

Министерство образования Республики Беларусь  
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет»

И. М. Кузменко

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальностям 1-36 01 01 «Технология машиностроения»,  
1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного  
производства», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства»*

**В двух частях**

**Часть 1**

Могилев  
«Белорусско-Российский университет»  
2020

УДК 539.3/6  
ББК 30.121  
К89

Рекомендовано к изданию Советом Белорусско-Российского университета  
«25» января 2019 г., протокол № 7

**Р е ц е н з е н т ы :**

кафедра «Теоретическая механика и механика материалов» Белорусского  
национального технического университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук,  
проф. *Ю. В. Василевич*, проф. кафедры д-р техн. наук, проф. *А. И. Дудяк*);  
канд. техн. наук *Р. А. Бондарев*

**Кузменко, И. М.**

К89      Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. –  
Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.: ил.  
ISBN 978-985-492-266-9.

Содержит контрольные вопросы и тестовые задания по всем разделам курса.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства». Может быть использовано при подготовке к практическим и лабораторным занятиям, а также для самостоятельной подготовки по дисциплинам «Механика материалов» и «Соппротивление материалов».

Рекомендовано преподавателям, магистрантам, аспирантам, инженерно-техническим работникам и учащимся колледжей.

**УДК 539.3/6  
ББК 30.121**

**ISBN 978-985-492-266-9 (Ч. 1)  
ISBN 978-985-492-265-2**

© Кузменко И. М., 2020  
© Межгосударственное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский  
университет», 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина, которая традиционно многие годы носила название «Соппротивление материалов», – одна из первых прикладных дисциплин, которую изучают студенты всех технических специальностей высших учебных заведений. В буквальном смысле эта дисциплина изучает поведение элемента конструкции и материала, из которого он изготовлен, под силовым или иным воздействием.

В последние годы в учебных планах многих специальностей название дисциплины «Соппротивление материалов» изменено на «Механика материалов», что точнее характеризует те вопросы, которые в ней изучаются.

В механике материалов (как учебной дисциплине) синтезируются сведения, полученные в других науках, таких как математика, физика, теоретическая механика, материаловедение.

На базе знаний, полученных при изучении дисциплины «Механика материалов» («Соппротивление материалов»), ведется подготовка инженеров различных специальностей по техническим (специальным) дисциплинам.

С первой лекции по сопромату студент встречает новые для него термины, понятия, законы, способы, причем объем «новизны» с каждой лекцией увеличивается. Поэтому для многих студентов данная дисциплина кажется очень сложной, которую, по их мнению, практически нельзя понять.

Данное учебное пособие преследует цель сложные явления, «механику» силового воздействия на простые элементы конструкции, изготовленные из какого-то материала, объяснить на доступном студенту языке.

Для усвоения излагаемого материала практически по каждой теме приводятся примеры решения задач, учащемуся также предлагается ответить на вопросы и решить простейшие задачи, которые представлены в виде тестов.

Учебное пособие написано на основе конспекта лекций по курсам «Соппротивление материалов» и «Механика материалов», которые читаются автором на протяжении более 40 лет в Могилевском машиностроительном институте – Могилевском государственном техническом университете – Белорусско-Российском университете.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по профилям подготовки:

- 1-36 01 01 «Технология машиностроения»;
- 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства»;
- 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства».

Учебными планами этих специальностей сокращены часы на проведение практических занятий. Поэтому в данном пособии больше внимания уделяется практике выполнения расчетов на прочность, жесткость и устойчивость, при простых и сложных видах нагружения.

Учебное пособие может быть использовано для углубленного изучения учебной дисциплины, при подготовке к практическим и лабораторным занятиям, а также для самостоятельной подготовки по дисциплинам «Механика материалов» и «Соппротивление материалов». Оно будет полезно студентам машиностроительных и строительных специальностей университетов.

Дисциплина «Механика материалов», в соответствии с учебным планом, изучается в двух (3 и 4) семестрах. Поэтому для удобства пользования учебное пособие издается в двух частях.

Первая часть посвящена вопросам расчета бруса при простых видах нагружения.

Во второй части рассматриваются расчеты при сложных видах статического и динамического нагружения, расчеты на устойчивость, расчеты за пределами упругости.

Текст учебного пособия расширен, поэтому оно может быть рекомендовано преподавателям, магистрантам, аспирантам, инженерно-техническим работникам и учащимся колледжей. В приложениях приводятся справочные данные, необходимые для решения практических задач и выполнения проектировочных заданий.

Автор выражает благодарность рецензентам:

– заведующему кафедрой «Теоретическая механика и механика материалов» Белорусского национального технического университета доктору физико-математических наук, профессору **Василевичу** Юрию Владимировичу;

– профессору этой же кафедры доктору технических наук, профессору **Дудяку** Александру Ивановичу;

– заведующему кафедрой «Прикладная механика и инженерная графика» Могилевского государственного университета продовольствия кандидату технических наук **Бондареву** Роману Александровичу;

– преподавателям кафедры «Механика» Белорусско-Российского университета за полезные замечания и рекомендации, высказанные ими при чтении рукописи.

# 1. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ – РАЗДЕЛ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Понятие «механика» является основополагающим при изучении многих технических дисциплин. Механика – один из разделов физики.

В классической механике изучается поведение абсолютно твердого тела.

В данной дисциплине, в отличие от классической механики, изучается поведение материала тела, которое под неким воздействием (чаще всего силовым) изменяет свои размеры и форму.

Для того чтобы построить мост, здание, любой механизм или машину, нужно сначала составить проект данной конструкции, т. е. спроектировать ее. Это значит, что на основе расчетов, выполненных по определенным методикам, изготавливаются чертежи, где, в частности, *указываются размеры* конструкции в целом и ее отдельных элементов, *материал*, из которого они будут изготавливаться, и другие необходимые данные.

Основы этих расчетов рассматриваются в науке «*Сопротивление материалов*» («Механика материалов»).

При этом, с учетом условий эксплуатации, в конструкции должны обеспечиваться заданные эксплуатационные свойства, надежность и безопасность ее работы в течение всего срока службы.

Ошибки в расчетах при проектировании могут приводить к разрушению конструкций и к катастрофам. Примеров этого много (классический пример – обрушение моста через Такомецкое ущелье в США, 1940 г.).

Важным, а с учетом вышесказанного, противоречивым, является требование обеспечения снижения веса конструкции, экономного и эффективного использования материалов.

## 1.1. Связь сопротивления материалов с другими дисциплинами

В процессе инженерной подготовки студент изучает различные дисциплины: общетеоретические и общеинженерные – физику, теоретическую механику, сопромат, детали машин, теорию механизмов и машин; специальные дисциплины по профилю специальности, где на базе знаний основ вышесказанных дисциплин будут рассматриваться вопросы проектирования конкретных деталей, узлов, элементов конструкций и конструкций в целом.

Материал дисциплины «Сопротивление материалов» базируется в основном на некоторых разделах изученных ранее дисциплин, таких как:

- 1) *высшая математика*: математический анализ; матричное исчисление; дифференциальное и интегральное исчисления; дифференциальные уравнения;
- 2) *физика*: законы механики и законы сохранения энергии;
- 3) *инженерная графика*: введение в предмет; требования ЕСКД при выполнении чертежей; машиностроительное черчение; системы координат;
- 4) *теоретическая механика*: статика; кинематика; динамика;
- 5) *информатика*: методы программирования и навыки работы с программами общего назначения; принципы обработки данных на ЭВМ.

Выводы, полученные в сопротивлении материалов, широко используются во многих специальных технических дисциплинах: прикладная механика роботов; строительная механика и металлические конструкции; детали машин и основы конструирования; детали мехатронных модулей, роботов и их конструирование; конструирование механизмов роботов; расчет и проектирование: сварных конструкций, конструкций наземных транспортно-технологических комплексов и других сооружений, машин и механизмов.

Без знания и применения этих выводов нельзя спроектировать и построить ни одного сооружения, отвечающего современным требованиям.

Отсюда становится понятным значение сопротивления материалов как науки и ее места среди специальных технических дисциплин, в которых практические расчеты базируются на выводах сопротивления материалов.

Свойства материалов и различных сред, их взаимодействие изучаются в «*Механике сплошной среды*». В свою очередь эта наука подразделяется на «*Механику жидкостей и газов*» и «*Механику деформируемого твердого тела*».

Создатель научной школы в области механики сплошных сред – акад. Л. И. Седов отмечал: «В теоретической механике изучаются движения материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. В механике сплошной среды ... рассматриваются движения таких материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом, и расстояния между точками которых во время движения меняются».

*Сопротивление материалов* является введением в «*Механику деформируемого твердого тела*» (МДТТ). К этой науке, кроме сопротивления материалов, относятся теория упругости, теория пластичности, строительная механика, механика разрушения, другие специальные разделы.

*Сопротивление материалов* решает задачи прочности простыми методами с использованием ряда упрощающих допущений, приводит решения к виду, удобному для практического применения.

*Теория упругости* имеет, в общем, те же цели, что и сопротивление материалов. Однако между этими науками имеются существенные различия.

Теория упругости решает аналогичные сопротивлению материалов задачи, но в более строгой постановке, требующей применения сложного математического аппарата. Решения, полученные в теории упругости, помимо своего самостоятельного значения, используются для оценки точности решений тех же задач методами сопротивления материалов.

*Теория пластичности* занимается установлением общих законов упруго-пластических и пластических деформаций, т. е. деформаций, не исчезающих после прекращения действия нагрузки.

*Строительная механика*, в отличие от сопротивления материалов, рассматривает не отдельные элементы конструкций, а целые стержневые конструкции – фермы, рамы, арки, смешанные конструкции, а также конструкции кораблей, самолетов, строительных и дорожных машин. Чаще всего методы расчета указанных конструкций рассматриваются в специальных дисциплинах на старших курсах учебных заведений.

*Механика разрушения* – молодая (первая работа английского инженера Гриффитса была опубликована в 1920 г.) область МДТТ; она изучает поведение тела с трещинами и позволяет прогнозировать работу тела с трещинами.

*Сопротивление материалов в буквальном смысле есть наука, отвечающая на вопрос: почему конструкции прочные и что нужно делать, чтобы они были прочными.*

Без базовых знаний по расчетам конструкций инженер не может работать на современном уровне: важным является умение пользоваться вычислительной техникой и прикладными программами, предназначенными для проведения расчетов.

Использование компьютерных технологий позволяет проанализировать несколько вариантов конструкций, что невозможно и трудоемко выполнить традиционными методами сопромата.

В настоящее время разработано и используется достаточно много программных продуктов – универсальных (Cosmos, Ansys и др.) и специализированных (для расчета конкретных элементов и конструкций: балок, ферм, арок и т. п.).

Отличительной особенностью использования прикладных программных продуктов является то, что эти программы работают с математическими расчетными моделями и от качества их подготовки будет зависеть, насколько адекватна модель по отношению к реальной конструкции, а также точность расчетов.

С другой стороны, именно инженер решает, какой вариант модели из тех, которые были проанализированы с помощью компьютерного моделирования, принять к производству.

Следовательно, инженер должен владеть простыми, но достаточно надежными методами, чтобы быть уверенным в правильности выбранной расчетной схемы и в результатах расчетов.

## **1.2. Цель преподавания дисциплины и требования к студентам**

*Цель:* обучение будущих инженеров методам решения задач механики деформируемого твердого тела в области упругих и упругопластических деформаций, применимых к практическим задачам.

Эти знания необходимы не только при проектировании новых конструкций, но и для грамотной их эксплуатации.

Учебными стандартами, определяющими требования к студентам в части курса сопротивления материалов, установлено, что *студент, изучивший дисциплину:*

### **1) должен знать:**

- методы экспериментального определения механических свойств и упругих постоянных материала, напряжений, деформаций и перемещений;
- основные методы «Сопротивления материалов» для расчета бруса на прочность, жесткость и устойчивость в области упругих деформаций;
- особенности расчета бруса при простом и сложном, статическом и динамическом нагружении;
- математические основы и алгоритмы решения задач «Сопротивление материалов» в области упругих и упругопластических деформаций;

### **2) должен уметь:**

- составлять расчетные схемы для реальных элементов конструкций;
- строить эпюры внутренних силовых факторов, по которым определять положение опасных сечений бруса;
- выбирать рациональные формы поперечных сечений бруса и определять их геометрические характеристики;
- проводить расчеты бруса на прочность, жесткость и устойчивость в области упругих деформаций при статическом нагружении;
- проводить элементарные расчеты при динамическом (ударном) нагружении;
- экспериментально определять механические характеристики материалов.

### 1.3. Прочность, жесткость, устойчивость

*Основная задача сопротивления материалов – разработка методов, позволяющих подбирать надежные и наиболее экономичные размеры поперечных сечений элементов конструкций, а также наиболее целесообразную их форму.*

Кроме того, в сопротивлении материалов часто приходится решать и обратную задачу – *проверять достаточность принятых размеров конструкций.*

При решении основной задачи сопротивления материалов используется как опыт (эксперимент), так и теория, которые в этой науке тесно связаны между собой.

*Экспериментальные исследования* дают возможность изучить механические свойства и поведение каждого материала как в самых простых, так и в сложных условиях его работы.

*Теория* позволяет применить и обобщить результаты опытных исследований для построения метода расчета конструкций, находящихся в любых условиях работы.

***Сопротивление материалов – наука об инженерных методах расчета конструкций или отдельных их элементов на прочность, жесткость и устойчивость.***

Иными словами, методами сопромата определяются основные размеры тех элементов конструкции, которые подвергаются действию различных сил или, как говорят, несут нагрузку, т. е. эти *размеры определяются расчетом на прочность, жесткость и устойчивость.*

***Прочность*** – способность конструкции в целом и ее отдельных элементов *воспринимать определенную нагрузку, не разрушаясь.*

Для ответа на вопрос о прочности какого-то элемента необходимо изготовить этот элемент и нагрузить исследуемой нагрузкой. Если он не разрушился, значит, он прочен. Но это, понятно, непродуктивный путь. Так поступали в древности. Поэтому с давних времен разрабатываются и развиваются *методы расчета на прочность.*

***Жесткость*** характеризует способность конструкции *оказывать сопротивление деформации, т. е. изменению формы и размеров под действием нагрузки.*

Можно провести опыт и ответить на поставленный вопрос. Но, как и в предыдущем случае, лучше применять различные методы расчета на жесткость.

Тело под действием нагрузки в любом случае деформируется. Поэтому для величины деформации элементов конструкции устанавливаются определенные пределы. Эти пределы назначаются в зависимости от требований к конструкции с учетом опыта ее эксплуатации. Многие детали машин и механизмов должны иметь очень малые значения перемещений, чтобы обеспечивалось нормальное функционирование механизма. С другой стороны, многие конструкции нор-

мально работают при достаточно больших абсолютных значениях перемещений. Все зависит от особенностей конструкции, ее назначения.

Например: максимальное перемещение днища танкера при полной загрузке нефтью  $f = 1$  м. Это много или мало?

Нормы проектирования дают следующий диапазон допустимых значений так называемой стрелы прогиба:

$$f = \left( \frac{1}{100} \dots \frac{1}{600} \right) L.$$

Если длина корпуса танкера  $L = 300$  м, то  $f = \frac{1}{300} 300 = 1$  м.

Следовательно, в данном примере анализируемый параметр находится в пределах допустимых значений.

**Устойчивостью** называется *способность элементов конструкции сохранять под нагрузкой первоначальную форму упругого равновесия.*

Это требование относится в основном к сжатым элементам. *Нарушение первоначальной формы равновесия называется потерей устойчивости.* Оно опасно так же, как и разрушение. Примером потери устойчивости является выпучивание длинной и тонкой линейки, сжатой продольными силами, приложенными к ее концам. Экспериментальные методы и методы расчета на устойчивость также разрабатываются в сопротивлении материалов.

## 1.4. Краткая историческая справка

Первые исследования восходят к имени Г. Галилея (XVI в.). Он первым исследовал прочность стержней и практически доказал, что прочность бревна не зависит от его длины (как считали до него), а лишь от размеров его поперечного сечения.

При изучении сопротивления материалов будут упомянуты имена ученых, чьи исследования на разных этапах развивали знания о прочности, жесткости и устойчивости конструкций.

Это Исаак Ньютон, Роберт Гук, О. Л. Коши, А. Навье, Ж.-К. Сен-Венан, Д. Бернулли, С. Д. Пуассон, Т. Юнг и др. Многие русские ученые и ученые СССР – Д. И. Журавский, С. П. Тимошенко, А. Н. Крылов, Б. Г. Галеркин, А. А. Ильюшин, В. З. Власов, П. Ф. Папкович и др.

Современные школы прочности активно работают в МГТУ им. Баумана (В. И. Феодосьев, Н. Н. Малинин), ЛПИ (Н. М. Беляев), КПИ (Г. С. Писаренко).

Широко известны работы в области прочности сварных соединений ученых-сварщиков: академиков отца и сына Патонов – Евгения Оскаровича и Бориса Евгеньевича (Киев, ИЭС им. Патона), Г. А. Николаева, В. А. Ви-

нокурова, С. А. Куркина (Москва, МГТУ им. Баумана), Г. Л. Петрова, В. П. Демьянцевича, Н. О. Окерблома, Л. А. Копельмана (Ленинград, ЛПИ), О. А. Бакши (Челябинск, УПИ) и др.

**Примечание.** Здесь приведены названия вузов такими, как они именовались в период работы в них указанных ученых.

Отдельно следует упомянуть наших земляков – Николая Феликсовича Ястребского (1808–1874) и Ипполита Антоновича Евневича (1831–1903).

