

УДК 621.83.06

А. П. Прудников, А. Д. Бодунова

СИЛОВОЙ И ПРОЧНОСТНОЙ АНАЛИЗ ПЕРЕДАЧИ С ФИКСИРОВАННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТЕЛ КАЧЕНИЯ

UDC 621.83.06

A. P. Prudnikov, A. D. Bodunova

POWER AND STRENGTH ANALYSIS OF TRANSMISSION WITH FIXED ARRANGEMENT OF INTERMEDIATE ROLLING BODIES

Аннотация

Представлен алгоритм определения сил, действующих на звенья передачи с фиксированным расположением промежуточных тел качения. Проанализированы факторы, влияющие на КПД передачи. Получены зависимости для определения геометрических параметров звеньев передачи исходя из действующих на них нагрузок. Адекватность полученных зависимостей подтверждена посредством метода конечных элементов.

Ключевые слова:

механическая передача, промежуточные тела качения, составной ролик.

Abstract

The paper presents an algorithm for determining the forces acting on transmission links with a fixed arrangement of intermediate rolling bodies. The factors affecting the transmission efficiency are analyzed. Dependencies are obtained for determining the geometric parameters of transmission links based on the loads acting on them. The adequacy of the obtained dependencies is confirmed by the finite element method.

Keywords:

mechanical transmission, intermediate rolling bodies, composite roller.

Введение

Силовой анализ передачи с фиксированным расположением промежуточных тел качения (составных роликов) [1] необходим для определения сил, действующих на звенья передачи, с целью дальнейшего ее расчета на прочность, а также анализа факторов, влияющих на коэффициент полезного действия передачи.

При выполнении силового анализа исходными данными являются геометрические характеристики передачи, передаточное число u , момент полезного сопротивления на ведомом валу M_2 .

С целью упрощения расчетов принимается следующая степень идеализации объекта исследования:

- режим работы передачи – устоявшийся;
- составные ролики взаимодействуют с беговыми дорожками, углы наклона рабочих участков которых постоянны;
- сила тяжести, действующая на ролик, не учитывается (поскольку масса ролика невелика).

При проведении силового анализа необходимо учесть некоторые конструктивные особенности передачи с фиксированным расположением про-



межзвучных тел качения. В качестве промежуточных тел качения в передаче применяются составные ролики, состоящие из базового элемента и втулок, установленных на его концах. Базовый элемент фиксируется на ведомом валу и совершает в процессе работы передачи колебательные движения. При этом точка фиксации базового элемента располагается на середине его длины. Втулки, установленные на концах базового элемента и взаимодействующие в процессе работы передачи с беговыми дорожками, служат для замены трения скольжения на трение качения и, соответственно, для повышения КПД передачи.

Беговые дорожки на ведущем и неподвижном звене можно изготовить

только с помощью сферической фрезы, поскольку беговая дорожка должна быть спрофилирована с учетом траектории движения конца ролика, совершающего колебательное движение. Соответственно, наружная поверхность втулки, установленной на конце ролика и взаимодействующей с беговой дорожкой, выполняется сферической, что обеспечивает снижение контактных напряжений.

Силовой анализ

Схема сил, действующих на составной ролик, передающий нагрузку, представлена на рис. 1.

