ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УДК 517.977:629.78.001

В. Н. Лаптинский, д-р физ.-мат. наук, проф., В. В. Пугин, канд. физ.-мат. наук, доц.

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА

Решена задача стабилизации при помощи трех управляющих сил искусственного спутника, обладающего частичной динамической симметрией. Стабилизирующие управления строятся по принципу линейной обратной связи. Используемый метод позволяет строить в конечном виде семейства матриц обратной связи, зависящие от свободных параметров, при этом не требуется гладкость коэффициентов управляющей системы. Определенное внимание уделено построению стационарных обратных связей.

В настоящее время проводится интенсивное исследование космоса с помощью искусственных спутников и других космических летательных аппаратов. Этим объясняется значительный интерес к задаче ориентации и стабилизации космических аппаратов в пространстве. Данной задаче посвящена обширная литература [1–12].

В настоящей работе, являющейся продолжением [10–12], на основе применения подхода [13] исследуется задача стабилизации угловой скорости искусственного спутника, обладающего частичной динамической симметрией.

Рассмотрим математическую модель вращательного движения искусственного спутника. Уравнения углового движения искусственного спутника при действии управляющего момента относительно главных осей инерции спутника задаются уравнениями Эйлера в виде [9, С. 118]:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{I_3 - I_2}{I_1}\omega_2\omega_3 + \frac{\upsilon_1}{I_1};$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{I_1 - I_3}{I_2}\omega_3\omega_1 + \frac{\upsilon_2}{I_2};$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{I_2 - I_1}{I_3}\omega_1\omega_2 + \frac{\upsilon_3}{I_3}, \qquad (1)$$

где I_i, ω_i, υ_i ($i = 1, 2, 3$) – составляющие момента инерции, угловой скорости и управляющего момента относительно одной из главных осей спутника соответственно.

Если управляемый объект обладает частичной динамической симметрией, то $I_1 = I_2 = I$. Тогда система (1) примет вид:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{I - I_3}{I}\omega_2\omega_3 + \frac{\upsilon_1}{I};$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{I - I_3}{I}\omega_3\omega_1 + \frac{\upsilon_2}{I};$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\upsilon_3}{I_3}. \qquad (2)$$

Выберем в качестве программного движения решение системы (2) при

$$\omega_1(0) = \omega_{10}; \quad \omega_2(0) = \omega_{20};$$
$$\omega_3(0) = \omega_{30} > 0.$$

Тогда в свободной системе совершаются гармонические колебания частоты $\left|\frac{I_3}{I} - 1\right|\omega_{30}$. Будем для определенности считать, что $I > I_3$.

Решим задачу непрерывной стабилизации программного движения системы (2) управлениями, построенными по принципу линейной обратной связи.

Примем следующие обозначения:

$$a = \frac{I - I_3}{I}\omega_{30}; \qquad \varepsilon = \frac{I - I_3}{I}\omega_0;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}\ ; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_{10}}{\omega_{20}}.$$

Для системы (2) относительно решения $\tilde{\omega}_1 = \omega_0 \sin(at + \varphi)$; $\tilde{\omega}_2 = \omega_0 \cos(at + \varphi)$, $\tilde{\omega}_3 = \omega_{30}$ запишем систему линейного приближения:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_2 + \varepsilon\cos(at + \varphi)x_3 + qu_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1 - \varepsilon\sin(at + \varphi)x_3 + qu_2;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = q_3 u_3, \qquad (3)$$

где

$$x_i = \Delta\omega_i = \omega_i - \tilde{\omega}_i;$$
$$u_i = \Delta\upsilon_i \equiv \upsilon_i \quad (i = 1,2,3);$$
$$q = \frac{1}{I}; \quad q_3 = \frac{1}{I_3}.$$

Согласно [2, С. 83] решению задачи стабилизации системы в отклонениях для (2) сводится к решению задачи стабилизации системы (3). Эта система является периодической с периодом $\omega = \dfrac{2\pi}{a}$.

Систему (3) запишем в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon B(t))x + Qu, \qquad (4)$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2, x_3)$; $u = \operatorname{colon}(u_1, u_2, u_3)$; $Q = \operatorname{diag}(q, q, q_3)$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(at + \varphi) \\ 0 & 0 & -\sin(at + \varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача состоит в отыскании такого закона автоматического управления объектом, при котором система (4) является асимптотически устойчивой. Иными словами, выбором управления

$$u = C(t)x, \qquad (5)$$

где C(t) – непрерывная ω-периодическая (3×3)-матрица, следует сделать систему (4) асимптотически устойчивой.

