УДК 53.093

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ОПЕРАТИВНОГО ДИСТАНЦИОННОГО КОНТРОЛЯ НА ОСНОВЕ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. ГЕРАСИМЕНКО, С. В. БОЛОТОВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

UDC 53.093

MATHEMATICAL MODELING OF OPERATIONAL REMOTE CONTROL SYSTEM BASED ON TELEGRAPH EQUATIONS

N. V. HERASIMENKO, S. V. BOLOTOV

Аннотация. На основе телеграфных уравнений разработана математическая модель системы оперативного дистанционного контроля труб в режиме рефлектометрии. Моделирование выполнено численно с применением метода конечных разностей во временной области и алгоритма Йи.

Ключевые слова: модель, уравнение, контроль, система, мониторинг.

Abstract. Mathematical model of the pipes remote control and monitoring in the time-domain reflectometry mode has been developed. The simulation is done numerically by using the finite difference time domain method and the Yee algorithm.

Key words: model, equation, control, system, monitoring.

Линия системы оперативного дистанционного контроля (СОДК) представляет собой систему из двух проводников, включающую сигнальный проводник и участок поверхности металлической трубы. Такая линия обладает сопротивлением, эквивалентным сопротивлению проводника на единицу длины, индуктивностью проводника на единицу длины, а также емкостью и проводимостью утечки между проводниками на единицу длины. В классической теории электрических цепей с распределенными параметрами такие параметры принято называть первичными и обозначать R_x, L_x, C_x, G_x соответственно, $i(x,t)$, $u(x,t)$ – ток и напряжение, представленные как функции времени и координаты.

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 1.

Как следует из рис. 1, элемент длины линии системы (рис. 2) оперативного дистанционного контроля представляет собой электрическую цепь – четырехполюсник, обладающий первичными параметрами линии. Первичные параметры определяются путем эксперимента.

Получим уравнения состояния рассматриваемой линии. Поместим элементарный участок линии внутрь замкнутой поверхности. Тогда согласно принципу непрерывности тока суммарный ток сквозь замкнутую поверхность равен нулю, что позволяет записать следующее:

$$-i(x,t)+i(x,t)+\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}dx+G_x dx\cdot u(x,t)+C_x dx\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0. \qquad (1)$$