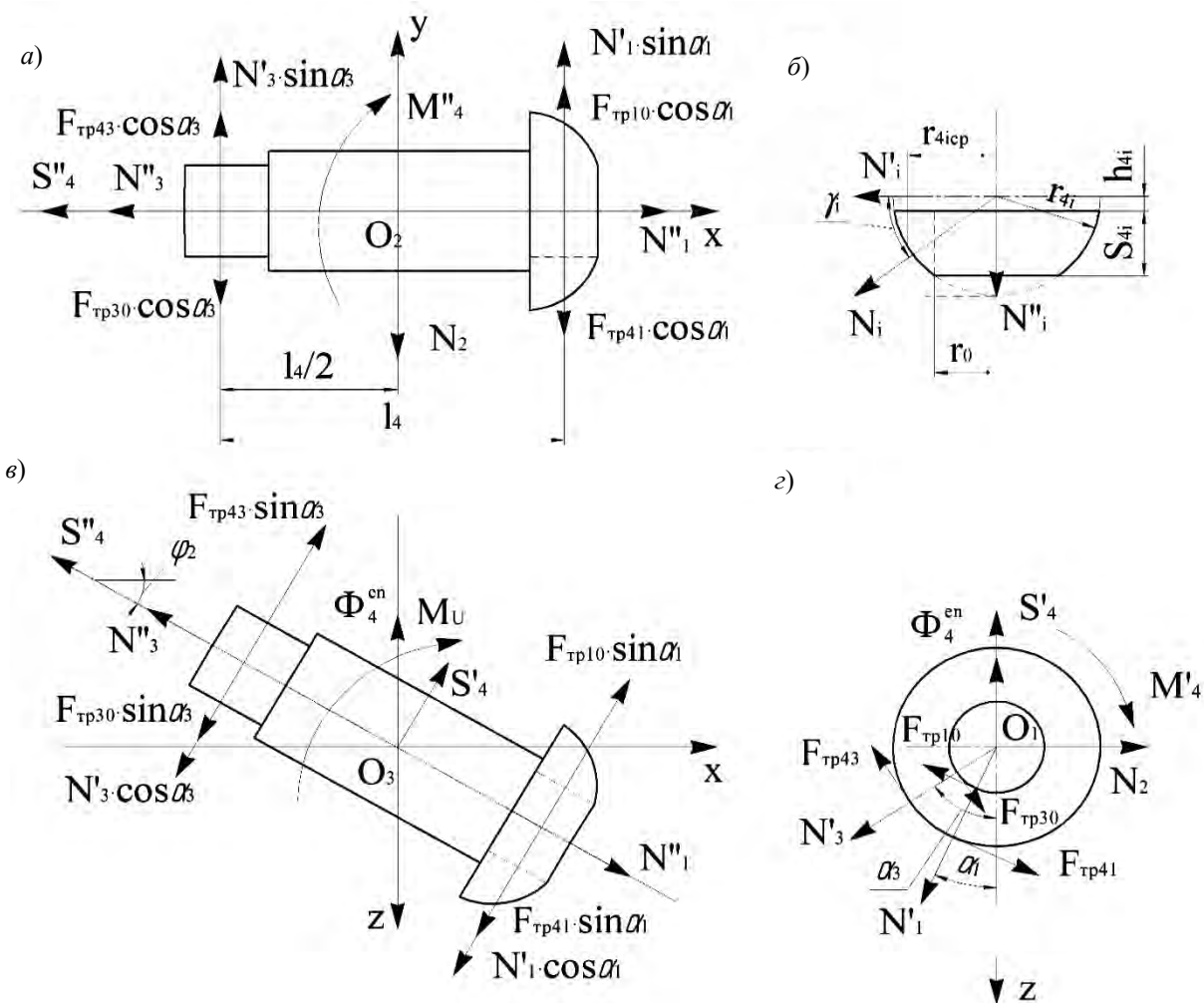


Рис. 1. Схема действующих на составной ролик сил



Угол отклонения реакции, возникающей со стороны ролика при его взаимодействии с соответствующей беговой дорожкой, N_i (см. рис. 1, б) от плоскости, перпендикулярной оси цилиндрической поверхности составного ролика, при допущении о равномерности распределения нагрузки по линии контакта определяется по формуле

$$\gamma_i = \frac{\arcsin((h_{4i} + S_{4i})/r_{4i}) + \arcsin(h_{4i}/r_{4i})}{2}, \quad (1)$$

где h_{4i} – расстояние от центра сферы, являющейся образующей для наружной поверхности втулки, до торцевой поверхности втулки, м; S_{4i} – высота втулки, установленной на конце базового элемента составного ролика, м; r_{4i} – радиус сферы, являющейся образующей для наружной поверхности втулки, м; i – индекс, отражающий принадлежность параметра элементу составного ролика, контактирующего с беговой дорожкой на ведущем (1) или заторможенном (3) звеньях.

При этом учитываются следующие силы трения, возникающие на поверхностях составного ролика:

– силы трения качения $F_{тр41}$, $F_{тр43}$, возникающие при взаимодействии ролика с соответствующей беговой дорожкой;

– силы трения скольжения $F_{тр10}$, $F_{тр30}$, возникающие при взаимодействии соответствующей втулки, установленной на конце ролика, с базовым элементом;

$$\begin{aligned} \sum y = 0: \\ N_1 \cdot \cos(\gamma_1) \cdot (\sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1) \cdot \delta_r - \cos(\alpha_1) \cdot \delta_c) + \\ + N_3 \cdot \cos(\gamma_3) \cdot (\sin(\alpha_3) + \cos(\alpha_3) \cdot \delta_r - \cos(\alpha_3) \cdot \delta_c) = N_2; \end{aligned} \quad (4)$$

– сила трения скольжения при взаимодействии составного ролика с ведомым валом.

