

УДК 621.824.44

*Е. Ю. Демиденко, А. О. Козлов, А. А. Жолобов*

## РАСЧЕТ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ШЛИЦЕВОГО ПРОФИЛЯ ВАЛОВ

UDC 621.824.44

*E. Y. Demidenko, A. O. Kozlov, A. A. Zholobov*

## CALCULATING MOMENTS OF INERTIA FOR THE INVOLUTE SPLINE PROFILE OF SHAFTS

### Аннотация

Приведены метод расчета и вывод математических зависимостей для определения суммарного момента инерции эвольвентного шлицевого профиля валов. Суть метода заключается в использовании принципа суммирования осевых моментов инерции составляющих фигур профиля шлица.

Конечной целью работы является прогнозирование и обеспечение высокой точности профиля эвольвентных шлиц на валах.

### Ключевые слова:

эвольвентный шлицевый профиль, осевой момент инерции, шлицевый вал, шлицефрезерование, деформация, жесткость.

### Abstract

The calculation method and derivation of mathematical dependencies are presented for determining the total moment of inertia of involute spline profile of shafts. The essence of the method consists in using the principle of summing axial moments of inertia of components of the spline profile.

The ultimate goal of the research is to predict and ensure high accuracy of the profile of involute splines on shafts.

### Keywords:

involute spline profile, axial moment of inertia, splined shaft, spline milling, deformation, rigidity.

Широкое использование шлицевых валов с эвольвентным профилем шлицев в подвижных соединениях обусловлено рядом преимуществ, основными из которых являются повышенная прочность и жесткость шлицев, что позволяет передавать большие крутящие моменты и меньше деформироваться под действием нагрузки. Но формирование шлицев, в том числе и с эвольвентным профилем, – весьма трудоемкая операция с применением дорогостоящего оборудования и инструмента, и любой брак при изготовлении деталей приводит к значительным материальным затратам.

Улучшение качества шлицевых валов с эвольвентным профилем является актуальной задачей. Однако, как показал анализ научной литературы, в настоящее время отсутствуют фундаментальные работы по прогнозированию деформаций таких валов под действием сил резания при формообразовании эвольвентного профиля шлицев. Так как для прогнозирования деформаций вала необходимо учитывать изменяющуюся его жесткость, а соответственно, и прогиб изделия под воздействием сил резания, особую роль приобретает разработка методики точного определения осевого момента инерции



достаточно сложного профиля детали, что и явилось основой данных исследований.

В [1] сделана попытка определения осевого момента инерции сечения шлицевого участка вала. Данная методика позволяет рассчитать осевой момент инерции сечения шлицев с эвольвентным профилем с определенной погрешностью, так как основана на определении площади сечения шлица с помощью двух трапеций без учета того, что между боковыми сторонами трапеции и боковой стороной шлица остается неучтенная площадь. Для уменьшения погрешности необходимо образовывать сечение шлица большим числом трапеций, благодаря чему уменьшится неучтенная площадь и, как следствие, снизится величина погрешности. Еще одним недостатком данного метода является то, что происходит наложение площади нижней трапеции на площадь круга, ограниченного диаметром окружности впадин вала. Это также вносит определенную погрешность в расчетах осевого момента инерции сечения шлицев с эвольвентным профилем. Выходом является разложение всего профиля на элементарные части, ко-

торые повторяют форму простейших геометрических фигур с условием их дальнейшего суммирования.

При условии успешного решения этой задачи можно в дальнейшем прогнозировать деформации валов при фрезеровании червячными модульными фрезами на современных шлицефрезерных станках с ЧПУ, имеющими возможность быстрого реагирования на изменяющуюся жесткость технологической системы с целью её стабилизации за счет изменения режимов резания. Прогнозные показатели, в конечном счёте, предполагается использовать для формирования предложений по улучшению качества эвольвентных шлицевых валов.

Для определения значения осевого момента инерции эвольвентного шлицевого профиля использовалась методика, предполагающая суммирование осевых моментов инерции отдельных элементарных фигур, составляющих профиль, – треугольников, секторов, сегментов и эвольвентного участка. Простейшим элементом, характеризующим профиль шлицевого сечения, является участок, ограниченный сектором (рис. 1).

