

ФИЗИКА

УДК 517+530.1

С. В. Жестков, д-р физ.-мат. наук, проф., А. А. Романенко, канд. физ.-мат. наук, доц.**ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА-ГОРДОНА СО СТЕПЕННОЙ И НАСЫЩАЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

На основе численно-аналитического метода, разработанного авторами, исследуются двумерные и трехмерные уравнения Клейна-Гордона с нелинейностью третьей и пятой степени, а также с насыщающейся нелинейностью. Суть метода состоит в построении аналитической асимптотики солитона на бесконечности и численном продолжении ее до начала координат. Дано математическое обоснование численной процедуры продолжения асимптотического решения до начала координат. Полученные результаты представляют интерес для нелинейной оптики и лазерной физики, физики твердого тела и физики частиц с высокой энергией.

Введение

Известно [1, 2], что прогресс в прикладных науках прямо связан с глубиной проработки базовых физических принципов, лежащих в их основе.

Появление доступных материалов, обладающих нелинейными оптическими свойствами, стимулировало развитие нелинейной теории распространения света, в которой центральное место занимают солитоны. В частности, для практического применения актуальными являются вопросы распространения солитонов в оптических волокнах, поскольку солитоны способны распространяться на значительные расстояния без искажения формы. Поэтому их можно рассматривать как естественный «бит» информации. Кроме того, солитон сам по себе является объектом глубокого интереса со стороны фундаментальной науки. Удивительно, что для многих неинтегрируемых систем как гамильтоновых, так и не гамильтоновых были найдены точные решения. Таким образом, построение и анализ солитонных решений является актуальной проблемой теории солитонов, решение которой способствует прогрессу в прикладных науках.

Известно [3], что применение классических методов построения солитонов, таких как метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), метод Хироты и их модификаций, к трехмерным уравнениям нелинейной физики сталкивается с большими трудностями. Поэтому в настоящее время для их исследования используются численные методы. В частности, первый трехмерный солитон был построен в [4] для обобщенного уравнения Картевега де-Фриза (КДФ). Нелинейные уравнения Клейна-Гордона исследовались многими авторами [5–12]. В отличие от известных работ, мы развиваем численно-аналитический метод построения симметричных солитонов [13, 14], применимый к широкому классу уравнений нелинейной физики. Метод позволяет провести сравнение значений амплитуды и ширины солитона для одномерной, двумерной и трехмерной моделей. Для иллюстрации рассматриваются нелинейные уравнения Клейна-Гордона с нелинейностью третьей и пятой степени, а также с насыщающейся нелинейностью.

Построение и анализ двумерных стационарных солитонов уравнения Клейна-Гордона с нелинейностью третьей и пятой степени

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных солитонов (2 + 1)-мерного уравнения Клейна-Гордона следующего вида [9]:

$$u_{tt} - \gamma^2 (u_{xx} + u_{yy}) = -au + b|u|^2 u + c|u|^4 u, \quad (1)$$

где a, b, c, γ – действительные числа, характеризующие среду распространения волнового импульса (возможные нормировки этих параметров указаны в [2]), $a > 0$; t – время, отсчитываемое от «центра» импульса.

Стационарные солитоны уравнения (1) будем строить в виде

$$u(t, x, y) = v(x, y)e^{ikt}, \quad (2)$$

где k – действительное число; $v(x, y)$ – неизвестная функция.

Подставляя (2) в (1), найдем

$$v_{xx} + v_{yy} = pv - qv^3 - \mu v^5, \quad (3)$$

где

$$p \equiv \frac{a - k^2}{\gamma^2} > 0; \quad q \equiv \frac{b}{\gamma^2}; \quad \mu \equiv \frac{c}{\gamma^2}.$$

Переходя в полярную систему координат и полагая, что огибающая солитона не зависит от полярного угла, из (3) получим

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = pv - qv^3 - \mu v^5; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

К уравнению (4) добавим краевые условия:

$$v(+\infty) = v'(+\infty) = 0. \quad (5)$$

Задача (4), (5) определяет существование стационарного симметричного солитона. Вопрос о ее решении в строгой постановке является открытым.