Воздействие сил инерции на составной ролик учитывается с помощью центробежной силы инерции, возникающей при вращении ролика вместе с ведомым валом, и момента сил инерции, возникающем при совершении роликом колебательного движения.

Центробежная сила инерции, действующая на составной ролик, определяется по формуле

$$\Phi_4^{en} = m_4 \cdot \omega_2^2 \cdot R_2, \quad (2)$$

где m_4 – масса составного ролика, кг; ω_2 – угловая скорость вращения ведомого вала, рад/с; R_2 – радиус цилиндрической поверхности ведомого вала, на которой фиксируется составной ролик, м.

Момент сил инерции, действующий на составной ролик, определяется по формуле

$$M_U = \frac{m_4 \cdot l_4^2 \cdot \varepsilon_4}{2}, \quad (3)$$

где l_4 – длина составного ролика, м; ε_4 – угловое ускорение составного ролика при совершении им колебательного движения, рад/с².

Для нахождения неизвестных составляются уравнения проекций сил на соответствующие оси и суммы моментов относительно точки фиксации ролика:



$$\begin{aligned} \sum x = 0: \\ N_1 \cdot (\sin(\gamma_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \cos(\gamma_1) \cdot \delta_c \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\varphi_2) - \\ - \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \sin(\varphi_2) - \cos(\gamma_1) \cdot \delta_r \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\varphi_2)) + \\ + N_3 \cdot (\cos(\gamma_3) \cdot \delta_r \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\varphi_2) - \sin(\gamma_3) \cdot \cos(\varphi_2) - \\ - \cos(\gamma_3) \cdot \delta_c \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\varphi_2) - \cos(\gamma_3) \cdot \cos(\alpha_3) \cdot \sin(\varphi_2)) + \\ + S_4' \cdot \sin(\varphi_2) - S_4'' \cdot \cos(\varphi_2) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum z = 0: \\ N_1 \cdot (\sin(\gamma_1) \cdot \sin(\varphi_2) - \cos(\gamma_1) \cdot \delta_c \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \\ + \cos(\gamma_1) \cdot \delta_r \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\varphi_2)) + \\ + N_3 \cdot (\cos(\gamma_3) \cdot \cos(\alpha_3) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\gamma_3) \cdot \sin(\varphi_2) - \\ - \cos(\gamma_3) \cdot \delta_r \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \cos(\varphi_2) + \cos(\gamma_3) \cdot \delta_c \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \cos(\varphi_2)) - \\ - S_4' \cdot \cos(\varphi_2) - S_4'' \cdot \sin(\varphi_2) = \Phi_4^{\text{en}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{O_1} = 0: \\ N_1 \cdot (\cos(\gamma_1) \cdot \delta_c \cdot r_0 - \cos(\gamma_1) \cdot \delta_r \cdot r_{41\text{cp}}) + \\ + N_3 \cdot (\cos(\gamma_3) \cdot \delta_r \cdot r_{43\text{cp}} - \cos(\gamma_3) \cdot \delta_c \cdot r_0) + M_4' = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{O_2} = 0: \\ N_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\gamma_1) \cdot \delta_r \cdot \cos(\alpha_1) - \cos(\gamma_1) \cdot \delta_c \cdot \cos(\alpha_1) - \\ - \cos(\gamma_1) \cdot \sin(\alpha_1)) + N_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\gamma_3) \cdot \sin(\alpha_3) + \\ + \cos(\gamma_3) \cdot \delta_r \cdot \cos(\alpha_3) - \cos(\gamma_3) \cdot \delta_c \cdot \cos(\alpha_3)) + M_4'' = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{O_3} = 0: \\ N_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\gamma_1) \cdot \cos(\alpha_1) + \cos(\gamma_1) \cdot \delta_r \cdot \sin(\alpha_1) - \\ - \cos(\gamma_1) \cdot \delta_c \cdot \sin(\alpha_1)) + N_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\gamma_3) \cdot \delta_r \cdot \sin(\alpha_3) - \\ - \cos(\gamma_3) \cdot \delta_c \cdot \sin(\alpha_3) - \cos(\gamma_3) \cdot \cos(\alpha_3)) + \\ + S_4' \cdot \delta_c \cdot r_{\text{ст}} + S_4'' \cdot \delta_c \cdot r_{\text{ст}} = -M_U, \end{aligned} \quad (9)$$