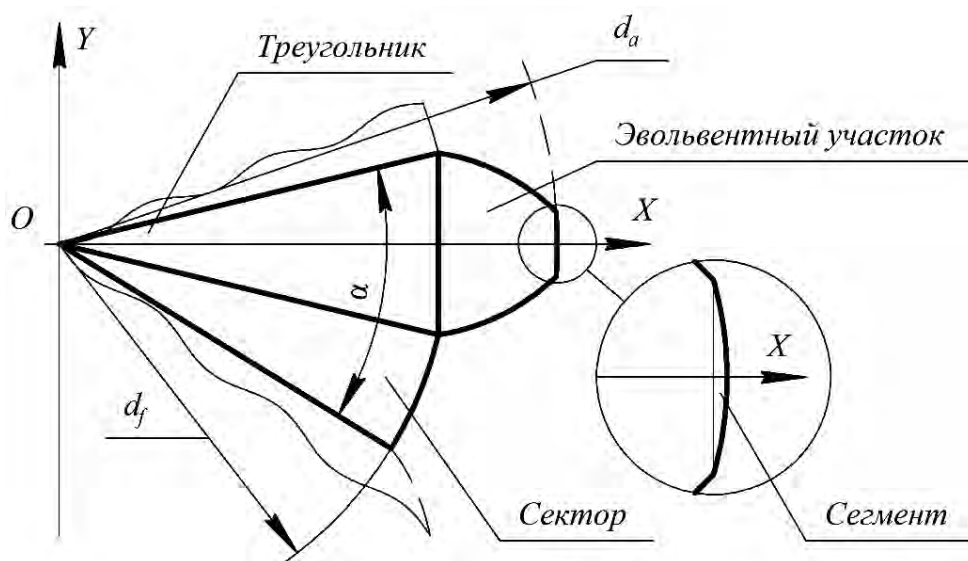


Рис. 1. Элементарный сектор шлицевого вала



Утолщенной линией на рис. 2 изображена часть эвольвентной линии, которая задаётся параметрической системой уравнений

$$\begin{cases} x = 0,5 \cdot d_b \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t)); \\ y = 0,5 \cdot d_b \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t)). \end{cases} \quad (1)$$

Для более удобных расчётов осевого момента инерции эвольвентного участка необходимо рассчитать угол поворота  $\beta$ . Внесение этого угла в параметрическое уравнение эвольвенты позволит расположить шлицевый зуб таким образом, чтобы ось  $X$  была осью симметрии. Для нахождения угла поворота  $\beta$  необходимо знать углы  $\alpha$  и  $\gamma$ .

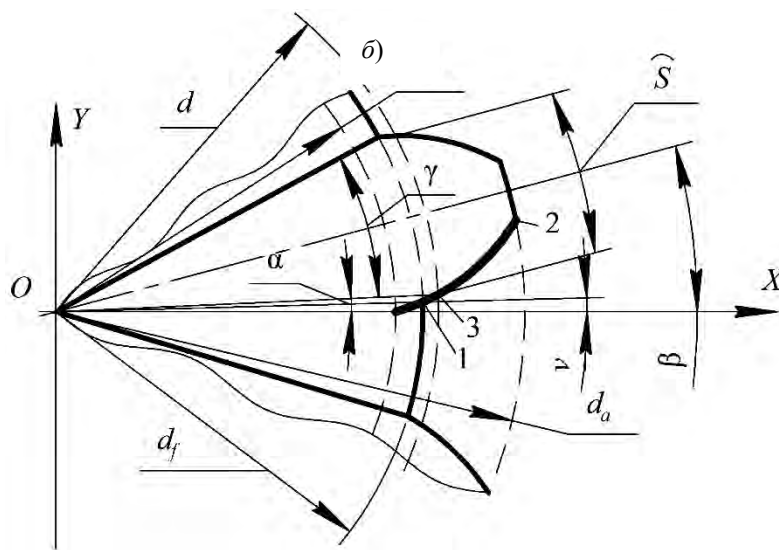


Рис. 2. Участок эвольвентной линии, образующей боковую поверхность шлица

Угол  $\alpha$  находится как

$$\alpha = \arctg\left(\frac{y_3}{x_3}\right), \quad (2)$$

где  $x_3$  и  $y_3$  – проекции прямой  $O3$  на оси  $X$  и  $Y$ .

Для определения координат точки 3 необходимо знать угол между осью  $X$  и прямой  $O3$ . Обозначается этот угол –  $t_3$  (рис. 3) и находится следующим образом:

$$t_3 = \sqrt{\frac{d^2}{d_b^2} - 1}, \quad (3)$$

где  $d$  – диаметр делительной окружности, мм;  $d_b$  – диаметр осной окружности, мм.

