МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

Математические модели информационных процессов и управления

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» очной и заочной форм обучения

Часть 1

Могилев 2019

УДК 004.35: 004.3
ББК 32.973.202-04
М27

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «15» октября 2019 г., протокол № 3

Составители: доц. А. И. Якимов;
доц. Е. А. Якимов

Рецензент И. В. Лесковец

Методические рекомендации предназначены к самостоятельной работе по дисциплине «Математические модели информационных процессов и управления» для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» (3 семестр). Приведены примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы, пример задания к аудиторной контрольной работе и список литературы для подготовки.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ
ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЯ

Часть 1

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение

Целью преподавания дисциплины «Математические модели информационных процессов и управления» является приобретение студентами теоретических знаний и практических навыков в области математических моделей, применяемых для описания и анализа процессов хранения и обработки информации и функционирования систем управления.

Методические рекомендации имеют целью помочь студентам в самостоятельной подготовке к выполнению аудиторных контрольных работ по дисциплине.

1 Множества. Алгебра множеств

Операции над множествами подчинены некоторым очень простым абстрактным законам, которые будут перечислены далее. Эти законы очень напоминают элементарные законы алгебры высказываний. По этой причине множество, его подмножества и законы сочетания подмножеств образуют алгебраическую систему, называемую булевой алгеброй. Система составных высказываний, подчиняющаяся таким законам, тоже называется булевой алгеброй. Таким образом, любую из этих систем можно изучать или с алгебраической, или с логической точки зрения.

Основные законы, действующие в булевых алгебрах:

– законы для объединения и пересечения:

1) $A \cup A = A$;
2) $A \cap A = A$;
3) $A \cup B = B \cup A$;
4) $A \cap B = B \cap A$;
5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
9) $A \cup U = U$;
10) $A \cap \varnothing = \varnothing$;
11) $A \cap U = A$;
12) $A \cup \varnothing = A$;

– законы для дополнений:

1) $\overline{\overline{A}} = A$;
2) $A \cup \overline{A} = U$;
3) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
6) $\overline{U} = \varnothing$;

– законы для разностей множеств:

1) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
2) $U \setminus A = \overline{A}$;
3) $A \setminus U = \varnothing$;
4) $A \setminus \varnothing = A$;
5) $\varnothing \setminus A = \varnothing$;
6) $A \setminus A = \varnothing$;
7) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
8) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
9) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$;
10) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Доказательство каждого из перечисленных законов основано на определении равенства множеств и определений операций над множествами. Напомним, что множество *A* равно множеству *B*, если они состоят из одних и тех же элементов или оба пусты.

Пример – Докажем закон для дополнений $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $x \in (\overline{A \cup B})$. По определению операции дополнения это означает, что $x \notin A \cup B$, но $x \in U$. Следовательно, $x \notin A$ и одновременно $x \notin B$. Таким образом, $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Из определения операции пересечения получаем, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Поэтому, учитывая произвольность элемента $x \in (\overline{A \cup B})$, имеем $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть теперь $x \in \overline{A \cap B}$. Это значит, что $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Таким образом, $x \notin A$ и $x \notin B$. Поэтому $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \in U \setminus (A \cup B) = \overline{A \cup B}$. Поскольку x – произвольный элемент из $\overline{A} \cap \overline{B}$, то окончательно получаем $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Приходим к выводу, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Задачи для самостоятельного решения

1 Воспользовавшись диаграммой Эйлера-Венна, определите, какие из следующих высказываний логически истинны:

а) $X \vee \overline{X}$; б) $X \wedge \overline{X}$; в) $X \vee (\overline{X} \wedge Y)$; г) $X \to (Y \to X)$; д) $X \wedge (\overline{Y \to X})$.

2 Докажите, используя диаграмму Эйлера-Венна, что $X \vee (Y \wedge Z)$ эквивалентно $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$.

3 Какие из приведенных соотношений верны (ответ обосновать):

а) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; б) $\{3\} \in \{\{1\}, 3\}$; в) $\{1, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

4 Приведите примеры множеств *A*, *B*, *C*, *D* и *F*, которые удовлетворяют заданным условиям: $A \subset B, B \in C, C \subset D, D \subseteq F$.

2 Кортежи и операции над ними

Пусть даны множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Кортежем длины *n*, составленным из элементов этих множеств, называется конечная последовательность $\alpha = <x_1, x_2, \ldots, x_n>$, где для всех *k*, $1 \le k \le n$ имеем $x_k \in X_k$.

Элемент x_k называется *k*-й координатой или *k*-й компонентой кортежа α.

Два кортежа равны в том, и только в том случае, когда они имеют одинаковую длину, причем их координаты, стоящие на местах с одинаковыми номерами, равны, т. е. кортежи $\alpha = <x_1, x_2, \ldots, x_m>$ и $\beta = <y_1, \ldots, y_n>$ равны только в том случае, когда $m = n$, причем $x_k = y_k$ для всех $1 \le k \le n$.

Основные отличия понятий кортежа и множества следующие:

– в множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны, даже в случае, когда они имеют одинаковый состав;

– в множестве все элементы различны, а в кортеже координаты могут повторяться.

Задачи для самостоятельного решения

1 Из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{1, 2\}$ составьте кортежи.

2 Равны ли следующие кортежи: $<a, \{a, b, c\}, b, c>$ и $<a, \{a, b, c\}, \{b, c\}>$?

3 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составьте все двузначные числа. Как связано получившееся множество с декартовым произведением $A \times A$, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

3 Отношения, отображения, функции

Соответствие f, сопоставляющее каждому элементу x множества X один, и только один элемент множества Y, называется отображением множества X во множество Y.

Элемент множества Y, соответствующий при отображении f элементу x из X, обозначают $f(x)$ и называют **образом** элемента x при этом отображении f.

Если $f(x) = y$, то элемент x называют **прообразом** элемента y при отображении f.

Совокупность всех прообразов элемента y при отображении f называется полным прообразом этого элемента и обозначается $f^{-1}(y)$, т. е. $f^{-1}=\{x: f(x) = y\}$.

Правая часть читается как «совокупность таких x, что $f(x) = y$».

Каждому подмножеству A множества X ($A \subset X$) соответствует его образ $f(A)$ при отображении f. Этот образ состоит из всех элементов множества Y, которые являются образами какого-нибудь элемента из A: $f(A) = \{y: y = f(a), a \in A\}$.

Каждому подмножеству B множества Y ($B \subset Y$) соответствует его полный прообраз $f^{-1}(B)$ при отображении f. Он состоит из всех элементов, образы которых принадлежат B: $f^{-1}(B) = \{x : f\{x) \in B\}$.

Множество A называется областью определения отображения f, а множество $f(A)$ называется множеством значений этого отображения.

Частный случай отображения множества X в множество Y имеет место, если каждый элемент множества Y имеет прообраз. В этом случае отображение f называется **сюръективным**.

Если для каждого элемента $y \in Y$ существует не более одного прообраза, т. е. $f(x_1) \neq f(x_2)$ для любых x_1, $x_2 \in X$, если $x_1 \neq x_2$, то отображение f называется **инъективным**.

Если отображение f сюръективно и инъективно, то оно называется **биективным** (взаимно однозначным).

Задачи для самостоятельного решения

1 Является ли отображением соответствие «Столицей государства X является город Y»?

2 Являются ли следующие отношения функциями:

а) $\{<1, 2>; <2, 3>; <3, 2>\}$; б) $\{<1, 2>; <1, 3>; <2, 3>\}$?

3 Является ли отношение $\{(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)\}$, заданное на декартовом квадрате множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, биективным отображением?

4 Является ли функция $f(x) = x^2$ инъективной?

4 Алгебра высказываний

Иногда бывает желательно рассмотреть взаимоотношение двух высказываний. Наиболее интересное из таких отношений имеет место, когда из одного высказывания логически следует другое. Если из X следует Y, мы говорим также, что Y является следствием X или что Y логически выводимо из X. Исходя из анализа логических возможностей для пары высказываний X и Y отношение следствия можно охарактеризовать таким образом: из X следует Y, если Y истинно всякий раз, когда истинно X, т. е. если Y истинно во всех логически возможных случаях, в которых X истинно.

В случаях составных высказываний, имеющих одни и те же компоненты, таблицы истинности дают удобный метод для проверки того, имеет ли место отношение следствия.