где N_1 и N_3 – реакции, действующие на составной ролик со стороны соответ-

ствующей беговой дорожки или ведомого вала, H ; α_1 и α_3 – углы подъема



кривых синусоиды, являющейся образующей для соответствующей беговой дорожки, рад; δ_c – коэффициент трения скольжения; δ_r – коэффициент трения качения, $\delta_r = f_r/r_{4i}$; φ_2 – угол наклона составного ролика относительно оси вращения ведомого вала при совершении роликом колебательного движения, рад; S'_4, S''_4, M'_4, M''_4 – составляющие реакции на базовый элемент составного ролика, зафиксированный на ведомом валу, со стороны ведомого вала, Н; r_0 – радиус цилиндрической поверхности базового элемента составного ролика, на которой устанавливается втулка, контактирующая с беговыми дорожками, м; $r_{4иср}$ – радиус наружной поверхности втулки, на котором располагается середина линии ее контакта с соответствующей беговой дорожкой, м; $r_{ст}$ – радиус цилиндрической поверхности выступов на базовом элементе составного ролика, посредством которых он фиксируется на ведомом валу, м.

При решении системы уравнений (4)–(9) матричным методом указанную систему можно представить в виде

$$a_{k1} \cdot N_1 + a_{k2} \cdot N_3 + a_{k3} \cdot S'_4 + a_{k4} \cdot S''_4 + a_{k5} \cdot M'_4 + a_{k6} \cdot M''_4 = b_k, \quad (10)$$

где k – номер строки, $k = 1..6$; a_{k1}, \dots, a_{k6} – коэффициенты при реакциях $N_1, N_3, S'_4, S''_4, M'_4, M''_4$ в системе уравнений (4)–(9); b_k – выражения, стоящие в правых частях системы уравнений (4)–(9).

Вводятся следующие матрицы:

$$N_m = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_3 \\ S'_4 \\ S''_4 \\ M'_4 \\ M''_4 \end{pmatrix};$$

$$A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix};$$

$$B_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Решение системы уравнений (4)–(9)

$$N_m = A_m^{-1} \cdot B_m. \quad (12)$$

Для нахождения КПД передачи по известной зависимости $\eta = \frac{M_2}{M_1 \cdot u}$ необходимо определить величину вращающего момента на ведущем валу M_1 по формуле

$$M_1 = N_1 \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\alpha_1) \times \times \tan(\alpha_1 + \varphi_{тр}) \cdot R_1, \quad (13)$$

где $\varphi_{тр}$ – угол трения, рад; R_1 – радиус цилиндрической поверхности, на которой располагается точка контакта составного ролика с беговой дорожкой, м.

На базе полученной математической модели определим силы, действующие на составной ролик, и КПД передачи.

В качестве исходных данных принимаем момент полезного сопротивления $M_2 = 50 \text{ Н}\cdot\text{м}$; передаточное число $u = 4$; $R_2 = 25 \text{ мм}$; $l_4 = 35 \text{ мм}$; $\delta_r = 0,002$; $\delta_c = 0,075$.

Получаем следующие результаты: $N_1 = 1237 \text{ Н}$; $N_2 = 1000 \text{ Н}$; $N_3 = 1617 \text{ Н}$;

$S_4' = 1440 \text{ Н}$; $S_4'' = 290,11 \text{ Н}$; $M_4' = 0,08 \text{ Н·м}$;
 $M_4'' = 13,91 \text{ Н·м}$; $M_1 = 15,15 \text{ Н·м}$; $\eta = 0,825$.

Анализ полученных результатов показывает, что максимальные нагрузки действуют на составной ролик в месте его фиксации на ведомом валу и со стороны зафиксированного звена, КПД передачи соответствует червячным редукторам.

Анализ математической модели действующих в передаче сил позволяет

установить, что на КПД передачи из факторов, которые можно варьировать, главным образом влияет длина составного ролика l_4 . Сферическая форма наружной поверхности втулок (размеры r_{4i} и S_{4i}), контактирующих с беговыми дорожками, на КПД передачи влияет незначительно.

На рис. 2 представлена зависимость КПД от длины составного ролика.

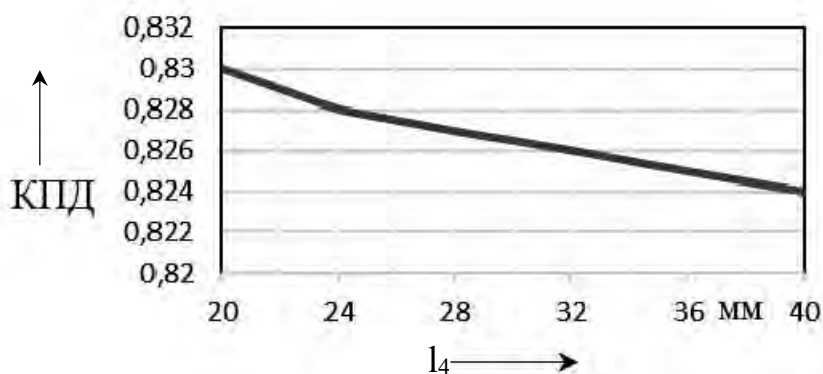


Рис. 2. Зависимость КПД передачи от длины составного ролика

Как видно из графика, чем меньше длина составного ролика, тем выше КПД.