Н. Ф. Ястребский закончил физико-математический факультет Вильнюсского университета в 1829 г. Затем – институт Корпуса инженеров путей сообщения в Петербурге. Инженер-строитель. Профессор.

Первым в России начал исследовать прочность железа и стали. Впервые провел исследования по динамике машин. В 1837 г. издал первый в России учебник по сопротивлению материалов. Написал учебник по прикладной механике в двух томах.

В 1848 г. Н. Ф. Ястребский – начальник отделения Могилевского участка путей сообщения. Руководил строительством шоссе Могилев – Киев, Могилев – Бобруйск, Могилев – Довск. По его проекту и с его участием в Могилеве построен мост через реку Днепр (1860) длиной более 100 м.

Ушел Н. Ф. Ястребский в отставку полковником и прожил последние 26 лет жизни в Могилеве. О его жизни и научной и педагогической деятельности написана книга: *Гусак А. А. Практичная механіка і «Мёртвые души».* Мікалай Ястрэбскі. Сер. *Нашы славетныя землякі.* Мінск, 1992.

И. А. Евневич родился в Сеннеском уезде Могилевской губернии, ученый в области гидравлики и механики. Окончил в 1856 г. физико-математический факультет Петербургского университета.

С 1868 г. – профессор прикладной механики в Петербургском технологическом институте. Читал курс прикладной механики также и в других высших учебных заведениях России. Основные работы И. А. Евневича относятся к области гидравлики. В 1874 г. им опубликован «Курс гидравлики» (ч. 1 и 2) – один из первых по этой дисциплине. И. А. Евневич издал также монографию по теории упругости.

### ***Контрольные вопросы***

1. В чем отличие учебной дисциплины «Сопротивление материалов» от классической механики?

2. На каких дисциплинах базируется «Сопротивление материалов» и где используются выводы, полученные в этой дисциплине?

3. Перечислите задачи, решаемые в сопромате, и дайте определения прочности, жесткости и устойчивости.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, МЕТОДЫ И ПРИНЦИПЫ

### 2.1. Расчетная схема

При проведении проектировочных расчетов конструктор имеет дело с так называемой **расчетной схемой**: *схемой конструкции, где все элементы имеют упрощенную (идеализированную) форму, предполагается использование идеальных материалов, воздействие внешних нагрузок также упрощается.*

При создании расчетной схемы учитываются только основные данные о проектируемом сооружении и его работе при воздействии различных внешних факторов.

В первую очередь реальные конструктивные элементы заменяются их осями, идеализируются опорные устройства, вместо поперечных сечений, независимо от их формы и размеров, рассматриваются их геометрические характеристики, а внешние нагрузки приводятся к осям элементов.

Иначе говоря, создается модель сооружения, в которой рассматриваются:

- модель формы отдельных элементов конструкции, а иногда и всей конструкции;
- модель материала, из которого изготавливаются элементы конструкции;
- модель внешнего воздействия на отдельные элементы и на конструкцию в целом.

#### 2.1.1. Схематизация формы

Конструкции, с которыми инженеру приходится встречаться на практике, имеют в большинстве случаев сложную форму. Отдельные элементы конструкции (их форма) сводятся к следующим простейшим типам.

1. Брус – *тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим (рис. 2.1).*

Геометрически брус может быть образован путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой. Эта *кривая называется осью бруса*, а *плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и перпендикулярная к ней (оси), – его поперечным сечением.* Брус может иметь сечение и постоянное, и переменное вдоль оси. В зависимости от формы оси брус может быть прямым, кривым или пространственно изогнутым. *Брус с прямолинейной осью называется стержнем.*

Среди стержней в первую очередь различают балки, колонны, стойки и др. Такое подразделение связано главным образом с назначением стержней и той ролью, которую они играют в конструкциях.

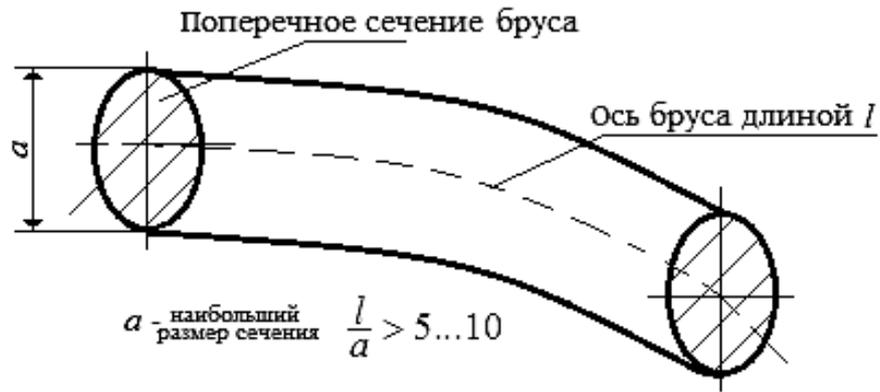


Рис. 2.1. Брус с криволинейной осью

Например, понятие «балка» употребляется для стержней, работающих на изгиб, понятие «колонна и стойка» – для вертикальных стержней, работающих преимущественно на сжатие.

2. Пластина – *тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами* (рис. 2.2).

Из пластин, например, собирают плоские днище и кровлю резервуара, пластинами являются плиты перекрытий между этажами здания и т. п.

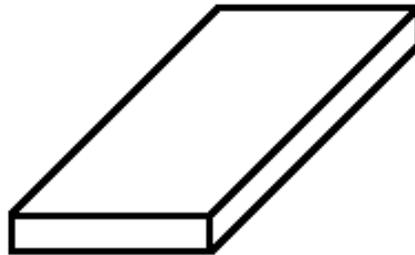


Рис. 2.2. Пластина

3. Оболочка – *тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами* (рис. 2.3).

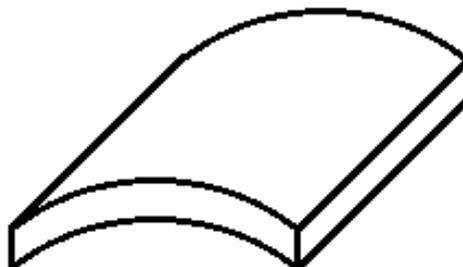


Рис. 2.3. Оболочка

Оболочкой, например, является корпус цилиндрического или сферического резервуара, корпус газового баллона и т. п.

4. Массив – тело, у которого все три размера одного порядка (рис. 2.4).

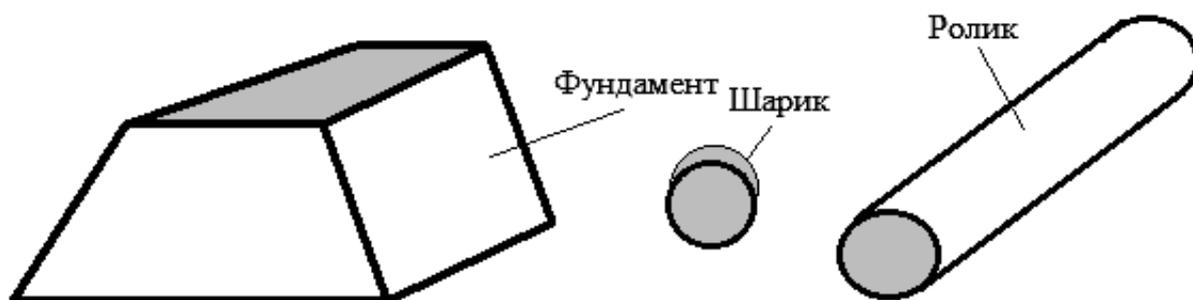


Рис. 2.4. Массив

Массивом, например, можно считать фундамент под конструкцию, шарик или ролик подшипника качения.

Таким образом, определяющим является соотношение характерных размеров: вал – это и вал турбины, и карданный вал автомобильного двигателя, и ось в часах и т. д.

### 2.1.2. Схематизация материала

Свойства материала схематизируются в соответствии с допущениями об этих свойствах.

Данные допущения в дальнейшем позволят установить математические соотношения между действующими силами, геометрическими размерами деталей конструкции, их изменением.

В сопротивлении материалов принимаемые предпосылки таковы, что полученные на их основе расчетные формулы дают результаты, достаточно близкие к результатам опытов.

Основные допущения о свойствах материалов сводятся к следующим.

1. Материал, из которого изготавливают конструкции, считается по своему строению *однородным* – физико-механические свойства во всех его точках *одинаковы*. Даже бетон, т. к. размеры инородных частиц, по сравнению с размерами сечения бруса, малы. Другое дело – специальные дисциплины, в которых рассматриваются реальные материалы, когда такое допущение может привести к значительным погрешностям расчета.

2. Материал по своему строению полагают *сплошным и непрерывным*, т. е. *материал заполняет весь объем тела без пустот*.

Допущение о сплошности и непрерывности тел, рассматриваемых в сопротивлении материалов, является следствием допущения об однородности материала.

3. Материалы рассматриваются как *изотропные*, т. е. обладающие одинаковыми механическими свойствами во всех направлениях.

Исследования показывают, что кристаллы, из которых состоят многие материалы, обладают в различных направлениях весьма различными свойствами. Например, для меди прочность кристаллов в разных направлениях различается более чем в 3 раза. Поэтому данное допущение не всегда возможно использовать.

*Изотропными* можно считать металл, камни, бетон, некоторые пластмассы.

*Многие строительные материалы*, имеющие волокнистое строение, например *древесина*, характеризуются различными свойствами в разных направлениях; такие материалы называются *анизотропными*.

Совпадение результатов теории с опытом получается тем лучше, чем однороднее материал и чем ближе он по своим свойствам к изотропному телу.

Применение методов сопротивления материалов к расчету анизотропных материалов дает в ряде случаев значительные погрешности.

*Наука о сопротивлении материалов*, отказываясь от принятого в теоретической механике допущения об абсолютной твердости тела, учитывает, что *все тела под действием приложенных к ним внешних сил в той или иной степени деформируются, т. е. изменяют свои размеры или форму либо и то и другое одновременно*. При этом *отдельные точки тела перемещаются*.

В сопротивлении материалов изучают *только те перемещения точек тела, которые возникают в связи с его деформацией*.

*Изменение линейных размеров тела называется линейной деформацией; изменение угловых размеров – угловой деформацией*. При этом увеличение размеров тела называется *удлинением*, а уменьшение – *укорочением*.

Деформации могут быть как *малыми по величине*, так и *большими*. Их значения связаны с первоначальными размерами тела, нагрузками, определенными свойствами материала. *В сопротивлении материалов изучают только малые деформации*.

Опыт показывает, что деформации, как линейные, так и угловые, могут после снятия нагрузки или полностью исчезнуть, или исчезнуть лишь частично (это зависит от материала и степени нагружения). *Тело называется абсолютно упругим, если оно полностью восстанавливает свою первоначальную форму после снятия нагрузки*.

4. *Все тела (материалы) предполагаются абсолютно упругими*. В действительности это справедливо только при определенных величинах нагрузок.

*Деформации, исчезающие после разгрузки тела, называются упругими*.

*Свойство тел восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после прекращения действия нагрузки называется упругостью.*

Хотя в природе таких тел не существует, но многие строительные материалы (сталь, дерево и др.) в пределах практически допустимых нагрузок получают весьма малые остаточные деформации, в связи с чем их можно рассматривать как упругие тела.

*Деформации, сохраняемые телом и после удаления нагрузки, называются остаточными, или пластическими деформациями.*

*Пластичность – свойство материалов получать остаточные деформации без нарушения сплошности и образования трещин.*

*Жесткость – свойство материалов сопротивляться упругим деформациям.*

*Хрупкость – свойство материала бруса к моменту разрушения претерпевать весьма малые деформации, т. е. разрушение развивается без видимых изменений размеров.*

*Вязкость – свойство материала поглощать механическую энергию в пластически деформируемых объемах без снижения прочности.*

Один и тот же материал в разных условиях может быть пластичным или хрупким.

## **2.2. Схематизация нагрузок**

Под термином «нагрузка» в сопротивлении материалов понимают силовое воздействие различной природы. Поэтому часто употребляют термин «сила», который объединяет силы, пары сил (моменты), распределенные силы.

Все силы, с которыми приходится встречаться при проведении расчетов, делятся на *силы внешние и силы внутренние*.

### **2.2.1. Классификация внешних сил**

На элементы машин и конструкций всегда действуют *внешние силы*, которые являются результатом взаимодействия рассматриваемых элементов с другими телами.

*Внешними силами* называются силы, действующие на брус в целом при рассмотрении его как единого твердого тела. Внешние силы действуют на брус извне, и они делятся на активные внешние силы и реактивные внешние силы.

*Активными внешними силами*, или заданными силами, называются все те действующие на брус силы, которые задаются самим назначением бруса и брусом воспринимаются.

*Реактивными внешними силами*, или опорными реакциями, называются силы сопротивления опорных устройств.

Вспомним особенности опорных устройств. Различают следующие три основных типа опорных устройств:

1) *подвижная шарнирная* цилиндрическая опора, не препятствующая свободному повороту бруса на опоре и осевому смещению бруса вдоль опорной плоскости. Такая опора исключает возможность перемещения опорного сечения бруса только в направлении, перпендикулярном смещению катка по опорной плоскости, действуя на брус реакцией, т. е. *опора имеет одну связь* (рис. 2.5, а, б);

2) *шарнирно-неподвижная* цилиндрическая опора, допускающая поворот опорного сечения бруса, но препятствующая линейному перемещению опоры в силовой плоскости. В общем случае действие связи, налагаемой неподвижной опорой, выражается сосредоточенной силой, направленной в силовой плоскости под любым углом к оси бруса (рис. 2.6, а, б).

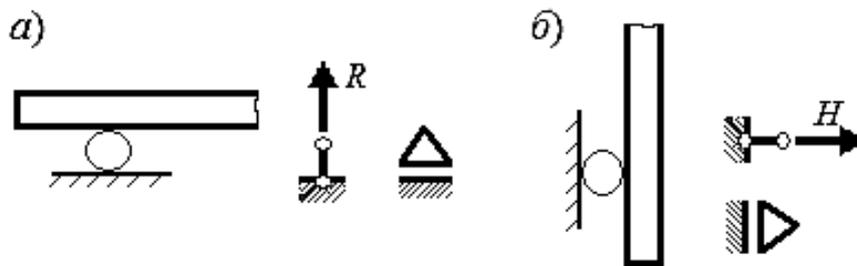


Рис. 2.5. Шарнирно-подвижная опора

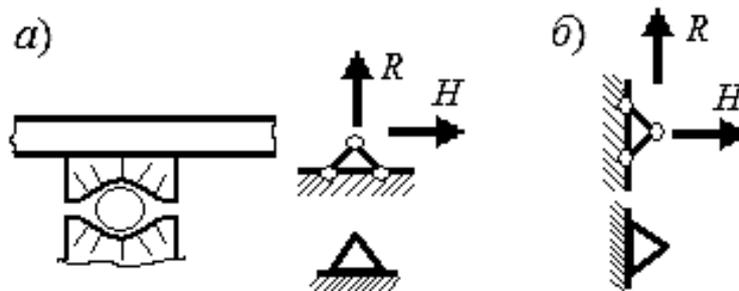


Рис. 2.6. Шарнирно-неподвижная опора

По правилам механики такая сила может быть разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие: перпендикулярную и параллельную оси бруса. Поэтому принимают, что неподвижная опора создает одновременно две реакции:  $R$  и  $H$ , каждая из которых в частном случае может равняться нулю, т. е. такая *опора имеет две связи*;

3) *заделка*, т. е. *неподвижная опора* с защемлением конца бруса. При нагружении бруса заделанный конец не может ни повернуться, ни сместиться вдоль какой-либо оси. Заделка исключает возможность всех трех перемещений

примыкающего к ней сечения, вследствие чего в заделке возникают одновременно три реакции:

– две взаимно перпендикулярные сосредоточенные силы  $R$  и  $H$ , препятствующие линейному перемещению опорного сечения в силовой плоскости;

– момент в заделке  $m$ , т. е. момент реактивной пары сил, препятствующей угловому перемещению или повороту плоскости опорного сечения вокруг оси  $Z$ , перпендикулярной плоскости  $XY$ . Такая опора имеет три связи (рис. 2.7, а, б).

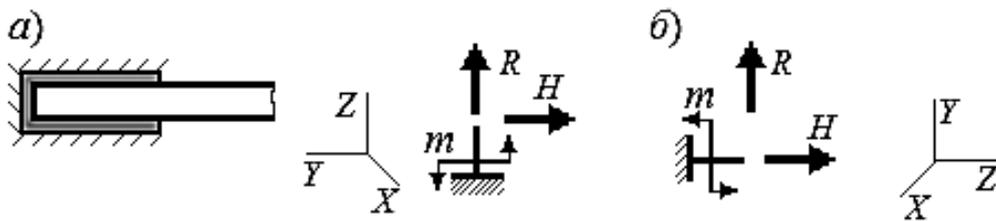


Рис. 2.7. Заделка

Внешние силы классифицируются следующим образом.

По способу приложения различают силы *объемные* и *поверхностные*.

*Объемные силы* распределяются непрерывно по всему объему тела. Примером таких сил могут служить силы тяжести, силы инерции, силы, создаваемые магнитными полями.

Силы, действующие на какую-либо наружную поверхность элемента, называются *поверхностными*.

*Поверхностные силы* в свою очередь подразделяются на *сосредоточенные* и *распределенные*.

Сосредоточенными называют силы  $F$  и пары сил – моменты  $m$ , передающиеся на элемент конструкции через площадку незначительных размеров по сравнению с размерами всего элемента.