сти, мм.

Подставив  $t_3$  в систему уравнений (1), получается

$$\begin{cases} x_3 = \frac{d_b}{2} \cdot (\cos(t_3) + t_3 \cdot \sin(t_3)); \\ y_3 = \frac{d_b}{2} \cdot (\sin(t_3) - t_3 \cdot \cos(t_3)). \end{cases}$$

Подставив значения  $x_3$  и  $y_3$  в выражение (2), определяется угол  $\alpha$  (см. рис. 2).

Угол  $\gamma$  находится из выражения

$$\gamma = \frac{2 \cdot S}{d}, \quad (4)$$

где  $S$  – номинальная делительная окружная толщина зуба вала, мм.



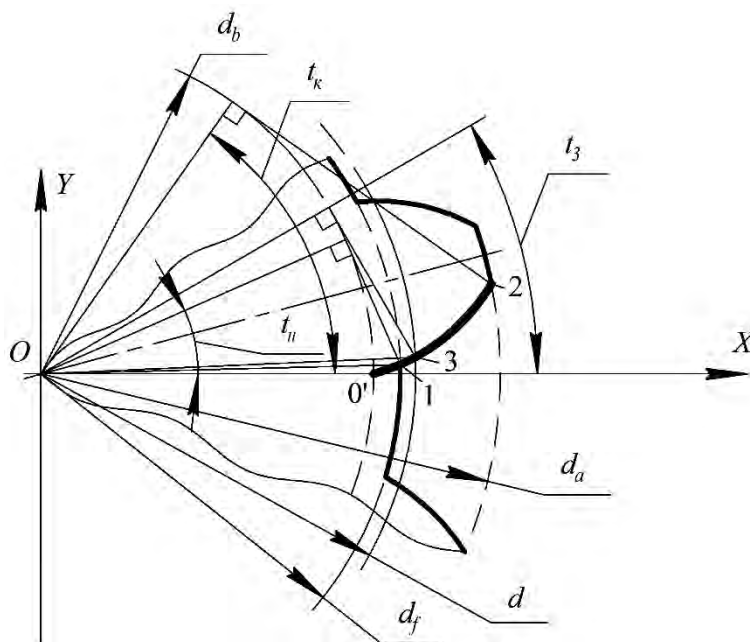


Рис. 3. Углы параметрического уравнения

Суммарный угол поворота

$$\beta = \frac{\gamma}{2} + \alpha. \quad (5)$$

Так как боковая сторона шлица задаётся только ограниченной частью эвольвентной кривой, то определяются углы начала и окончания  $t_n$  и  $t_k$  (см. рис. 3) эвольвенты, которые затем будут подставлены в систему уравнений (1):

$$t_n = \sqrt{\frac{d_f^2}{d_b^2} - 1}; \quad (6)$$

$$t_k = \sqrt{\frac{d_a^2}{d_b^2} - 1}, \quad (7)$$

где  $d_f$  – диаметр окружности впадин, мм;  $d_a$  – диаметр окружности вершин, мм.

Определяется угол  $\nu$ , который необходим для расчёта осевого момента инерции сектора. Для этого определяются значения координат точки 1

(см. рис. 2) по аналогии с нахождением координат точки 3:

$$\nu = \arctg\left(\frac{y_n}{x_n}\right). \quad (8)$$

Для определения осевых моментов инерции элементарного сектора он раскладывается на элементарные фигуры: равнобедренный треугольник, сектор, сегмент и эвольвентный участок. Для каждой фигуры, ориентированной вдоль оси X, определяются осевые моменты инерции.

Для нахождения осевого момента инерции треугольника (рис. 4) необходимо знать длину отрезков AC и OC. Они будут равны модульному значению координат точки A. Координаты находятся путём подстановки в систему уравнений (1) угла начала эвольвенты  $t_n$  и корректирующего угла  $\beta$ :

$$\begin{cases} x_A = \left| \frac{d_b}{2} \cdot (\cos(t_n - \beta) + t_n \cdot \sin(t_n - \beta)) \right|; \\ y_A = \left| \frac{d_b}{2} \cdot (\sin(t_n - \beta) - t_n \cdot \cos(t_n - \beta)) \right|. \end{cases} \quad (9)$$