Прочностной анализ

Полученные силовые зависимости позволяют выполнить прочностной анализ передачи.

Нагрузочная способность передачи с промежуточными телами качения определяется контактными напряжениями в зоне взаимодействия составного ролика с беговыми дорожками с учетом того, что беговая дорожка и контактирующий с ней элемент составного ролика имеют сферическую форму.

$$\sigma_{Hi} = 0,386 \cdot \sqrt[3]{\frac{N_i \cdot (R_{4i} - r_{4i}) \cdot E_1^2 \cdot E_2^2}{r_{4i}^2 \cdot R_{4i} \cdot ((1 - \mu_1^2) \cdot E_2 + (1 - \mu_2^2) \cdot E_1)^2}} \leq [\sigma_{Hi}], \quad (14)$$

где R_{4i} – радиус сферической фрезы, с помощью которой нарезается соответствующая беговая дорожка, м; E_1, E_2 – модули упругости материала контактирующих деталей, Па; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона материала контактирующих деталей; $[\sigma_{Hi}]$ – допускаемое контактное напряжение, МПа.

Для базового элемента составного ролика характерно возникновение напряжений смятия и среза в местах установки на нем втулок и его фиксации на ведомом валу (рис. 3).

Напряжения смятия и среза для цапф базового элемента, на которых устанавливаются втулки, определяют их минимальные размеры:



$$r_0 = \sqrt{\frac{N_i}{\pi \cdot [\tau]}}; \quad (15)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение среза, МПа; l_0 – длина цапфы, м; $[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение смятия, МПа.

$$l_0 = \frac{N_i}{2 \cdot r_0 \cdot [\sigma_{см}]}, \quad (16)$$

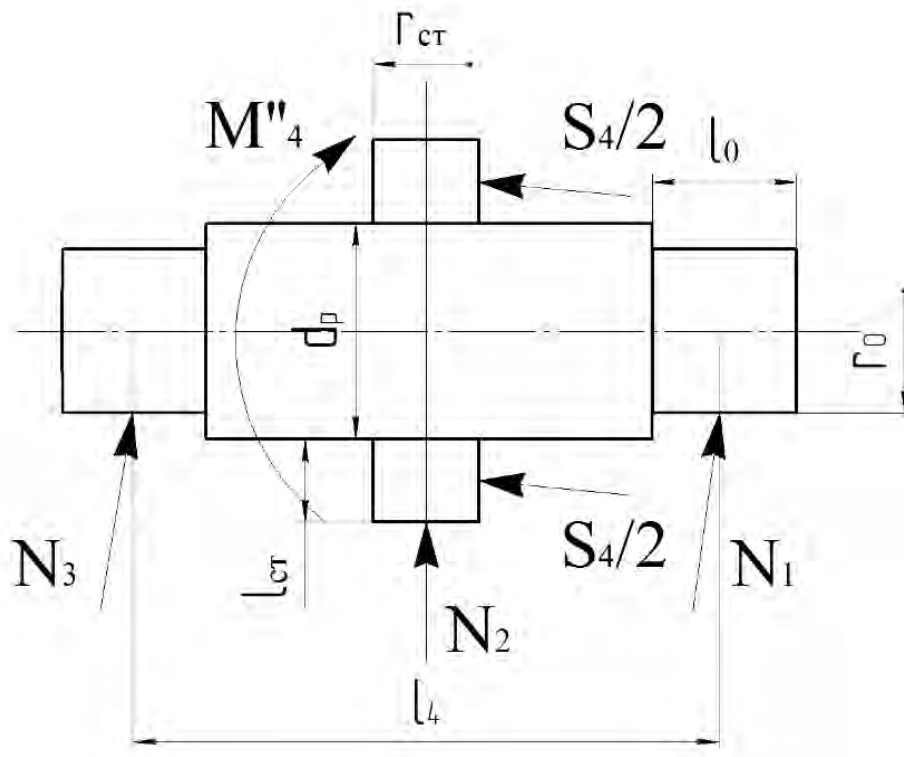


Рис. 3. Базовый элемент ролика

Минимальные размеры выступов, посредством которых составной ролик фиксируется на ведомом валу, определяются также исходя из напряжений смятия и среза, на которые влияет реакция $S_4 = \sqrt{S_4'^2 + S_4''^2}$:

