

УДК 533.6

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ФОЛКНЕРА–СКЭН

А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Рассматривается краевая задача (см., например, [1, с. 160])

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1-f'^2) = 0; \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

представляющая собой задачу Фолкнера–Скэн о динамическом пограничном слое при течении несжимаемой жидкости вдоль плоской пластины. В данной работе, на основе методики, предложенной в [2, 3], получено более простое, чем в [4], но не менее точное приближенное аналитическое решение задачи (1), (2), которой посвящена обширная литература (см., например, в [1]). В классической теории пограничного слоя эта задача решалась в основном численными и численно-аналитическими методами. Следует отметить, что данная проблематика в XXI в. привлекает внимание многих исследователей с различных точек зрения – теоретической и прикладной (см. в [5] и др.).

С помощью [2, 3] имеем

$$f(\eta) = \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) e^{-\left(\frac{b}{\lambda}\tau + \frac{1}{6}a\lambda\tau^3\right)} d\tau, \quad (3)$$

при этом значения $\lambda = \lambda(m)$ вычисляются из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{b}{\lambda}\tau + \left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3 + (a-2b)\lambda\right) \frac{\tau^3}{3!}\right)\right) d\tau - 1 = 0, \quad (4)$$

где $a = (m+1)/2$; $b = m$; $\lambda = f''(0)$; $a - 2b > 0$ ($0 \leq m < 1/3$).

Решение (3), (4) может быть использовано для получения инженерных формул, связанных с соответствующими прикладными задачами теплофизики, аэро- и гидродинамики. При этом величина $f''(0) = \lambda$ используется при вычислении касательного напряжения на обтекаемой поверхности, $f'(\eta)$ (вместе с $f''(0)$) – при расчете толщины динамического пограничного слоя, $f(\eta)$ (вместе с $f'(\eta)$) – при вычислении температуры в тепловом пограничном слое, а также при вычислении локального коэффициента теплоотдачи (см., например, [1]).



Для иллюстрации эффективности приближения (3), (4) при $m = 0,25$ на рис. 1 приведены графики (точного) численного решения задачи (1), (2) и его первых двух производных, а также графики приближенного решения и соответствующих производных. Расчеты выполнены для практически значимого промежутка $0 \leq \eta \leq 5$.

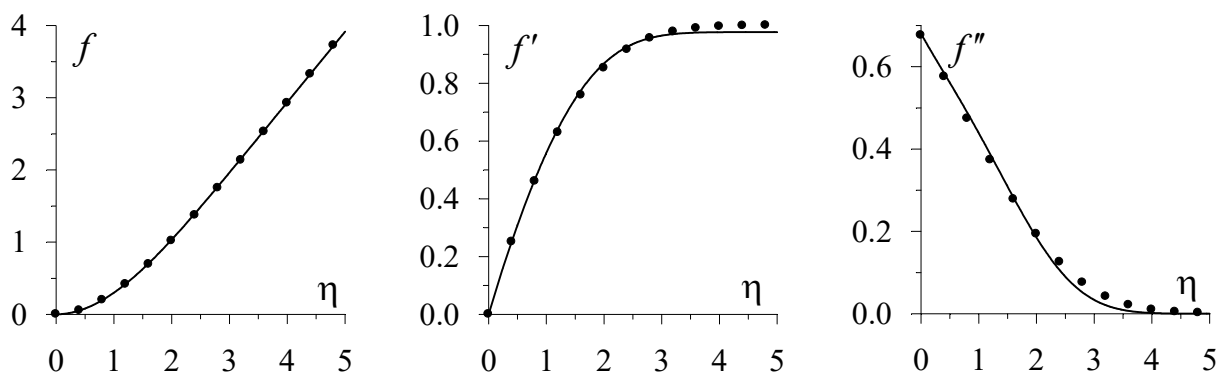


Рис. 1. Графики $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ для $m = 0,25$. Точки соответствуют точному решению, сплошная линия – приближению (3), (4)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974.
2. Лаптинский, В. Н. Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2010. – 25 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 20 (Ч. IV).
3. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72–93.
4. Лаптинский, В. Н. К задаче о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 25–26 апр. 2019 г. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 519–521.
5. Okasha El-Nady, A. A new Technique for Solution of the Blasius and Falkner-Skan Boundary Layer Equations / A. Okasha El-Nady, M. Fayek Abd Rabbo // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE). – 2017. – Vol. 14, iss. 4. – P. 45–53.