Для решения задачи предположим, что величина $r^{-1}v'(r)$ мала по сравнению с $v''(r)$ при $r \rightarrow +\infty$. Это предположение оправдывается тем фактом, что солитон на бесконечности должен экспоненциально затухать. Тогда мы придем к уравнению

$$v''(r) = pv - qv^3 - \mu v^5 \quad (6)$$

с условиями

$$v(+\infty) = v'(+\infty) = 0,$$

которое определяет асимптотику солитона на бесконечности. Для его решения обозначим $v'(r) = z$. Тогда первый интеграл примет вид, учитывая краевые условия на бесконечности,

$$z^2 = pv^2 - \frac{q}{2}v^4 - \frac{1}{3}\mu v^6. \quad (7)$$

Следовательно, из (7) получим

$$\frac{dv}{dr} = -\sqrt{pv^2 - \frac{q}{2}v^4 - \frac{1}{3}\mu v^6}. \quad (8)$$

Знак «минус» указывает на убывание функции $v(r)$. Из уравнения (8) найдем

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{p - \frac{q}{2}v^2 - \frac{1}{3}\mu v^4}} = -r + r_0,$$

где r_0 – произвольная постоянная.

Для вычисления интеграла следует сделать замену $v^2 = s$, а затем новую замену

$$\sqrt{p - \frac{q}{2}s - \frac{1}{3}\mu s^2} = -s\xi + \sqrt{p}.$$

В результате получим следующее

решение:

$$v(r) = \left[\frac{4pe}{\left(e + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}p\mu} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$e \equiv \exp\{-2\sqrt{pr}\}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что параметр q может быть любого знака и обращаться в нуль. Параметр μ может быть положительным и обращаться в нуль. Кроме того, он может быть и отрицательным при условии, что

$$q \neq 0; \quad \frac{1}{4}q^2 > \frac{4}{3}p|\mu|.$$

Обобщая форму решения (9), можно получить следующий новый результат.

Теорема 1. Для того, чтобы задача (6) имела решение вида

$$v(r) = \lambda \left[d_0 + d_1 e^{\alpha r} + d_2 e^{-\alpha r} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

где $\lambda > 0$, $d_0 > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, α – произвольные параметры, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения:

$$\alpha^2 = 4p; \quad q\lambda^2 = 4pd_0;$$

$$3q^2(4d_1d_2 - d_0^2) = 16p\mu d_0^2.$$

Решение (9) содержится в (10) при дополнительных условиях:

$$\alpha = -2\sqrt{p}; \quad d_0 = qd_1.$$

Интересно отметить, что максимальное значение

$$v_{\max} = \lambda \left[d_0 + 2\sqrt{d_1d_2} \right]$$

функция (10) принимает в точке

$$r_{\max} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right).$$

По существу значение v_{\max} является амплитудой одномерного, стационарного солитона уравнения

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} = -au + b|u|^2u + c|u|^4u,$$

которое интегрируется в явном виде.

Рассмотрим численную процедуру продолжения асимптотики (10) до точки $r = 0$. Пусть r_* точка из $[0, +\infty)$ такая, что при $r \geq r_*$ можно использовать асимптотическое представление (10). Тогда решение уравнения (4) можно продолжить гладким образом до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = pv - qv^3 - \mu v^5;$$

$$v(r_*) = v_0; \quad v'(r_*) = v_1, \quad (11)$$

где v_0, v_1 – значения асимптотической функции (10) и ее производной в точке r_* .

Задача Коши (11) эквивалентна интегральному уравнению

$$v(r) = v_0 + (v_1 r_*) \ln \left(\frac{r}{r_*} \right) +$$

$$+ \ln r \int_{r_*}^r s (pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s)) ds -$$

$$- \int_{r_*}^r s \ln s (pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s)) ds. \quad (12)$$

Применяя к уравнению (12) принцип сжимающих отображений [3], получим локальную теорему об однозначной разрешимости задачи Коши (11).