$$r_{ст} = \sqrt{\frac{S_4}{2 \cdot \pi \cdot [\tau]}}; \quad (17)$$

$$l_{ст} = \frac{S_4}{4 \cdot r_{ст} \cdot [\sigma_{см}]}, \quad (18)$$

где $l_{ст}$ – длина цилиндрической поверхности выступов на базовом элементе

составного ролика, посредством которых он фиксируется на ведомом валу, м.

Создаваемое реактивным моментом M_4'' напряжение изгиба, действующее на выступы ролика, можно не учитывать, поскольку момент, как видно из расчетов, составляет небольшую величину и возникающее напряжение к тому же снижается действием силы N_2 .

Напряжение смятия, создаваемое силой N_2 , можно не учитывать, т. к. реакция S_4 значительно больше по величине.

Напряжение кручения, возникающее в базовом элементе, можно не учи-



тывать, т. к. реакция M_4' имеет небольшую величину.

Диаметр базового элемента ролика d_p необходимо проверять по возникающим напряжениям изгиба, создаваемым реакцией со стороны беговой дорожки,

$$\sigma_{и} = \frac{N_3 \cdot \cos(\gamma_3) \cdot l_4}{0,2 \cdot d_p^3} - \frac{4 \cdot N_3 \cdot \sin(\gamma_3)}{\pi \cdot d_p^2} \leq [\sigma_{и}]. \quad (19)$$

На базовый элемент ролика также будут действовать моменты M_4' , M_4'' , однако поскольку они значительно меньше по величине напряжений изгиба, создаваемых реакцией со стороны беговой дорожки, то при расчете диаметра d_p их можно не учитывать. Совместное влияние указанных сил можно учесть с помощью эквивалентных напряжений по четвертой теории прочности.

Для проверки полученной математической модели силового и прочностного анализов воспользуемся методом конечных элементов. Расчет модели пе-

редачи с фиксированным расположением тел качения, геометрические параметры которой были приняты при расчете КПД передачи, выполним в программном пакете Ansys, реализующим метод конечных элементов [2].

Прочностной анализ передачи показал, что ее прочность определяется контактными напряжениями в зоне взаимодействия составного ролика с беговыми дорожками и эквивалентными напряжениями (по четвертой теории прочности), действующими на базовый элемент ролика. Остальные напряжения, возникающие в деталях передачи, значительно меньше допускаемых.

В качестве материала для составных роликов, ведущего и неподвижного звена принимается сталь 40Х, термообработка – улучшение и закалка токами высокой частоты, полученная твердость деталей передачи – 48 HRC [3].

На рис. 4 и 5 изображены сетка разбиения на конечные элементы, действующие сила и ограничения, заданные при расчете в программном пакете Ansys.