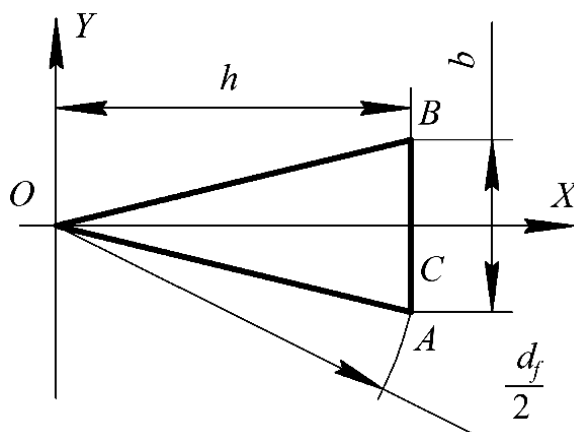


Рис. 4. Схема для расчёта моментов инерции треугольника

Значения момента инерции относительно осей  $X$  и  $Y$  находятся по формулам

$$J_{xT} = \frac{h \cdot b^3}{48}; \quad (10)$$

$$J_{yT} = \frac{b \cdot h^3}{4}, \quad (11)$$

где  $h$  – высота треугольника, равная координате  $x_A$ , мм;  $b$  – ширина нижнего основания, равная удвоенной координате

$y_A$ , мм.

Центробежный момент треугольника согласно [3]

$$J_{xyT} = 0. \quad (12)$$

Для определения осевого момента инерции сегмента (рис. 5) необходимо знать длину отрезков  $OC$  и  $AC$ . Они будут равны модульному значению координат точки  $A$ .

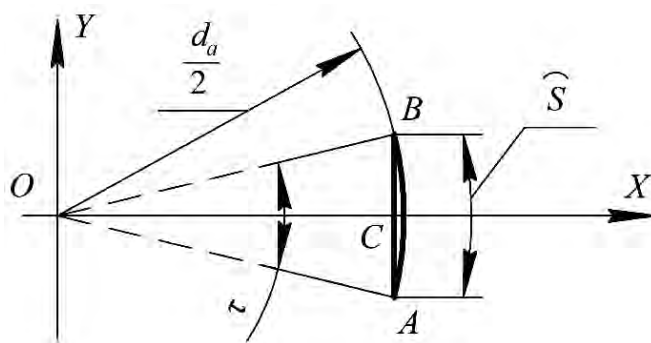


Рис. 5. Схема для расчёта момента инерции сегмента

Подстановкой в систему уравнений (1) угла  $(t_k - \beta)$  определяются координаты точки  $A$ :

$$\begin{cases} x_A = \left| \frac{d_b}{2} \cdot (\cos(t_k - \beta) + t_k \cdot \sin(t_k - \beta)) \right|; \\ y_A = \left| \frac{d_b}{2} \cdot (\sin(t_k - \beta) - t_k \cdot \cos(t_k - \beta)) \right|. \end{cases} \quad (13)$$



Осевые моменты инерции сегмента

вычисляются по следующим формулам:

$$J_{xсез} = \frac{(0,5 \cdot d_a)^4}{8} \cdot \left[ \tau - \sin(\tau) - \frac{2}{3} \cdot \sin(\tau) \cdot \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \right]; \quad (14)$$

$$J_{yсез} = \frac{S \cdot (0,5 \cdot d_a)^3}{8} \cdot \left[ \sin(\tau) \cdot \cos(\tau) \cdot \frac{(0,5 \cdot d_a)^4}{8} \right]. \quad (15)$$

Центробежный момент инерции сегмента согласно [3]

$$J_{xyсез} = 0. \quad (16)$$

Осевой момент инерции эвольвентного участка определяется методом аппроксимации (рис. 6 и 7). Для этого он разбивается на множество элементарных участков.

При определении осевого момента инерции эвольвентного участка относи-

тельно оси  $X$  (см. рис. 6) дополнительно разлагается этот участок на прямоугольник  $ABCD$  и две симметричные относительно оси  $X$  криволинейные фигуры. Осевой момент инерции будет найден как сумма осевого момента прямоугольника и двух криволинейных фигур. Определение осевого момента инерции эвольвентного участка вала относительно оси  $Y$  (см. рис. 7) осуществляется путём суммирования осевых моментов инерции трапеций.