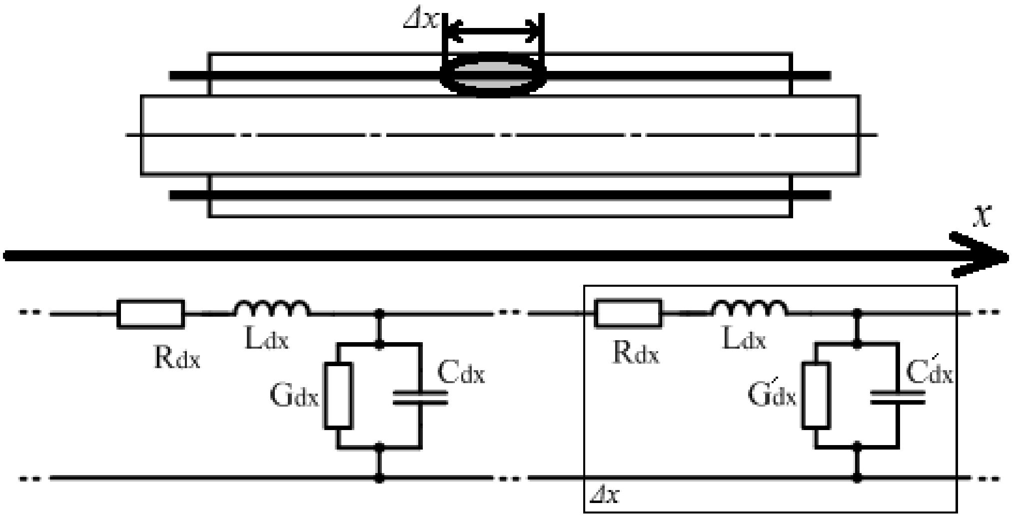

Рис. 1. Линия системы контроля и ее математическая модель

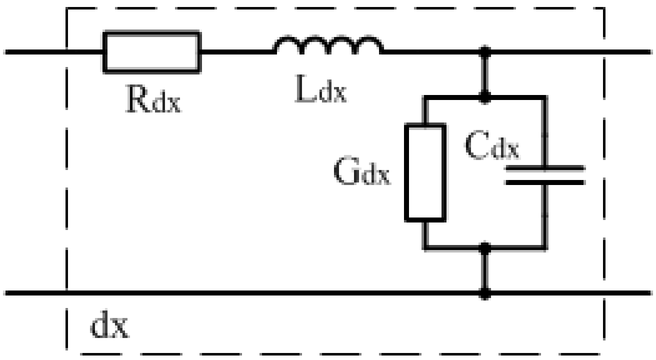

Рис. 2. Элементарный участок линии

Откуда имеем уравнение, описывающее изменение тока в линии:

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=Gu(x,t)+C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \qquad (2)$$

Наличие емкости между проводниками и проводимости утечки приводит к тому, что напряжение на входе элементарного участка и на его выходе отличается. Применяя контурное уравнение, получаем

$$-u(x,t)+u(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx+R_x dx\cdot i(x,t)+L_x dx\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}=0. \qquad (3)$$

Из (3) вытекает уравнение, описывающее изменение напряжения между проводниками линии:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Система уравнений (2), (4) представляет собой известные телеграфные уравнения, описывающие распространение электромагнитной волны вдоль проводов. Аналитическое решение такой системы, особенно в случае постоянных параметров R, L, C, G, не представляет трудностей. Полученное дифференцированием и подстановкой волновое уравнение может быть решено путем интегрирования вдоль характеристик или же методом разделения переменных. Тем не менее специфика поставленной здесь задачи предполагает исследование распространения сигналов различной формы и длительности в линии системы оперативного дистанционного контроля. В такой постановке задачи наилучшей гибкостью и наглядностью обладает численный метод, по этой причине далее будет рассмотрено численное решение системы уравнений (2), (4).

Следует отметить, что методы численного решения задач, связанных с распространением волн, сами по себе представляют большой интерес, особенно в вопросах оптимизации вычислительных алгоритмов. Некоторые результаты исследований в области численных алгоритмов решения волновых уравнений нашли отражение в [1].

Уравнения (2), (4), очевидно, являются частным случаем, вытекающим из системы уравнений Максвелла. Отсюда можно заключить, что все известные методы и численные алгоритмы, предназначенные для решения задач, связанных с распространением электромагнитных волн, в данном случае также применимы. Одним из наиболее популярных и мощных методов решения уравнений электродинамики является метод конечных разностей во временной области (FDTD), базирующийся на алгоритме Кейна Йи.

Сущность численного алгоритма Йи заключается в построении дискретных сеток для электрического и магнитного полей, обладающих пространственным смещением друг относительно друга [2]. При заданных начальных условиях алгоритм Йи дает эволюционное решение во времени от начала отсчета с заданным временным шагом.

Адаптируем метод FDTD для решения системы уравнений (2), (4). Очевидно, такая система требует две сетки: для волн напряжения и тока соответственно. Следуя алгоритму Йи, эти сетки могут быть смещены в пространстве. Численное решение будет представлять собой пространственную и временную эволюцию волн напряжения и тока путем «перескока», что в точности отражает идею телеграфных уравнений. На рис. 3 изображен шаблон численного алгоритма. Точками изображены пространственные узлы тока, крестиками – напряжения.

Анализ устойчивости численного алгоритма выполняется согласно критерию Куранта–Фридрихса–Леви, который формулируется для телеграфных уравнений аналогично волновым [3].

