

УДК 534.2+620.179.16

**ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ  
В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ОРИЕНТИРОВАННОЙ  
ТРЕЩИНОВАТОСТЬЮ**

***К. Е. АББАКУМОВ, А. В. ВАГИН***

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина)  
Санкт-Петербург, Россия

UDC 534.2+620.179.16

**WAVE PROCESSES FEATURES IN  
MICRO-INHOMOGENEOUS MEDIUMS WITH ORIENTED  
FRACTURING**

***К. Е. АББАКУМОВ, А. В. ВАГИН***

**Аннотация.** Рассмотрены особенности волновых процессов в неоднородных средах с ориентированной системой трещиноподобных несплошностей. В длинноволновом диапазоне для гармонических сигналов в мелкослойной среде в явном виде получены дисперсионные уравнения для определения фазовых скоростей упругих волн, распространяющихся перпендикулярно и параллельно системе слоев, контакты на границах которых определены в приближении «линейного скольжения». Получены и проанализированы результаты численных решений указанных уравнений в зависимости от параметров микрошероховатости прилегающих поверхностей микротрещин.

**Ключевые слова:** мелкослойная среда, фазовые скорости ультразвука, неоднородные граничные условия, «линейное скольжение», ультразвуковые измерения, физико-механические свойства.

**Abstract.** In the report features of wave processes in inhomogeneous mediums with an oriented system of crack-like discontinuities are considered. Dispersion equations for determining of phase velocities of elastic waves propagating perpendicular and parallel to the system of layers with contacts at the boundaries defined in approximation of «linear slip» are obtained in explicit form for harmonic signals in the long-wave range for a fine-layered medium. The results of numerical solutions of these equations are obtained and analyzed depending on the parameters of micro-roughness of microcracks adjoining surfaces.

**Key words:** fine-layered medium, phase velocity of ultrasound, inhomogeneous boundary conditions, «linear slip», ultrasonic measurements, physical and mechanical properties.

Расширение номенклатуры используемых материалов опирается на появление новых технологий, что, в свою очередь, сопровождается и появлением новых видов неоднородностей, для обнаружения которых необходимо создавать новые или совершенствовать уже имеющиеся средства контроля. Разработка таких средств контроля должна опираться на физические предпосылки, связанные с особенностями волновых процессов в неоднородных материалах.

Для описания указанных выше структур используются как аналитические, так и численные методы. Использование численных методов при решении задач распространения волн в слоистых средах опирается на применение метода конечных элементов и метода граничных элементов, требующих значительных вычислительных затрат.

Один из возможных вариантов аналитических подходов используется при определении физико-механических характеристик материала слоистой среды и заключается в измерении фазовых скоростей распространения с учетом поляризации упругих волн. Затем, проводя сопоставление характеристик, полученных экспериментальным путем, с известными теоретическими данными, определяются свойства внешних, а также внутренних слоев, которые недоступны для прямых методов контроля [1–3].

Нахождение свойств исследуемой слоистой структуры в данной работе основывается на выводе и последующем решении дисперсионного уравнения для соответствующей волны относительно волнового числа. Решение дисперсионного уравнения дает значение эффективной скорости распространения волны, которая затем используется самостоятельно или подставляется в известные выражения для упругих характеристик материала [4, 5].

Неоднородность слоистой структуры учитывалась путём введения в неоднородные граничные условия (в приближении «линейного скольжения») коэффициентов жесткости – нормального и тангенциального. Неоднородные граничные условия учитывают неполную передачу составляющих упругих смещений при сохранении передачи упругих напряжений [6]. Величина неоднородностей в коэффициентах жесткости моделируется параметром шероховатости. Смоделированная шероховатость определяется средним расстоянием между соседними неоднородностями на контактирующих поверхностях [6, 7].