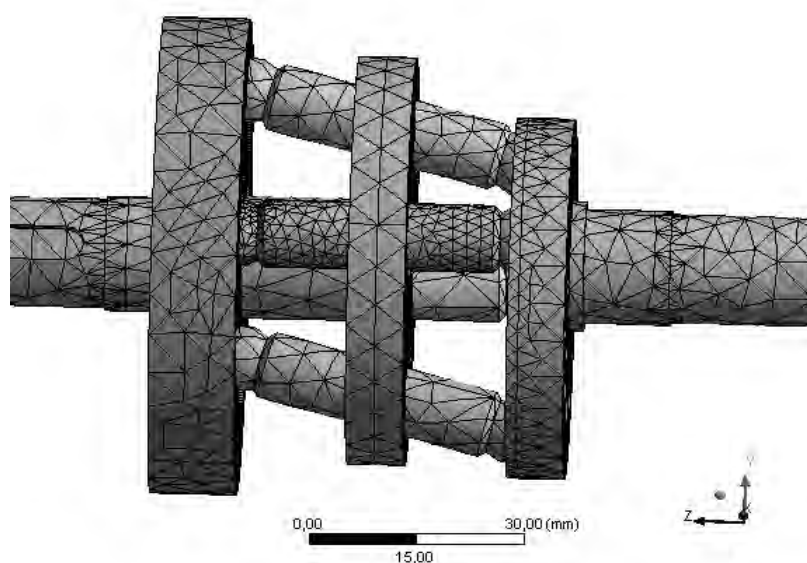


Рис. 4. Сетка разбиения на конечные элементы



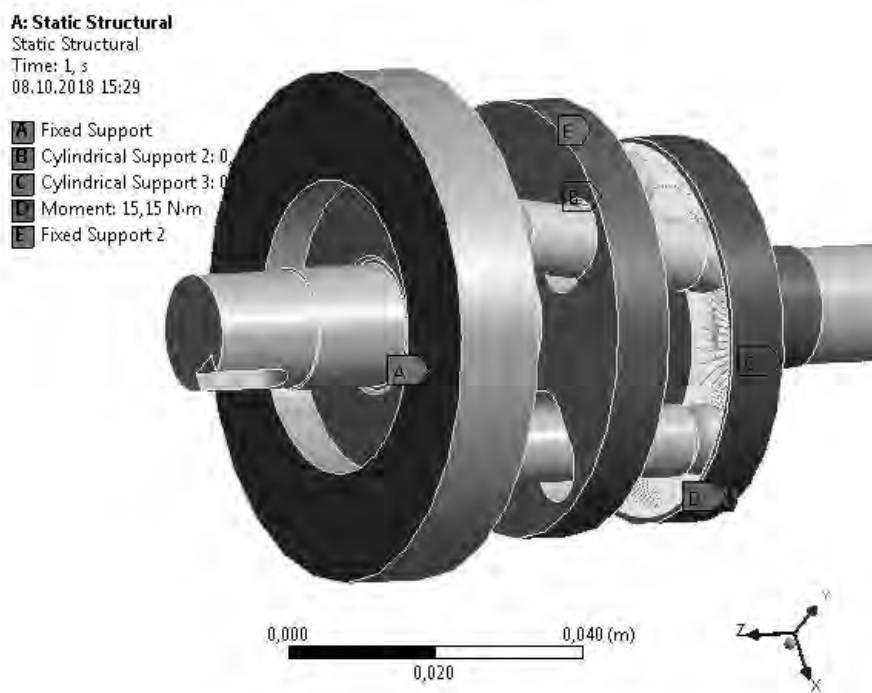


Рис. 5. Действующие сила и ограничения

На рис. 6 и 7 представлены результаты расчета:

– распределение контактного давления при взаимодействии состав-

ного ролика с многопериодной беговой дорожкой;

– эквивалентные напряжения, действующие на базовый элемент.