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

$$\left\{ p + 3|q|R^2 + 5|\mu|R^4 \right\} \left\{ \frac{1}{2}|r^2 - r_*^2| |\ln r| + \int_{r_*}^r s |\ln s| ds \right\} < 1;$$

$$\left\{ pR + |q|R^3 + |\mu|R^5 \right\} \left\{ \frac{1}{2}|r^2 - r_*^2| |\ln r| + \int_{r_*}^r s |\ln s| ds \right\} + v_0 + \left| v_1 r_* \ln \frac{r}{r_*} \right| \leq R.$$

Тогда в области $|r - r_*| \leq \delta$, $0 \leq v \leq R$, где δ – достаточно малое число, а R – конечное число, уравнение (12) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.

На основании теоремы 2 можно утверждать, что численное решение задачи Коши (11) строится на конечном отрезке $[0, r_*]$ за конечное число шагов. При этом эквивалентное интегральное уравнение в окрестности точки $r = 0$, учитывая, что $v'(0) = 0$, примет вид

$$v(r) = v(0) + \ln \int_0^r s (pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s)) ds - \int_0^r s \ln s (pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s)) ds, \quad (13)$$

где $v(0)$ – неизвестная амплитуда солитона.

Значение $v(0)$ подбирается таким образом, чтобы график осесимметричного солитона на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходил в график асимптотической функции (10).

Обозначим $v(0) = A$. Тогда в окрестности точки $r = 0$ из (13) получим

$$v(r) \approx A + \frac{r^2}{2} \ln r (pA - qA^3 - \mu A^5) - \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) (pA - qA^3 - \mu A^5) = A + \frac{1}{4} r^2 (pA - qA^3 - \mu A^5).$$

Это значит, что в окрестности точки $r = 0$ график $v(r)$ представляет собой па-

раболу. Так как ветви параболы должны быть опущены вниз, следовательно, должно выполняться неравенство

$$p - qA^2 - \mu A^4 < 0,$$

которое можно использовать для проверки вычислений.

Построение и анализ трехмерных стационарных солитонов уравнения Клейна-Гордона с нелинейностью третьей и пятой степени

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных солитонов (3+1)-мерного уравнения Клейна-Гордона вида

$$u_{tt} - \gamma^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = -au + b|u|^2 u + c|u|^4 u, \quad (14)$$

где a, b, c, γ – действительные числа, характеризующие среду распространения волнового импульса, $a > 0$.

Стационарные солитоны уравнения (14) будем строить в виде

$$u(t, x, y, z) = v(x, y, z)e^{ikt}, \quad (15)$$

где k – действительное число; $v(x, y, z)$ – неизвестная функция.

Подставляя (15) в (14), найдем

$$v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = pv - qv^3 - \mu v^5, \quad (16)$$

где

$$p \equiv \frac{a - k^2}{\gamma^2} > 0; \quad q \equiv \frac{b}{\gamma^2}; \quad \mu \equiv \frac{c}{\gamma^2}.$$

Переходя в сферическую систему

координат r, φ, θ и полагая, что огибающая солитона зависит только от радиуса вектора r , из (16) получим

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = pv - qv^3 - \mu v^5. \quad (17)$$

К уравнению (17) добавим краевые условия:

$$v(+\infty) = v'(+\infty) = 0. \quad (18)$$

Задача (17), (18) определяет существование стационарного симметричного трехмерного солитона. Вопрос о ее решении в строгой постановке является открытым.

Для решения задачи в качестве асимптотики солитона на бесконечности возьмем функцию (10). Пусть r_* точка из $[0, +\infty)$ такая, что при $r \geq r_*$ можно использовать асимптотику (10). Тогда решение уравнения (17) можно гладким образом продолжить до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} &= pv - qv^3 - \mu v^5; \\ v(r_*) &= v_0; \quad v'(r_*) = v_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где v_0, v_1 – значения асимптотической функции (10) и ее производной в точке r_* .

Задача Коши (19) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(r) &= v_0 + v_1 r_*^2 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r} \right) + \\ &+ \int_{r_*}^r s \left(pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s) \right) ds - \\ &- \frac{1}{r} \int_{r_*}^r s^2 \left(pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Применяя к уравнению (20) принцип сжимающих отображений [3], получим локальную теорему об однозначной разрешимости задачи Коши (19).