Запишем систему (4), замкнутую управлением (5):

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon B(t) + QC(t))x. \qquad (6)$$

Следуя методике [10–12], матрицу C(t) получим в виде

$$C(t) = -Q^{-1}(D + A) + Q^{-1}H(t), \qquad (7)$$

где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; H(t) – некоторая ω-периодическая матрица, подчиненная условию

$$\int_0^{\omega} H(\tau)\,d\tau = 0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – произвольные положительные числа. Заметим, что в [11] рассматривался случай $\lambda_1 = \lambda_2$.

Матрицу H(t) зададим в следующем виде:

$$H(t) = \Phi(t) - \varepsilon B(t),$$

где $\Phi(t) = \operatorname{diag}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$;

$$\varphi_i(t+\omega) = \varphi_i(t);$$

$$\int_0^{\omega} \varphi_i(t)\,dt = 0, \quad i = 1,2,3.$$

Тогда система (6) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \left(-D + \Phi(t)\right)x. \tag{8}$$

Фундаментальная матрица X(t) решений системы (8) имеет вид:

$$X(t) = \exp\left(-Dt + \int_0^t \Phi(\tau)d\tau\right).$$

В рассмотренном случае матрица C(t) является нестационарной. Наиболее удобными для применения являются стационарные обратные связи. Полагая в (7) H = 0, получим $C = -Q^{-1}(D + A)$. Соответствующая замкнутая система имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = (-D + \varepsilon B(t))x. \tag{9}$$

Фундаментальная матрица решений системы (9) представима в конечном виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & \varepsilon e^{-\lambda_1 t}\int_0^t e^{(\lambda_1-\lambda_3)\tau}\cos(a\tau+\varphi)d\tau \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & -\varepsilon e^{-\lambda_2 t}\int_0^t e^{(\lambda_2-\lambda_3)\tau}\sin(a\tau+\varphi)d\tau \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_3 t} \end{pmatrix}.$$

Мультипликаторы ρ_i $(i = 1,2,3)$ системы (9) (как и системы (8)) имеют вид:

$$\rho_i = \exp(-\lambda_i\omega) < 1, \quad i = 1,2,3.$$

На основании [14, С. 189] заключаем, что системы (8) и (9) асимптотически устойчивы.

Таким образом, динамически симметричный спутник стабилизируем посредством управляющих моментов, построенных на основе стационарной обратной связи. При этом коэффициенты усиления определены в конечном виде через элементы матриц A, Q и найдены мультипликаторы замкнутой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Раушенбах, Б. В.** Управление ориентацией космических аппаратов / Б. В. Раушенбах, Е. Н. Токарь. – М., 1974.

2. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М., 1975.

3. **Крементуло, В. В.** Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс / В. В. Крементуло. – М., 1977.

4. Управление вращательным движением твердого тела / В. И. Зубов [и др.]. – Л., 1978.

5. **Черноусько, Ф. Л.** Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М., 1980.

6. **Каргу, Л. И.** Системы угловой стабилизации космических аппаратов / Л. И. Каргу. – М., 1980.

7. **Попов, В. И.** Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов / В. И. Попов. – М., 1986.

8. **Крутько, П. Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем нелинейной модели / П. Д. Крутько. – М., 1988.

9. **Сю, Д.** Современная теория автоматического управления / Д. Сю, А. Мейер. – М., 1972.

10. **Лаптинский, В. Н.** Стабилизация вращательных движений динамически симметричного спутника / В. Н. Лаптинский. – Минск, 1990.

11. **Лаптинский, В. Н.** К задаче стабилизации вращательного движения динамически симметричного спутника // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1991. – № 4. – С. 11–16.

12. **Laptinsky, V. N.** Exact solution of the problem of the artificial satellite stabilization / V. N. Laptinsky // Control Application of optimization : 11th IFAC International Workshop. – S.-Pb., 2000. – Vol. 1. – P. 218–220.

13. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск, 1998.

14. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М., 1967.

Белорусско-Российский университет
Институт технологии металлов НАН Беларуси
Материал поступил 07.09.2007

V. N. Laptinsky, V. V. Pugin
To the problem of the artificial satellite stabilization with dynamic symmetry
Belarusian-Russian University
Institute of Technology of Metals NAS of Belarus

The problem of asymptotic stabilization with the help of three controlling force of the artificial satellite having a partial dynamic symmetry is solved. The stabilization control is constructed on the principle of linear feed-back.