*Силы* имеют размерность ньютон, килоньютон (Н, кН); *моменты* – ньютон-метр, килоньютон-метр (Н·м, кН·м).

Следует иметь в виду, что сосредоточенных сил (моментов) в природе не существует, это понятие введено для упрощения расчетов; малую площадку, через которую передается сила, считают не имеющей размеров, т. е. *полагают, что сила или момент действует в точке* (рис. 2.8, а, б).

*Распределенными* нагрузками называют силы, приложенные непрерывно по некоторой длине или по площади на поверхности бруса.

*Нагрузка, распределенная по длине*, имеет размерность ньютон на метр или килоньютон на метр (Н/м или кН/м).

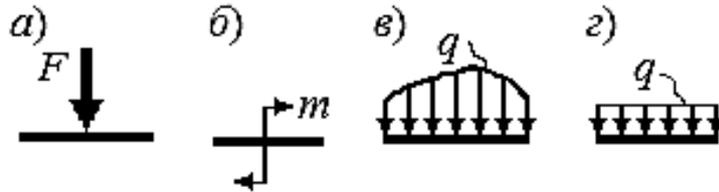


Рис. 2.8. Поверхностные силы

Распределенная нагрузка характеризуется *интенсивностью распределенной нагрузки*  $q$ , численно выражаемой величиной силы, приходящейся на единицу поверхности. Она (интенсивность) может изменяться по длине (или площади) по произвольному закону (рис. 2.8, в). В частности, если интенсивность постоянна по длине – это равномерно распределенная нагрузка (рис. 2.8, г).

Иногда рассматриваются схемы нагружения, когда по длине или поверхности приложен распределенный момент.

В зависимости от времени действия различают нагрузки *постоянные и временные*.

*Постоянная нагрузка* действует в течение всего времени работы конструкции (собственный вес).

*Временные нагрузки* действуют лишь в течение относительно коротких периодов времени (вес поднимаемого груза для крана, вес поезда, идущего по мосту).

По характеру воздействия на тело нагрузки ( $m$ ,  $F$ ,  $q$ ) могут быть подразделены на *статические, динамические и повторно-переменные*. Графически эти нагрузки можно представить на рис. 2.9.

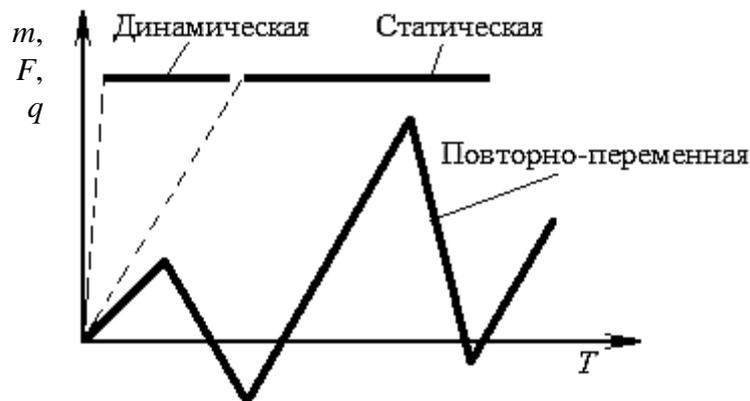


Рис. 2.9. Примерный характер изменения нагрузки во времени

*Статическая нагрузка* прикладывается к элементу конструкции, возрастая постепенно от нуля до полной величины, и затем в течение более или менее

длительного промежутка времени  $T$  не изменяет или почти не изменяет своей величины.

*Динамическая нагрузка* прикладывается к элементу конструкции сразу (или за малый промежуток времени  $T$ ) всей своей величиной и в ряде случаев в момент приложения имеет некоторую скорость, а следовательно, запас кинетической энергии. Детали машин во многих случаях подвергаются ударному воздействию нагрузок, связанных с движением этих деталей. Наличие ускорений при движении сопровождается возникновением сил инерции. Эти силы и обуславливают ударный характер нагрузок на детали машин.

*Повторно-переменная нагрузка* изменяется с течением времени, обычно по периодическому закону. Такой же эффект может возникать и от постоянной нагрузки в подвижных элементах.

### **2.2.2. Понятие о внутренних силах**

*Внутренними силами* называются силы, которые возникают внутри бруса в результате изменений его размеров и формы, вызванных приложением к телу внешних сил.

По своей природе внутренние силы представляют собой взаимодействие частиц тела, обеспечивающее его целостность. Они возникают в бресе при приложении нагрузок.

*Внутренние силы – это силы, которые возникают в теле в ответ на действие внешних сил – силы сопротивления изменению размеров и формы тела под действием нагрузок.*

Из физики известно, что целостность и форма тела сохраняются за счет сил межатомного притяжения. При рассмотрении твердых тел считается, что в ненагруженном теле силы межатомных связей отсутствуют. А вот *дополнительные силы сопротивления нагрузкам – внутренние силы – изучаются в сопромате.*

### **2.2.3. Особенности расчетных схем в сопротивлении материалов**

Исходя из вышеизложенного, можно указать на некоторые *особенности расчетных схем, которые используются в сопротивлении материалов.* При составлении расчетных схем допускаются некоторые отступления от действительных условий работы конструкции.

Рассчитывая, например, канат  $AB$  (рис. 2.10) на действие растягивающих усилий, условно заменяют его одной прямой линией  $AB$  (осью каната), на концах которой приложены внешние растягивающие усилия  $F$ . Величины

растягивающих усилий определяются весом  $F$  подвешенных грузов. Потери на трение в блоках, а также вес самого каната не учитываются.

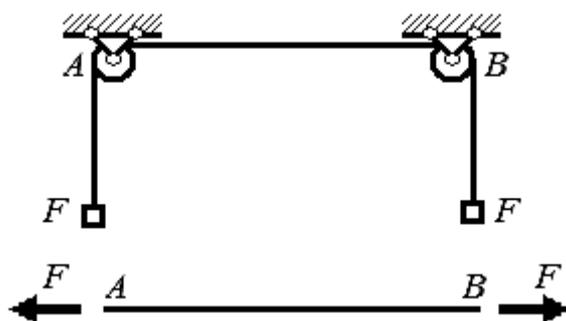


Рис. 2.10. Расчетная схема каната

Если рассчитывается брус  $AB$ , несущий тележку с грузом (рис. 2.11, *a*), то на расчетной схеме весь брус условно заменяют тоже одной прямой линией (обычно считается, что нагрузка, действующая на балку, передается на ось) с опорами в точках  $A$  и  $B$  (рис. 2.11, *б*). Векторами  $F_1$  и  $F_2$  обозначаются сосредоточенные силы, выражающие усилия, передающиеся на брус колесами тележки. Если конструкция тележки симметрична, то

$$F_1 = F_2 = \frac{G}{2},$$

где  $G$  – вес тележки с грузом.

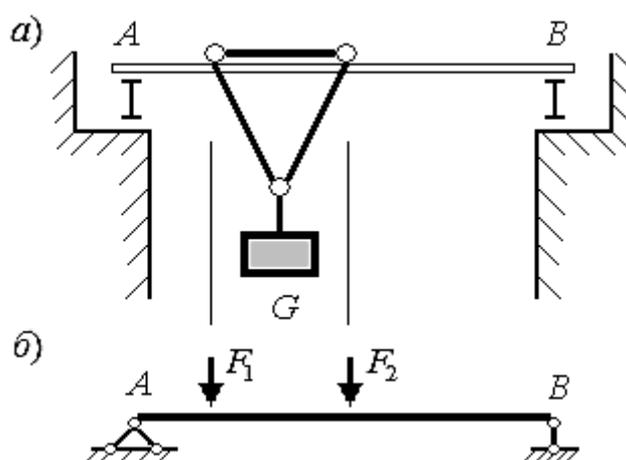


Рис. 2.11. Расчетная схема бруса с тележкой

При составлении расчетных схем необходимо иметь в виду, что при составлении расчетных схем *некоторые правила теоретической механики*

применять нельзя. Так обстоит дело, например, с переносом сил по линии их действия и с заменой сил их равнодействующей (рис. 2.12).

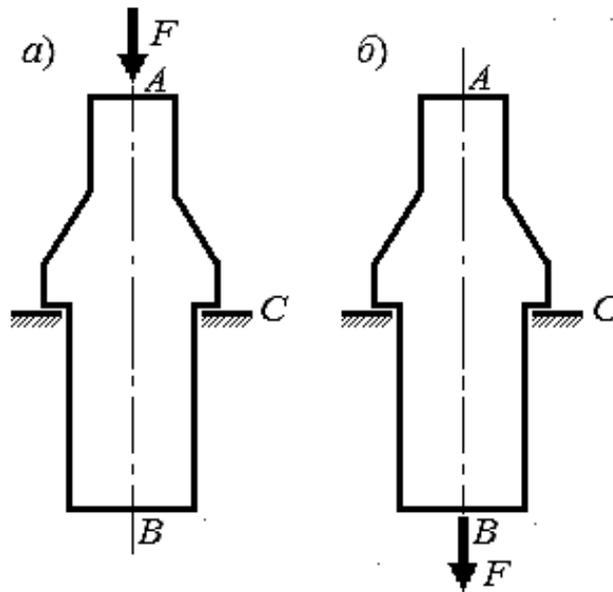


Рис. 2.12. Влияние переноса сил на деформацию стержня

На стержень в точке  $A$  действует сила. Если эту силу по линии действия перенести в точку  $B$ , то равновесие стержня не нарушится, реакции в точках опоры не изменятся, но характер деформации стержня изменится:

–  $AC$  – на этом участке брус испытывает сжатие, а на  $CB$  – не нагружен (см. рис. 2.12,  $a$ );

–  $AC$  – брус не нагружен,  $CB$  – брус испытывает растяжение (см. рис. 2.12,  $b$ ).

Замена системы сил на их равнодействующую резко изменяет форму изгиба бруса (рис. 2.13).

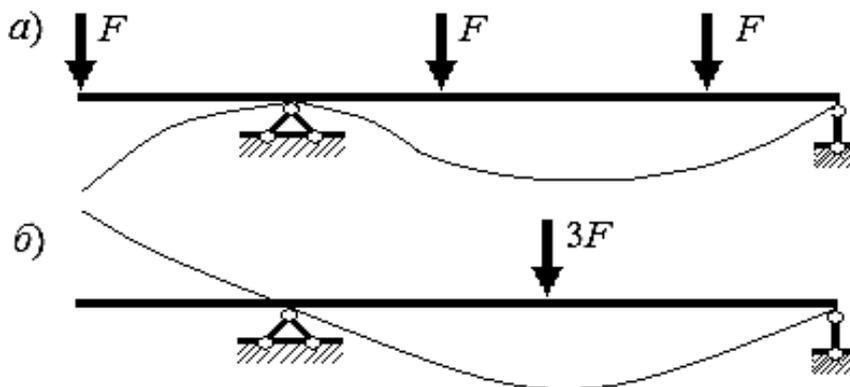


Рис. 2.13. Изменение формы изгиба балки при замене системы сил на их равнодействующую

В зависимости от поставленной задачи расчетная схема может видоизменяться. Никаких определенных рецептов в области составления расчетных схем не существует, т. к. и сами рассчитываемые детали, и условия их работы под действием нагрузки могут иметь множество вариантов.

### 2.3. Основные гипотезы о деформируемом теле

Упрощения в расчетные схемы и, естественно, в сами расчеты вносят и так называемые гипотезы, в которых декларируются некоторые допущения о процессах деформирования и соотношениях этих деформаций.

#### 1. Гипотеза (принцип) начальных размеров.

*Перемещения, возникающие в упругих телах под воздействием внешних сил, очень малы по сравнению с размерами рассматриваемых элементов.*

Это допущение позволяет во многих случаях не учитывать изменения размеров тел при их деформациях и связанных с ними изменений в расположении сил.

Рассмотрим упругое тело под действием некоторой системы сил (рис. 2.14). Брус имеет длину  $l$  и жестко закреплен. На расстоянии  $a$  от заделки в точке 1 приложена сила  $F_1$  под углом  $\alpha$  к горизонту. На конце консоли в точке 2 приложена сила  $F_2$ .

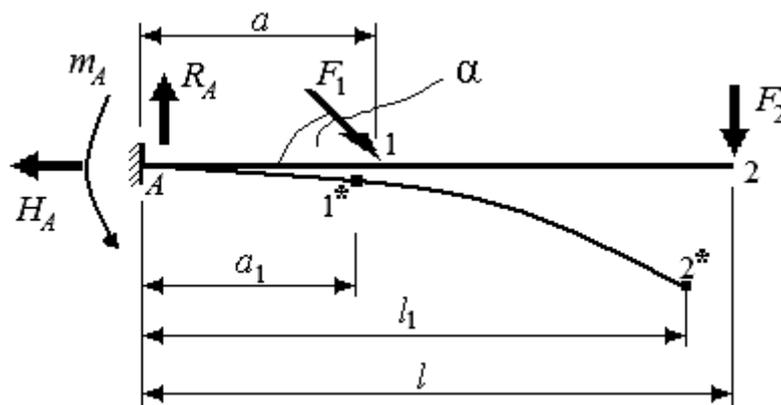


Рис. 2.14. К гипотезе «принцип начальных размеров»

Вследствие деформаций тела:

- а) изменяются размеры тела и взаимное расположение сил, точки приложения сил переместятся;
- б) точка приложения силы  $F_1$  переместится из положения 1 в положение  $1^*$ ; точка приложения силы  $F_2$  – из положения 2 в  $2^*$ ;
- в) расстояния от точек приложения сил  $F_1$  и  $F_2$  до заделки уменьшатся.

Если определить реактивный момент в заделке с учетом изменения размеров, составив уравнение моментов относительно точки  $A$ , получим

$$\sum m_A = 0; \quad F_2 l_1 + F_1 a_1 \sin \alpha - m_A = 0,$$

откуда

$$m_A = F_2 l_1 + F_1 a_1 \sin \alpha.$$

Величины  $l_1$  и  $a_1$  неизвестны и их определение сложно. Учитывая, что изменение расстояний ничтожно мало, можно принять  $l_1 \approx l$  и  $a_1 \approx a$ , тогда определение реактивного момента не вызовет затруднений.

*Согласно принципу начальных размеров при составлении уравнений статики тело рассматривают как недеформированное, имеющее те же геометрические размеры, какие оно имело до нагружения внешними силами.*

Принцип начальных размеров применяется при расчете так называемых *кинематически неизменяемых систем*.

*Система тел, на которую наложены связи, достаточные для того, чтобы исключить ее перемещение в пространстве как жесткого целого, называется кинематически неизменяемой.*

В сопротивлении материалов, как правило, рассматриваются именно такие системы.

*Принцип начальных размеров не может применяться в случае больших перемещений.*

Кроме того, как исключение, принцип начальных размеров может оказаться неприемлемым и при малых перемещениях, если при этом форма системы меняется существенным образом. Например, для двух шарнирно связанных стержней, расположенных на одной прямой, условия равновесия узла  $A$  должны обязательно составляться с учетом угла наклона  $\alpha$ , возникающего вследствие удлинения стержней (рис. 2.15).

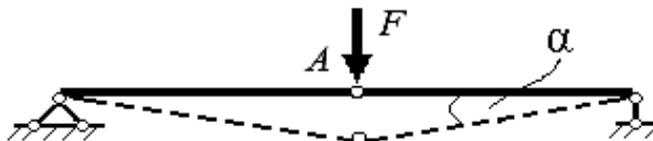


Рис. 2.15. Пример мгновенно изменяемой системы

Системы подобного рода называются *мгновенными механизмами*. Это означает, что в какой-то момент система становится кинематически изме-

няемой, т. е. допускает перемещения элементов, не сопровождающиеся деформациями (в данном случае кинематическая изменяемость имеет место в окрестности исходного положения, в котором три шарнира находятся на одной прямой). В отличие от мгновенного механизма, обычный механизм обладает кинематической изменяемостью независимо от взаимного расположения составляющих элементов.

## 2. Закон Гука.

*Перемещения точек упругого тела прямо пропорциональны действующим нагрузкам.*

Данное предположение справедливо лишь в известных пределах нагружения. Элементы и конструкции, подчиняющиеся этому допущению, называются *линейно деформируемыми*.

Пример, поясняющий суть прямой пропорциональной зависимости между нагрузками и перемещениями, приведен на рис. 2.16.

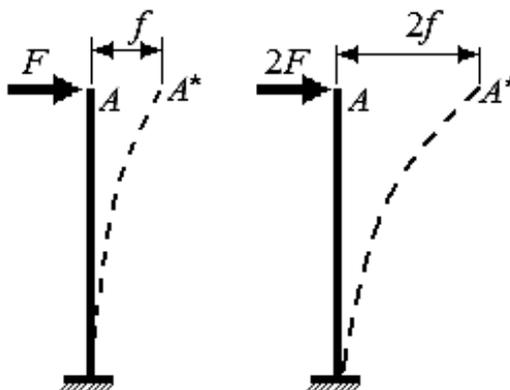


Рис. 2.16. К иллюстрации закона Гука

Под действием силы  $F$  точка  $A$  стержня переместится на величину  $f$  (в точку  $A^*$ ), а под действием силы  $2F$  перемещение этой точки будет в два раза большим –  $2f$ .

## 3. Принцип независимости действия сил.

*Вследствие малости перемещений, рассматриваемых в сопротивлении материалов, и прямо пропорциональной зависимости перемещений от нагрузок можно полагать, что внешние силы действуют независимо одна от другой.*

Иными словами, *внутренние силы и перемещения, возникающие в упругом теле от какой-либо системы внешних сил, не зависят от порядка, в котором эти силы прикладываются.*

Следовательно, общее действие всей системы сил равно сумме действий каждой силы, взятой в отдельности. Это положение известно под назва-

нием принципа независимости действия сил; иногда его называют *принципом суперпозиции*.