Предполагалось, что граница несплошности образовалась за счет наличия на поверхности слоев микровыступов, которые описываются величиной шероховатости  $R_z$ . Для включения в модель слоистой среды величины шероховатости предлагалось считать, что выступы на поверхности имитируются объектами сферической формы. Тогда для введения шероховатости необходимо учесть параметры формы контактирующих микровыступов:  $R$  – радиус замещающего сферического микровыступа;  $r$  – средний радиус площади контактного микровыступа,  $r \approx 2/3\sqrt{2RR_z}$  (рис. 1) [6, 7]. С учетом введенных приближений, среднее расстояние между выступами будет определяться следующим образом [7]:

$$d = 2\sqrt{2RR_z - R_z^2}.$$

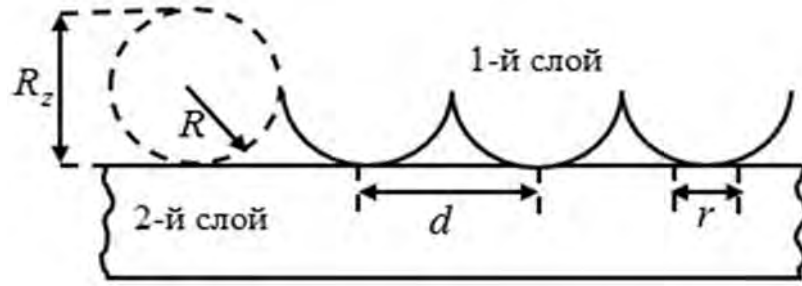


Рис. 1. Модель микровыступов сферической формы на границе слоев, образующих трещиноватый массив среды

Для примера зависимость нормального коэффициента жесткости, определяемого из [6], от величины шероховатости приведена на рис. 2.

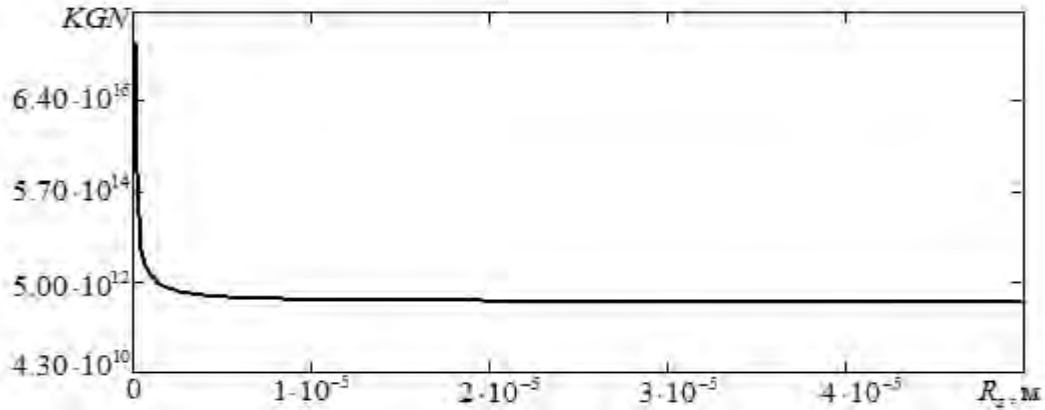


Рис. 2. Зависимость нормального коэффициента жесткости от величины шероховатости

Для модели слоистой среды на рис. 3 будем рассматривать распространение продольной волны при двух вариантах геометрии распространения – параллельно и перпендикулярно слоям.

На границе между слоями для компонент  $\xi_x = \xi_{lx} + \xi_{lx}$ ;  $\xi_z = \xi_{lz} + \xi_{lz}$ ;  $\sigma_{xz}$ ;  $\sigma_{zz}$  должны выполняться условия неоднородности при  $z = 0$  [8]:

$$\begin{aligned} \xi_x(0) &= \xi_x(0^-) - \sigma_{xz}(0^-)/KGT; & \xi_z(0) &= \xi_z(0^-) - \sigma_{zz}(0^-)/KGN; \\ \sigma_{xz}(0) &= \sigma_{xz}(0^-); & \sigma_{zz}(0) &= \sigma_{zz}(0^-), \end{aligned} \quad (1)$$