Таблица 1 иллюстрирует этот метод.

Таблица 1

X	Y	$X \leftrightarrow Y$	$X \to Y$	$X \vee Y$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Высказывание $X \leftrightarrow Y$ истинно в первом и четвертом случаях, и в обоих этих случаях истинно также высказывание $X \to Y$. Мы видим, что из $X \leftrightarrow Y$ следует высказывание $X \to Y$. Сравнение двух последних столбцов показывает, что из высказывания $X \to Y$ не следует $X \vee Y$, из $X \vee Y$ не следует $X \to Y$.

Импликация двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она несимметрична. Так $X \vee Y$ эквивалентно $Y \vee X$; $X \wedge Y$ эквивалентно $Y \wedge X$; $X \leftrightarrow Y$ эквивалентно $Y \leftrightarrow X$, но $X \to Y$ не эквивалентно $X \to Y$. Высказывание $Y \to X$ называется **конверсией** высказывания $X \to Y$. Многие из наиболее распространенных ошибок в рассуждениях происходят от смешивания какого-либо высказывания с его конверсией. Интересно поэтому рассмотреть те импликации, которые могут быть образованы из высказываний X и Y.

В таблице истинности (таблица 2) представлены четыре импликации и их названия.

Таблица 2

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $Y \to X$	Конверсия контрапозиции $\overline{X} \to \overline{Y}$	Контрапозиция $\overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Из таблицы 2 видно, что $X \to Y$ эквивалентно $\overline{Y} \to \overline{X}$. Последнее называется контрапозицией первого. Контрапозиция является удобной формой импликации во многих рассуждениях. Высказывание $\overline{X} \to \overline{Y}$ представляет собой конверсию контрапозиции. Так как контрапозиция $\overline{Y} \to \overline{X}$ эквивалентна $X \to Y$, то конверсия этой контрапозиции эквивалентна конверсии этой импликации.

Пример – Выведите (если возможно) заключение из каждого набора посылок: *Малые дети неразумны. Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения. Неразумные люди не заслуживают уважения.*

Решение

Получим возможные логические следования из данного множества посылок. Обозначим каждое простое высказывание пропозициональными буквами. Пусть A – *«малые дети»*, B – *«разумны»*, C – *«заслуживают уважения»*, D – *«может укрощать крокодилов»*. Построим дедуктивный вывод, используя следующие правила вывода:

$A \to B, B \to C \models A \to C$ (правило силлогизма);

$A \to B \models \overline{B} \to \overline{A}$ (правило контрапозиции).

***Вывод*:**

1) $A \to \overline{B}$ | гипотеза Γ_1;
2) $D \to C$ | гипотеза Γ_2;
3) $\overline{B} \to \overline{C}$ | гипотеза Γ_3;
4) $A \to \overline{C}$ | правило силлогизма (1, 3) (*Малые дети не заслуживают уважения*);
5) $C \to B$ | правило контрапозиции (3) (*Только разумные люди заслуживают уважения*);
6) $D \to B$ | правило силлогизма (2, 5) (*Разумно укрощать крокодилов*);
7) $\overline{B} \to \overline{D}$ | правило контрапозиции (6) (*Неразумные люди не укрощают крокодилов*);
8) $A \to \overline{D}$ | правило силлогизма (1, 7) (*Малые дети не укрощают крокодилов*).

Задачи для самостоятельного решения

1 Выведите (если возможно) заключение из каждого набора посылок.

Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я опоздаю на занятия. Если я опоздаю на занятия, то я начну огорчаться. Если я огорчен, то мне не следует ехать домой.

2 Выведите (если возможно) заключение из каждого набора посылок.

Если человек достоин славы, то он получает награду. Если человек не храбрый, то он не достоин славы.

3 Выведите (если возможно) заключение из каждого набора посылок.

Если студент прогуляет много занятий, то он получит двойку на экзамене. Если он получит двойку на экзамене, то пропадут каникулы. Студент может хорошо отдохнуть, если у него будут каникулы.

4 Выведите (если возможно) заключение из каждого набора посылок.

Деревья, которые растут в этом саду, плодоносят. Деревья, которые плодоносят, дают хороший урожай. Деревья, дающие хороший урожай, получают тщательный уход. Ни одно дерево в этом саду не получает тщательного ухода.

5 Выведите (если возможно) заключение из каждого набора посылок.

Если человек не обладает чувством юмора, то он скучен. Скучных людей не приглашают в компании. Если человека не приглашают в компании, то его жизнь становится невыносимой.

5 Булевы функции. Многочлены Жегалкина

Конъюнктивным одночленом от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Дизъюнктивным одночленом от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией элементарных конъюнктивных одночленов, называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) данной формулы.

Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией элементарных дизъюнктивных одночленов, называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ) данной формулы.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ (СДНФ) и совершенные КНФ (СКНФ).

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это ДНФ, в которой в каждый конъюнктивный одночлен каждая переменная x_i из набора $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i либо ее отрицание $\bar{x}_i$.

Конструктивно СДНФ для каждой формулы алгебры высказываний, приведенной к ДНФ, можно определить следующим образом.

СДНФ формулы алгебры высказываний называется ее ДНФ, обладающая следующими свойствами:

– ДНФ не содержит двух одинаковых конъюнкций;

– ни одна конъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных;

– ни одна конъюнкция не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание;

– каждая конъюнкция содержит либо переменную x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$ для всех переменных, входящих в формулу.

Конструктивно совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) для каждой формулы алгебры высказываний, приведенной к КНФ, можно определить следующим образом.

СКНФ данной формулы алгебры высказываний называется такая ее КНФ, которая обладает следующими свойствами:

– КНФ не содержит двух одинаковых дизъюнкции;

– ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно двух одинаковых переменных;

– ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание;

– каждая дизъюнкция СКНФ содержит либо переменную x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$ для всех переменных, входящих в формулу.

Многочленом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше, чем в первой степени.

Многочлен Жегалкина константы равен самой же константе; многочлен Жегалкина булевой функции одной переменной

$$f(x) = a_0 \oplus a_1 x;$$

многочлен Жегалкина булевой функции двух переменных

$$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12}(x_1 \wedge x_2).$$

Многочлен Жегалкина называется нелинейным, если он содержит конъюнкции переменных, а если он не содержит конъюнкции переменных, то он называется линейным.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется линейной, если ее многочлен Жегалкина имеет вид $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus ... \oplus a_n x_n$, и нелинейной – в противном случае.

Из определения многочлена Жегалкина следует, что для любой булевой функции коэффициенты при переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и свободный член вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
&a_0 = f(0, ..., 0);\\
&a_1 = f(0, ..., 0) \oplus f(1, ..., 0);\\
&a_2 = f(0, ..., 0) \oplus f(0, 1, ..., 0);\\
&\dots\\
&a_n = f(0, ..., 0) \oplus f(0, ..., 1).
\end{aligned} \qquad (1)$$

На этом основан алгоритм определения линейности (или нелинейности) булевой функции.

1 По таблицам истинности булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и формуле (1) находим коэффициенты $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

2 Выписываем многочлен $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus ... \oplus a_n x_n$ и проверяем, задает ли он эту функцию. Для этого строим таблицу истинности многочлена $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ и сравниваем ее с таблицей истинности функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если таблицы истинности совпадают, то функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ линейная и $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ – ее многочлен Жегалкина. В противном случае функция нелинейная.

Пример – Используя СДНФ, найдите булеву функцию, принимающую значение 1 на следующих наборах переменных, и только на них:

$$f(0, 1, 0) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1).$$

Решение

Алгоритм построения СДНФ.

1 Наборам 010; 101; 111 соответствуют конъюнкции:

$$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3};\ x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3;\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Напомним, что для каждого набора из нулей и единиц τ_1, τ_2, τ_3 выписываем конъюнкцию $x_1^{\tau_1} \wedge x_2^{\tau_2} \wedge x_3^{\tau_3}$, причем если $\tau_i = 1$, то соответствующая переменная x_i входит в конъюнкцию без отрицания.

2 Составим дизъюнкцию полученных конъюнкций, т. е. составим СДНФ функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Приведите к ДНФ формулу $f(x, y, z) = (x \to y) \downarrow \overline{(y \to z)}$.

