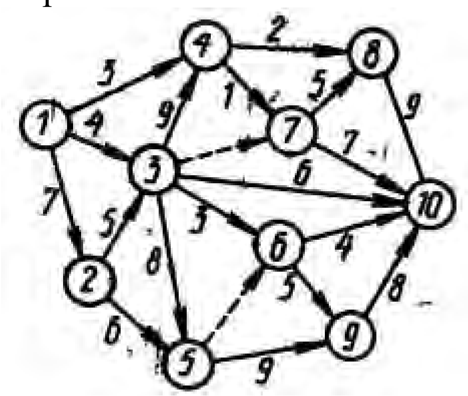
Вариант 21



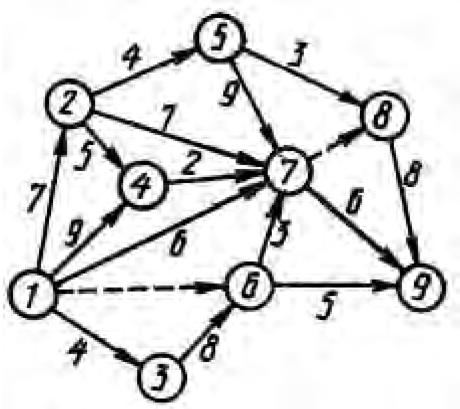
Вариант 22



Вариант 23

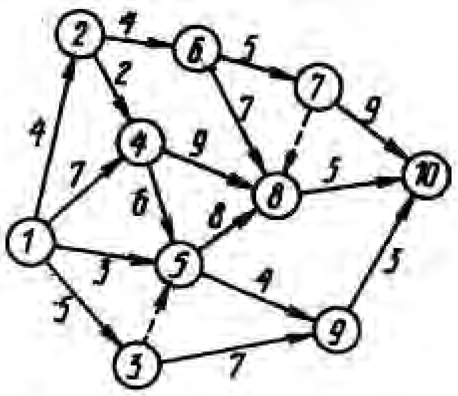


Вариант 24

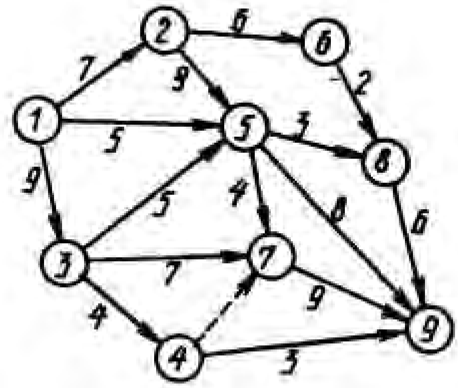


Продолжение рисунка 11

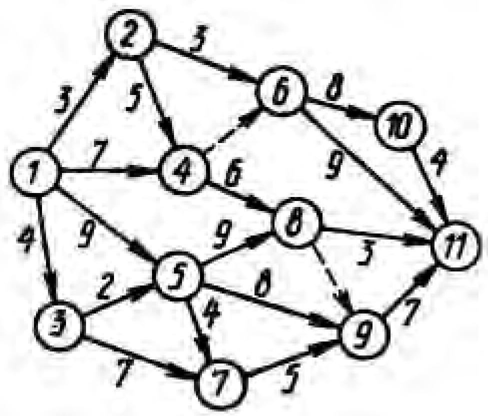
Вариант 25



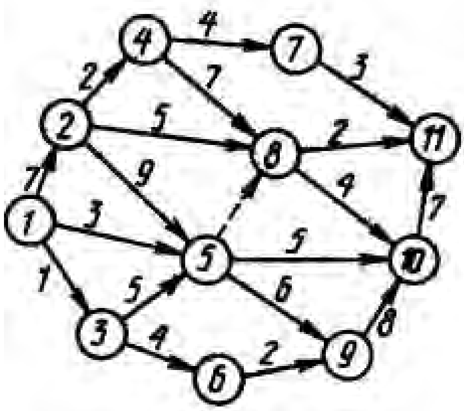
Вариант 28



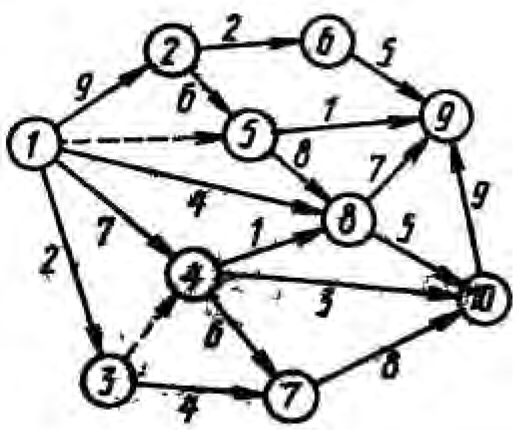
Вариант 26



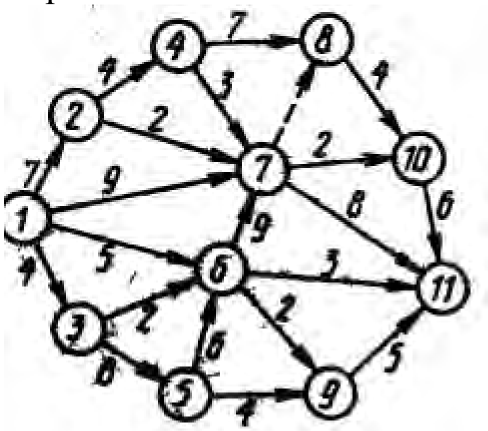
Вариант 29



Вариант 27



Вариант 30



Окончание рисунка 11

Список литературы

1 **Баврин, И. И.** Дискретная математика: учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – Москва: Юрайт, 2016. – 208 с.

2 **Белоусов, А. И.** Дискретная математика: учебное пособие / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд. – Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 306 с.

3 **Деза Е. И.** Основы дискретной математики: учебное пособие / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. – 3-е изд. – Москва : ЛЕНАНД, 2016. – 224 с.