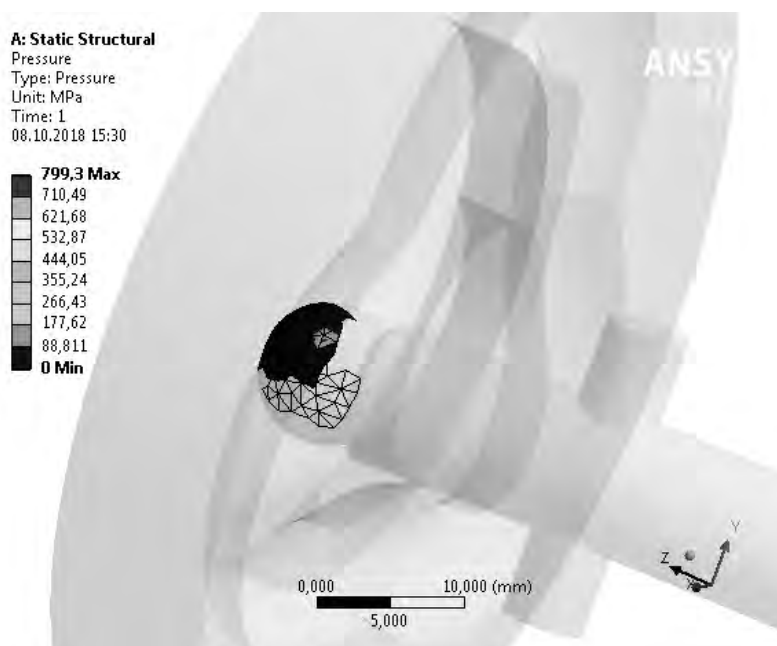


Рис. 6. Распределение контактного давления

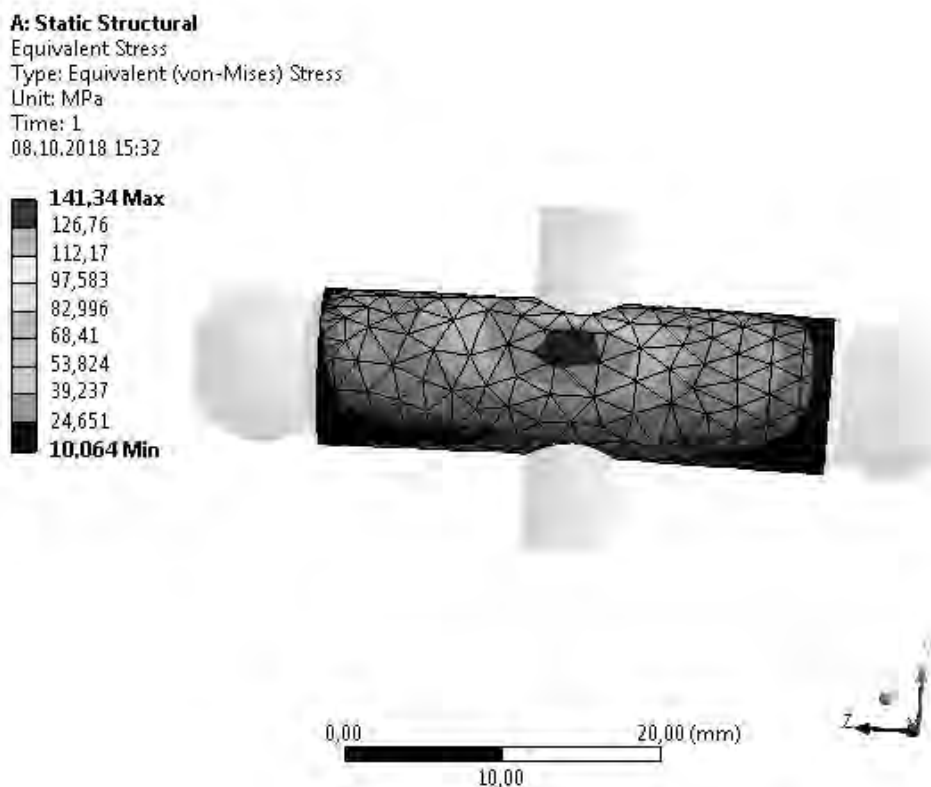


Рис. 7. Эквивалентные напряжения

Расхождение между результатами расчета, определенными с помощью метода конечных элементов и разработанной математической модели силового и прочностного анализа, не превышает 5 %.

Заключение

В результате силового анализа получена математическая модель, позволяющая определять силы, действующие на звенья передачи, а также ее КПД. Анализ полученных в ходе силового анализа результатов показывает, что максимальные нагрузки в передаче возникают в зоне взаимодействия составного ролика с ведомым валом и с беговой дорожкой на зафиксированном звене, КПД передачи соответствует червячным редукторам. Основным

варьируемым фактором, влияющим на КПД передачи, является длина составного ролика, которую для повышения КПД необходимо принимать минимально возможной.

В ходе прочностного анализа получены зависимости для определения размеров наиболее нагруженных звеньев передачи исходя из допустимых напряжений. Компьютерное моделирование в программном пакете Ansys подтверждает адекватность полученной математической модели, позволяющей находить геометрические параметры передачи с фиксированным расположением тел качения исходя из сил, действующих на ее звенья. Представленная модель обеспечивает, таким образом, малые габаритные размеры и высокую нагрузочную способность передачи.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прудников, А. П.** Передача с фиксированным расположением промежуточных тел качения / А. П. Прудников // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2019. – № 3 (64). – С. 75–83.
2. **Прудников, А. П.** Рациональная конструкция составного ролика для передачи с промежуточными телами качения / А. П. Прудников, О. В. Пузанова, С. Л. Шостак // // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2017. – № 4 (57). – С. 60–68.
3. **Древаль, А. Е.** Краткий справочник металлиста / А. Е. Древаль, Е. А. Скороходов, А. В. Агеев; под общ. ред. А. Е. Древаля, Е. А. Скороходова. – Москва: Машиностроение, 2005. – 960 с.

Статья сдана в редакцию 12 мая 2020 года

Александр Петрович Прудников, канд. техн. наук, доц., Белорусско-Российский университет.
E-mail: prudnikov_a@tut.by.
Анастасия Дмитриевна Бодунова, ассистент-стажер, Белорусско-Российский университет.
E-mail: bodunok.98@mail.ru.

Aleksandr Petrovich Prudnikov, PhD (Engineering), Associate Prof., Belarusian-Russian University.
E-mail: prudnikov_a@tut.by.
Anastasiya Dmitrievna Bodunova, trainee assistant lecturer, Belarusian-Russian University.
E-mail: bodunok.98@mail.ru.

