УДК 621.878.6

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

О. В. ПУЗАНОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Уравнение Лагранжа второго рода для механизма с w степенями подвижности с жесткими звеньями и голономными стационарными связями имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+Q_{cs} \quad (s=1,\ldots,w),$$

где $T\left(q_1, ..., q_w, \ \dot{q}_1, ..., \dot{q}_w\right)$ – кинетическая энергия механизма, представленная как функция обобщенных координат и их производных; Q_s, Q_{cs} – обобщенные движущие силы и силы сопротивления.

Уравнениями Лагранжа второго рода можно пользоваться при изучении движения любой механической системы с геометрическими связями независимо от того, сколько точек или тел входят в систему, как движутся эти тела и какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается.

Решалась задача применения уравнения Лагранжа второго рода для построения математической модели симметричного конического межколесного дифференциала автомобиля (рис. 1). Ведущее водило H жестко связано с ведомым зубчатым колесом 2 главной передачи 1–2. Движущий момент $Q=M_1$ передается от ведущей шестерни главной передачи 1 через водило сателлитам 3, которые, в свою очередь, передают вращение на приводные центральные колеса 4 и 5, к которым приложены моменты сопротивления M_4 и M_5.

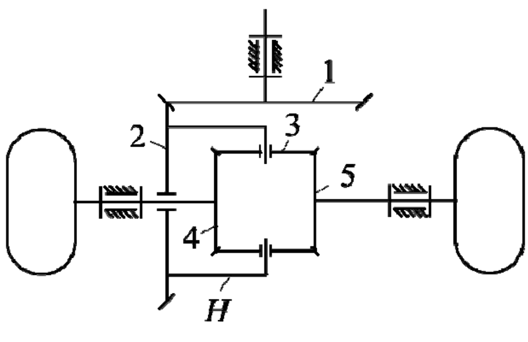

Рис. 1. Схема дифференциала

Известны осевые моменты инерции ведущей шестерни главной передачи J_1, корпуса дифференциала с ведомым зубчатым колесом 2 главной передачи и сателлитами относительно оси вращения корпуса J_H, осевые моменты инерции центральных колес $J_4 = J_5 = J$.

Механизм имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат приняты углы поворота центральных колес φ_4 и φ_5.

Передаточное отношение главной передачи

$$i_{12} = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_H} = \mathrm{ctg}\delta,$$

где δ – угол делительного конуса шестерни 1.

При этом угловая скорость водила

$$\dot{\varphi}_H = \frac{\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_5}{2}.$$

Кинетическая энергия механизма без учета вращения сателлитов относительно своей оси

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_H \dot{\varphi}_H^2 + \frac{1}{2} J\left(\dot{\varphi}_4^2 + \dot{\varphi}_5^2\right).$$

Поскольку $\dot{\varphi}_1 = \dfrac{\left(\dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_5\right)\mathrm{ctg}\delta}{2}$, кинетическая энергия механизма определяется по выражению

$$T = \frac{1}{2}\left[J + \frac{1}{4}\left(J_1 \mathrm{ctg}^2\delta + J_H\right)\right]\left(\dot{\varphi}_4^2 + \dot{\varphi}_5^2\right) + \frac{1}{4}\left(J_1 \mathrm{ctg}^2\delta + J_H\right)\dot{\varphi}_4^2 \dot{\varphi}_5^2.$$

Обобщенные силы определены из выражения работы на возможных перемещениях $\delta\varphi_i$:

$$Q\delta\varphi_1 + M_4\delta\varphi_4 + M_5\delta\varphi_5 = M_1\left(\delta\varphi_4 + \delta\varphi_5\right)\frac{\mathrm{ctg}\delta}{2} + M_4\delta\varphi_4 + M_5\delta\varphi_5 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} M_1 \mathrm{ctg}\delta + M_4\right)\delta\varphi_4 + \left(\frac{1}{2} M_1 \mathrm{ctg}\delta + M_5\right)\delta\varphi_5.$$

Получены обобщенные силы сопротивления центральных колес:

$$Q_{c4} = \frac{1}{2} M_1 \mathrm{ctg}\delta + M_4 \text{ и } Q_{c5} = \frac{1}{2} M_1 \mathrm{ctg}\delta + M_5.$$

Подставляя все параметры в уравнения Лагранжа второго рода, получили упрощенную математическую модель симметричного конического межколесного дифференциала автомобиля:

$$\left[J + \frac{1}{4}\left(J_1 \mathrm{ctg}^2\delta + J_H\right)\right]\ddot{\varphi}_4 + \frac{1}{4}\left(J_1 \mathrm{ctg}^2\delta + J_H\right)\ddot{\varphi}_5 = \frac{1}{2} M_1 \mathrm{ctg}\delta + M_4;$$

$$\left[\frac{1}{4}\left(J_1 \mathrm{ctg}^2\delta + J_H\right)\right]\ddot{\varphi}_4 + \left[J + \frac{1}{4}\left(J_1 \mathrm{ctg}^2\delta + J_H\right)\right]\ddot{\varphi}_5 = \frac{1}{2} M_1 \mathrm{ctg}\delta + M_5.$$

Математическая модель дифференциала, построенная на основе уравнения Лагранжа второго рода, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат, описывающих движение механической системы, подчиненной идеальным связям. Эта модель использована при динамическом анализе механизма.