2 Найдите СДНФ для ДНФ $(x \wedge \overline{y}) \vee x \vee (y \wedge z)$.

3 Найдите СКНФ для КНФ $(x \vee z \vee \overline{y}) \wedge (x \vee z) \wedge y$.

4 Задана булева функция трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \wedge ((x_1 \vee x_3) \,|\, (\overline{\overline{x_2} \,|\, \overline{x_3}})).$$

Постройте таблицу истинности, найдите двоичную форму F булевой функции и приведите функцию к СДНФ и СКНФ.

Найдите двумя способами многочлен Жегалкина.

6 Минимизация булевых функций

Правила минимизации с использованием карт Карно

1 В карте Карно группы единиц (для получения ДНФ) и группы нулей (для получения КНФ) необходимо обвести четырехугольными контурами. Внутри контура должны находится только одноименные значения функции. Этот процесс соответствует операции склеивания или нахождения импликант данной функции.

2 Количество клеток внутри контура должно быть целой степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16, ...).

3 При проведении контуров крайние строки карты (верхние и нижние, левые и правые), а также угловые клетки считаются соседними (для карт до четырех переменных).

4 Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.

5 Все единицы (нули) в карте (даже одиночные) должны быть охвачены контурами. Любая единица (нуль) может входить в контуры произвольное количество раз.

6 Множество контуров, покрывающих все единицы (нули) функции образуют тупиковую ДНФ (КНФ). Целью минимизации является нахождение минимальной из множества тупиковых форм.

7 В элементарной конъюнкции (дизъюнкции), которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри обведенного контура. Переменные булевой функции входят в элементарную конъюнкцию (для значений функции 1) без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 1, и с инверсией – если 0. Для значений булевой функции, равных 0, записываются элементарные дизъюнкции, куда переменные входят без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 0, и с инверсией – если 1.

Метод Петрика используется для нахождения всех минимальных покрытий конституент единицы и позволяет получить все тупиковые ДНФ по импликантной матрице. Суть метода заключается в следующем. По импликантной матрице строится так называемое конъюнктивное представление импликантной матрицы. Для этого все простые импликанты обозначаются разными буквами (обычно прописными латинскими). После этого для каждого *i*-го столбца импликантной матрицы строится дизъюнкция всех букв, обозначающих строки матрицы, пересечение которых с *i*-м столбцом отмечено крестиком. Конъюнктивное представление импликантной матрицы образуется как конъюнкция построенных дизъюнкций для всех столбцов матрицы. К конъюнктивному представлению матрицы могут быть применены все соотношения булевой алгебры с целью его упрощения. После раскрытия скобок и выполнения всех возможных поглощений получается дизъюнкция конъюнкций, каждая из которых содержит все импликанты тупиковой ДНФ.

Пример **–** Пусть функция $f(x, y, z)$ = 1 на наборах 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 15. Диаграмма Вейча для заданной функции представлена на рисунке 1.

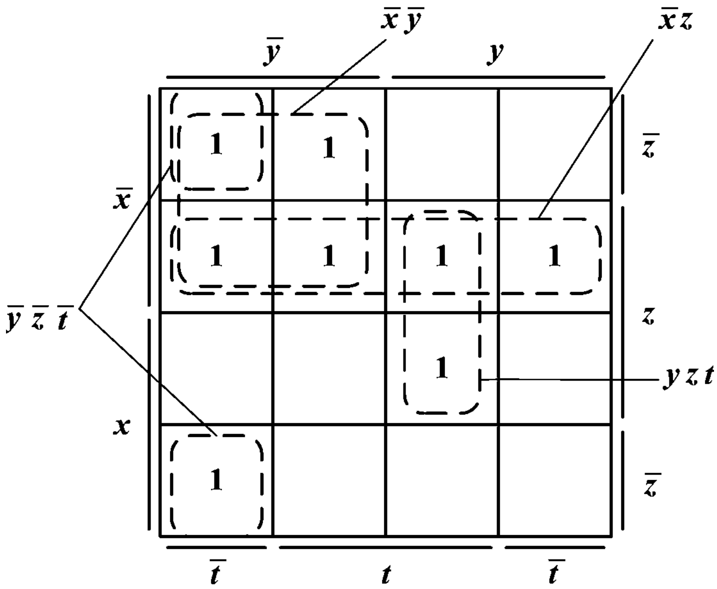


Рисунок 1 – Минимальная ДНФ на диаграмме Вейча

Единицы функции, стоящие в соседних клетках, отличаются значением только одной переменной, следовательно, они склеиваются по этой переменной и образуют импликанту. В этом случае говорят, что импликанта покрывает соответствующие единицы булевой функции. Например, две единицы на наборах 7 и 15 покрываются импликантой yzt, четыре единицы на наборах 2, 3, 7, 6 – импликантой $\bar{x}z$. При этом соседними считаются также клетки, стоящие вдоль левого и правого края диаграммы (отличаются значением y) и вдоль верхнего и нижнего края (отличаются значением x).

При минимизации булевой функции на диаграмме Вейча сначала находят покрытия, содержащие максимальное число единиц (8, 4, 2), а затем покрытия, накрывающие оставшиеся единицы таким образом, чтобы они также были максимальны по величине и при удалении этого покрытия хотя бы одна единица функции осталась непокрытой. При этом некоторые единицы могут быть покрыты неоднократно.

Для функции, представленной на рисунке 1, минимальная ДНФ

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z \vee yzt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t}\,.$$

Минимальная КНФ строится двойственно по диаграмме Вейча, заполненной нулями в пустых клетках. Для данной функции минимальная КНФ

$$f(x, y, z) = (\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee t)(\bar{x} \vee y \vee \bar{t})\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Найдите минимальные ДНФ и КНФ булевой функции:

$f(x, y, z, t) = 1$ на наборах $0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15$.

2 Найдите минимальные ДНФ и КНФ булевой функции:

$f(x, y, z, t) = 1$ на наборах $1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14$.

3 Найдите методом карт Карно минимальные ДНФ и КНФ булевой функции:

$f(x, y, z, t) = 1$ на наборах $1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15$.

4 Найдите методом карт Карно минимальные ДНФ и КНФ булевой функции:

$f(x, y, z, t) = 1$ на наборах $5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15$.

5 Найдите методом карт Карно минимальные ДНФ и КНФ булевой функции:

$f(x, y, z, t) = 1$ на наборах $1, 8, 10, 11, 13, 14, 15$.

7 Логика предикатов

Рассмотрим предикаты, в которых свободной является лишь одна переменная, обозначенная через x, и обсудим применение предикатов в алгебре.

Типичным примером является уравнение, например, $x^2 - 3x + 2 = 0$. Свободная переменная может принимать здесь любое числовое значение. Для некоторых чисел x (а именно $x = 1$, $x = 2$) утверждение, содержащееся в этом уравнении, истинно, в остальных оно ложно. В подобных случаях, когда истинность или ложность предиката зависит только от значения, принимаемого свободной переменной x, множество допустимых значений x можно рассматривать как множество логических возможностей U, а множество всех значений этой переменной, при которых высказывание истинно, – как его множество истинности. Понятие множества истинности предиката позволяет выяснить, чем разнятся между собой уравнения и тождества. Когда мы решаем уравнение, мы тем самым ищем один из элементов множества истинности этого уравнения или все его элементы. Если же мы доказываем тождество, то тем самым утверждаем, что оно справедливо для всех x. Таким образом, тождество представляет собой уравнение, множеством истинности которого является универсальное множество U, т. е. является логически истинным или тождественно истинным.

Так как к предикатам можно применять логические операции, то для них справедливы основные законы булевой алгебры:

1) $\overline{\overline{P}} = P$;

2) $P \vee Q = Q \vee P$;

3) $P \wedge Q = Q \wedge P$;

4) $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$;

5) $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$;

6) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;

7) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

8) $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$; $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$;

9) $P \vee P = P$; $P \wedge P = P$;

10) $P \vee 1 = 1$; $P \wedge 0 = 0$; $P \vee 0 = P$; $P \wedge 1 = P$; $P \vee \overline{P} = 1$; $P \wedge \overline{P} = 0$;

11) $P \vee (P \wedge Q) = P$;

12) $P \wedge (P \vee Q) = P$.

Помимо операций алгебры высказываний, в логике предикатов есть две операции, которые связаны с природой предикатов. Пусть дан предикат $P(x)$, зависящий от одной переменной и определенный на поле M.