а также условия периодичности, которые описывают равенство компонент упругих смещений и механических напряжений в первой среде при  $z = a$  и при  $z = b$  – во второй (символы со штрихом):

$$\xi_x(a) = \xi_x(b^-); \quad \sigma_{xz}(a) = \sigma_{xz}(b^-); \quad \xi_z(a) = \xi_z(b^-); \quad \sigma_{zz}(a) = \sigma_{zz}(b^-). \quad (2)$$

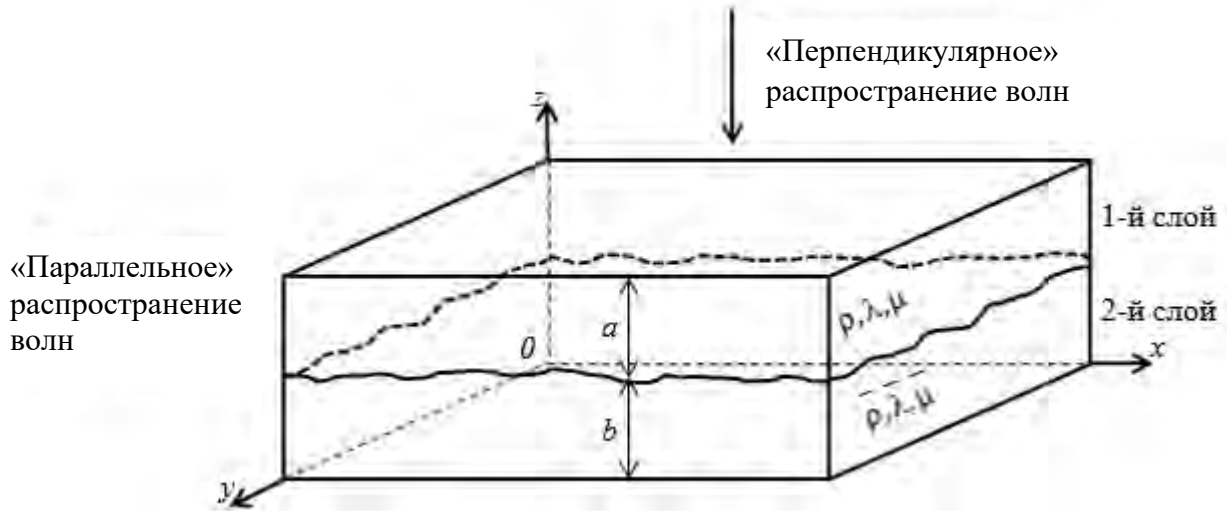


Рис. 3. Модель слоистой структуры

С учетом (1), (2) дисперсионное уравнение для продольной волны, распространяющейся в слоистой неоднородной среде параллельно слоям структуры, получило вид:

$$\begin{aligned} & 4(\mu - \bar{\mu})^2 X\bar{X} \left(1 - \frac{\bar{k}_i^2 ctg(\bar{\beta}b/2)}{KGN}\right) + \varpi^2 \rho \left(\varpi^2 \rho / k^2 - 4(\mu - \bar{\mu})\right) \times \\ & \times \bar{X} tg\left(\frac{\beta a}{2}\right) \left(1 - \frac{\bar{k}^2 ctg(\frac{\bar{\alpha}b}{2})}{KGT}\right) + \varpi^2 \bar{\rho} \left(\frac{\varpi^2 \bar{\rho}}{k^2} + 4(\mu - \bar{\mu}) + \frac{\bar{\rho} \bar{k}^2 ctg(\frac{\bar{\alpha}b}{2})}{KGT}\right) \times \\ & \times X tg\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right) - \frac{\varpi^4 \rho \bar{\rho}}{k^2 \bar{k}_i^2} \left(Y tg\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right) + \bar{Y} tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)\right) \left(1 - \frac{\rho \bar{k}_i^2 ctg(\frac{\bar{\alpha}b}{2})}{KGN}\right) = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= k^2 tg\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right) + \alpha \bar{\beta} tg\left(\frac{\alpha a}{2}\right); & X &= k^2 tg\left(\frac{\beta a}{2}\right) + \alpha \beta tg\left(\frac{\alpha a}{2}\right); \\ \bar{X} &= k^2 tg\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right) + \bar{\alpha} \bar{\beta} tg\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right); & Y &= k^2 tg\left(\frac{\beta a}{2}\right) + \bar{\alpha} \beta tg\left(\frac{\bar{\alpha}b}{2}\right). \quad (4) \end{aligned}$$