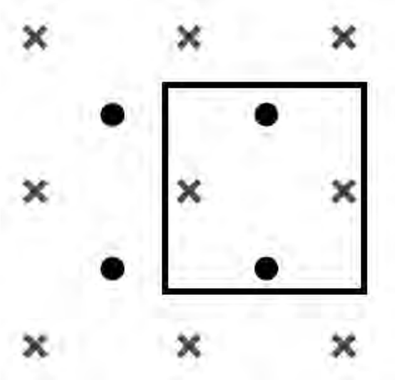

Рис. 3. Шаблон сетки: ● – узел напряжения; **x** – узел тока

На рис. 4 представлен результат моделирования рефлектограммы линии, имеющей повреждение. На рис. 4, *а* изображен исходный зондирующий импульс, на рис. 4, *б* – отраженный сигнал.

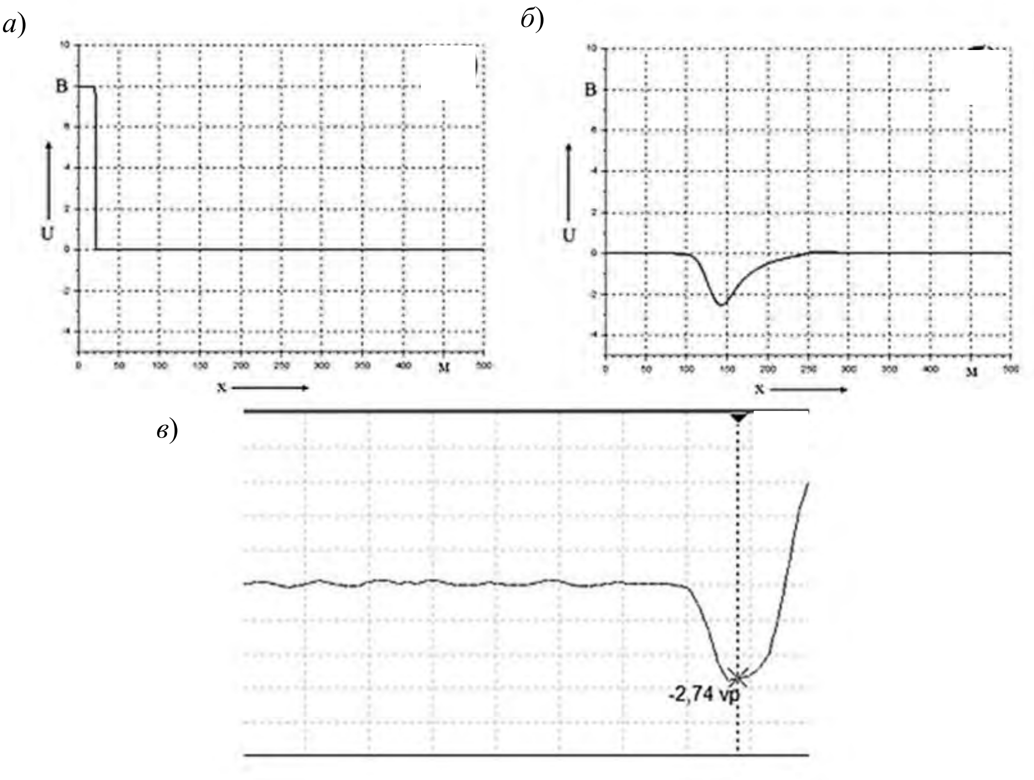

Рис. 4. Модель рефлектограммы трубопровода с дефектом: *а* – зондирующий импульс; *б* – отраженный импульс; *в* – рефлектограмма РЕЙС

Разработанная численная модель позволяет анализировать однородные и неоднородные электрические линии любого типа, включая нелинейные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численное моделирование одномерной нестационарной нелинейной параметрической неустойчивости / Ф. М. Трухачев [и др.] // VI Конгресс физиков Беларуси: сб. науч. тр. – Минск, 2017. – С. 284–285.

2. **Yee, K.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. 14. – 1966. – P. 302–307.

3. **Tranah, D.** Numerical solution of partial differential equations / D. Tranah. – Cambridge University Press, 1994.

E-mail: s.v.bolotov@mail.ru; gerasimenko_nikita@hotmail.com.