1 Выражение $(\forall x)P(x)$ означает высказывание, истинное только в том случае, когда предикат $P(x)$ истинен для всех предметов из поля M. Выражение $(\forall x)\mathrm{P}(x)$ читается «для всякого x, $P(x)$», здесь символ $\forall$ – квантор общности.

2 Выражение $(\exists x)P(x)$ означает высказывание, истинное только в том случает, когда предикат $P(x)$ истинен хотя бы для одного предмета из поля M. Выражение $(\exists x)P(x)$ читается «существует x, что $P(x)$»; символ $\exists$ – квантор существования.

Наряду с определенными предикатами, для которых истинность или ложность известны для каждого набора значений свободных предметных переменных, будем рассматривать переменные предикаты, для которых не определены значения. Будем обозначать переменные предикаты большими буквами из конца латинского алфавита с приписанными предметными переменными или без них:

$$W(x_1, \ldots, x_n);\ U(x, y), \ldots .$$

Применяя к переменным предикатам операции $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\overline{}$, $\forall$, $\exists$, получим формулы логики предикатов, т. е. формулой логики предикатов называется выражение, составленное из переменных предикатов с помощью логических операций и кванторов и обращающееся в конкретный предикат при подстановке вместо переменных конкретных предикатов.

Например, $((\forall x)W(x, y) \vee B) \rightarrow U(z)$ – формула логики предикатов.

***Пример* 1** – Основные аксиомы натуральных чисел таковы:

A_1: для каждого числа существует одно, и только одно число, непосредственно следующее за ним.

A_2: нет числа, за которым непосредственно следует 0.

A_3: для каждого числа, отличного от нуля, существует одно, и только одно непосредственно предшествующее ему число.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ представляют соответственно число, непосредственно следующее за x и непосредственно предшествующее x.

Пусть «x равно y» – предикат, обозначенный через $E(x, y)$. Записать аксиомы с помощью формул логики предикатов.

Решение

A_1: $(\forall x)(\exists y)E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z))$;

A_2: $\overline{(\exists x)E(0, f(x))}$;

A_3: $(\forall x)\overline{E(x, 0)} \rightarrow ((\exists y)(E(y, g(x))) \wedge (\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z)))$.

***Пример* 2** – Определите значение формул:

а) $(\forall x)P(x)$; б) $(\exists x)\overline{P(x)}$

в интерпретации $M = \langle M, f \rangle$, где $M = \{1, 2\}$; f: $P(1)$ – истина; $P(2)$ – ложь.

Решение:

а) $(\forall x)P(x)$ – ложь, так как $P(x)$ – не истина как для $x = 1$, так и для $x = 2$;

б) $(\exists x)\overline{P(x)}$ – истина, так как $\overline{P(2)}$ в этой интерпретации истина.

Задачи для самостоятельного решения

1 Рассмотрите формулы F_1: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$; F_2: $P(a)$.

Докажите, что $Q(a)$ есть логическое следствие формул F_1 и F_2.

2 Рассмотрите формулу G: $(\forall x)P(x) \to Q(f(x), a)$, здесь a – константа, f – одноместная функция, P – одноместный предикат, Q – двуместный предикат. $f(2)=1$; $P(1)$ – Л; $P(2)$ – И; $Q(1, 1)$ – И; $Q(1, 2)$ – И; $Q(2, 1)$ – Л; $Q(2, 2)$ – И. Оцените эту формулу.

3 Определите значение формул:

а) $(\exists x)P(x)$; б) $(\forall x)\overline{P(x)}$

в интерпретации $M = \langle M, f \rangle$, где $M = \{1, 2\}$; f: $P(1)$ – истина; $P(2)$ – ложь.

4 Постройте таблицы истинности на области интерпретации $D = \{1, 2\}$:

$$\exists x(\forall y(P(x) \to (R \sim Q(y)))).$$

5 Постройте таблицы истинности на области интерпретации $D = \{1, 2\}$:

$$\exists x((P(x) \to (\forall y)Q(y)) \,\&\, P(x)).$$

8 Приведение формул логики предикатов к сколемовской нормальной форме

Пусть формулы F и G имеют одно и то же множество свободных переменных (в частности, пустое). Формулы F и G ***равносильны*** в данной интерпретации, если они принимают одинаковые значения на любом наборе свободных переменных, т. е. выражают в данной интерпретации один и тот же предикат.

Формулы F и G ***равносильны*** на множестве M, если они принимают одинаковые значения во всех интерпретациях, заданных на множестве M.

Формулы F и G ***равносильны*** в логике предикатов, если они равносильны на всех множествах ($F \equiv G$).

Рассмотрим правила перехода от одних формул к другим, им равносильным.

1 ***Перенос квантора через отрицание***. Пусть $W(x)$ – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда справедливы равносильности:

$$\overline{(\forall x)W(x)} \equiv (\exists x)\overline{W(x)};\ \ \overline{(\forall x)\overline{W(x)}} \equiv (\exists x)W(x);$$
$$\overline{(\exists x)W(x)} \equiv (\forall x)\overline{W(x)};\ \ \overline{(\exists x)\overline{W(x)}} \equiv (\forall x)W(x).$$

2 ***Вынос квантора за скобки.*** Пусть формула $W(x)$ содержит свободную переменную x, а формула B не содержит переменной x. Формулы $W(x)$ и B удовлетворяют правилам создания формул. Тогда справедливы равносильности:

$$(\exists x)(W(x) \wedge B) \equiv (\exists x)W(x) \wedge B;$$
$$(\exists x)(W(x) \vee B) \equiv (\exists x)W(x) \vee B;$$
$$(\forall x)(W(x) \wedge B) \equiv (\forall x)W(x) \wedge B;$$
$$(\forall x)(W(x) \vee B) \equiv (\forall x)W(x) \vee B.$$

3 ***Перестановка одноименных кванторов.*** Имеем

$$(\exists x)(\exists y)W(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)W(x, y);$$
$$(\forall x)(\forall y)W(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)W(x, y).$$

4 ***Переименование связанных переменных.*** Заменяя связанную переменную формулы W другой переменной, не входящей в эту формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора, получим формулу, равносильную W.

Формулы, в которых из логических символов имеются только символы конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем символ отрицания встречается над символами предикатов, будем называть ***приведенными***.

Например, формула $(\forall x_1)A_1^{(1)}(x_1) \vee (\exists x_2)\overline{A_2^{(2)}(x_2, x_3)}$ – приведенная, формула $\overline{(\forall x_2)A_1^{(1)}(x_2)} \to A_2^{(1)}(x_1)$ – неприведенная.

Для любой формулы существует равносильная ей приведенная формула, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают. Такая приведенная формула называется ***приведенной формой*** данной формулы.

В логике высказываний введены две нормальные формы – дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма. В логике предикатов также имеется нормальная форма, цель которой – упрощение процедуры доказательств.

Приведенная формула называется ***нормальной***, если она не содержит символов кванторов или все символы кванторов стоят впереди (т. е. логические символы и символы предикатов стоят в области действия каждого квантора). Для любой приведенной формулы существует равносильная ей нормальная формула той же длины (под длиной формулы будем понимать общее число входящих в нее символов предикатов, логических символов и символов кванторов). Нормальная формула называется ***нормальной формой*** данной формулы.

Пример формулы, находящейся в нормальной форме:

$$(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y)).$$

Алгоритм преобразования формул в нормальную форму:

1) исключить логические связки $\leftrightarrow$ и $\to$ с помощью формул

$$F \leftrightarrow G = (F \to G) \wedge (G \to F); \; F \to G = \overline{F} \vee G;$$

$$\overline{F \vee G} = \overline{F} \wedge \overline{G}; \; \overline{(F \wedge G)} = \overline{F} \vee \overline{G},$$

законы

$$\overline{((\forall x)F(x))} = (\exists x)\overline{(F(x))}; \; \overline{((\exists x)F(x))} = (\forall x)\overline{(F(x))},$$

чтобы пронести знак отрицания внутрь формулы;

2) переименовать связанные переменные, если это необходимо;

3) использовать равносильные формулы логики предикатов, чтобы вынести кванторы в самое начало формулы для приведения ее к нормальной форме.