Уравнение (4) определяет волновое число  $k$ , а соответственно, и скорость для эффективной продольной волны при любых значениях параметров слоев в рассматриваемой периодической структуре «сталь–графит». Уравнение (4) описывает распространение волны в неоднородной среде, но если устремить коэффициенты жесткости  $KGT, KGN \rightarrow \infty$ , что соответствует сплошному контакту на границе между средами при коэффициенте перфорации, стремящемся к 1, то получим дисперсионное уравнение, описывающее распространение продольной волны в трансверзально-изотропной среде с учетом исправленных неточностей [1].

Теоретические параметры для материалов сталь и графит, необходимые в дальнейшем для построения всех графических зависимостей, представлены в табл. 1 [4].

Табл. 1

Параметры	Материал	
	сталь	графит
$f$ , Гц	$1 \cdot 10^6$	
$h$ , м	$1 \cdot 10^{-3}$	
$c_l$ , м/с	$5,92 \cdot 10^3$	$3,39 \cdot 10^3$
$c_t$ , м/с	$3,23 \cdot 10^3$	$0,82 \cdot 10^3$
$\rho$ , кг/м <sup>2</sup>	$7,80 \cdot 10^3$	$2,26 \cdot 10^3$
$\lambda$ , Па	$11,1 \cdot 10^{11}$	$2,28 \cdot 10^{11}$
$\mu$ , Па	$8,14 \cdot 10^{10}$	$0,15 \cdot 10^{10}$

Построение выполнялось при частоте ультразвука 1 МГц, шероховатости границ слоистой среды  $R_z = 40$  мкм, общей толщине слоистой структуры 1 мм.

Значение скорости возрастает во всем диапазоне изменения относительной толщины слоя. Для случая однородной среды вид зависимости остается таким же, но значения скорости несколько возрастают, что связано с распространением волны без потерь энергии на рассеяние на структурных неоднородностях среды.

После применения всех аналогичных операций находилось дисперсионное уравнение для продольной волны, распространяющейся в неоднородной среде перпендикулярно слоям структуры «сталь–графит» [5]:

$$\begin{aligned} & \cos(k_l a) \cos(\bar{k}_l b) \left[ \frac{(\lambda + 2\mu)k_l}{KGT} + 1 \right] + \\ & + \frac{1 - \chi_1^2}{2\chi_1} \sin(k_l a) \sin(\bar{k}_l b) \left[ \frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\bar{k}_l}{KGN} - 1 \right] - \cos(k(a + b)) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\chi_1 = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\bar{k}_l / (\lambda + 2\mu)k_l$ .

Вычисления по (5) проводились для ранее указанных значений параметров, а их результаты представлены на рис. 5. Видно, как и на рис. 4, что величина скорости возрастает во всем диапазоне изменения относительной толщины слоя.

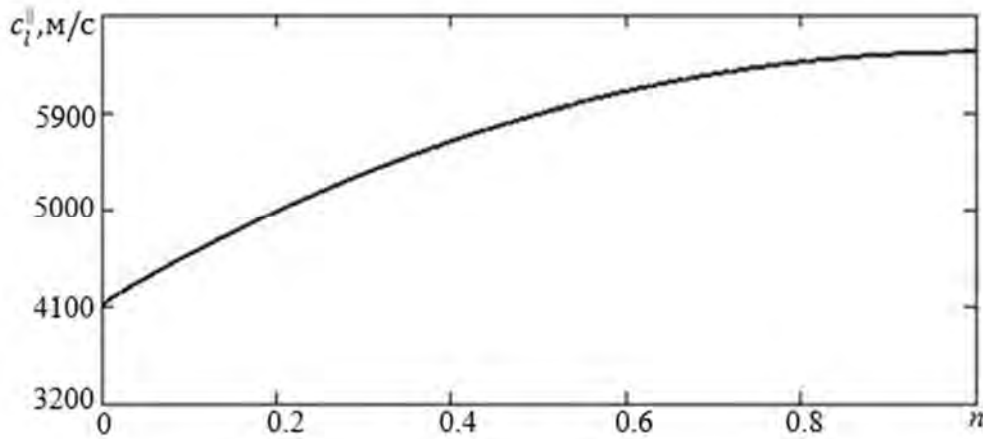


Рис. 4. Зависимость скорости продольной волны от относительной толщины слоя при распространении продольной волны параллельно плоскостям слоев