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

$$\left[p + 3|q|R^2 + 5|\mu|R^4 \right] I(r) < 1;$$

$$I(r) \equiv \left| \int_{r_*}^r s ds \right| + \frac{1}{r} \left| \int_{r_*}^r s^2 ds \right|;$$

$$|v_0| + \left| v_1 r_*^2 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r} \right) \right| +$$

$$+ \left[pR + |q|R^3 + |\mu|R^5 \right] I(r) \leq R.$$

Тогда в области $|r - r_*| \leq \delta$, $0 \leq v \leq R$, где δ – достаточно малое число; R – конечное число, уравнение (20) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.

Эта теорема позволяет утверждать, что решение задачи Коши (19) можно численно построить на конечном отрезке $[0, r_*]$ за конечное число шагов. При этом эквивалентное интегральное уравнение в окрестности точки $r = 0$, учитывая начальное условие $v'(0) = 0$, примет вид:

$$\begin{aligned} v(r) &= v(0) + \int_0^r s \left(pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s) \right) ds - \\ &- \frac{1}{r} \int_0^r s^2 \left(pv(s) - qv^3(s) - \mu v^5(s) \right) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

где $v(0)$ – неизвестная амплитуда солитона.

Значение $v(0)$ подбирается таким образом, чтобы график трехмерного солитона на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходил в график асимптотической функции (10). Обозначим $v(0) = A$. Тогда из (21) в окрестности точки $r = 0$ получим

$$v(r) \approx A + \frac{1}{6} r^2 \left(pA - qA^3 - \mu A^5 \right).$$

На рис. 1 представлены графики огибающих одномерных, двумерных и трехмерных солитонов для различных

значений коэффициентов правых частей. Их анализ позволяет сравнить амплитуду

и ширину солитона в зависимости от размерности пространства.

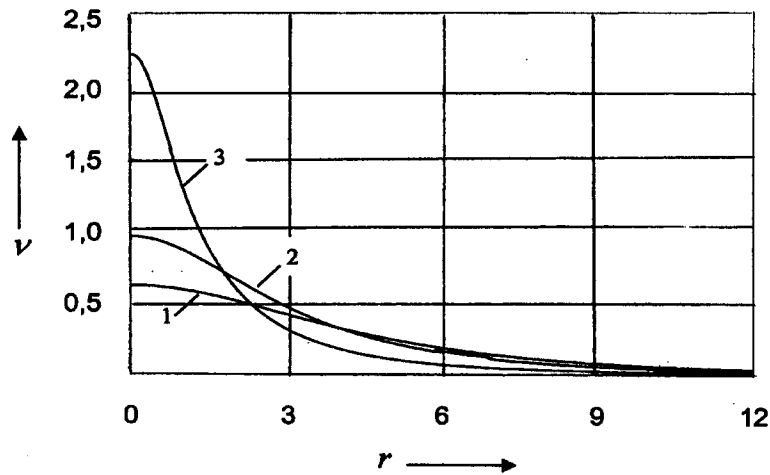


Рис. 1. Графики огибающих солитонов уравнения Клейна-Гордона при значениях $p = 0,1$; $q = 0,5$; $R = 0,1$ и различных размерностей пространства: 1 – одномерный (плоский) солитон ($b = c = 1,0$); 2 – двумерный солитон; 3 – трехмерный солитон

Построение и анализ двумерных стационарных солитонов уравнения Клейна-Гордона с насыщающейся нелинейностью где

$$p = \frac{a - k^2}{\gamma^2} > 0; \quad q = \frac{b}{\gamma^2}.$$

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных солитонов (2+1)-мерного уравнения Клейна-Гордона с насыщающейся нелинейностью:

Переходя в полярную систему координат и полагая, что огибающая солитона не зависит от полярного угла, из (24) получим

$$u_{tt} - \gamma^2(u_{xx} + u_{yy}) = -au + \frac{b|u|^2 u}{1 + \varepsilon|u|^2}, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2}. \quad (25)$$

где $a, \varepsilon, b, \gamma$ – действительные числа, характеризующие среду распространения волнового импульса, $a > 0, \varepsilon > 0$.

К уравнению (25) добавим краевые условия:

$$v(+\infty) = v'(+\infty) = 0. \quad (26)$$

Стационарные солитоны уравнения (22) будем строить в виде

Задача (25), (26) определяет существование стационарного симметричного солитона. Вопрос о ее решении в строгой постановке является открытым. В качестве асимптотики на бесконечности построим решение следующей задачи:

$$u(t, x, y) = v(x, y)e^{ikt}, \quad (23)$$

где k – действительное число; $v(x, y)$ – неизвестная функция.