Например, приведем формулу $(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$ к нормальной форме:

$$(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) = \overline{((\forall x)P(x))} \vee (\exists x)Q(x) = (\exists x)\overline{(P(x))} \vee (\exists x)Q(x) = (\exists x)\left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right).$$

Следовательно, нормальная форма формулы $(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$ – это $(\exists x)(\overline{P(x)} \vee Q(x))$.

Формула A находится в предваренной нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид $A = (Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)P$, где каждое Q_ix_i есть $\exists x_i$ или $\forall x_i$, а P – формула в конъюнктивной нормальной форме, не содержащая кванторов.

Предваренная нормальная форма (ПНФ), содержащая только кванторы всеобщности, называется сколемовской нормальной формой (СНФ).

Процедура приведения ПНФ к сколемовской форме заключается в элиминации (удалении) кванторов существования.

Пусть формула A находится в предваренной нормальной форме $(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)P$, где P есть *конъюнктивная нормальная форма*. Если квантор существования – первый слева квантор в $(\exists x_1)(Q_2x_2) \ldots (Q_nx_n)P$, то его можно элиминировать следующим образом. Выберем константу c, отличную от других констант, входящих в P, заменим все вхождения x_i, встречающиеся в P, на c и вычеркнем квантор $\exists x_1$.

Если же перед квантором существования стоит квантор всеобщности, например, $\forall x \exists y P$, то переменная y попадает в область действия квантора всеобщности и выражение $\forall x \exists y$ (для каждого x существует y) означает наличие некоторой функциональной зависимости $y = f(x)$. Если квантору существования предшествует несколько кванторов всеобщности, то функция зависит от всех переменных, по которым навешены эти кванторы. В общем случае, если $Qs_1, \ldots, Qs_m$ – список всех кванторов всеобщности, встречающихся левее $\exists x_r$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_m < r$, выбирают m-местный функциональный символ f, отличный от других функциональных символов, заменяют все x_r в P на $f(x_{s1}, \ldots, x_{sm})$ и вычеркивают $\exists x_r$. Затем весь этот процесс применяют для всех кванторов существования; последняя из полученных формул есть сколемовская нормальная форма (СНФ). Иногда ее для краткости именуют стандартной формой формулы A. Функции, используемые для замены переменных квантора существования, называются сколемовскими функциями (константы есть нуль-местные функции).

Пример **–** Получить стандартную форму формулы

$$A = \exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(x, y, z, u, v, w).$$

В этой формуле левее $\exists x$ нет никаких кванторов всеобщности, левее $\exists u$ стоят $\forall y$ и $\forall z$, а левее $\exists w$ стоят $\forall y$, $\forall z$ и $\forall v$. Следовательно, заменим переменную x на константу a, переменную u – на двуместную функцию $f(y, z)$, переменную w – на трехместную функцию $g(y, z, v)$. Таким образом, получаем следующую стандартную форму формулы A:

$$S = \forall y \forall z \forall v P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Получите нормальную форму для формулы

$$(\forall x)(\forall y)((\exists z)P(x, z) \wedge P(y, z) \to (\exists u)Q(x, y, u)).$$

2 Проверьте логическую общезначимость и получите нормальную форму следующей формулы:

$$\exists x(P(x) \vee (\exists x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x Q(x)).$$

3 Проверьте логическую общезначимость и получите нормальную форму следующей формулы:

$$(B \to \exists x(P(x)) \equiv \exists x(B \to P(x)).$$

4 Проверьте логическую общезначимость и получите нормальную форму следующей формулы:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x).$$

5 Проверьте логическую общезначимость и получите нормальную форму следующей формулы:

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

9 Логический вывод

В исчислении предикатов указывается некоторая совокупность формул, которые называются аксиомами и составляют *аксиоматическую теорию*, и указывается конечное множество отношений между формулами, составляющее *правила вывода.*

Аксиоматическая теория и правила вывода составляют исчисление предикатов.

Рассмотрим проверку логического следования в логике предикатов 1-го порядка.

Пример – Некоторые студенты любят своих кураторов. Никто не любит невежественных людей. Следовательно, ни один куратор не является невежественным.

Все предикаты заданы на области $D = \{\text{люди}\}$. Пусть $P(x)$: *x – студент*, $D(x)$: *x – куратор*, $Q(x)$: *x* – невежественный, $L(x, y)$ – *x* любит *y*. Формализуем посылки:

$F1: \exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x, y)))$;

$F2: \forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \overline{L(x, y)}))$.

Следствие $G: \forall y(D(y) \to \overline{Q(y)})$.

Для доказательства логического следования можно использовать метод от противного, формальный вывод и метод резолюций.

Метод от противного.

Предположим, что при истинности посылок $|F1| = T$, $|F2| = T$ заключение принимает ложное значение: $|G| = F$.

Из $|\forall y(D(y) \to \overline{Q(y)})| = F$ следует, что существует такое $y = a$, что $|D(a) \to \overline{Q(a)})| = F$. Тогда $|D(a)| = T$, $|\overline{Q(a)}| = F$, т. е. $|Q(a)| = T$.

Из $|\exists x(P(x)\wedge(D(a)\to L(x,a)))|=T$ следует, что существует такое $x=b$, что $|P(b)\wedge(D(a)\to L(b,a))|=T$. Тогда $|P(b)|=T$ и $|D(a)\to L(b,a)|=T$, а так как $|D(a)|=T$, то $|L(b,a)|=T$.

Посылка $F2:|\forall x(P(x)\to(Q(a)\to\overline{L(x,a)}))|=T$ для всех *x*, в том числе для $x=b$, следовательно, $|(P(b)\to(Q(a)\to\overline{L(b,a)}))|=T$, а так как $|P(b)|=T$, $|Q(a)|=T$, то из $|Q(a)\to\overline{L(b,a)}|=T$ следует $|\overline{L(b,a)}|=T$.

Таким образом, получаем, что истинны оба утверждения: $|T\to L(b,a)|=T$ и $|T\to\overline{L(b,a)}|=T$, т. е. $|L(b,a)|=T$ и $|\overline{L(b,a)}|=T$. Полученное противоречие доказывает логическое следование.

Формальный вывод.

В формальном выводе применяются правила универсальной конкретизации (УК), экзистенциальной конкретизации (ЭК), удаления конъюнкции (уд. &), правило *modus ponens* (MP), правило обобщения *Gen*:

1) $\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)))$ | гипотеза Γ_1;
2) $\forall x(P(x)\to\forall y(Q(y)\to\overline{L(x,y)}))$ | гипотеза Γ_2;
3) $P(b)\wedge\forall y(D(y)\to L(b,y)))$ | ЭК (1);
4) $P(b)$ | уд. & (3);
5) $\forall y(D(y)\to L(b,y))$ | уд. & (3);
6) $P(b)\to\forall y(Q(y)\to\overline{L(b,y)})$ | УК (2);
7) $\forall y(Q(y)\to\overline{L(b,y)})$ | MP (4, 6);
8) $Q(z)\to\overline{L(b,z)}$ | УК (7);
9) $D(z)\to L(b,z)$ | УК (5);
10) $L(b,z)\to\overline{Q(z)}$ | контрапозиция (8);
11) $D(z)\to\overline{Q(z)}$ | силлогизм (9, 10);
12) $\forall y(D(y)\to\overline{Q(y)})$ | *Gen* (11).

Метод резолюций.

Найдем предваренные нормальные формы (ПНФ) для посылок.

$F1:\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)))$ = $\exists x(P(x)\wedge\forall y(\overline{D(y)}\vee L(x,y)))$ =
= $\exists x(\forall y(\overline{D(y)}\vee L(x,y))\wedge P(x))$ = $\exists x\forall y((\overline{D(y)}\vee L(x,y))\wedge P(x))$ | ПНФ;
$F2:\forall x(P(x)\to\forall y(Q(y)\to\overline{L(x,y)}))$ = $\forall x(\overline{P(x)}\vee\forall y(\overline{Q(y)}\vee\overline{L(x,y)}))$ =
= $\forall x(\forall y(\overline{Q(y)}\vee\overline{L(x,y)})\vee\overline{P(x)})$ = $\forall x\forall y(\overline{Q(y)}\vee\overline{L(x,y)}\vee\overline{P(x)})$ | ПНФ;

Найдем сколемовскую стандартную форму (ССФ) посылок.