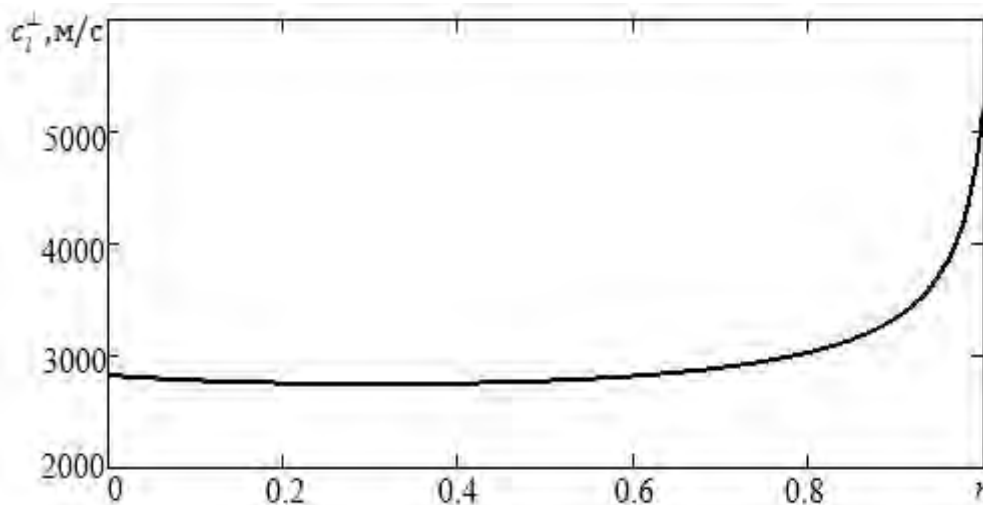


Рис. 5. Зависимость скорости продольной волны от относительной толщины слоя при перпендикулярном распространении

Для случая трансверзально-изотропной среды вид зависимости остается таким же, но значения скорости несколько возрастают, что связано с распространением волны без потерь энергии на рассеяние на структурных неоднородностях среды.

Полученные зависимости представляют интерес в качестве физических предпосылок интерпретации результатов ультразвуковых измерений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бреховских, Л. М.** Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – Москва: Наука, 1973. – 340 с.
2. **Шермергор, Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред / Т. Д. Шермергор. – Москва: Наука, 1977. – 400 с.
3. **Викторов, И. А.** Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И. А. Викторов. – Москва: Наука, 1981. – 287 с.
4. **Аббакумов, К. Е.** Волновые процессы в слоистой микронеоднородной среде с неоднородными граничными условиями / К. Е. Аббакумов, А. В. Вагин // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2019. – № 5. – С.12–18.
5. **Аббакумов, К. Е.** Дисперсионное уравнение для продольной волны в слоистой среде с неоднородными граничными условиями при различных направлениях распространения / К. Е. Аббакумов, А. В. Вагин // Дефектоскопия. – 2020. – № 1. – С. 22–30.
6. **Аббакумов, К. Е.** Рассеяние плоских упругих волн на микрошероховатой границе раздела твердых сред / К. Е. Аббакумов // Дефектоскопия. – 2017. – № 7. – С. 3–13.
7. Справочник по триботехнике: в 3 т. / Под общ. ред. М. Хебды. – Москва: Машиностроение, 1984. – 200 с.
8. **Floquet, M. G.** Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques / M. G. Floquet // Annales scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure. – 1983. – Vol. 12. – P. 47–88.

E-mail: keabbakumov@etu.ru; keabbakumov51@mail.ru.