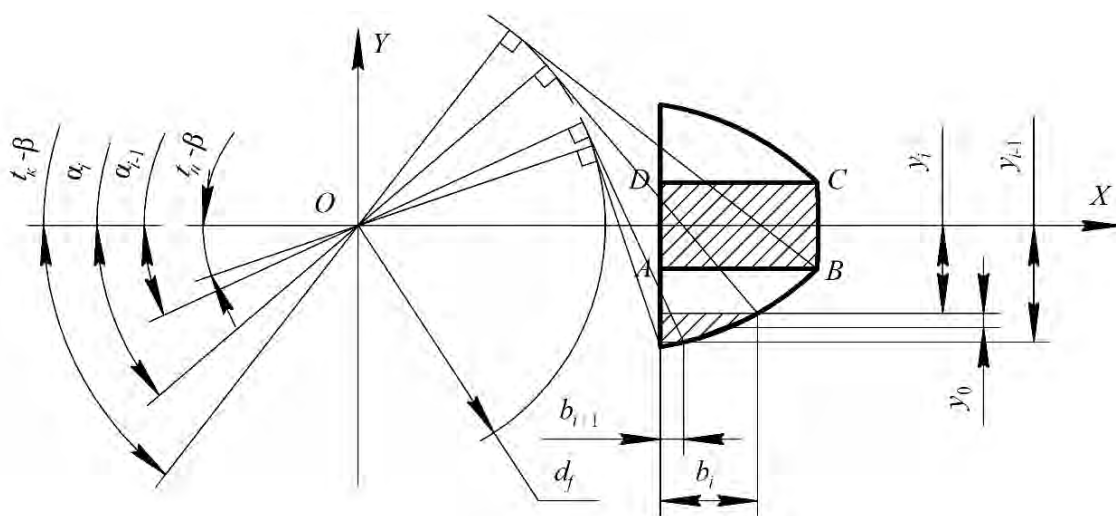


Рис. 6. Схема для расчёта момента инерции участка профиля относительно оси  $X$

На рис. 6 и 7 углы  $\alpha_i$  и  $\alpha_{i-1}$  совпадают. Для нахождения осевого момента инерции необходимо знать  $\alpha_i$  и  $\alpha_{i-1}$ ,  $b_i$  и  $b_{i-1}$ .

Определяются  $\alpha_i$  и  $\alpha_{i-1}$  следующим образом:

$$\alpha_i = 2 \cdot y_i; \quad (17)$$

$$\alpha_{i-1} = 2 \cdot y_{i-1}; \quad (18)$$

$$y_i = 0,5 \cdot d_b \times (\sin(\alpha_i - \beta) - \alpha_i \cdot \cos(\alpha_i - \beta)); \quad (19)$$



$$y_{i-1} = 0,5 \cdot d_b \times \left( \sin(\alpha_{i-1} - \beta) - \alpha_{i-1} \cdot \cos(\alpha_{i-1} - \beta) \right). \quad (20)$$

$$x_0 = 0,5 \cdot d_b \times \left[ \left( \cos(t_n - \beta) + t_n \cdot \sin(t_n - \beta) \right) \right]; \quad (23)$$

Определяются  $b_i$  и  $b_{i-1}$  как

$$b_i = x_i - x_0; \quad (21)$$

$$x_i = 0,5 \cdot d_b \times \left[ \left( \cos(\alpha_i - \beta) + \alpha_i \cdot \sin(\alpha_i - \beta) \right) \right]; \quad (24)$$

$$b_{i-1} = x_{i-1} - x_0; \quad (22)$$

$$x_{i-1} = 0,5 \cdot d_b \times \left[ \left( \cos(\alpha_{i-1} - \beta) + \alpha_{i-1} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \beta) \right) \right]. \quad (25)$$

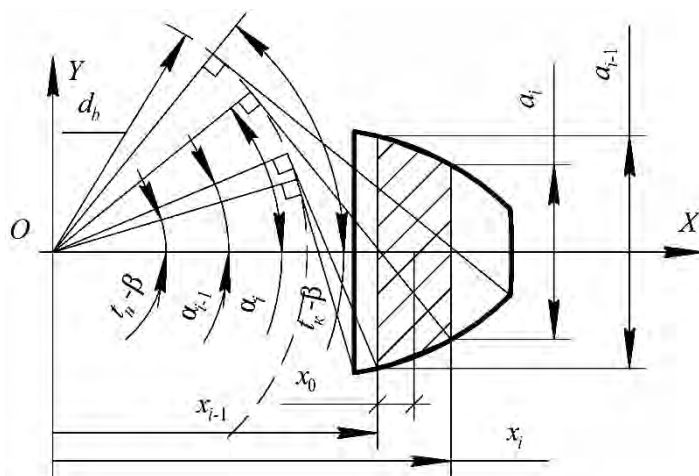


Рис. 7. Схема для расчёта момента инерции участка профиля относительно оси Y

Осевой момент инерции относительно оси X

где  $J_{хуч}$  – осевой момент инерции неполного участка,  $см^4$ ;  $b$  – ширина прямоугольника, мм;  $h$  – высота прямоугольника, мм.