$F1$: Элиминируем квантор $\exists$ в формуле $\exists x\forall y((\overline{D(y)}\vee L(x,y))\wedge P(x))$. Положим $x=a$, получим ССФ посылки $F1$: $\forall y((\overline{D(y)}\vee L(a,y))\wedge P(a))$.

$F2: \forall x \forall y(\overline{Q(y)} \vee \overline{L(x, y)} \vee \overline{P(x)})$ находится в сколемовской стандартной форме.

Возьмем отрицание от следствия $G: \overline{\forall y(D(y) \to \overline{Q(y)})}$ = $\exists y(\overline{\overline{D(y)} \vee \overline{Q(y)}})$ = = $\exists y(D(y) \wedge Q(y))$. Это ПНФ. Элиминируем квантор $\exists$, положив $y = b$: $D(b) \wedge Q(b)$ | ССФ.

Получим множество дизъюнктов: $S = \{\overline{D(y)} \vee L(a, y), P(a)$, $(\overline{Q(y)} \vee \overline{L(x, y)} \vee \overline{P(x)})$, $D(b), Q(b)\}$.

Построим резолютивный вывод:

1) $\overline{D(y)} \vee L(a, y)$;

2) $P(a)$;

3) $\overline{Q(y)} \vee \overline{L(x, y)} \vee \overline{P(x)}$;

4) $D(b)$;

5) $Q(b)$;

6) $\overline{L(x, b)} \vee \overline{P(x)}$ | (b/y), резольвента 5, 3;

7) $\overline{L(a, b)}$ | (a/x), резольвента 2, 6;

8) $\overline{D(b)}$ | (b/y), резольвента 1, 7;

□ | пустая резольвента 4, 8.

Логическое следование доказано. ■

Задачи для самостоятельного решения

1 Проверьте логическое следование. *Области определения*: *множество людей и множество книг.* Все студенты читают учебники. Некоторые студенты не читают стихов. Следовательно, ни один учебник не написан в стихах.

2 Проверьте логическое следование. *Область определения*: *люди.* Ни один торговец подержанными автомобилями не покупает подержанные автомобили для своей семьи. Некоторые люди, которые покупают подержанные автомобили для своих семей, абсолютно нечестны. Следовательно, некоторые абсолютно нечестные люди не являются торговцами подержанными автомобилями.

3 Проверьте логическое следование. *Область определения*: *люди.* Каждый, кто идет в кино, покупает билет. Следовательно, если не существует билетов, то никто не ходит в кино.

4 Проверьте логическое следование. *Область определения*: *люди.* Ни один лентяй не достоин славы. Некоторые художники не лентяи. Следовательно, некоторые художники достойны славы.

5 Проверьте логическое следование. *Область определения*: *студенты.* Некоторые первокурсники любят всех второкурсников. Ни один первокурсник не любит никого из студентов предпоследнего курса. Следовательно, ни один второкурсник не является студентом предпоследнего курса.

10 Решение задач оптимизации на графах

Каждой дуге (x, y) исходного графа G поставим в соответствие число $a\ (x, y)$. Если в графе G отсутствует некоторая дуга (x, y), положим $a\ (x, y) = \infty$. Будем называть число $a\ (x, y)$ длиной дуги (x, y), хотя $a\ (x, y)$ можно также интерпретировать как соответствующие затраты или соответствующий весовой коэффициент. Определим длину пути как сумму длин отдельных дуг, составляющих этот путь.

Для любых двух вершин s и t графа G могут существовать несколько путей, соединяющих вершину s с вершиной t. Рассмотрим алгоритм, определяющий путь из вершины s в вершину t, который имеет минимально возможную длину. Этот путь называется *кратчайшим путем* между вершинами s и t.

Прежде чем представлять алгоритм, необходимо ввести некоторые обозначения. Перенумеруем вершины исходного графа целыми числами от 1 до N. Обозначим через d_{ij}^{m} длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j, который в качестве промежуточных может содержать только первые m вершин графа. (Напомним, что промежуточной вершиной пути является любая принадлежащая ему вершина, не совпадающая с его начальной или конечной вершинами). Если между вершинами i и j не существует ни одного пути указанного типа, то условно будем считать, что $d_{ij}^{m} = \infty$. Из данного определения величин d_{ij}^{m} следует, что величина d_{ij}^{0} представляет длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j, не имеющего промежуточных вершин, т. е. длину кратчайшей дуги, соединяющей i с j (если такие дуги присутствуют в графе). Для любой вершины i положим $d_{ii}^{0} = 0$. Отметим далее, что величина d_{ij}^{m} представляет длину кратчайшего пути между вершинами i и j.

Обозначим через D^{m} матрицу размера $N \times N$, элемент (i, j) которой совпадает с d_{ij}^{m}. Если в исходном графе известна длина каждой дуги, то можно сформировать матрицу D^{m}. Цель состоит в определении матрицы D^{N}, представляющей кратчайшие пути между всеми вершинами рассматриваемого графа.

В алгоритме Флойда в качестве исходной выступает матрица D^{0}. Вначале из этой матрицы вычисляется матрица D^{1}. Затем по матрице D^{1} вычисляется матрица D^{2} и т. д. Процесс повторяется до тех пор, пока по матрице D^{N-1} не будет вычислена матрица D^{N}.

Рассмотрим основную идею, лежащую в основе алгоритма Флойда. Предположим, что известны:

1) кратчайший путь из вершины i в вершину m, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых $(m - 1)$ вершин;

2) кратчайший путь из вершины m в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых $(m - 1)$ вершин;

3) кратчайший путь из вершины i в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых $(m - 1)$ вершин.

Поскольку по предположению исходный граф не может содержать контуров отрицательной длины, один из двух путей – путь, совпадающий с представленным в п. 3, или путь, являющийся объединением путей из пп. 1 и 2 должен быть кратчайшим путем из вершины *i* в вершину *j*, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых *m* вершин. Таким образом,

$$d_{ij}^{m} = \min\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\}. \tag{2}$$

Из соотношения (2) видно, что для вычисления элементов матрицы D^m необходимо располагать лишь элементами матрицы D^{m-1}. Более того, соответствующие вычисления могут быть проведены без обращения к исходному графу. Теперь возможно дать формальное описание алгоритма Флойда для нахождения на графе кратчайших путей между всеми парами вершин.

Алгоритм Флойда.

Шаг 1. Перенумеровать вершины исходного графа целыми числами от 1 до *N*. Определить матрицу D^0, задав величину каждого ее элемента (i, j) равной длине кратчайшей дуги, соединяющей вершину *i* с вершиной *j*. Если в исходном графе указанные вершины не соединяются дугами, положить $d_{ij}^0 = \infty$. Кроме того, для всех *i* положить $d_{ii}^0 = 0$.

Шаг 2. Для целого *m,* последовательно принимающего значения $1, 2, ..., N$, определить по величинам элементов матрицы D^{m-1} величины элементов матрицы D^m, используя рекурсивное соотношение (2), т. е. соотношение $d_{ij}^{m} = \min\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\}$.

При определении величины каждого элемента матрицы D^m следует фиксировать соответствующий кратчайший путь.

По окончании данной процедуры величина элемента (i, j) матрицы D^m определяет длину кратчайшего пути, ведущего из вершины *i* в вершину *j*.

То, что описанный алгоритм действительно находит кратчайшие пути, может быть индуктивно доказано на основе следующего факта. Длина кратчайшего пути из вершины *i* в вершину *j*, допускающего использование в качестве промежуточных первых *m* вершин, должна быть не больше длины кратчайшего пути из *i* в *j*, допускающего использование в качестве промежуточных первых (*m* – 1) вершин, и не больше длины кратчайшего пути из *i* в *j*, допускающего использование в качестве промежуточных первых (*m* – 1) вершин и – обязательно – вершины *m*.

Отметим, что для всех *i* и *m* должно быть $d_{ij}^m = 0$. Поэтому нет необходимости в вычислении диагональных элементов матриц $D^1, D^2, ..., D^N$. Кроме того, для всех $i = 1, 2, ..., N$ имеют место соотношения $d_{im}^{m-1} = d_{im}^m$ и $d_{mi}^{m-1} = d_{mi}^m$. Эти соотношения обусловливаются тем, что вершина *m* в отсутствие контуров отрицательной длины не может выступать в качестве промежуточной в любых кратчайших путях, которые начинаются или заканчиваются в самой вершине *m*.

