УДК 533.6

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРАНДТЛЯ О ДИНАМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Рассматривается задача

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u_x\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=0} = 0;\ u_x\big|_{y=\delta(x)} = U(x). \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) представляют собой задачу Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$ в случае стационарного плоского несжимаемого течения жидкости (см., например, [1, с. 127, 194], [2, с. 331]). Искомыми величинами являются функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение. Здесь используются обозначения, принятые в [2].

В работе [3] по методике [4] получены аналитические соотношения незамкнутого типа для нахождения функций $\delta(x)$, $\tau_0(x)$. В данной работе эти соотношения представлены в следующем виде:

$$\delta^2(x) = J\int_0^x \left(\frac{U(\tau)}{U(x)}\right)^k \delta(\tau)\,d\tau + \frac{2\nu}{\varphi}\int_0^x \frac{U^{k-1}(\tau)}{U^k(x)}\,d\tau, \tag{3}$$

$$\tau_0(x) = \left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)\frac{\mu U}{\delta} + \left(a - \frac{b\psi}{\varphi}\right)\rho U U'\delta + \frac{1}{2}(\varphi+\psi)\rho U^2 J, \tag{4}$$

где

$$J = \frac{\int_0^L U^k(x)\delta^2(x)\,dx - \frac{2\nu}{\varphi}\int_0^L (L-x)U^{k-1}(x)\,dx}{\int_0^L (L-x)U^k(x)\delta(x)\,dx}.$$

Необходимые обозначения величин, используемых в (3), (4), приведены в [3]; здесь L – длина пластины.

На основе полного напряжения трения $\tau = \tau(x,y)$ введем сопротивление трения пластины по формуле

$$W(x,y)=b\int_0^x \tau(s,y)\,ds,$$

где $0<x\le L$; $b-$ ширина пластины.

Величина

$$K(x,y)=\frac{\tau(x,y)}{W(x,y)} \tag{5}$$

представляет собой формальную кривизну гауссова типа поля усредненных скоростей в пограничном слое. Из (5) по методике [4] получим равенство

$$\frac{\tau_0(x)}{W(L,0)}=\frac{\tilde{\tau}_0(x)}{\tilde{W}(L,0)},$$

где $\tilde{\tau}_0(x)=\mu\dfrac{U(x)}{\delta(x)}$; $\tilde{W}(L,0)=b\int_0^L \tilde{\tau}_0(x)\,dx$.

Другую интерпретацию величины $K(x,y)$ можно получить на основе понятия плотности безразмерного напряжения трения

$$\tau^*(x,y)=\tau(x,y)\big/\overline{\tau(x,y)},\quad \overline{\tau(x,y)}=\frac{1}{x}\int_0^x \tau(s,y)\,ds.$$

Замечание – Явный вид функционала J можно получить с привлечением результатов соответствующих экспериментов, если турбулентное напряжение τ_t принять в виде $\tau_t=\rho U^2(x)\varphi(\xi)$ $\left(\xi=y/\delta(x)\right)$, где $\varphi(\xi)-$ функция класса $\mathbb{C}[0,h)$ $(h>0)$, определяемая как решение проблемы моментов с использованием силы сопротивления пластины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974.

2. **Емцев**, **Б. Т.** Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – Москва: Машиностроение, 1987.

3. **Лаптинский, В. Н.** К решению задачи о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Еругинские чтения – 2019: тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. – Могилев, 2019. – Ч. II. – С. 82–84.

4. **Лаптинский, В. Н.** Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72 –93.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/