Рассмотрим пример: к брусу (рис. 2.17) приложена система сил  $F_1, F_2, F_3$ .

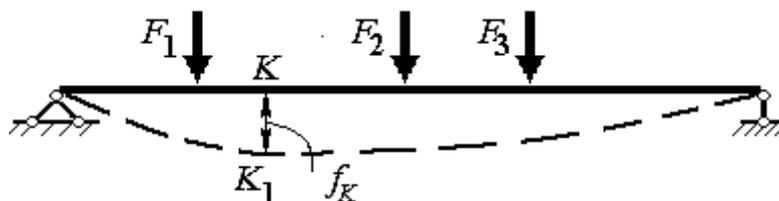


Рис. 2.17. Иллюстрация принципа независимости действия сил

Под действием этих сил тело деформируется и некоторая его точка  $K$  переместится в положение  $K_1$ . Заданная нагрузка может быть приложена самыми различными способами. Все три силы могут быть приложены одновременно или поочередно в разных сочетаниях. Независимо от этого прогиб в точке  $K$  будет одинаковым. Полный прогиб в точке  $K$  можно найти как сумму прогибов от каждой из приложенных сил:

$$f_K = f_{1K} + f_{2K} + f_{3K},$$

где  $f_{1K}, f_{2K}, f_{3K}$  – прогибы в точке  $K$ , вызванные силами  $P_1, P_2, P_3$ .

#### 4. Принцип Сен-Венана.

*В точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа осуществления этих нагрузок.*

*Принцип Сен-Венана во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что может упростить расчет.*

Например, при расчете рельса (рис. 2.18) как стержня, опирающегося на многие опоры (шпалы), можно фактическую нагрузку от колеса, распределенную по площадке контакта по некоторому закону (определить который довольно сложно), заменить сосредоточенной силой.

#### 5. Гипотеза плоских сечений.

*Согласно данной гипотезе плоские до деформации поперечные сечения бруса остаются плоскими и нормальными к оси бруса и после деформации.*

Гипотеза плоских сечений вносит значительные упрощения в теорию явлений, возникающих при упругой деформации. Основные положения сопротивления материалов строятся на этой гипотезе. Более подробно применение данной гипотезы будет обсуждаться в дальнейшем.

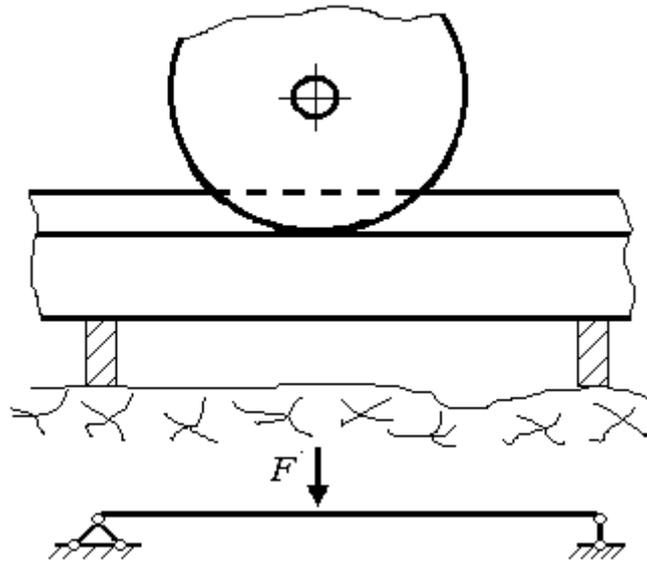


Рис. 2.18. Расчетная схема рельса с учетом принципа Сен-Венана

## 2.4. Метод определения внутренних сил – метод сечений

### 2.4.1. Главный вектор и главный момент

Рассмотрим *стержень, находящийся в равновесии* под действием внешних сил  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  (рис. 2.19).

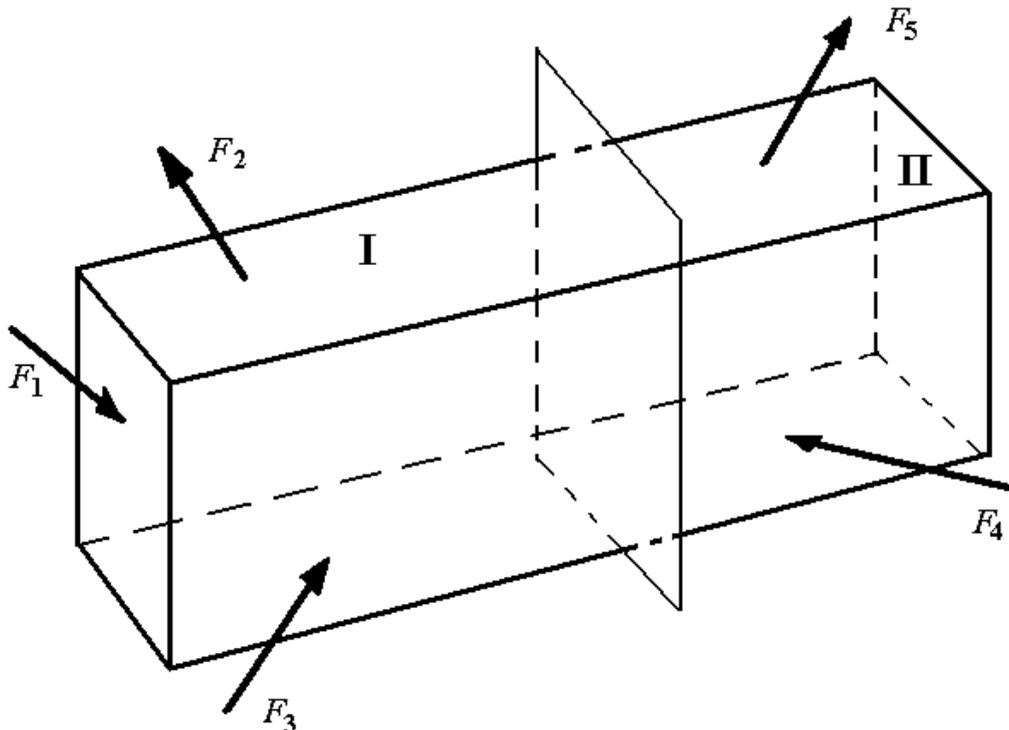


Рис. 2.19. Стержень, нагруженный внешними силами

Если мысленно разделить это тело плоскостью на две части, то взаимодействие частей I и II заменяется внутренними усилиями, которые уравнивают внешние силы, действующие на отсеченную часть.

Так как тело находится в равновесии, то и любая его часть также находится в равновесии.

Таким образом, равновесие каждой части стержня поддерживается системой внутренних сил (рис. 2.20).

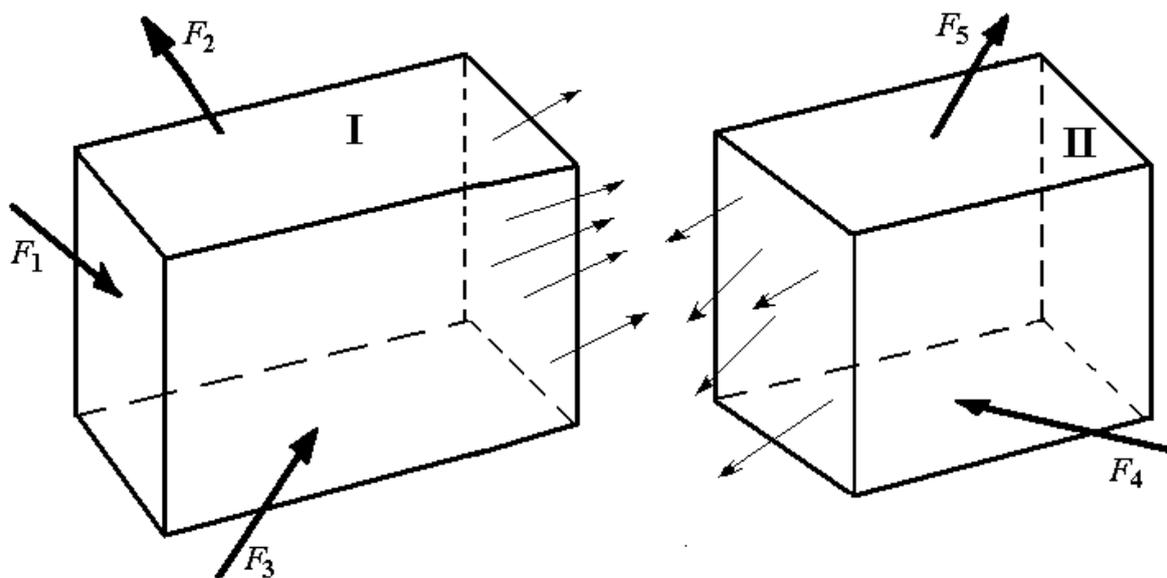


Рис. 2.20. Части стержня с приложенной в сечении системой внутренних сил

*Внутренние силы, действующие на эти две части, взаимны.*

*Это значит, что их величины равны, а направления противоположны.*

Рассмотрим, например, часть II (рис. 2.21). Внешние силы  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_5$  должны уравниваться внутренними силами, действующими по всей плоскости сечения.

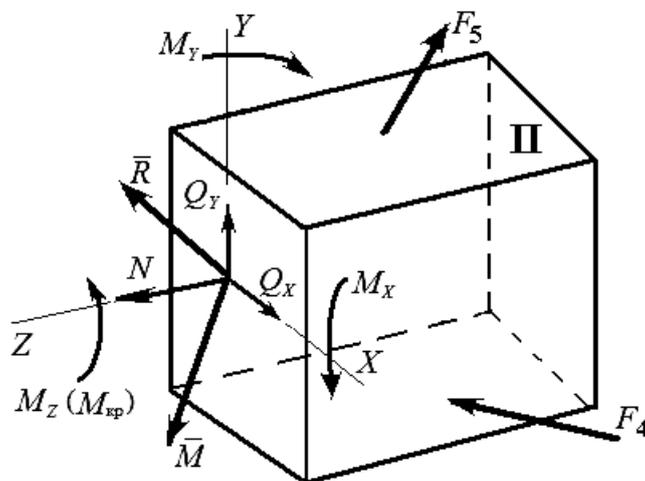


Рис. 2.21. Главные вектор и момент, внутренние силовые факторы

В соответствующем разделе теоретической механики рассматривается *теорема о возможности приведения произвольной системы сил к главному вектору и главному моменту (теорема Пуансо)*. Следовательно, и рассматриваемую систему внутренних сил можно привести к одной силе  $\bar{R}$  (главному вектору) и одной паре сил  $\bar{M}$  (главному моменту), которые прикладываются в центре (приводятся к центру) тяжести сечения (см. рис. 2.21).

### 2.4.2. Внутренние силовые факторы

При изучении внутренних сил в стержнях рекомендуется проводить сечение перпендикулярно оси стержня.

Выберем оси координат  $X, Y, Z$  с началом в центре тяжести сечения так, чтобы оси  $X$  и  $Y$  лежали в его плоскости (см. рис. 2.21). При разложении главного вектора  $\bar{R}$  и главного момента  $\bar{M}$  на эти оси получим *шесть* так называемых *внутренних силовых факторов*:

$N$  – *продольная или нормальная сила*. Действует перпендикулярно сечению;

$Q_x, Q_y$  – *поперечные силы*. Действуют в плоскости сечения;

$M_x, M_y$  – *изгибающие моменты*. Пары сил, которые действуют относительно осей, расположенных в плоскости сечения;

$M_z$  – *крутящий момент* (часто обозначают  $M_{кр}$ ). Пара сил, которая действует относительно оси, перпендикулярной сечению.

Учитывая *допущения о малости деформаций* (тело абсолютно твердое) и *принцип начальных размеров для определения внутренних силовых факторов*, используют *уравнения равновесия*, известные из курса теоретической механики, применяя их для одной (любой) из отсеченных частей:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0. \quad (2.1)$$

Метод определения внутренних сил, рассмотренный ранее, называется *методом сечений*.

Для нахождения внутренних силовых факторов методом сечений *необходимо*:

- 1) *разрезать (мысленно) стержень*;
- 2) *отбросить одну часть (лучше ту часть, где приложено больше сил)*;
- 3) *заменить действие отброшенной части внутренними усилиями, приложенными в сечении*;
- 4) *уравновесить (составить уравнения равновесия для отсеченной части)*.

Иногда говорят – *правило РОЗУ: разрезаю, отбрасываю, заменяю, уравниваю*.

### 2.4.3. Классификация видов (типов) нагружения

Виды нагружения тела различают в зависимости от того, какие из внутренних силовых факторов действуют в сечении бруса (что связано с внешними силами). Если в сечении бруса действует только один внутренний силовой фактор (ВСФ), то это простые виды нагружения бруса. Если в сечении действуют одновременно несколько ВСФ, то это так называемое сложное сопротивление.

К простым видам нагружения относятся:

1) *растяжение (сжатие)*. Внешние силы действуют вдоль оси бруса – оси  $Z$  (рис. 2.22). В поперечных сечениях возникает только один ВСФ – продольная сила  $N$ . При этом брус укорачивается или удлиняется в направлении оси  $Z$ ;

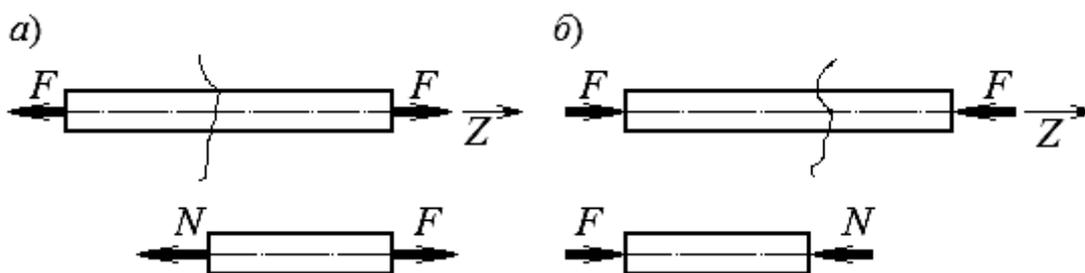


Рис. 2.22. Растяжение (а) и сжатие (б) бруса

2) *сдвиг (срез)*. Внешние силы действуют поперек оси бруса (рис. 2.23), сдвигая одну часть его по отношению к другой. В поперечных сечениях возникает только один ВСФ – поперечная сила  $Q_x$  или  $Q_y$ . При этом части бруса сдвигаются в сечении по отношению друг к другу в направлении оси  $X$  или оси  $Y$ , которые перпендикулярны оси бруса – оси  $Z$ ;

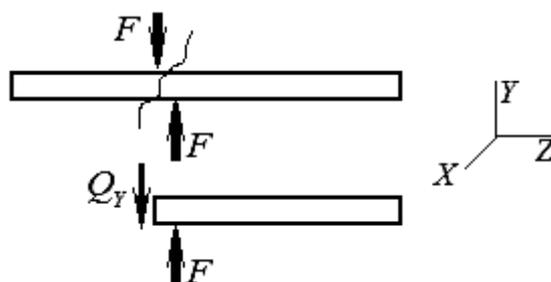


Рис. 2.23. Сдвиг (срез)

3) *кручение*. Внешние нагрузки создают пары сил  $m$  относительно продольной оси бруса (рис. 2.24). В поперечных сечениях возникает только один ВСФ – *крутящий момент*  $M_Z$  ( $M_{кр}$ ). Ось бруса остается прямой, а его поперечные сечения поворачиваются вокруг оси бруса (оси  $Z$ ) относительно друг друга на некоторый угол;

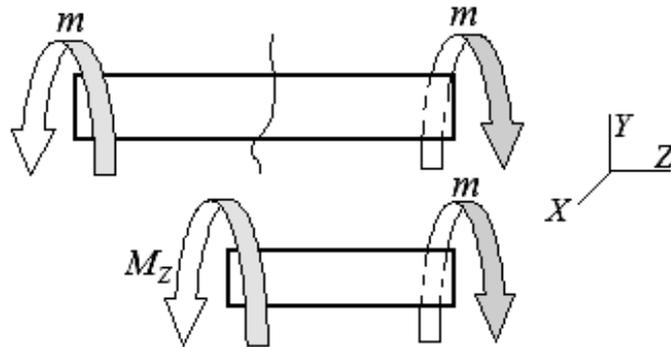


Рис. 2.24. Кручение

4) *чистый изгиб*. Внешние нагрузки создают пары сил  $m$  относительно одной из осей, перпендикулярных продольной оси (рис. 2.25).

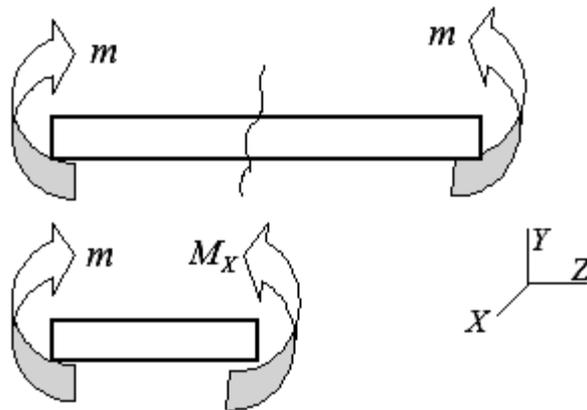


Рис. 2.25. Чистый изгиб

Во всех сечениях бруса возникает только один ВСФ – *изгибающий момент*  $M_X$  или  $M_Y$ . Ось бруса искривляется (*изгибается*);

5) *поперечный изгиб*. Этот вид нагружения **условно** отнесен к простым видам. Внешние нагрузки действуют поперек оси бруса (рис. 2.26). В поперечных сечениях возникают два ВСФ – *поперечная сила* и *изгибающий момент*  $Q_Y$  и  $M_X$  или  $Q_X$  и  $M_Y$ .