Подставляя (23) в (22), найдем

$$v_{xx} + v_{yy} = pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2}, \quad (24)$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2};$$

$$v(+\infty) = v'(+\infty) = 0. \quad (27)$$

Ее первый интеграл определяется выражением

$$\frac{dv}{dr} = -\sqrt{pv^2 - \frac{q}{\varepsilon} \left[v^2 - \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon v^2) \right]}. \quad (28)$$

При $r \rightarrow +\infty$ функция $v(r) \rightarrow 0$. Поэтому $\ln(1 + \varepsilon v^2) \sim \varepsilon v^2$. Следовательно, из (28) находим, что асимптотика имеет вид:

$$v(r) \sim e^{-\sqrt{pr}} \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (29)$$

Интересно отметить, что максимальное значение v_{\max} решения задачи (27) определяется из уравнения

$$\varepsilon q^{-1}(q - p\varepsilon)v^2 = \ln(1 + \varepsilon v^2).$$

По существу это значение является амплитудой стационарного одномерного солитона уравнения

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} = -au + \frac{b|u|^2 u}{1 + \varepsilon|u|^2},$$

которое в явном виде не интегрируется.

Пусть r_* точка из $[0, +\infty)$ такая, что

$$\left\{ p + R^2 |q| (3 + \varepsilon R^2) \right\} \left\{ \frac{1}{2} |r^2 - r_*^2| |\ln r| + \left| \int_{r_*}^r s |\ln s| ds \right| \right\} < 1;$$

$$\left\{ pR + |q|R^3 \right\} \left\{ \frac{1}{2} |r^2 - r_*^2| |\ln r| + \left| \int_{r_*}^r s |\ln s| ds \right| \right\} + v_0 + \left| v_1 r_* \ln \frac{r}{r_*} \right| \leq R.$$

Тогда в области $|r - r_*| \leq \delta$, $0 \leq v \leq R$, где δ – достаточно малое число, а R – конечное число, уравнение (31) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.

Таким образом, численное решение задачи Коши (30) строится на конечном отрезке $[0, r_*]$ за конечное число шагов. При этом эквивалентное интегральное

при $r \geq r_*$ можно использовать асимптотику (29). Тогда решение уравнения (25) можно продолжить гладким образом до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2};$$

$$v(r_*) = v_0; \quad v'(r_*) = v_1, \quad (30)$$

где v_0, v_1 – значения асимптотической функции (29) и ее производной в точке r_* .

Задача Коши (30) эквивалентна интегральному уравнению

$$v(r) = v_0 + (v_1 r_*) \ln \left(\frac{r}{r_*} \right) + \ln r \int_{r_*}^r s \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds - \int_{r_*}^r s \ln s \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds. \quad (31)$$

Для уравнения (31) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

уравнение в окрестности точки $r = 0$ принимает вид:

$$v(r) = v(0) + \ln r \int_0^r s \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds - \int_0^r s \ln s \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds, \quad (32)$$

где $v(0)$ – неизвестная амплитуда солитона.

Значение $v(0)$ подбирается таким образом, чтобы график осесимметричного солитона на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходил в график асимптотической функции (29).

Обозначим $v(0) = A$. Тогда в окрестности точки $r = 0$ из (32) получим

$$v(r) \approx A + \frac{1}{4} r^2 \left(pA - \frac{qA^3}{1 + \varepsilon A^2} \right).$$

Это значит, что огибающая двумерного солитона в окрестности точки $r = 0$ представляет собой параболу.

Построение и анализ трехмерных стационарных солитонов уравнения Клейна-Гордона с насыщающейся нелинейностью

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных солитонов (3+1)-мерного уравнения Клейна-Гордона вида

$$u_{tt} - \gamma^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = -au + \frac{b|u|^2 u}{1 + \varepsilon |u|^2}, \quad (33)$$

где $a, \varepsilon, b, \gamma$ – действительные числа, характеризующие среду распространения волнового импульса, $a > 0, \varepsilon > 0$.

