УДК 517.927.4

К ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \sigma\big(F(t,X) + G(t,X)\big),\ X \in \mathbb{R}^{n\times n}; \tag{1}$$

$$MX(0,\sigma) + NX(\omega,\sigma) = 0, \tag{2}$$

где $A,B \in \mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F,G \in \mathbb{C}\left(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $I=[0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X): t\in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, M,N – постоянные $(n\times n)$-матрицы; функции $F(t,X)$, $G(t,X)$ удовлетворяют в D_ρ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$, $G(t,0) \not\equiv 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

В [1] (см. также [2, гл. 1]) в случае $\sigma = 1$, $G(t,X) \equiv 0$ с помощью метода [3] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения G-невозмущенной задачи (1), (2). Данная работа является продолжением [1] и развитием [4], [5].

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X): t\in I, \|X\| \le \rho\},\ \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|,\ \lambda_2 = \max_t \left\|U^{-1}(t)\right\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|,\ \mu_2 = \max_t \left\|V^{-1}(t)\right\|,\ P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M,\ Q = -V(\omega),\ \gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|,$$

$$m = \max\{\|P\|, \|Q\|\},\ \tilde q = \varepsilon q,\ \tilde p = \varepsilon p,\ \varepsilon_0 = \rho/(q\rho + p),$$

$$\varepsilon = |\sigma|,\ h_1 = \max_t \|F(t,0)\|, h_2 = \max_t \|G(t,0)\|,\ \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,$$

где $q = \gamma\lambda\mu m\omega(L_1 + L_2)$, $p = \gamma\lambda\mu m\omega(h_1 + h_2)$ $t \in I$, $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, $\mu = \mu_1\mu_2$; Φ – линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $L_1 = L_1(\rho) > 0$, $L_2 = L_2(\rho) > 0$ – постоянные Липшица для функций соответственно $F(t,X)$, $G(t,X)$ в D_ρ, $0 < \rho < \tilde\rho$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц; $U(t), V(t)$ – решения уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U,\ U(0) = E;\ \frac{dV}{dt} = VB(t),\ V(0) = E;$$

здесь E – единичная матрица.

Теорема. Пусть выполнены условия $\det N \ne 0$, матрицы P,Q не имеют общих характеристических чисел. Тогда при $|\sigma| \le \varepsilon_0$ в области D_ρ задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, удовлетворяющих краевому условию (2) и определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_{k+1}(t)=\sigma U(t)\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\Big(F\big(\tau,X_k(\tau)+G\big(\tau,X_k(\tau)\big)\big)\Big)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\Big(F\big(\tau,X_k(\tau)\big)+G\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]V(t),$$

$$k=0,1,2,\dots,$$

при этом справедлива оценка

$$\|X_k-X\|_{\mathbb{C}}\le\tilde{q}^k\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}/(1-\tilde{q}),\ k=0,1,2,... \qquad (3)$$

Здесь X_0 – произвольная матрица класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\rho$.

Из (3) при $k=0$, $X_0=0$ следует оценка области локализации решения

$$\|X\|_{\mathbb{C}}\le\frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1-\tilde{q}}\le\frac{\tilde{p}}{1-\tilde{q}}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкий, И. И.** К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова / И. И. Маковецкий В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 137–141.
2. **Лаптинский, В. Н**. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.
3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
4. **Маковецкий, И. И.** Двусторонняя регуляризация нелинейно возмущенной двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2019. – № 2 (54). – С. 12– 20.
5. **Маковецкий, И. И.** К построению решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром / И. И. Маковецкий // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 527–528.