УДК 517.927.4

К РЕШЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

Д. В. РОГОЛЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача типа [1]:

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1(t)+\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{S}_1(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{S}_2(t)\boldsymbol{Y}\right)+\lambda^2\boldsymbol{F}_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt}=\boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_2(t)+\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{Y}\right)+\lambda^2\boldsymbol{F}_2(t), \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{X}(0,\lambda)=\boldsymbol{X}(\omega,\lambda),\ \boldsymbol{Y}(0,\lambda)=\boldsymbol{Y}(\omega,\lambda), \qquad (3)$$

где $t\in[0,\omega]$, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\boldsymbol{A}_i(t)$, $\boldsymbol{B}_i(t)$, $\boldsymbol{S}_i(t)$, $\boldsymbol{P}_i(t)$, $\boldsymbol{F}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Вопросы конструктивной теории краевых задач для многомерных систем дифференциальных уравнений специального вида мало изучены. К таким системам относятся матричные дифференциальные уравнения Риккати, Ляпунова и их обобщения, в частности, системы матричных дифференциальных уравнений вида (1), (2), играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений. Поэтому развитие конструктивных методов применительно к таким задачам представляется актуальным (см., например, [2] и др.).

В данной работе, являющейся продолжением [1, 3], с помощью конструктивного метода [4, гл. 3] получены эффективно проверяемые по исходным данным достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3). Разработан итерационный алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решения, при этом все приближенные решения удовлетворяют условиям (3).

Примем следующие обозначения:

$$D=\left\{(t,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):0\le t\le\omega,\|\boldsymbol{X}\|\le\rho_1,\|\boldsymbol{Y}\|\le\rho_2\right\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_i(\omega)=\int_0^\omega\boldsymbol{B}_i(\tau)d\tau,\ \tilde{\gamma}_i=\left\|\tilde{\boldsymbol{B}}_i^{-1}(\omega)\right\|,\ \alpha_i=\max_t\|\boldsymbol{A}_i(t)\|,\ \beta_i=\max_t\|\boldsymbol{B}_i(t)\|,$$

$$\delta_i=\max_t\|\boldsymbol{S}_i(t)\|,\ \mu_i=\max_t\|\boldsymbol{P}_i(t)\|,\ h_i=\max_t\|\boldsymbol{F}_i(t)\|,\ \|\boldsymbol{T}\|_C=\max_t\|\boldsymbol{T}(t)\|,$$

$$\varepsilon=|\lambda|,\ \varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

$$p_{11}=\tilde{\gamma}_1\left[0,5\cdot\beta_1(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+(\alpha_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\right],$$

$$p_{12}=\tilde{\gamma}_1\delta_2\rho_1\omega(0,5\cdot\beta_1\omega+1),\ p_{21}=\tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega(0,5\cdot\beta_2\omega+1),$$

$$p_{22}=\tilde{\gamma}_2\left[0,5\cdot\beta_2(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega^2+(\alpha_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$

$$\varepsilon_1=\left(\frac{\rho_1-\tilde{\gamma}_1\left\{0,5\cdot\beta_1\left[\left(\alpha_1+\beta_1\right)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}}{\tilde{\gamma}_1\left(0,5\cdot\beta_1\omega+1\right)h_1\omega}\right)^{1/2},$$

$$\varepsilon_2=\left(\frac{\rho_2-\tilde{\gamma}_2\left\{0,5\cdot\beta_2\left[\left(\alpha_2+\beta_2\right)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}}{\tilde{\gamma}_2\left(0,5\cdot\beta_2\omega+1\right)h_2\omega}\right)^{1/2},$$

где $t\in\left[0,\omega\right]$, $0<\rho_1,\rho_2<\infty$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\det\tilde{\boldsymbol{B}}_i(\omega)\neq 0\ \left(i=1,2\right)$,

2) $\tilde{\gamma}_1\left\{0,5\cdot\beta_1\left[\left(\alpha_1+\beta_1\right)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}<\rho_1$,

$\tilde{\gamma}_2\left\{0,5\cdot\beta_2\left[\left(\alpha_2+\beta_2\right)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}<\rho_2$,

3) $p_{11}<1$, $\det\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}\right)>0$,

где $\boldsymbol{E}=diag\left(1,1\right)$, $\boldsymbol{P}=\left(p_{ij}\right)$. *Тогда при* $|\lambda|<\varepsilon_0$ *задача (1)–(3) однозначно разрешима в области* D. *Решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых по итерационному алгоритму с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условиям (3).*

Случай $\int_0^{\omega}F_i\left(\tau\right)d\tau=0$ изучен с точки зрения теории возмущений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати условий / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

2. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва: Наука, 1975. – 496 с.

3. **Роголев, Д. В.** К анализу периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати с параметром / Д. В. Роголев // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 533–534.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.