Стационарные солитоны уравнения (33) будем строить в виде

$$u(t, x, y, z) = v(x, y, z)e^{ikt}, \quad (34)$$

где k – действительное число; $v(x, y, z)$ – неизвестная функция.

Подставляя (34) в (33), найдем

$$v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2}, \quad (35)$$

где

$$p = \frac{a - k^2}{\gamma^2} > 0; \quad q = \frac{b}{\gamma^2}.$$

Переходя в сферическую систему координат r, φ, θ и полагая, что огибающая солитона зависит только от радиуса вектора r , из (35) получим

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2}. \quad (36)$$

К уравнению (36) добавим краевые условия:

$$v(+\infty) = v'(+\infty) = 0. \quad (37)$$

Задача (36), (37) определяет существование стационарного симметричного трехмерного солитона. В качестве асимптотики на бесконечности можно взять функцию (29).

Пусть r_* точка из $[0, +\infty)$ такая, что при $r \geq r_*$ можно использовать указанную асимптотику. Тогда решение уравнения (36) можно продолжить гладким образом до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} &= pv - \frac{qv^3}{1 + \varepsilon v^2}; \\ v(r_*) &= v_0; \quad v'(r_*) = v_1, \end{aligned} \quad (38)$$

где v_0, v_1 – значения асимптотической функции и ее производной в точке r_* .

Задача Коши (38) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(r) &= v_0 + v_1 r_*^2 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r} \right) + \\ &+ \int_{r_*}^r s \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds - \\ &- \frac{1}{r} \int_{r_*}^r s^2 \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds. \end{aligned} \quad (39)$$

Применяя к уравнению (39) принцип сжимающих отображений [3], получим локальную теорему об однозначной разрешимости задачи Коши (38).

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

$$\left[p + |q|R^2(3 + \varepsilon R^2) \right] I(r) < 1;$$

$$I(r) \equiv \left| \int_{r_*}^r s ds \right| + \frac{1}{r} \left| \int_{r_*}^r s^2 ds \right|;$$

$$|v_0| + \left| v_1 r_*^2 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r} \right) \right| + [pR + |q|R^3] I(r) \leq R.$$

Тогда в области $|r - r_*| \leq \delta, 0 \leq v \leq R$, где δ – достаточно малое число, а R – конечное число, уравнение (39) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.

Из теоремы следует, что численное решение задачи Коши (38) строится на конечном отрезке $[0, r_*]$ за конечное число шагов. При этом эквивалентное интегральное уравнение в окрестности точки $r = 0$ принимает вид:

$$v(r) = v(0) + \int_0^r s \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds - \frac{1}{r} \int_0^r s^2 \left(pv(s) - \frac{qv^3(s)}{1 + \varepsilon v^2(s)} \right) ds, \quad (40)$$

где $v(0)$ – неизвестная амплитуда солитона.

Значение $v(0)$ подбирается таким образом, чтобы график трехмерного солитона на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходил в график асимптотической функции (29).

Обозначим $v(0) = A$. Тогда в окрестности точки $r = 0$ из (40) получим

$$v(r) \approx A + \frac{r^2}{6} \left(pA - \frac{qA^3}{1 + \varepsilon A^2} \right).$$

На рис. 2 представлены графики огибающих одномерных, двумерных и трехмерных солитонов для различных значений коэффициентов правых частей.

