УДК 517.2:33

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

К. А. ДИКАЛОВА, М. М. ЛЫСЕНКО
Научный руководитель А. М. БУТОМА
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

В экономике часто требуется найти оптимальное значение того или иного показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и т. д. Использование функций нескольких переменных – математический метод широко применяемый для экономического анализа. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций.

Каждый показатель представляет собой функцию одного или нескольких аргументов. Например, выпуск можно рассматривать как функцию затрат труда и капитала (как это делается в производственных функциях). Поскольку экономические показатели обычно зависят от многих факторов, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума (максимума или минимума) функции одной или нескольких переменных.

Такие задачи хорошо изучены теорией функций нескольких переменных, использующей методы дифференциального исчисления. Многие задачи включают не только максимизируемую (минимизируемую) функцию, но и ограничения (например, бюджетное ограничение в задаче потребительского выбора).

В экономической теории наиболее часто встречаются задачи, в которых используются такие понятия, как производственная функция, функция Кобба–Дугласа, функция полезности, функция издержек.

Поясним эти понятия.

Производственной функцией называется зависимость результата производственной деятельности – выпуска продукции от обусловивших его факторов – затрат ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Производственная функция может быть задана как в натуральных, так и в денежных единицах. В последнем случае она представляет собой доход от использования ресурсов.

Производственная функция $K(x,y) = Ax^{a}y^{\beta}$ называется функцией Кобба–Дугласа. Параметры α и β представляют собой частные эластичности выпуска продукции по отношению к затратам труда x и капитала y.

Функция полезности $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задает полезность для потребителя от приобретения x_1 единиц 1-го продукта, x_2 единиц 2-го продукта и т. д.

Функция издержек $C(x)$ определяет затраты, необходимые для производства x единиц данного продукта.

Прибыль *P(x) = D(x) – C(x),* где *D(x)* – доход от производства *x* единиц продукта.

Рассмотрим некоторые приложения функций нескольких переменных в экономической теории.

Задача 1

Найти значения величин используемых ресурсов (*x, y),* при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция *K(x,y)* и цены p_1 и p_2 на единицу первого и второго ресурсов:

$$K(x,y)=30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\,;\;\; p_1=4;\quad p_2=\frac{1}{48}.$$

Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов, т. е. $K(x,y)=D(x)$. Т. к. функция $C(x)=p_1x+p_2y$, то $C(x)=4x+\frac{1}{48}y$. Таким образом, функция прибыли равна *P(x) = D(x) – C(x),* т. е. $P(x)=P(x,y)=30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}-4x-\frac{1}{48}y$.

Требуется найти значения величин используемых ресурсов (*x, y),* при которых фирма–производитель получит максимальную прибыль, т. е. надо исследовать функцию *P(x,y)* на локальный экстремум. Сначала определим стационарные точки функции. Для этого найдем частные производные функции и приравняем их к нулю (по необходимому условию существования экстремума):

$$P'_x=15y^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}-4;$$

$$P'_y=10y^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{48}.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases}15y^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}-4=0,\\ 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{48}=0,\end{cases}$ получим $\begin{cases}x=225\cdot 450^2,\\ y=18^3\cdot 10^6.\end{cases}$

Для определения существования локального экстремума составим определитель второго порядка $\Delta=AC-B^2$, где

$$A=P''_{xx}=-\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}};\;\; B=P''_{xy}=5x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}};\;\; C=P''_{yy}=-\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}.$$

Т. к.

$$\Delta = 25x^{-1}y^{-\frac{4}{3}} > 0 \text{ и } A = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}} < 0,$$

то критическая точка $\left(225 \cdot 450^2; 18^3 \cdot 10^6\right)$ – есть точка максимума (по достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных).

Приведем еще несколько условий задач (без решения).

Задача 2

Потребитель имеет возможность потратить сумму – 1 тыс. ден. ед. на приобретение x единиц первого товара и y единиц второго товара. Заданы функция полезности $U(x, y)$ и цены p_1, p_2 за единицу соответственно первого и второго товаров. Найти значения x и y, при которых полезность для потребителя будет наибольшей:

$$U = 0{,}5\ln(x - 2) + 2\ln(y - 1);\ p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 4.$$

Задача 3

Прибыль P автомобильного завода от производства одного автомобиля определяется формулой $P=0{,}25xy–x–y-2$, где x – затраты на материалы, млн р., ($x>0$), y – затраты на оплату рабочей силы, млн р., ($y>0$), 2 млн р.– постоянные затраты.

Найти значения x и y, при которых прибыль завода максимальна, а суммарные затраты на один автомобиль не превышают 27 млн р.

Задача 4

Издержки предприятия на изготовление единицы некоторого вида продукции определяются формулой $Z=x+y-x^{2y}+5$, где x – затраты капитала, тыс. р., ($x>0$), y – расходы на оплату рабочей силы, тыс. р., ($y>0$). При каких значениях x и y издержки производства будут минимальными, если затраты $x+y$ на единицу продукции составляют 3 тыс. р.?