Следовательно, при определении матрицы D^m нет необходимости в пересчете элементов m-й строки и m-го столбца матрицы D^{m-1}. Таким образом, в матрице D^m по формуле (2) необходимо считать лишь величины $(N-1)(N-2)$ элементов, в число которых не входят диагональные элементы, а также элементы из m-й строки и m-го столбца.

Пример (применение алгоритма Флойда) – Для графа, представленного матрицей

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & \infty \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

составленной из длин дуг, определить кратчайшие пути.

Величины элементов матрицы D^1 и соответствующие им кратчайшие пути определяются согласно таблице 3.

Таблица 3

Выбор элементов матрицы D^1: $d_{ij}^1 = \min\{d_{i1}^1 + d_{1j}^0, d_{1j}^0\}$	Соответствующие пути (i, j)
$d_{11}^1 = d_{11}^0 = 0$	–
$d_{12}^1 = d_{12}^0 = 1$	(1,2)
$d_{13}^1 = d_{13}^0 = 2$	(1,3)
$d_{14}^1 = d_{14}^0 = 1$	(1,4)
$d_{21}^1 = d_{21}^0 = 2$	(2,1)
$d_{22}^1 = 0$	–
$d_{23}^1 = \min\{d_{21}^0 + d_{13}^0, d_{23}^0\} = \min\{(2+2), 7\} = 4$	(2,1), (1,3)
$d_{24}^1 = \min\{d_{21}^0 + d_{14}^0, d_{24}^0\} = \min\{(2+1), \infty\} = 3$	(2,1), (1,4)
$d_{31}^1 = d_{31}^0 = 6$	(3,1)
$d_{32}^1 = \min\{d_{31}^0 + d_{12}^0, d_{32}^0\} = \min\{(6+1), 5\} = 5$	(3,2)
$d_{33}^1 = 0$	–
$d_{34}^1 = \min\{d_{31}^0 + d_{14}^0, d_{34}^0\} = \min\{(6+1), 2\} = 2$	(3,4)
$d_{41}^1 = d_{41}^0 = 1$	(4,1)
$d_{42}^1 = \min\{d_{41}^0 + d_{12}^0, d_{42}^0\} = \min\{(1+1), \infty\} = 2$	(4,1), (1,2)
$d_{43}^1 = \min\{d_{41}^0 + d_{13}^0, d_{43}^0\} = \min\{(1+2), 4\} = 3$	(4,1), (1,3)
$d_{44}^1 = 0$	–

Аналогичным образом могут быть определены величины элементов матриц D^2, D^3, D^4 и соответствующие им кратчайшие пути. Полученные результаты приводятся ниже.

Матрица D^2:

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кратчайшие пути для элементов матрицы D^2:

$$\begin{bmatrix} 0 & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & 0 & (2,1),(1,3) & 3 \\ (3,1) & (3,2) & 0 & (3,4) \\ (4,1) & (4,1),(1,2) & (4,1),(1,3) & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица D^3:

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кратчайшие пути для элементов матрицы D^3:

$$\begin{bmatrix} 0 & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & 0 & (2,1),(1,3) & (2,1),(1,4) \\ (3,1) & (3,2) & 0 & (3,4) \\ (4,1) & (4,1),(1,2) & (4,1),(1,3) & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица D^4:

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кратчайшие пути для элементов матрицы D^4:

$$\begin{bmatrix} 0 & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & 0 & (2,1),(1,3) & (2,1),(1,4) \\ (3,4),(4,1) & (3,4),(4,1),(1,2) & 0 & (3,4) \\ (4,1) & (4,1),(1,2) & (4,1),(1,3) & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при произвольной нумерации вершин исходного графа в процессе выполнения алгоритма Флойда кратчайшие пути будут отыскиваться на более ранних стадиях для тех вершин, которые, имея близкие номера, являются «близкими» и по длинам соответствующих кратчайших путей.

Задачи для самостоятельного решения

1 Влияет ли выбор нумерации вершин графа на эффективность алгоритма Флойда? Если влияет, то почему?

2 Предположим, что обобщенный алгоритм Флойда был использован для получения длин трех наилучших путей между всеми парами вершин в задаче поиска узких мест. Как полученные результаты могут быть использованы для поиска самих путей?

3 Используя алгоритм Флойда, найдите кратчайшие пути между всеми вершинами графа, представленного матрицей

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \infty & 2 & \infty & 6 \\ 2 & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & \infty & \infty & -2 \\ \infty & 1 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11 Автоматы Мили и Мура

Конечный автомат является математической моделью реальных дискретных устройств по переработке информации.

Конечным автоматом называется структура $A = \langle X; Q; Y; \delta; \lambda \rangle$, где X, Q, Y – произвольные непустые конечные множества.

Множество $X = \{a_1, ..., a_m\}$ называется входным алфавитом, а его элементы – входными символами, их последовательности – входными словами. Множество $Q = \{q_1, ..., q_n\}$ называется множеством состояний, а его элементы – состояниями. Множество $Y = \{b_1, ..., b_p\}$ называется выходным алфавитом, а его элементы – выходными символами, их последовательности – выходными словами.

Функция $\delta : X \times Q \to Q$ называется функцией переходов. Функция $\lambda : X \times Q \to Y$ называется функцией выходов, т. е. $\delta(a, q) \in Q$, $\lambda(a, q) \in Y \mid \forall a \in X$, $\forall q \in Q$.

С конечным автоматом ассоциируется воображаемое устройство, которое работает следующим образом. Оно может находиться в состоянии из множества Q, воспринимать символы из множества X и выдавать символы из множества Y.

Существует несколько эквивалентных способов задания абстрактных автоматов, среди которых можно назвать три: табличный, геометрический и функциональный.

Табличное задание автомата.

Из определения автомата следует, что его всегда можно задать таблицей с двумя входами, содержащей *m* строк и *n* столбцов, где на пересечении столбца *q* и строки *a* стоят значения функций $\delta(a, q) \in Q, \lambda(a, q) \in Y$.

***Пример* 1** – Схема сравнения на равенство представляет собой устройство, сравнивающее числа x_1 и x_2, заданные в двоичной системе исчисления. На вход устройства поступают по двум каналам числа x_1 и x_2. Число x_1 является результатом сложения по модулю 2 байта данных, хранящегося в памяти компьютера. Число x_2 является битом паритета, дополняющего число x_1, так, чтобы их сумма сложения по модулю 2 была равна нулю. Это достигается при равенстве x_1 и x_2. Поэтому эти числа сравниваются устройством сравнения. При совпадении разрядов на выходе схемы формируется выходной сигнал 0, в противном случае на выходе появляется сигнал 1, что говорит о сбое в памяти. Ясно, что появление 1 в выходной последовательности означает, что сравниваемые числа x_1 и x_2 различны. Если же выходная последовательность является нулевой, то $x_1 = x_2$.

Для этого автомата $X = \{00; 01; 10; 11\}$; $Y = \{0,1\}$.

Функционирование схемы определяется двумя состояниями. Состояние q_0 соответствует равенству сравниваемых в данный момент разрядов. При этом автомат остается в этом же состоянии. Если в следующий момент сравниваемые разряды будут различны, то автомат перейдет в новое состояние q_1 и в нем остается, так как это означает, что числа различны. Таким образом, схему сравнения можно задать автоматной таблицей 4.

Таблица 4

x	*q*	
	q_0	q_1
00	q_0; 0	q_0; 1
01	q_1; 1	q_1; 1
10	q_1; 1	q_1; 1
11	q_0; 0	q_0; 1

Задание автомата диаграммой Мура.

Другой способ задания конечного автомата – графический. При этом способе состояния автомата изображают кружками, в которых вписывают символы состояний q_j, $j = 1, \ldots, n$. Из каждого кружка проводится *m* стрелок (ориентированных ребер) взаимно однозначно соответствующих символам входного алфавита $X = \{a_1, ..., a_m\}$. Стрелке, соответствующей букве $a_i \in X$ и выходящей из кружка $q_j \in Q$, приписывается пара $((a_i, \lambda(a_i, q_j))$, причем эта стрелка ведет в кружок, соответствующий $\delta(a_i, q_j)$.

Полученный рисунок называется графом автомата, или диаграммой Мура. Для не очень сложных автоматов этот способ более нагляден, чем табличный.