$$J_{xэ} = 2 \cdot J_{хуч} + \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (26)$$

$$b = x_k - x_0; \quad h = 2 \cdot y_k.$$

$$B = \frac{d_b}{2} \cdot \left[ \left( \cos(t_k - \beta) + t_k \cdot \sin(t_k - \beta) \right) \right] - x_0; \quad (27)$$

$$A = 2 \cdot \left[ 0,5 \cdot d_b \cdot \left( \sin(t_k - \beta) - t_k \cdot \cos(t_k - \beta) \right) \right]; \quad (28)$$

$$J_{хуч} = \sum_{\alpha=t_n}^{t_k} \left( y_i + \frac{y_{i-1} - y_i}{3} \cdot \frac{b_i + 2 \cdot b_{i-1}}{b_i \cdot b_{i-1}} \right)^2 \cdot \frac{b_{i-1} + b_i}{2} \cdot (y_{i-1} - y_i). \quad (29)$$



Осейвой момент инерции относительно оси  $Y$

$$J_{y^2} = \sum_{\alpha=l_n}^{l_k} \left( x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{3} \cdot \frac{a_{i-1} + 2 \cdot a_i}{a_{i-1} + a_i} \right)^2 \cdot \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}). \quad (30)$$

Центробежный момент инерции эвольвентного участка согласно [3]

$$J_{xy} = 0. \quad (31)$$

Определяется осевой момент инерции сектора (рис. 8). Данная фигура повернута относительно осей  $X$  и  $Y$  на угол  $\varphi$ . Для произведения расчётов вводятся дополнительные оси  $U$  и  $V$ , относительно которых и рассчитывается осевой момент инерции.

Осейвой момент сектора относительно осей  $U, V$  находится по формулам

$$J_{Ucek} = \left( \frac{0,5 \cdot d_f}{8} \right)^4 \cdot (\mu - \sin(\mu)); \quad (32)$$

$$J_{Vcek} = \left( \frac{0,5 \cdot d_f}{8} \right)^4 \cdot (\mu + \sin(\mu)); \quad (33)$$

$$\mu = \frac{2\pi}{z} - 2 \cdot (\beta - \nu). \quad (34)$$

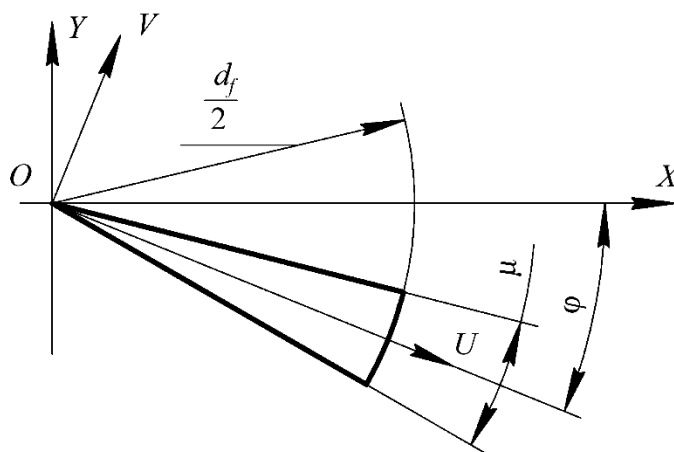


Рис. 8. Схема для расчёта момента инерции сектора

Осейвой момент сектора относительно осей  $U, V$  находится по формулам

$$J_{Ucek} = \left( \frac{0,5 \cdot d_f}{8} \right)^4 \cdot (\mu - \sin(\mu)); \quad (32)$$

$$J_{Vcek} = \left( \frac{0,5 \cdot d_f}{8} \right)^4 \cdot (\mu + \sin(\mu)); \quad (33)$$

$$\mu = \frac{2\pi}{z} - 2 \cdot (\beta - \nu). \quad (34)$$

Центробежный момент инерции сектора относительно осей  $U, V$  [3]