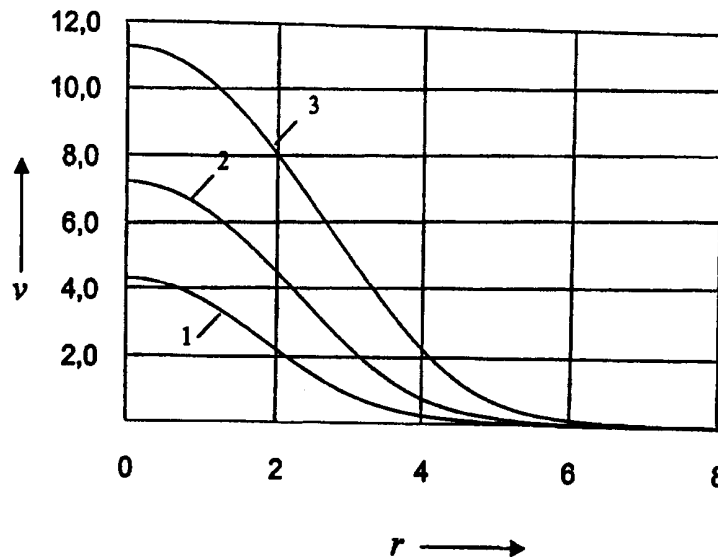


Рис. 2. Графики огибающих солитонов с насыщающейся нелинейностью при значениях $q = 1,5$; $\delta = 1,0$; $\gamma = 0,5$ и различных размерностей пространства: 1 – одномерный (плоский) солитон; 2 – двумерный солитон; 3 – трехмерный солитон

Заключение

В работе разработан численно-аналитический метод построения одномерных, двумерных и трехмерных солитонов уравнений Клейна-Гордона с нелинейностью третьей и пятой степени, а также с насыщающейся нелинейностью. Дано математическое обоснование численного метода построения огибающих солитонов и проведено сравнение амплитуд солитонов в зависимости от размерности пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахмедиев, Н. Н.** Солитоны / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : Физматлит, 2003. – 304 с.
2. **Кившарь, Ю. С.** Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал. – М. : Физматлит, 2005. – 648 с.
3. **Жестков, С. В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С. В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова. – 2006. – 220 с.
4. **Захаров, В. Е.** О трехмерных солитонах / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1974. – Вып. 2. – С. 594–597.
5. **Bogolubsky, I. L.** Some examples of inelastic soliton interaction / I. L. Bogolubsky // Comp. Phys. Comm. – 1977. – Vol. 13. – P. 149–155.
6. **Strauss, W. A.** Numerical solution of a nonlinear Klein-Gordon equation / W. A. Strauss, L. Vazquez // J. Comp. Phys. – 1978. – Vol. 28. – P. 271–278.
7. **Makhankov, V. G.** Computer and solitons / V. G. Makhankov // Physica Scripta. – 1979. – Vol. 20. – P. 558–562.
8. **Makhankov, V. G.** Computer experiments in soliton theory / V. G. Makhankov // Comp. Phys. Comm. – 1980. – Vol. 21. – P. 1–49.
9. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. – М. : Мир, 1988. – 694 с.
10. **Asao, Arai.** Exact solutions of multi-component nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon equations in two-dimensional space-time / Arai Asao // J. Math. A : Math. Gen. – 2001. – Vol. 34. – P. 4281–4288.
11. **Masmoudi, N.** From nonlinear Klein-Gordon equation to a system of coupled nonlinear Schrodinger equations / N. Masmoudi, K. Nakanishi // Math. Ann. – 2002. – Vol. 324, № 2. – P. 359–389.
12. Soliton solutions of coupled nonlinear Klein-Gordon equations / T. Alagesan [etc.] // Chaos, Solitons and Fractals. – 2004. – Vol. 21. – P. 879–882.
13. **Жестков, С. В.** О существовании (2+1)-мерных солитонных решений уравнения Шредингера со степенной нелинейностью произвольного порядка / С. В. Жестков, А. А. Романенко // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 6. – С. 50–52.
14. **Жестков, С. В.** Распространение двумерных солитонов в оптических ответвителях с керровской нелинейностью / С. В. Жестков, А. А. Романенко // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 46–49.

МГУ им. А. А. Кулешова
Белорусско-Российский университет
Материал поступил 13.02.2008

S. V. Zhestkov, A. A. Romanenko
Constructing and analysis of two and three-dimensional symmetrical solitons of Klein-Gordon equations with power and saturated nonlinearity

On the basis of numerical and analytical method, developed by the authors, two and tree-dimensional Klein-Gordon equations with the third and fifth degree of non-linearity and with saturating non-linearity have been investigated. The essence of the method is in construction analytical асимптотика of the soliton at infinity and its numerical continuation till the origin of coordinates. Mathematical basing of numerical continuation procedure of jj solution till the origin of coordinates has been given. The received results are of interest for non-linearity optics and laser physics, solid physics and physics of high-energy particles.