УДК 517.927.6

К РЕШЕНИЮ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X + X\left(B_1(t) + \lambda B_2(t)\right) + \lambda F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_1, B_2, F – матрицы-функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; M_i – заданные постоянные $(n\times n)$ -матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

В работе [1] в случае, когда свободный член не содержит параметра λ, с помощью конструктивного метода [2] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), итерационный алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1], аналогичные результаты получены для задачи (1), (2).

Примем следующие обозначения [1]:

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \left\|V^{-1}(t)\right\|, \quad \nu_i = \|V_i\|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t,\lambda)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad q = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha+\beta_2)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i\nu_i, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\varepsilon\sum_{i=1}^{k} m_i\nu_i,$$

где $\|\cdot\|$ – согласованная в смысле [3, с. 410] норма матриц; Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

Теорема. Пусть оператор Φ однозначно обратим. Тогда при $|\lambda| < 1/q$ решение $X = X(t,\lambda)$ задачи (1), (2) существует и единственно. Оно представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих краевому условию (2), при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \le N/(1-\varepsilon q). \tag{3}$$

С помощью методики, используемой в [1], задача (1), (2) сведена к эквивалентной интегральной задаче

$$X(t,\lambda)=\lambda\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[(A(\tau)X(\tau,\lambda)+X(\tau,\lambda)B_2(\tau))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t), \tag{4}$$

разрешимость которой исследуется на основе принципа сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Для построения решения разработан алгоритм

$$X_p(t,\lambda)=\lambda\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[\left(A(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda)+X_{p-1}(\tau,\lambda)B_2(\tau)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t),\quad p=1,2,\ldots,$$

где в качестве начального приближения принята произвольная матрица $X_0(t)\in\mathbb{C}[0,\omega]$.

Доказана равномерная по $t\in I$ сходимость последовательности $\{X_r(t,\lambda)\}_0^{\infty}$ к решению интегральной задачи (4), при этом справедливы оценки

$$\|X-X_r\|_C\le\frac{(\varepsilon q)^r}{1-\varepsilon q}\|X_1-X_0\|_C,\quad r=0,1,2,\ldots,\quad \|X\|_C\le\|X_0\|_C+\frac{\|X_1-X_0\|_C}{1-\varepsilon q}.$$

Из оценки для $\|X\|_C$ при $X_0(t)\equiv 0$ следует оценка (3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bondarev, A. N.** Multipoint Boundary Value Problem for the Lyapunov Equation in the Case of Weak Degeneration of the Boundary Conditions / A. N. Bondarev, V. N. Laptinskii // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55, № 3. – P. 423–427.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

3. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.

4. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

5. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.