$$J_{UVcek} = 0. \quad (35)$$

Для определения осевого момента инерции сектора относительно осей  $X, Y$  воспользуемся уравнениями из [2]:



$$J_{xсек} = J_{Uсек} \cdot \cos^2(\varphi) - J_{UVсек} \cdot \sin(2\cdot\varphi) + J_{Vсек} \cdot \sin^2(\varphi); \quad (36)$$

$$J_{yсек} = J_{Uсек} \cdot \sin^2(\varphi) + J_{UVсек} \cdot \sin(2\cdot\varphi) + J_{Vсек} \cdot \cos^2(\varphi); \quad (37)$$

$$J_{xyсек} = J_{UVсек} \cdot \cos(2\cdot\varphi) + \frac{J_{Uсек} - J_{Vсек}}{2} \cdot \sin(2\cdot\varphi). \quad (38)$$

В итоге осевой момент инерции элементарного сектора (см. рис. 1) определяется как сумма осевых моментов его составляющих:

$$\begin{cases} J_{X0} = J_{XT} + J_{xсез} + J_{xэ} + J_{xсек}; \\ J_{Y0} = J_{YT} + J_{yсез} + J_{yэ} + J_{yсек}; \\ J_{XY0} = J_{xyT} + J_{xyсез} + J_{xyэ} + J_{xyсек}. \end{cases} \quad (39)$$

$$J_{Xi} = J_{X0} \cdot \cos^2(\Theta) - J_{XY0} \cdot \sin(2\Theta) + J_{Y0} \cdot \sin^2(\Theta); \quad (40)$$

$$J_{Yi} = J_{X0} \cdot \sin^2(\Theta) + J_{XY0} \cdot \sin(2\Theta) + J_{Y0} \cdot \cos^2(\Theta). \quad (41)$$

В результате значения осевых моментов инерции всего профиля вычисляются по формулам

$$\begin{cases} J_X = \sum_{i=0}^{z-1} J_{Xi}; \\ J_Y = \sum_{i=0}^{z-1} J_{Yi}. \end{cases} \quad (42)$$

Используя вышеизложенную методику, можно рассчитать для каждого номинального эвольвентного шлицевого профиля по ГОСТ 6033–80 осевой момент инерции сечений. Для сокращения трудоемкости расчётов осевого момента инерции сечения на языке программирования VBA написана программа, пользовательская форма которой представлена на рис. 9.

Данная пользовательская форма содержит поля для выбора исходных данных, таких как номинальный диаметр, модуль, поля для вывода диаметра впадин, номинальной делительной

Осевой момент инерции сечения шлицевого профиля определяется как сумма осевых моментов всех его составляющих элементарных секторов, ориентированных соответственно под углами  $\Theta_i = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha \dots (z-1)\alpha$ . Для этого используются уравнения из [2]:

окружной толщины зуба вала и смещения исходного контура. Рамка «Результат» содержит поля вывода рассчитанных данных осевых моментов инерции сечения шлицевого вала с эвольвентным профилем относительно осей X и Y.

В табл. 1 для примера приведены рассчитанные с помощью программы осевые моменты инерции для некоторых сечений эвольвентных шлицев.

### Заключение

В результате выполнения данных исследований предложена усовершенствованная методика расчёта осевого момента инерции шлицевого сечения с эвольвентным профилем. В основу этой методики лёг метод конечных элементов, суть которого состоит в принципе суммирования осевых моментов инерции составляющих фигур элементарного профиля шлиц. Итоговый осевой момент инерции шлицевого эвольвентного профиля вала определяется как сумма осевых моментов инерции всех его со-



ставляющих элементарных звеньев.

Предложенный метод лёг в основу разработанной программы для расчета осевых моментов инерции шлицевого эвольвентного профиля, что в свою очередь является первым этапом для прогнозирования величины прогиба оси вала при фрезеровании червячными модульными фрезами на современных

шлицефрезерных станках с ЧПУ.

На последующих этапах будет сформирована методика программирования процесса резания с целью стабилизации и минимизации этого прогиба и, соответственно, создание точного, близкого к теоретическому, профиля шлица.