В случае *сложного нагружения* внешние нагрузки могут быть приложены так, что в поперечных сечениях бруса будут возникать сразу несколько ВСФ в разных сочетаниях:  $Q + N$ ;  $Q + N + M_{изг}$ ;  $M_{изг} + M_{кр}$  и в других сочетаниях.

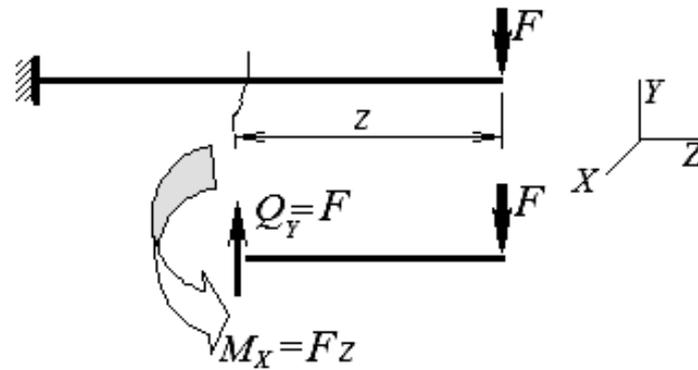


Рис. 2.26. Поперечный изгиб

## 2.5. Определение понятий «напряжения», «перемещения», «деформации»

### 2.5.1. Напряжения

Рассмотрим одну из частей произвольно нагруженного бруса. В сечении этой части бруса, в произвольной точке  $K$ , выделим площадку  $\Delta A$  (рис. 2.27).

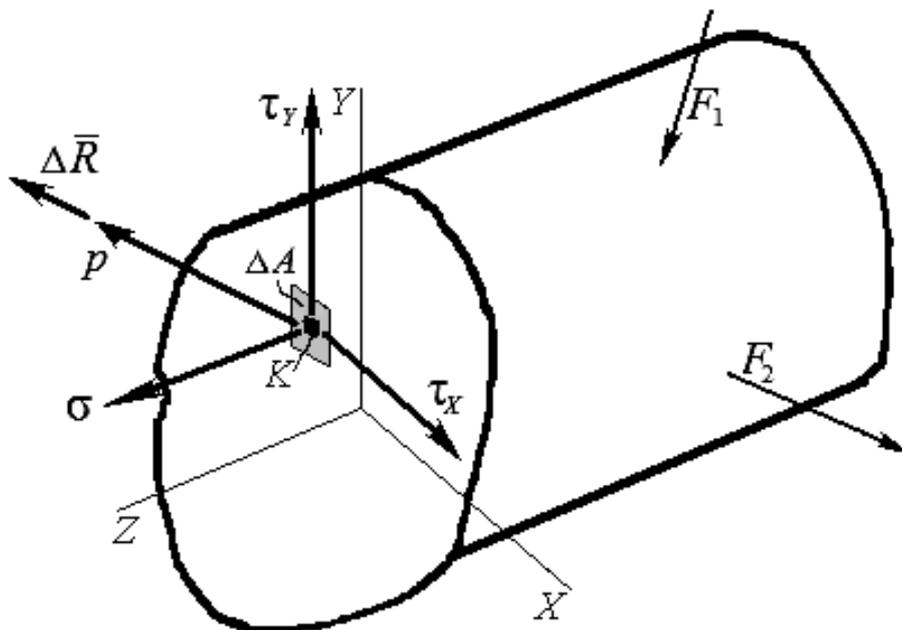


Рис. 2.27. Напряжения в окрестности произвольной точки сечения

По этой площадке действует *главный вектор* – равнодействующая внутренних сил  $\Delta \bar{R}$ .

Тогда *среднее напряжение в точке*

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}. \quad (2.2)$$

*Полное напряжение в точке*

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}. \quad (2.3)$$

Направление вектора полного напряжения совпадает с направлением  $\Delta \bar{R}$ .

Закон распределения внутренних сил по сечению характеризуется численной мерой – напряжением (*мерой интенсивности распределения внутренних сил по сечению*).

*Проекции вектора полного напряжения на оси координат называются нормальными  $\sigma$  (действуют перпендикулярно сечению) и касательными  $\tau$  (действуют в плоскости сечения) напряжениями (см. рис. 2.27). Размерность напряжений – паскаль (Па), килопаскаль (кПа), мегапаскаль (МПа).*

В окрестностях точки  $K$  (см. рис. 2.27) можно провести сколь угодно много площадок. Тогда *совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проведенным в окрестностях исследуемой точки, – напряженное состояние в точке.*

### **2.5.2. Перемещения и деформации**

Зная деформации бруса во всех его точках и условия закрепления, можно определить *перемещения* всех его точек, т. е. указать их положения (новые координаты) *после деформации*.

Если весь объем тела разбить на множество элементарных параллелепипедов со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , то деформация бруса в целом будет определяться совокупной деформацией его элементарных составляющих. В общем случае изменение размеров и формы каждого элемента будет зависеть от его положения в теле. *Уменьшая размеры сторон параллелепипеда, в пределе получают точку.*

Проведем в плоскости  $XOY$  произвольного плоского сечения тела (рис. 2.28) через рассматриваемую точку  $C$  в направлении оси  $X$  бесконечно малый отрезок  $dx$ .

Обозначим через  $\Delta dx$  изменение длины этого отрезка после приложения нагрузки к телу (когда точка  $C$  переместится в положение  $C'$ ). Это есть

абсолютная линейная деформация в направлении оси  $X$ . Следовательно, после нагружения тела длина данного отрезка будет  $dx \pm \Delta dx$ .

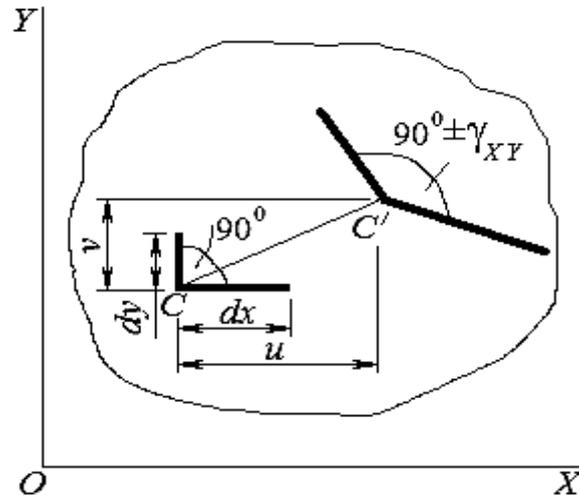


Рис. 2.28. К определению перемещений и деформаций

Аналогично – в направлении оси  $Y$ , если говорить о плоскости  $XOY$ .

В плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$  – в направлении оси  $Z$ :  $dz \pm \Delta dz$ .

Отрезок  $CC'$  есть полное перемещение точки в данном направлении, а  $u, v, w$  – соответственно проекции полного перемещения на оси  $X, Y, Z$ .

*Изменение размеров отрезка в направлении всех трех осей будет характеризовать полную абсолютную линейную деформацию в данной точке.*

Абсолютная линейная деформация обозначается  $\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$  или  $\Delta l$  в зависимости от того, как обозначается длина рассматриваемого отрезка. *Размерность абсолютной деформации* – миллиметры (мм), сантиметры (см) или микрометры (мкм).

Отношение абсолютной линейной деформации к исходной длине представляет собой *относительную линейную деформацию* в данной точке в направлении указанной оси.

Относительная линейная деформация обозначается буквой  $\varepsilon$  с соответствующим индексом:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.4)$$

Найденную величину *обычно умножают* на 100 %. Следовательно, размерность относительной линейной деформации – процент.

Например, пусть длина стержня  $l = 10 \text{ см} = 100 \text{ мм}$ . Если под нагрузкой стержень получит удлинение  $\Delta l = 0,1 \text{ мм}$ , то относительная линейная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} 100 \% = \frac{0,1}{100} 100 \% = 0,1 \% .$$

Изменение первоначального прямого угла после приложения к телу нагрузки представляет собой относительную угловую деформацию.

Например, угол между отрезками  $dx$  и  $dy$  будем обозначать  $\gamma_{xy}$ . Этот угол называют также *относительным сдвигом* в точке  $C$  в плоскости  $XOY$ .

Аналогично  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$  – относительные угловые деформации в плоскостях  $YOZ$  и  $XOZ$ . *Относительные угловые деформации – величины безразмерные.*

*Совокупность деформаций  $\varepsilon$  по различным направлениям и деформаций  $\gamma$  по различным плоскостям, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой деформированное состояние в точке.*

### 2.5.3. Определение ВСФ через напряжения (в интегральной форме)

Обратимся к понятию «напряжение» и к рис. 2.27. Видим, что напряжения будут определяться производными от соответствующего ВСФ по площади сечения (рис. 2.29):

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dA}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}.$$

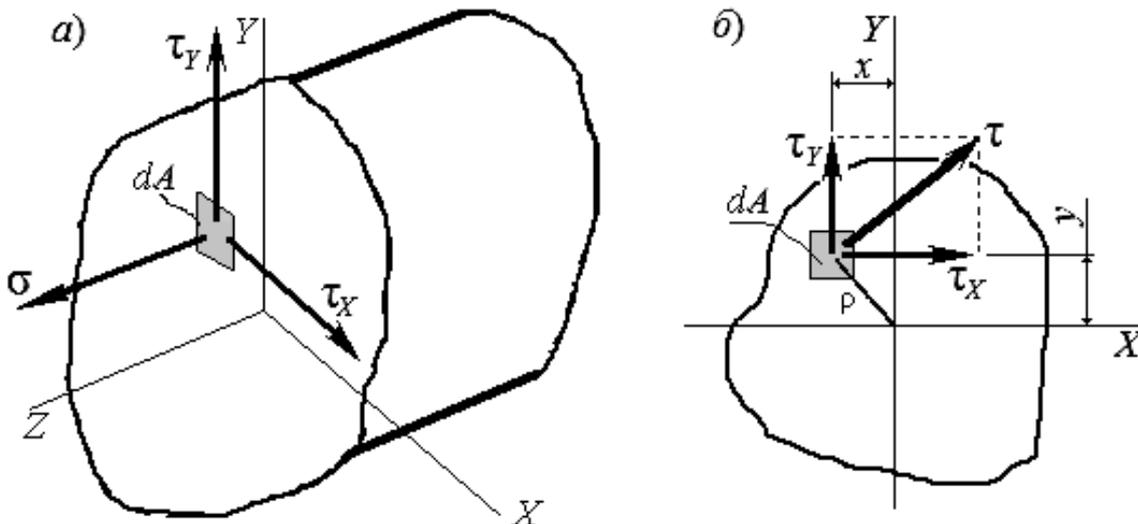


Рис. 2.29. Напряжения, действующие на площадке  $dA$  (а), и схема разложения касательных напряжений (б)

Тогда, с учетом рис. 2.29,

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA; & Q_X &= \int_A \tau_x dA; & Q_Y &= \int_A \tau_y dA; \\
 M_X &= \int_A \sigma y dA; & M_Y &= \int_A \sigma x dA; & M_Z &= M_{кр} = \int_A \tau \rho dA.
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое расчетная схема, каковы ее особенности?
2. Брус, пластина, оболочка, массив – в чем их отличие?
3. Что включает в себя понятие «модель материала»?
4. Что такое пластичность, жесткость, хрупкость, вязкость?
5. Как осуществляется схематизация нагружения тела?
6. В чем отличие внутренних силовых факторов от внешних сил?
7. Перечислите и охарактеризуйте гипотезы о деформируемом теле.
8. В чем заключается метод сечений?
9. По каким признакам определяется вид нагружения бруса?
10. Дайте определения видов напряжений и деформаций.
11. Как определяются внутренние силовые факторы через напряжения?

## 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

### 3.1. Необходимость построения эпюр. Общие правила и порядок построения

*Первый вопрос, на который должен получить ответ конструктор, – какие по величине и направлению внутренние силовые факторы (ВСФ) действуют в различных сечениях вдоль оси бруса. Это необходимо для определения вида нагружения (по действующим ВСФ) и выбора так называемого опасного сечения (определяется величиной ВСФ). С этой целью строят графики, которые носят название «эпюры».*

*Графики, показывающие изменение внутренних усилий и моментов в сечениях по длине бруса, называются эпюрами усилий и моментов (эпюрами ВСФ).*

В каждом сечении тела, естественно, внутренние усилия и моменты различны по величине и направлению. Таким образом, эпюры дают картину распределения ВСФ по длине бруса.

#### 3.1.1. Общие правила построения эпюр

1. Эпюра строится для каждого из ВСФ, т. е. для каждого ВСФ строим отдельный график.

2. Определяются границы участков бруса. В общем случае границы участков – это сечения бруса, в которых:

- приложены сосредоточенные силы и моменты;
- начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки;
- опорные и концевые сечения.

В некоторых случаях в качестве границ участков берут сечения, в которых изменяются форма или размеры поперечного сечения бруса, или сечения, в которых изменяется материал бруса.

3. Ось эпюры всегда проводится параллельно оси бруса.

4. Ординаты ВСФ на эпюре откладываются по нормали к оси эпюры.

5. Для каждого из ВСФ принимается определенное правило знаков.

6. Ордината на эпюре показывает величину и знак внутреннего усилия или момента, действующего в том сечении тела, где расположена эта ордината.

7. Ординаты откладываются строго в масштабе с учетом знака ВСФ. На эпюрах проставляются числа, показывающие значения ВСФ в характерных сечениях и их размерность.

8. На эпюры *наносится штриховка*, показывающая направление отсчета ординат (т. е. штриховка наносится *перпендикулярно оси бруса*).

### 3.1.2. Порядок построения эпюр

1. Изображается *схема бруса* с приложенными внешними силами.
2. С использованием уравнений равновесия определяются *величина и направление опорных реакций*.
3. Определяются *границы участков*.
4. На каждом участке *проводится произвольное сечение* и указывается его текущая координата.
5. Для каждого участка *с учетом правила знаков записывается в общем виде выражение* для определяемого внутреннего силового фактора.
6. В общее выражение ВСФ для рассматриваемого участка подставляются значения координат начала и конца этого участка – *определяются значения ординат* эпюры.
7. *Значения ординат откладываются на оси эпюры* с учетом знака и выбранного масштаба.
8. *Наносится штриховка*, проставляются *знаки*, указывается *обозначение ВСФ*, для которого построена эпюра, и его *размерность*.

### 3.2. Построение и контроль эпюр продольных сил

**Продольная** (нормальная) *сила  $N$*  в произвольном сечении – *это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме проекций на ось бруса (нормаль к сечению) внешних сил (в том числе и **реакций**), действующих на брус по одну сторону от сечения.*

Брус, *работающий на растяжение-сжатие*, называют **стержнем**.

**Правило знаков** следующее (рис. 3.1).

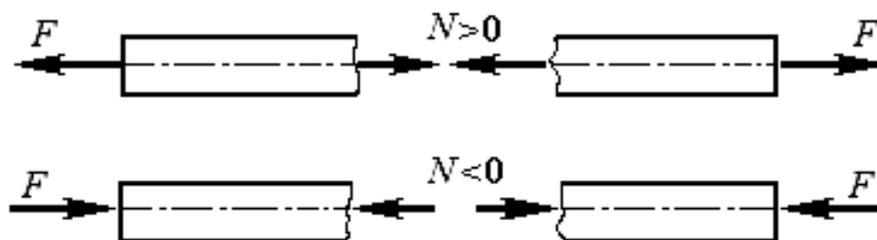


Рис. 3.1. Правило знаков для продольных сил

Продольная сила считается **положительной**, если ее вектор направлен от сечения (вызывает **растяжение** бруса), и **отрицательной**, если направлен к сечению (вызывает его **сжатие**).

