УДК 517.927.4

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

В. А. ЛИВИНСКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача о периодических решениях с периодом ω уравнения

$$\ddot{X} = \lambda A(t)X + \lambda^3(P(t)X + XB(t)) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $F_i(t)$ $(i = 0,1)$ – непрерывные ω-периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\dot{X} = dX/dt$.

Данная работа является продолжением и развитием [1–4]. На основе применения метода [5, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи, оценка области локализации и алгоритм построения решения.

Уравнение (1) сводится к эквивалентной системе матричных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = Y, \tag{2}$$

$$dY/dt = \lambda A(t)X + \lambda^3(P(t)X + XB(t)) + F_0(t) + \lambda F_1(t). \tag{3}$$

Вместо исходной задачи исследуется периодическая краевая задача для (2), (3) с условиями

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \; Y(0,\lambda) = Y(\omega,\lambda). \tag{4}$$

По методике [5] задача (2)–(4) сведена к эквивалентной системе матричных интегральных уравнений, в которой применена модификация обобщенного принципа сжимающих отображений [6].

Приняты следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau, \; \gamma = \left\|\tilde{A}^{-1}(\omega)\right\|, \; \varepsilon = |\lambda|, \; \alpha = \max_t \|A(t)\|, \; \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|P(t)\|, \; h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \; q_1 = \frac{1}{4}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma(\beta+\mu)\omega, \; q_2 = \frac{1}{4}\gamma\alpha(\beta+\mu)\omega^3,$$

$$q(\varepsilon) = \varepsilon q_1 + \varepsilon^3 q_2, \; K(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon\omega[\alpha + \varepsilon^2(\beta+\mu)], \; H(\varepsilon) = \gamma\omega\left(\frac{1}{4}\alpha\omega^2 + \frac{1}{\varepsilon}\right)(h_0 + \varepsilon h_1),$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det \tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < \varepsilon q_1 + \varepsilon^3 q_2 < 1$. *Тогда решение* $X(t,\lambda), Y(t,\lambda)$ *задачи* (2)–(4) *существует и единственно*; *оно представимо в виде*

$$X(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k-1}X_{k-1}(t), \qquad (5)$$

$$Y(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}Y_{k}(t), \qquad (6)$$

где матрицы $X_{k-1}(t), Y_k(t)$ *строятся по алгоритму типа [1, 2].*

С помощью методики, используемой в [1, 2], изучены вопросы сходимости, скорости сходимости рядов (5), (6), при этом получены оценки

$$\|X(t,\lambda)\|\leqslant\frac{H(\varepsilon)}{1-q(\varepsilon)},\quad \|Y(t,\lambda)\|\leqslant\frac{K(\varepsilon)H(\varepsilon)}{1-q(\varepsilon)}+\frac{1}{2}\omega(h_0+\varepsilon h_1).$$

Установлено, что $X_{-1}(t)\equiv 0$ в случае, когда $\int\limits_0^{\omega}F_0(\tau)d\tau=0$; проведен также анализ задачи с точки зрения теории возмущений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Об аналитической структуре периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 9. – С. 1290–1291.

2. **Лаптинский, В. Н.** К теории периодических решений матричного дифференциального уравнения второго порядка типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1133–1134.

3. **Ливинская, В. А.** К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Еругинские чтения – 2014: тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. – Новополоцк: Полоц. гос. ун-т, 2014. – С. 66–67.

4. **Ливинская, В. А.** К теории периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 521–522.

5. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

6. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – Москва: Наука, 1969. – 456 с.