***Пример* 2** – Диаграмма Мура схемы сравнения на равенство изображена на рисунке 2.

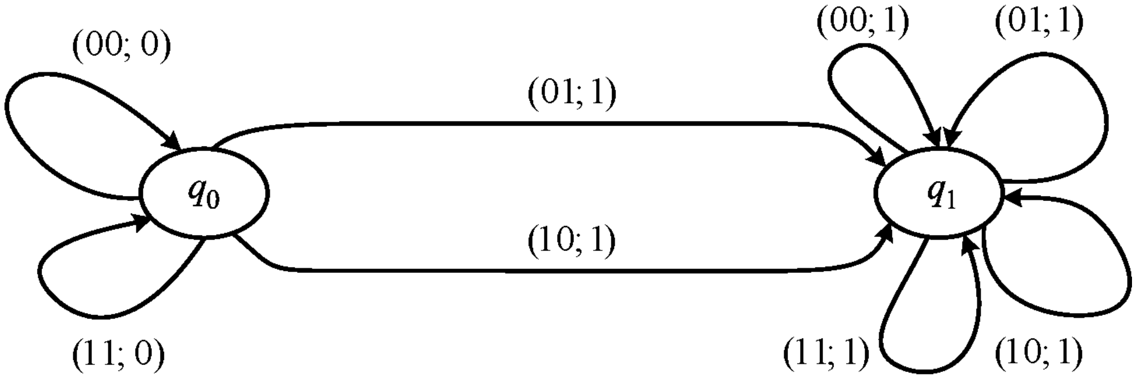


Рисунок 2 – Диаграмма Мура схемы сравнения на равенство

Задание конечного автомата системой булевых функций.

Третий способ задания конечного автомата $A = \langle X; Q; Y; \delta; \lambda \rangle$, заданного таблицей или диаграммой Мура, состоит в определении системы булевых функций. Если в момент времени t = 1, 2, ... на вход автомата $A = \langle X; Q; Y; \delta; \lambda \rangle$ последовательно подаются входные символы $x(t) \in X$ и при этом автомат находится в состоянии $q(t) \in Q$, то под воздействием символа $a(t)$ автомат перейдет в новое состояние $q(t+1) \in Q$ и выдаст выходной сигнал $b(t)$.

Величины $a(t)$, $b(t)$, $q(t)$, $q(t+1)$ связаны между собой следующими уравнениями:

$$\begin{cases} q(t+1) = \delta(a(t), q(t)); \\ b(t) = \lambda(a(t), q(t)), \end{cases} \quad t = 1, 2, ..., n.$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями автомата A.

При задании автомата системой булевых функций эти уравнения записываются в координатной форме:

$$\begin{aligned} & z_1(t+1) = \delta_1(x_1(t), \ldots, x_k(t), z_1(t), \ldots, z_r(t)); \\ & \ldots \\ & z_r(t+1) = \delta_r(x_1(t), \ldots, x_k(t), z_1(t), \ldots, z_r(t)); \\ & y_1(t)=\lambda_1(x_1(t), \ldots, x_k(t), z_1(t), \ldots, z_r(t)); \\ & \ldots \\ & y_s(t)= \lambda_s(x_1(t), \ldots, x_k(t), z_1(t), \ldots, z_r(t)),\ t = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Изложим алгоритм этого способа задания.

1 Находим числа k, r, s, удовлетворяющие условиям $2^{k-1} < m \leq 2^k$; $2^{r-1} < n \leq 2^r$; $2^{s-1} < p \leq 2^s$, где $m = |X|$; $n = |Q|$; $p = |Y|$.

Очевидно, что k, r, s соответственно равны числу разрядов в двоичном представлении чисел m, n, p. Например, если $m = 5$, $n = 17$, $p = 3$, то $k = 3$, $r = 5$, $s = 2$.

2 Кодирование состояний, входных и выходных символов заданного автомата.

Каждому $q_j \in Q$ взаимнооднозначно ставим в соответствие двоичную последовательность длины r – двоичный код $\alpha(q) = z_1z_2\ldots z_r$. Аналогично каждому

$a_i \in X$ и каждому $b_k \in Y$ ставим взаимнооднозначно в соответствие двоичные последовательности $\beta(a) = x_1x_2\ldots x_k$; $\gamma(b) = y_1y_2\ldots y_s$, которые представляются таблицей истинности.

Отметим, что кодирование состояний, входных и выходных символов можно провести многими способами. При этом некоторые последовательности (коды) могут оказаться неиспользованными.

3 Определение системы булевых функций.

После выполнения предыдущего шага может оказаться, что не все строки в таблице заполнены. Это произойдет в том случае, если хотя бы одно из чисел m, n не является степенью 2. Таким образом, функции $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ окажутся не полностью определенными – на некоторых наборах их значения не определены. Тогда их доопределяют произвольным образом. Как правило, доопределение функций производят так, чтобы получившиеся полностью определенные функции удовлетворяли тем или иным условиям оптимальности, например, представлялись минимальными ДНФ.

После выполнения этого шага исходный автомат будет задаваться системой полностью определенных булевых функций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$.

***Пример* 3** – Для схемы сравнения на равенство кодирование состояний выполним следующим образом: $\alpha(q_0) = 0$; $\alpha(q_1) = 1$. Автомат будет задаваться двумя функциями – δ и λ, представленными в таблице истинности (таблица 5).

Таблица 5

x_1	x_2	z	δ	λ
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Строим СКНФ функции $\delta(x_1, x_2, z)$. Так как эта функция задана набором своих значений $\overline{\delta} = 01111101$, то ее СКНФ будет иметь вид $(x_1 \vee x_2 \vee z) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee z)$. Не выполняя упрощений, получим

$$z(t+1) = (x_1(t) \vee x_2(t) \vee z(t)) \wedge (\overline{x_1}(t) \vee \overline{x_2}(t) \vee z(t)).$$

Аналогично строится функция $y(t)$. При этом из таблицы истинности выписываем набор значений функции $\lambda(x_1, x_2, z)$: $\overline{\lambda} = 01111101$, который совпадает с набором значений функции $\delta(x_1, x_2, z)$. Поэтому для заданного автомата канонические уравнения задаются следующей системой булевых функций:

$$\begin{cases} z(t+1) = (x_1(t) \vee x_2(t) \vee z(t)) \wedge (\overline{x_1}(t) \vee \overline{x_2}(t) \vee z(t)); \\ y(t) = (x_1(t) \vee x_2(t) \vee z(t)) \wedge (\overline{x_1}(t) \vee \overline{x_2}(t) \vee z(t)),\ t = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1 Что включает в себя понятие «конечный автомат»?
2 Какие основные термины связаны с введением понятия конечного автомата?
3 Дайте определение конечного автомата.
4 Укажите способы задания конечного автомата.
5 Каково табличное задание конечного автомата?
6 Как строится диаграмма Мура?
7 Изложите алгоритм задания конечного автомата системой булевых функций.
8 Приведите примеры конечных автоматов.
9 Какие уравнения называются каноническими уравнениями конечного автомата?

12 Пример задания на аудиторную контрольную работу

По итогам изучения дисциплины выполняется аудиторная контрольная работа. В состав заданий на аудиторной контрольной работе входят задачи по тематике, представленной в методических рекомендациях.

Пример задания на аудиторную контрольную работу.

Задание 1

Определите методом редукции, является ли формула тавтологией:

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Задание 2

Найдите методом карт Карно минимальную ДНФ булевой функции:

$$f(x, y, z, t) = (0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15).$$

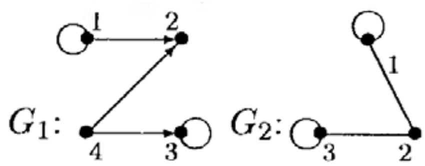
Задание 3

Приведите пример построения таблицы истинности на области интерпретации $D = \{1,2\}$:

$$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y) \to R).$$

Задание 4

Даны графы G_1 и G_2:



Найдите $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найдите матрицу смежности.

Список литературы

1 **Деза, Е. И.** Основы дискретной математики : учебное пособие / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. – 3-е изд. – Москва: ЛЕНАНД, 2016. – 224 с.

2 **Баврин, И. И.** Дискретная математика : учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – Москва : Юрайт, 2016. – 208 с.