**Пример 1.** Брус постоянного сечения находится в равновесии под действием осевых сил  $F$  и  $F_1$  (рис. 3.2, а).

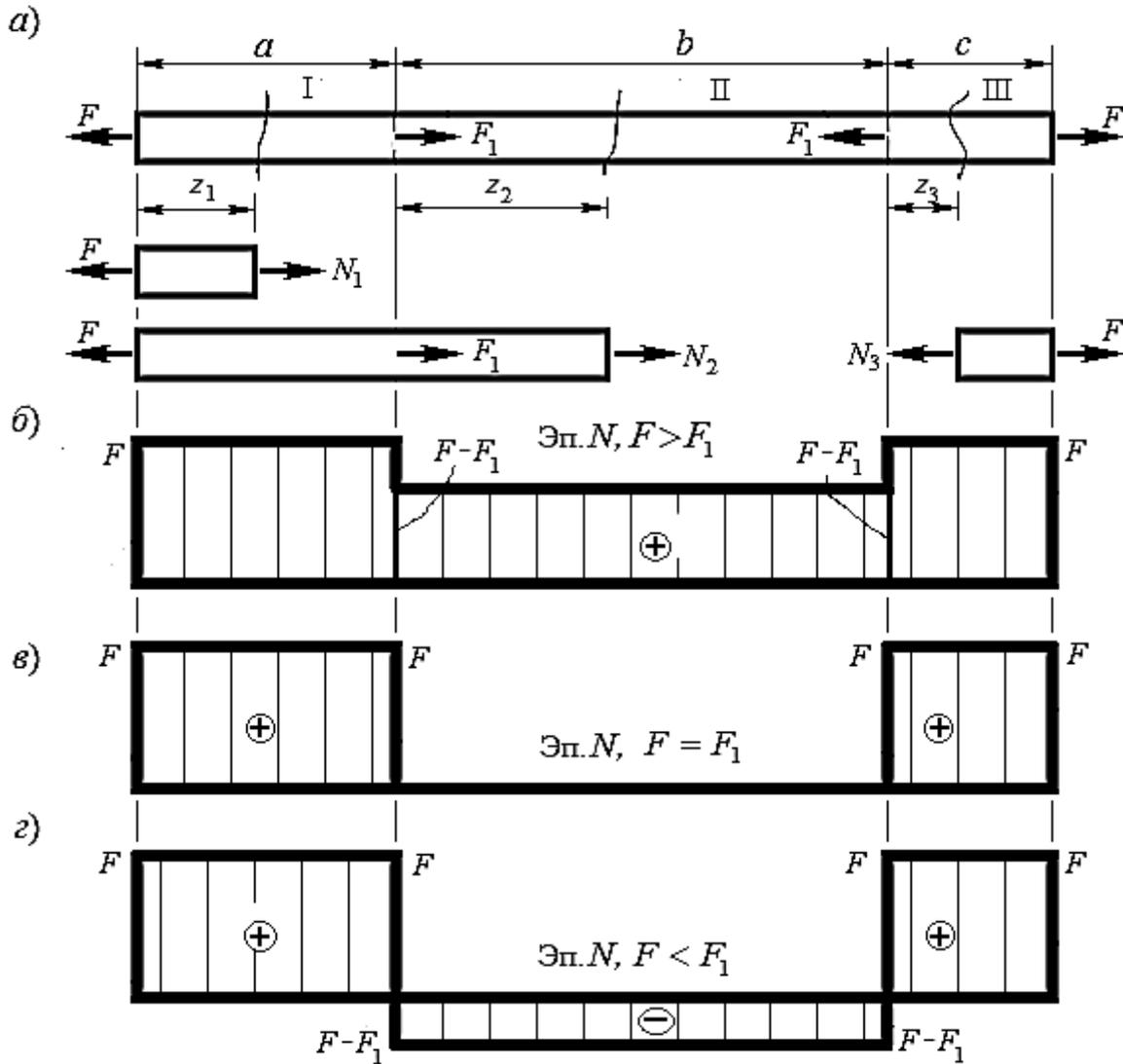


Рис. 3.2. Расчетная схема стержня и эпюры  $N$  к примеру 1

*Решение.*

Точки приложения сил делят брус на три участка. На каждом участке проведем сечение и покажем его координаты от начала участка до соответствующего произвольного сечения. Эти сечения и продольные силы, действующие в них, обозначим в соответствии с номером участка, например: **участок I**, сечение с координатой  $z_1$ , продольная сила  $N_{1-1}$ .

**Участок I**, сечение с координатой  $z_1$ .

Границы участка  $0 \leq z_1 \leq a$ .

Запишем уравнение равновесия – сумма проекций сил на продольную ось бруса равна нулю:  $\sum Z = 0$ .

Тогда  $N_1 - F = 0$ ;  $N_1 = F$ ;  $N_1 = \text{const}$  – уравнение прямой, параллельной оси бруса.

**Участок II**, сечение с координатой  $z_2$ .

Границы участка  $0 \leq z_2 \leq b$ .

Уравнение равновесия  $\sum Z = 0$ .

$N_2 + F_1 - F = 0$ ;  $N_2 = F - F_1$ ;  $N_2 = \text{const}$  – уравнение прямой, параллельной оси бруса.

**Участок III**, сечение с координатой  $z_3$ .

Границы участка  $0 \leq z_3 \leq c$ .

Уравнение равновесия  $\sum Z = 0$ .

$N_3 + F = 0$ ;  $N_3 = -F$ ;  $N_3 = \text{const}$  – уравнение прямой, параллельной оси бруса.

В данной задаче возможны три варианта соотношения внешних сил:

1)  $F > F_1$ ;  $N_2 > 0$ ;

2)  $F = F_1$ ;  $N_2 = 0$ ;

3)  $F < F_1$ ;  $N_2 < 0$ .

Проводим ось, параллельную оси бруса, и строим эпюру продольных сил для первого случая (рис. 3.2, б).

Аналогичным образом строим эпюры для второго и третьего случаев (рис. 3.2, в, г).

**Пример 2.** Брус постоянного с площадью поперечного сечения  $A$  зашпелен одним концом и нагружен несколькими силами (в килоньютонах), показанными на схеме (рис. 3.3). Построить эпюру продольных сил.

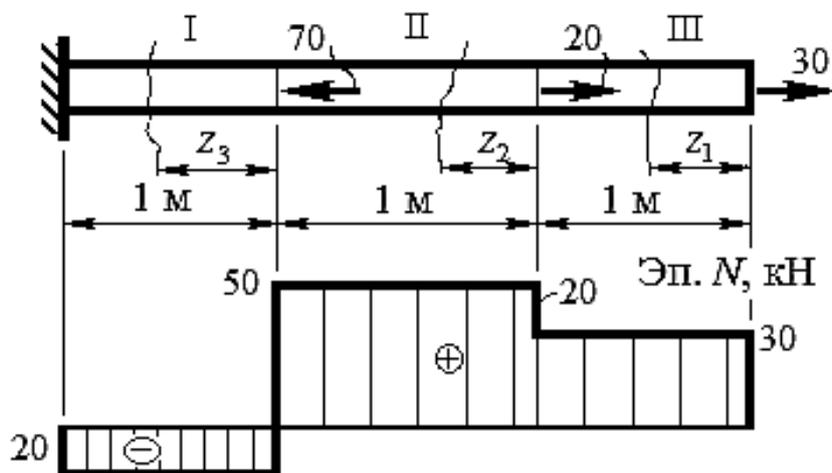


Рис. 3.3. Расчетная схема и эпюра  $N$  к примеру 2

*Решение.*

Брус имеет три участка.

При рассмотрении участков в порядке справа налево можно обойтись без определения опорной реакции.

Рассмотрим равновесие отсеченной правой части, записывая и решая для каждого участка уравнение равновесия  $\sum Z = 0$ .

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq 1$  м;

$$30 + 20 - N_1 = 0; N_1 = 30 \text{ кН.}$$

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq 1$  м;

$$30 + 20 - N_2 = 0; N_2 = 50 \text{ кН.}$$

**Участок III:**  $0 \leq z_3 \leq 1$  м;

$$30 + 20 - 70 - N_3 = 0; N_3 = -20 \text{ кН.}$$

По результатам расчетов строим эпюру  $N$ .

**Пример 3.** Для бруса переменного поперечного сечения (рис. 3.4) построить эпюру продольных сил с учетом собственного веса бруса (материал бруса имеет удельный вес  $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$ ). Площадь поперечного сечения  $A = 10 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

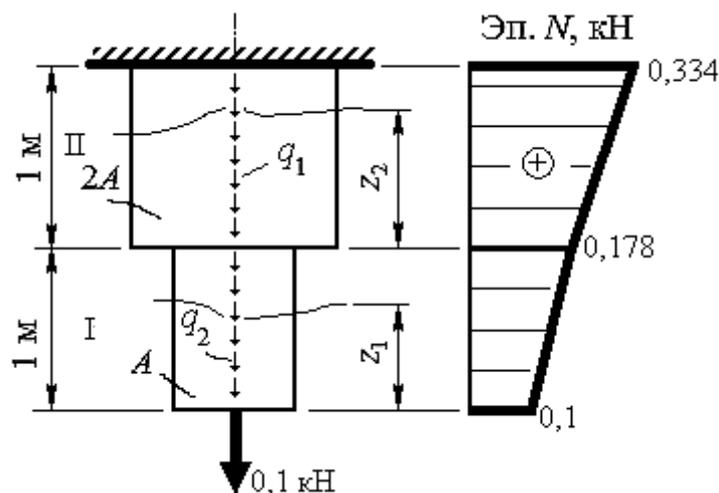


Рис. 3.4. Расчетная схема и эпюра  $N$  к примеру 3

*Решение.*

Брус имеет два участка.

При рассмотрении участков перемещаясь снизу вверх можно обойтись без определения опорной реакции.

Рассмотрим равновесие отсеченной нижней части, записывая и решая для каждого участка уравнение равновесия  $\sum Z = 0$ .

При записи уравнений имеем в виду следующее.

*Собственный вес – это равномерно распределенная по длине участка нагрузка.*

*Интенсивность этой нагрузки определяется произведением удельного веса материала на площадь поперечного сечения:  $q = \gamma A$ .*

Тогда в данном примере на первом участке  $q_1 = \gamma A$ , а на втором –  $q_2 = \gamma 2A$ .

*Направление этой нагрузки – вертикально вниз, вдоль оси стержня.*

*Величина продольной силы равна произведению интенсивности распределенной нагрузки, умноженной на длину участка, имеющего постоянную площадь.*

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq 1$  м;

$$0,1 + \gamma A z_1 - N_1 = 0.$$

Это уравнение наклонной прямой. Определяем продольную силу на границах участка:

$$z_1 = 0; \quad N_1 = 0,1 \text{ кН}; \quad z_1 = 1 \text{ м}; \quad N_1 = 0,1 + 78 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 0,178 \text{ кН}.$$

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq 1$  м; по аналогии

$$0,1 + \gamma A z_1 + \gamma 2A z_2 - N_2 = 0.$$

Продольная сила на границах участка

$$z_2 = 0; \quad N_2 = 0,178 \text{ кН}.$$

$$z_2 = 1 \text{ м}; \quad N_2 = 0,1 + 78 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + 78 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 0,334 \text{ кН}.$$

По результатам расчетов строим эпюру  $N$ .

Из рассмотренных примеров построения эпюр продольных сил можно сделать следующие выводы.

1. Если брус нагружен *только сосредоточенными силами*, то эпюра продольных сил ограничена *прямыми, параллельными оси эпюры*.

2. В сечениях, *где приложены сосредоточенные силы*, эпюра  $N$  имеет скачки на величину и в направлении этих сил.

3. Если брус загружен нагрузкой, *равномерно распределенной по его длине* (в частности, *собственным весом материала стержня*), то эпюра  $N$  будет ограничена *прямой, наклоненной к оси эпюры*. Наклон прямой – в соответствии с направлением вектора силы.

4. В сечениях, где *изменяются форма и размеры сечения* (площадь сечения  $A$ ), на эпюре  $N$  *изменений нет*.

*Данные правила используют для контроля правильности построения эпюр продольных сил, а также непосредственно при построении эпюр.*

### 3.3. Построение и контроль эпюр крутящих моментов

Крутящий момент  $M_z$  или  $M_{кр}$  в произвольном сечении – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме скручивающих моментов (в том числе и опорных моментов), действующих на брус по одну сторону от сечения.

Брус, работающий на кручение, называют валом.

Скручивающим моментом называется внешняя пара сил, плоскость действия которой перпендикулярна оси вала. То есть этот момент действует относительно продольной оси бруса.

Условимся считать, что на опорах (в подшипниках) вал вращается без трения, т. е. в подшипниковых узлах не возникают реактивные моменты.

Правило знаков показано на рис. 3.5, а, б.

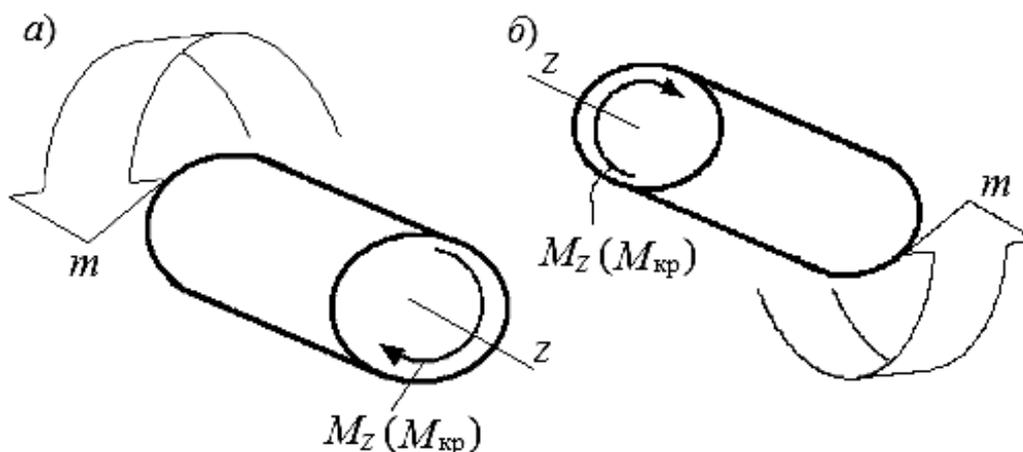


Рис. 3.5. Правило знаков крутящих моментов для левой (а) и для правой (б) частей вала

Крутящий момент ( $M_z$  или  $M_{кр}$ ) считается *положительным*, если на каждую сторону сечения он действует *по ходу часовой стрелки при взгляде со стороны сечения*. Иными словами, если крутящий момент создается *скручивающим моментом  $t$* , действующим *против хода часовой стрелки*. Следовательно, положительный крутящий момент направлен по ходу часовой стрелки.

Можно использовать и более удобное обозначение внешнего (скручивающего) момента (при этом не будет путаницы с обозначением изгибающего момента). На рис. 3.6 показаны направления скручивающих моментов  $t$ , для которых крутящие моменты  $M_z$  будут иметь знак «плюс». Моменты слева и справа по отношению к сечению поворачивают участок бруса против хода часовой стрелки.

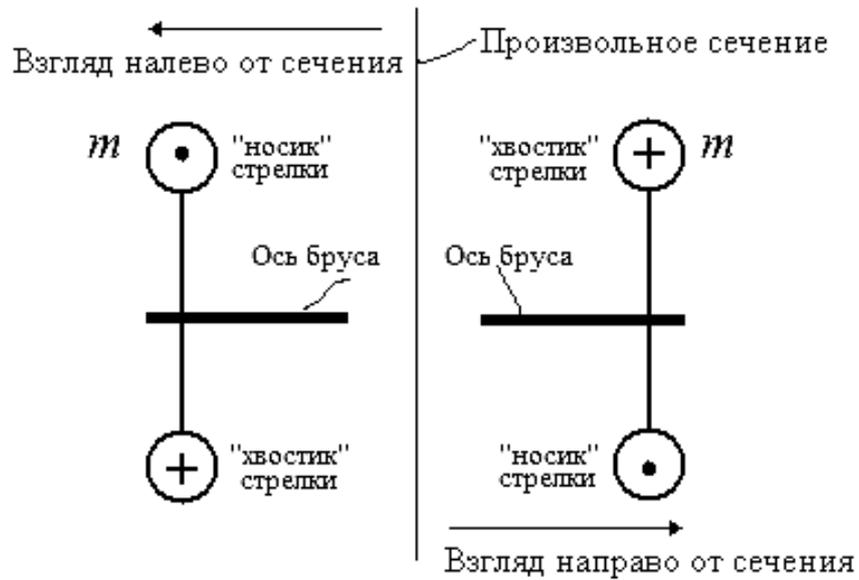


Рис. 3.6. Схематическое изображение скручивающих моментов, дающих по направлению положительное значение крутящих моментов

**Пример.** Вал (рис. 3.7) под действием внешних скручивающих моментов  $m_1 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $m_2 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $m_3 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$  равномерно вращается в опорах. Построить эпюру крутящих моментов.

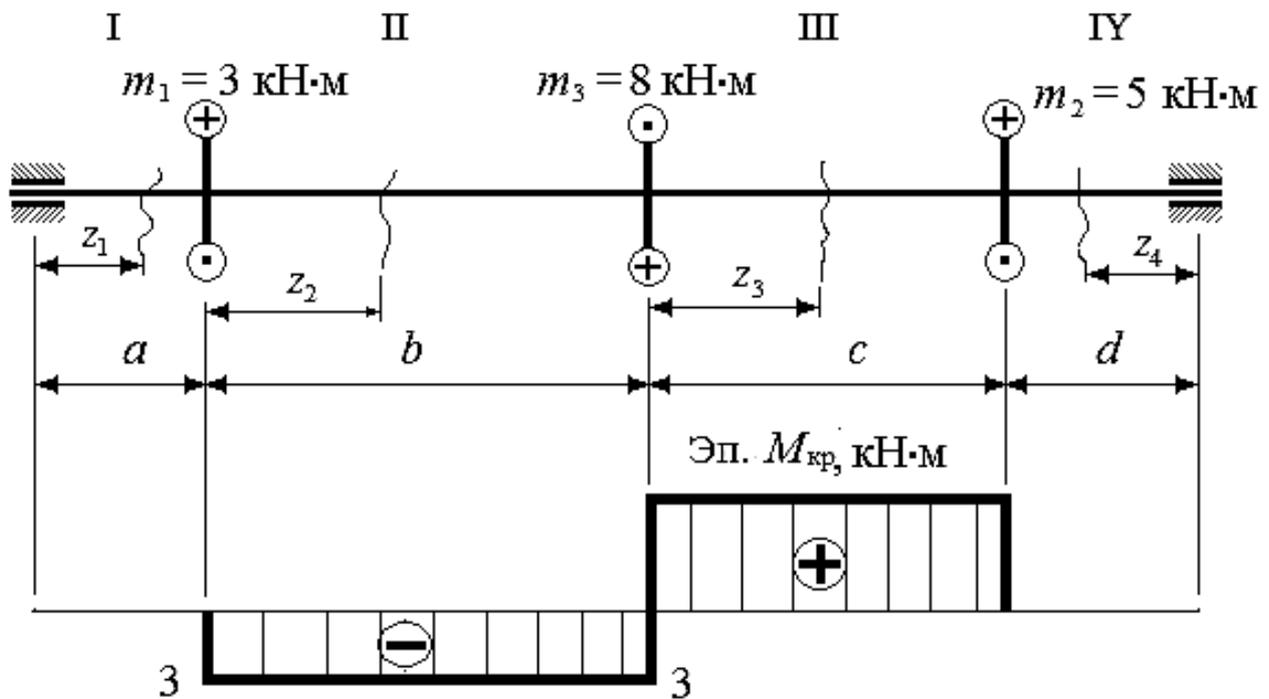


Рис. 3.7. Схема вала и эпюра крутящих моментов

*Решение.*

Так как вал находится в равновесии, то

$$\sum m_Z = 0. \quad m_3 - m_1 - m_2 = 0; \quad m_3 = m_1 + m_2.$$

Разбиваем вал на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние моменты.