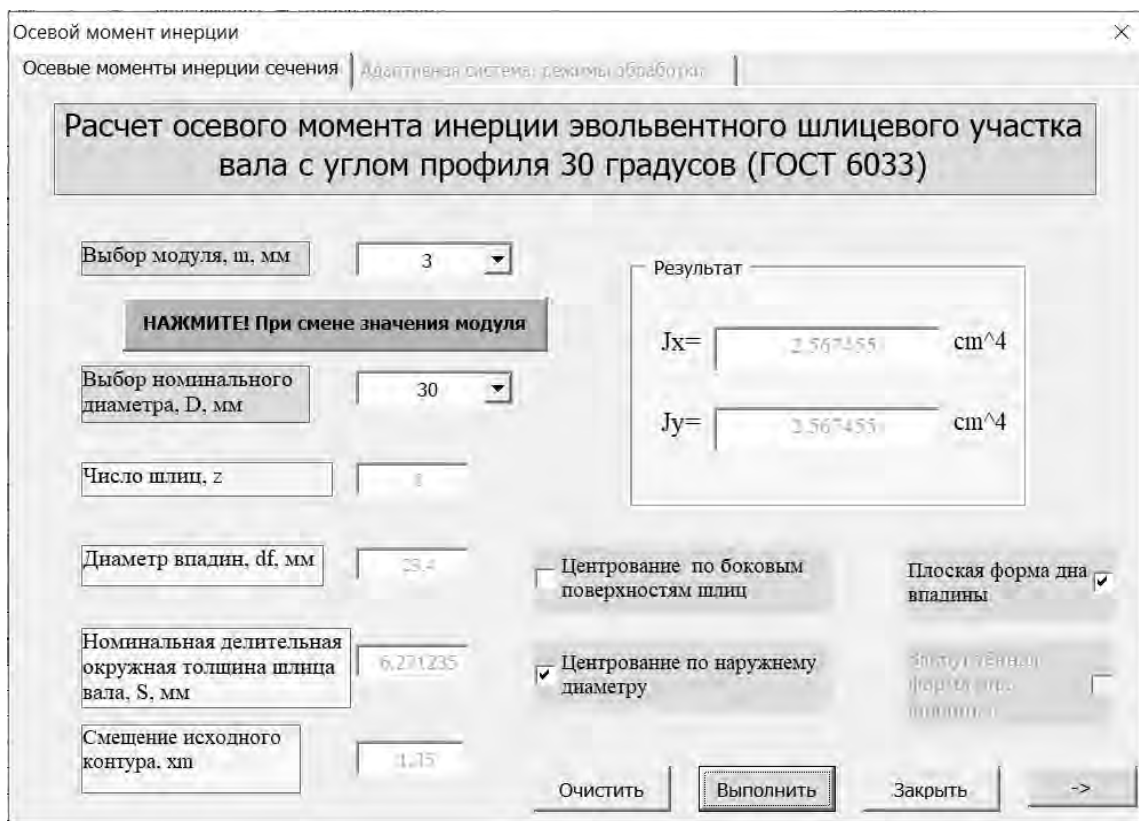


Рис. 9. Пользовательская форма программы на языке VBA

Табл. 1. Геометрические характеристики эвольвентного профиля валов

Обозначение $D \times t$	Номинальный диаметр $D$ , мм	Модуль $t$ , мм	Число шлицев $Z$	Момент инерции $J_x (J_y)$ , см <sup>4</sup>
18 × 2	18	2	7	0,317
20 × 2	20		8	0,507
30 × 3	30	3	8	2,567
32 × 3	32		9	3,458



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов, Б. Ф.** Расчет моментов инерции сечения шлицевых валов с эвольвентным профилем зубьев / Б. Ф. Трофимов // Вестн. машиностроения. – 2004. – № 8. – С. 23–25.
2. **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – 9-е изд. – Москва: Наука, 1986. – 512 с.
3. **Варданыч, Г. С.** Сопротивление материалов: учебник / Г. С. Варданыч, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – Москва: ИНФРА-М, 2003. – 480 с.

*Статья сдана в редакцию 6 июля 2020 года*

**Егор Юрьевич Демиденко**, ведущий инженер, Белорусско-Российский университет.  
Тел.: +375-259-98-23-22. E-mail: igryck@mail.ru.

**Артем Олегович Козлов**, ведущий инженер-технолог, ООО «ИТЦ СТАНЭКСИМ».

**Александр Алексеевич Жолобов**, канд. техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет.

**Egor Yuryevich Demidenko**, lead engineer, Belarusian-Russian University. Tel.: +375-259-98-23-22.  
E-mail: igryck@mail.ru.

**Artsem Olegovich Kozlov**, lead engineer-technologist, ITC STANEXIM LLC.

**Aliaksandr Alekseyevich Zholobov**, PhD (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University.