На каждом участке проводим поперечное сечение и указываем его границы.

Рассмотрим равновесие отсеченной правой или левой части, записывая и решая для каждого участка уравнение равновесия  $\sum m = 0$ , т. е. составляем выражения для крутящих моментов на каждом участке.

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq a$  (слева от сечения опора, на которой отсутствует реакция);

$$M_{кр1} = 0.$$

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq b$ ;

$M_{кр2} = -m_1 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_{кр2} = \text{const}$  (на эпюре – прямая, параллельная оси вала).

**Участок III:**  $0 \leq z_3 \leq c$ ;

$M_{кр3} = -m_1 + m_3 = -3 + 8 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_{кр3} = \text{const}$  (на эпюре – прямая, параллельная оси вала).

**Участок IV:**  $0 \leq z_4 \leq d$ ;  $M_{кр4} = 0$  (справа от сечения опора, на которой отсутствует реакция).

По результатам расчетов строим эпюру  $M_{кр}$ .

Заметим, что на эпюрах  $M_{кр}$  знаки чаще всего не ставятся, поэтому и правило знаков можно считать условным.

Из рассмотрения методики построения эпюры крутящих моментов можно сделать следующие выводы.

1. Эпюра  $M_{кр}$  ограничена *прямыми, параллельными* оси эпюры.
2. В сечениях, где *приложены внешние моменты*, на эпюре  $M_{кр}$  скачки на величину и в направлении этих моментов.

*Данные правила используют для контроля правильности построения эпюр крутящих моментов, а также непосредственно при построении эпюр.*

### 3.4. Построение и контроль эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для статически определимых балок

#### 3.4.1. Балки и их опоры

Прямолинейные стержни, испытывающие плоский изгиб, называются балками. При расчетах балки заменяют их осями, а нагрузку, приложенную к ним, приводят к осям. Балки опираются на различные опорные устройства – опоры.

Внешняя нагрузка, действующая на балку, уравнивается реакциями опор, вид которых зависит от типа опор. Все опорные реакции приложены в центре тяжести опорных сечений.

Различают три типа плоских опор. Типы опор и вид реакций были рассмотрены ранее (см. рис. 2.5–2.7).

Балки подразделяются на следующие виды: консольная, двухопорная однопролетная, многопролетная шарнирная, многопролетная неразрезная. На практике встречаются различные варианты балок – например, однопролетная с одной или двумя консолями.

1. *Консольная* – это балка, заземленная одним концом и не имеющая других опор (рис. 3.8, а). Свешивающийся за опору конец балки называют консолью (рис. 3.8, б).

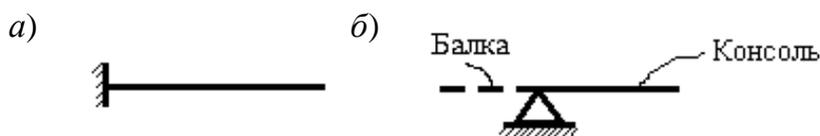


Рис. 3.8. Консольная балка (а) и консоль (б)

2. *Двухопорная балка* – балка, в которой обе опоры установлены по ее концам (рис. 3.9, а). Расстояние между опорами называется пролетом.

Если одна из опор установлена на некотором расстоянии от конца балки, получаем одноконсольную балку (рис. 3.9, б); если обе опоры установлены на некотором расстоянии от конца балки, – двухконсольную (рис. 3.9, в).

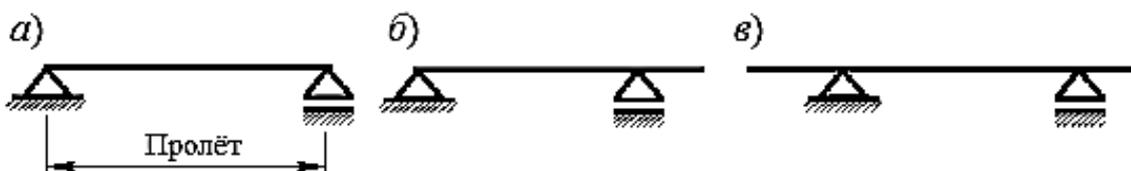


Рис. 3.9. Двухопорные балки без консолей, с одной или двумя консолями

3. *Многопролетная шарнирная балка* – балка, имеющая два и более пролетов (лежит более чем на двух опорах) с установленными в пролетах промежуточными шарнирами (рис. 3.10).



Рис. 3.10. Многопролетная шарнирная балка

4. *Многопролетная неразрезная балка* – балка, лежащая более чем на двух опорах и не имеющая промежуточных шарниров (рис. 3.11).

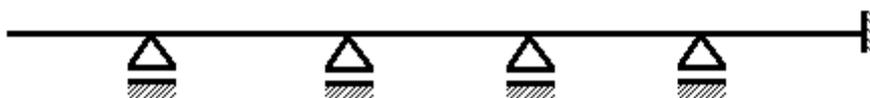


Рис. 3.11. Многопролетная неразрезная балка

Из курса теоретической механики известно, что для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия статики.

Поэтому если число неизвестных опорных реакций не более трех, то балка статически определима (см. рис. 3.8, а – 3.10).

Если число неизвестных реакций более трех, балка является статически неопределимой (см. рис. 3.11). Расчет статически неопределимых балок производится с учетом их деформации под нагрузкой.

### **3.4.2. Правила знаков для поперечных сил и изгибающих моментов**

Отметим, что решение ведем в принятой системе координат: продольная ось –  $Z$ , вертикальная –  $Y$ , перпендикулярная плоскости чертежа –  $X$ .

*Поперечная сила  $Q_x$  или  $Q_y$  в произвольном сечении балки – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, включая реакции опор, действующих на балку по одну сторону от сечения.*

*Поперечная сила в сечении балки считается положительной (рис. 3.12), если равнодействующая внешних сил, приложенных по левую сторону от сечения, направлена вверх, а равнодействующая внешних сил, приложенных по правую сторону от сечения, – вниз.*

Иначе говоря, *равнодействующая от внешних сил поворачивает участок бруса по отношению к сечению по часовой стрелке.*

На рис. 3.12 показаны равнодействующие внешних сил  $F$ , действующие в вертикальной плоскости, и соответствующие им поперечные силы  $Q_Y$ .

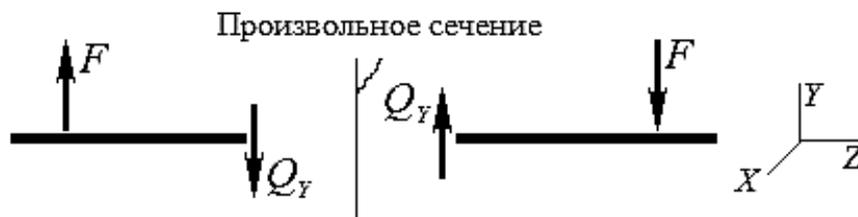


Рис. 3.12. Правило знаков для поперечной силы

*Изгибающий момент  $M_X$  или  $M_Y$  в произвольном сечении балки – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме моментов относительно оси, перпендикулярной оси балки, от всех внешних сил (включая реакции опор), действующих на балку по одну сторону от сечения.*

*Изгибающий момент считается положительным (рис. 3.13), если его действие вызывает сжатие верхних волокон поперечного сечения балки (и, соответственно, растяжение нижних волокон). Заметим, что по определенным причинам машиностроители строят эпюру изгибающих моментов на сжатом волокне, а строители – на растянутом.*

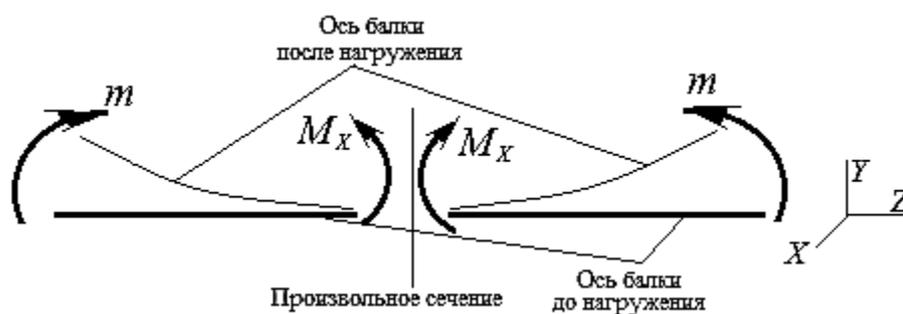


Рис. 3.13. Правило знаков для изгибающего момента

На рис. 3.13 показаны моменты  $m$  от внешних сил, действующие относительно оси  $X$ , перпендикулярной продольной оси балки  $Z$  (они создаются, в частности, вертикальными силами), и соответствующие им изгибающие моменты  $M_X$ .

Заметим, что от действия вертикальных внешних сил в поперечных сечениях возникают  $Q_Y$  и  $M_X$ , а горизонтально действующие внешние силы, соответственно,  $Q_X$  и  $M_Y$ .

### 3.4.3. Примеры построения эюр

Рассмотрим несколько примеров построения эюр для балок.

**Пример 1.** Для консольной балки  $AB$  длиной  $l$ , нагруженной в сечении  $B$  сосредоточенным моментом  $m$  (рис. 3.14, а), сосредоточенной силой  $F$  (рис. 3.14, б) и распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = \text{const}$  по всей длине  $AB$  (рис. 3.14, в), построить эюры  $Q$  и  $M$  (индексы условно не ставим).

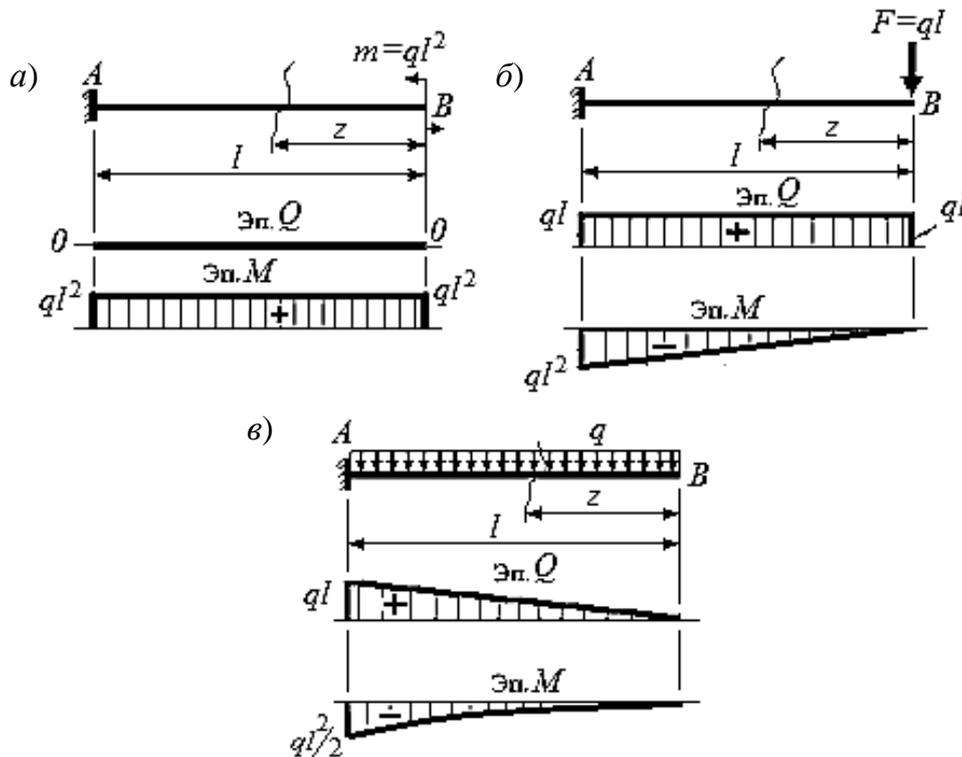


Рис. 3.14. Эюры для консольной балки от простейших нагрузок

Для удобства дальнейшего анализа выразим силу и момент через интенсивность, например:

$$F = ql; \quad m = ql^2,$$

где  $l$  – длина (в данных примерах – длина консоли).

*Решение.*

Для балок, защемленных одним концом, опорные реакции (реакции в заделке  $A$ ) можно не определять.

Рассекаем балку произвольным сечением с координатой  $z$  и отбрасываем левую часть балки (вместе с заделкой).

Балки для всех схем имеют один участок:  $0 \leq z \leq l$ .

Рассмотрим равновесие отсеченной правой части, записывая и решая для данного участка уравнения равновесия в принятой системе координат. При изгибе из шести уравнений равновесия *только два* уравнения дадут результат:

$$\sum Y = 0; \quad \sum m_x = 0.$$

Таким образом, для рассматриваемых вариантов решение указанных уравнений даст следующие результаты.

Рис. 3.14, а:  $Q = 0$  – прямая, проходящая по оси эюры.  $M = m = ql^2$  – прямая, параллельная оси эюры.

Рис. 3.14, б:  $Q = P = ql$  – прямая, параллельная оси эюры.  $M = -Pz = -qlz$  – наклонная прямая:  $z = 0, M = 0; z = l, M = ql^2$ .

Рис. 3.14, в:  $Q = qz$  – наклонная прямая.  $M = -\frac{qz^2}{2}$  – кривая второго порядка (парабола). Так как эюра строится на сжатом волокне, то *выпуклость параболы – навстречу нагрузке*:

$$z = 0, \quad Q = 0; \quad M = 0; \quad z = l, \quad Q = ql; \quad M = -\frac{ql^2}{2}.$$

Для пояснения выражения, полученного для изгибающего момента, рассмотрим схемы (рис. 3.15).

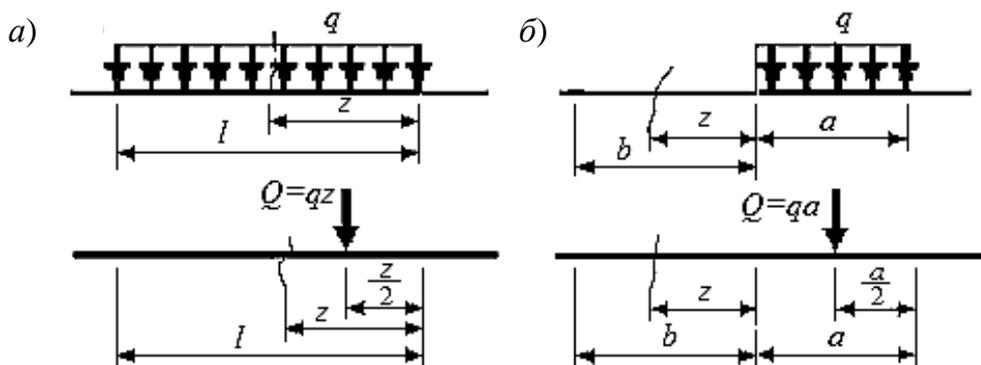


Рис. 3.15. К определению изгибающего момента от равномерно распределенной нагрузки

На схеме (рис. 3.15, а) нагрузка интенсивностью  $q$  приложена по всему участку длиной  $l$ . Момент в произвольном сечении с координатой  $z$  определится произведением равнодействующей  $Q = qz$ , приложенной в сере-

дине участка длиной  $z$  (т. е. в сечении с координатой  $\frac{z}{2}$ ), на плечо  $\frac{z}{2}$ . Получим

$$M = -qz \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}. \quad \text{Подставляя значения границ участка, имеем, соот-}$$

ветственно, 0 и  $-\frac{ql^2}{2}$ .

На схеме (рис. 3.15, б) нагрузка интенсивностью  $q$  приложена на участке длиной  $a$ . Изгибающий момент в произвольном сечении с координатой  $z$  на следующем участке (например, от 0 до  $b$ ) определится произведением равнодействующей  $Q = qa$ , приложенной посередине этого участка, на плечо  $\left(\frac{a}{2} + z\right)$ . Получим  $M = -qa\left(\frac{a}{2} + z\right)$ . Затем вместо  $z$  подставляются границы участка:

$$\text{при } z=0 \quad M = -\frac{qa^2}{2}; \quad \text{при } z=b \quad M = -qa\left(\frac{a}{2} + b\right).$$

**Пример 2.** Для двухопорной балки  $AB$  с длиной пролета  $l$ , нагруженной в сечении  $C$  сосредоточенным моментом  $m$  (рис. 3.16, а), сосредоточенной силой  $F$  (рис. 3.16, б) или равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = \text{const}$  по всей длине  $AB$  (рис. 3.16, в), построить эпюры  $Q$  и  $M$ .

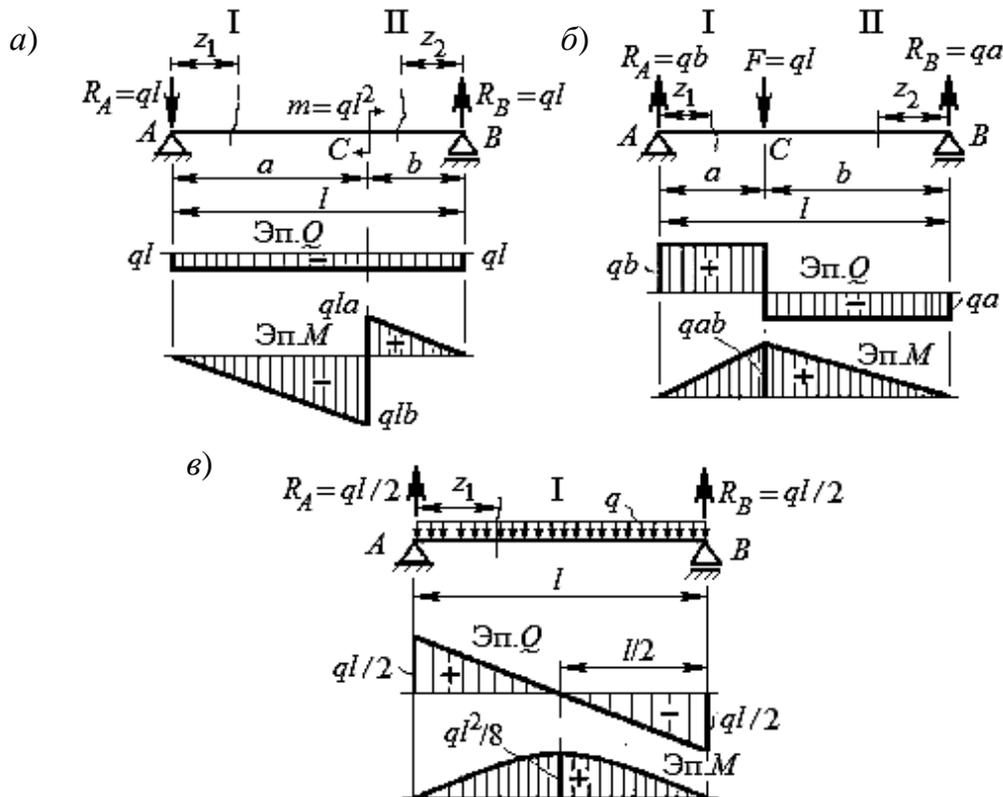


Рис. 3.16. Эпюры для двухопорной балки от простейших нагрузок

Определяем опорные реакции:

а) в соответствии с типом опор и видом внешней нагрузки наносим на схемы балок возможные реакции. В данной задаче, т. к. направления векторов  $F$  и  $q$  перпендикулярны  $AB$ ,  $H_A = H_B = 0$ ;

б) составляем и решаем уравнения статики. Всего для плоской системы можно составить три уравнения: два – для определения реакций и третье – для проверки правильности решения этой части задачи.

Рекомендация: для контроля используем уравнение  $\sum Y = 0$ . Контроль необходимо проводить обязательно!

**Схема на рис. 3.16, а.**

1. Определяем опорные реакции:

$$1) \sum m_A = 0, R_B l - m = 0; \quad R_B = \frac{ql^2}{l} = ql;$$

$$2) \sum m_B = 0, R_A l - m = 0; \quad R_A = \frac{ql^2}{l} = ql;$$

$$3) \sum Y = 0, -R_A + R_B = 0; \quad -ql + ql = 0.$$

Получили тождество вида  $0 \equiv 0$ , следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

2. Разбиваем балку на участки. В данной схеме – два участка.

3. На каждом участке проводим произвольное сечение и указываем его координаты от начала рассматриваемого участка.

Исходя из метода сечений, нумерация участков произвольна. Произвольным является и выбор части бруса, для которой пишутся уравнения ВСФ.

4. Отбрасываем одну из частей балки и для оставшейся части составляем уравнения для поперечной силы и изгибающего момента.

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq a$  (слева направо).

$Q_1 = -R_A = -ql$ ,  $Q_1 = \text{const}$  – прямая, параллельная оси эюры.

$M_1 = -R_A z_1 = -qlz_1$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_1 = 0$   $M_1 = 0$ ; при  $z_1 = a$   $M_1 = qla$ .

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq b$  (справа налево).

$Q_2 = R_B = -ql$ ,  $Q_2 = \text{const}$  – прямая, параллельная оси эюры.

$M_2 = R_B z_2 = qlz_2$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_2 = 0$   $M_2 = 0$ ; при  $z_2 = b$   $M_2 = qlb$ .

5. По вычисленным значениям строим эюры  $Q$  и  $M$ .

**Схема на рис. 3.16, б.**

Порядок решения аналогичен.

*Опорные реакции:*

$$1) \sum m_A = 0, R_B(a+b) - Fa = 0, R_B = \frac{Fa}{a+b} = qa;$$

$$2) \sum m_B = 0, Fb - R_A(a+b) = 0, R_A = \frac{Fb}{a+b} = qb;$$

$$3) \sum Y = 0, R_A - F + R_B = 0; \frac{Fb}{a+b} - F + \frac{Fa}{a+b} = 0.$$

Получили тождество вида  $0 \equiv 0$ , следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq a$  (слева направо).

$Q_1 = R_A = qb$ ,  $Q_1 = \text{const}$  – прямая, параллельная оси эюры.

$M_1 = R_A z_1 = qb z_1$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_1 = 0$   $M_1 = 0$ ; при  $z_1 = a$   $M_1 = qab$ .

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq b$  (справа налево).

$Q_2 = -R_B = -qa$ ,  $Q_2 = \text{const}$  – прямая, параллельная оси эюры.

$M_2 = R_B z_2 = qaz_2$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_2 = 0$   $M_2 = 0$ ; при  $z_2 = b$   $M_2 = qab$ .

**Схема на рис. 3.16, в.**

*Опорные реакции:*

$$1) \sum m_A = 0, R_B l - \frac{ql^2}{2} = 0, R_B = \frac{ql}{2};$$

$$2) \sum m_B = 0, \frac{ql^2}{2} - R_A l = 0, R_A = \frac{ql}{2};$$

$$3) \sum Y = 0, R_A - ql + R_B = 0.$$

Получили тождество вида  $0 \equiv 0$ , следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq a$  (слева направо).

$Q_1 = R_A = \frac{ql}{2} - qz_1$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_1 = 0$   $Q_1 = \frac{ql}{2}$ ; при  $z_1 = l$   $Q_1 = -\frac{ql}{2}$ .

*График пересекает ось, меняя знак.*

$M_1 = R_A z_1 - qz \frac{z_1}{2} = \frac{ql}{2} z_1 - \frac{qz_1^2}{2}$  – кривая второго порядка (параболы).

При  $z_1 = 0$   $M_1 = 0$ ; при  $z_1 = l$   $M_1 = 0$ .

Видим, что значений ординат для построения параболы недостаточно.

Как будет доказано далее, третье значение ординаты эпюры моментов получим, приравняв к нулю уравнение поперечной силы (найдем координату, при которой  $Q = 0$ ). В этом сечении момент приобретает экстремальное значение.

$$\frac{ql}{2} - qz_1 = 0, \text{ откуда } z_1 = \frac{l}{2}.$$

$$\text{Тогда } M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

### 3.5. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом $M$ , поперечной силой $Q$ и интенсивностью нагрузки $q$

#### 3.5.1. Вывод зависимостей

Рассмотрим балку, находящуюся в равновесии под действием системы плоских сил (рис. 3.17).

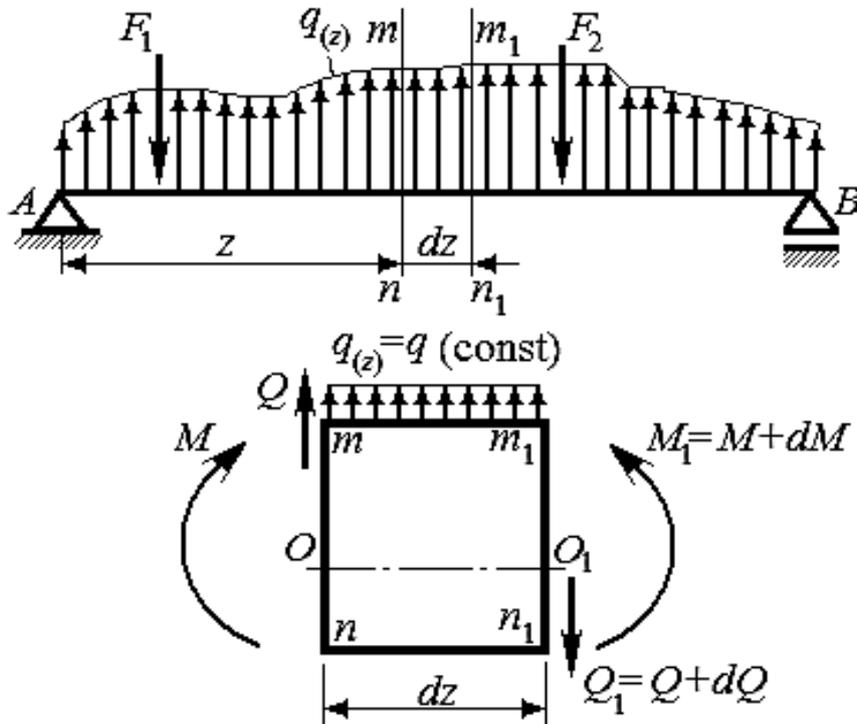


Рис. 3.17. К выводу дифференциальных зависимостей

На некотором расстоянии  $z$  от опоры  $A$  проведем сечение  $mn$  и на расстоянии  $dz$  от него – сечение  $m_1n_1$ .

Рассмотрим равновесие элемента длиной  $dz$ , вынесенного отдельно (см. рис. 3.17).

Нагрузку на этот элемент, вследствие бесконечно малой его длины, можно считать распределенной с постоянной величиной интенсивности  $q$  (равномерно распределенной).

Действие на выделенный элемент левой части балки заменим поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M$ , которые действуют в сечении  $mn$ .

На элемент длиной  $dz$  действует только равномерно распределенная нагрузка, поэтому  $Q$  и  $M$  являются непрерывными функциями, зависящими от  $z$ . Следовательно, в сечении  $m_1n_1$  (на расстоянии  $z + dz$ )  $Q$  и  $M$  получат бесконечно малые приращения и будут соответственно равны

$$M_1 = M + dM; \quad Q_1 = Q + dQ.$$

Направления  $M_1$  и  $Q_1$  противоположны направлениям  $Q$  и  $M$ , т. к. по условию статики они должны уравновешиваться.

*Вся балка находится в равновесии, поэтому в равновесии будет находиться и выделенный элемент.*

Составим и решим уравнения равновесия статики.

$$\sum Y = 0, \quad Q + qdz - Q_1 = 0.$$

Учитывая, что  $Q_1 = Q + dQ$ , имеем  $Q + qdz - Q - dQ = 0$ , откуда получаем

$$q = \frac{dQ}{dz}. \quad (3.1)$$

*Первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки в том же сечении.*

$$\sum M_{0_1} = 0, \quad M_1 - M - Qdz - qdz \frac{dz}{2} = 0.$$

Пренебрегая бесконечно малой величиной 2-го порядка  $dz \frac{dz}{2}$  и учитывая, что  $M_1 = M + dM$ , получаем  $M + dM - Qdz = 0$ , откуда

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (3.2)$$

*Первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.*

Полученная зависимость между изгибающим моментом  $M$  и поперечной силой  $Q$  известна под названием *формулы Журавского*.

Из уравнений (3.1) и (3.2) следует, что

$$q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (3.3)$$

*Вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.*

Полученные зависимости удобно использовать при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил и особенно при контроле правильности их построения.

### **3.5.2. Контроль правильности построения эпюр**

*Анализ эпюр, построенных ранее для простых балок и схем нагружения (см. рис. 3.15 и 3.16), с учетом полученных дифференциальных зависимостей (3.1)–(3.3), дает возможность сделать следующие выводы, которые можно использовать для контроля.*

**Отметим: студент, овладевший нижеперечисленными правилами, легко может строить эпюры без достаточно трудоемких расчетов.**

1. На конце консоли:
  - а)  $Q = 0$ , если в этом сечении не приложена сосредоточенная сила;
  - б)  $M = 0$ , если в этом сечении не приложен сосредоточенный момент.
2. В защемлении (в заделке):  $Q$  и  $M$  равны, соответственно, опорной реакции и опорному моменту.
3. На концевой шарнирной опоре:
  - а)  $Q$  равна по величине и знаку реакции на этой опоре;
  - б)  $M = 0$ , если в опорном сечении не приложен сосредоточенный момент.

4. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты:

а) на эпюре моментов – *скачки* на величину и в направлении этих моментов;

б) на эпюре  $Q$  изменений нет.

5. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

а) на эпюре  $Q$  – *скачки* на величину и в направлении этих сил;

б) на эпюре  $M$  – *изломы*, т. е. резкие изменения угла наклона линий, ограничивающих эпюру на смежных участках.

6. На участках балки, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой:

а) эпюра  $Q$  ограничена *наклонными прямыми*;

б) эпюра  $M$  ограничена *квадратной параболой*, при этом:

– *наклон эпюры  $Q$  направлен в сторону действия интенсивности  $q$ , а величина общего уменьшения или возрастания ординат  $Q$  равна равнодействующей распределенной нагрузки (произведению интенсивности на длину участка);*

– *на эпюре  $M$  выпуклость параболы обращена навстречу нагрузке  $q$ .*

7. Если на границе смежных участков эпюра  $Q$  не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру  $M$  на этих участках, сопрягаются без излома (иначе – см. п. 5, б).

*Обратимся к анализу полученных ранее дифференциальных зависимостей и определим возможности их для контроля.*

Рассмотрим график кривой – параболы, которой, как выяснено ранее, очерчивается эпюра  $M$  (рис. 3.18), и вспомним *геометрический смысл производной и интеграла*, известный из курса высшей математики.

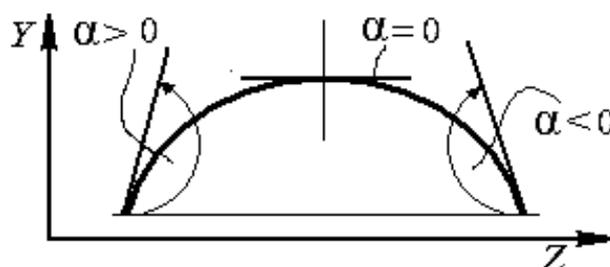


Рис. 3.18. К определению знаков для касательной к кривой

*Производная какой-то функции есть тангенс угла наклона касательной, проведенной в исследуемой точке к кривой, которая является графиком этой функции. Положительное направление отсчета данного угла – против хода часовой стрелки.*

*Интеграл есть площадь под кривой.*

8. *Дифференциальная зависимость* (см. формулу (3.1)). Данная зависимость дает возможность проанализировать связь между интенсивностью распределенной нагрузки и поперечной силой (рис. 3.19):

$$q = \frac{dQ}{dz} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Поперечная сила есть неопределенный интеграл вида

$$Q = \int q dz + C. \quad (3.4)$$

На участках балки, свободных от распределенной нагрузки,  $q = 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , где  $\alpha$  – угол наклона эпюры  $Q$  в рассматриваемом сечении.

Из зависимости (3.4) следует  $Q = C$ . Значит, эпюра  $Q$  ограничена прямой, параллельной оси эпюры (на рис. 3.19 не показана).

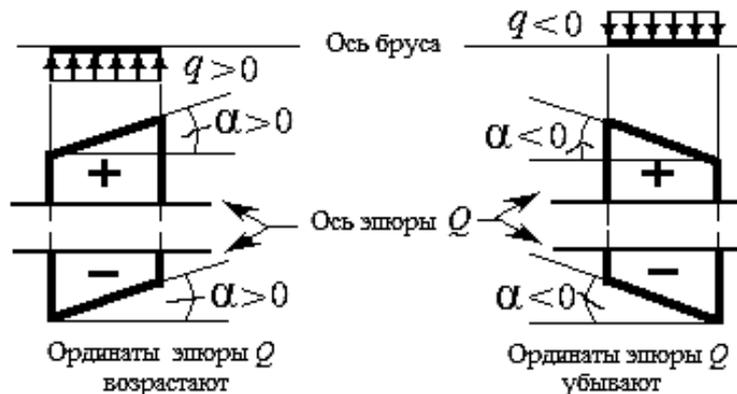


Рис. 3.19. Графическая связь между  $q$  и  $Q$

На участках балки, где  $q = \text{const}$ ,  $Q = qz + C$ , следовательно, эпюра  $Q$  – наклонная прямая.

На участках балки, где  $q > 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ , поперечная сила возрастает. Эпюра  $Q$  имеет наклон слева вверх налево (отсчет угла  $\alpha$  против часовой стрелки).

На участках балки, где  $q < 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ , поперечная сила убывает. Эпюра  $Q$  имеет наклон слева вниз направо (отсчет угла  $\alpha$  по часовой стрелке).

9. Дифференциальная зависимость (см. формулу (3.2)). Данная зависимость дает возможность проанализировать связь между поперечной силой и изгибающим моментом (рис. 3.20):

$$Q = \frac{dM}{dz} = \operatorname{tg} \beta.$$

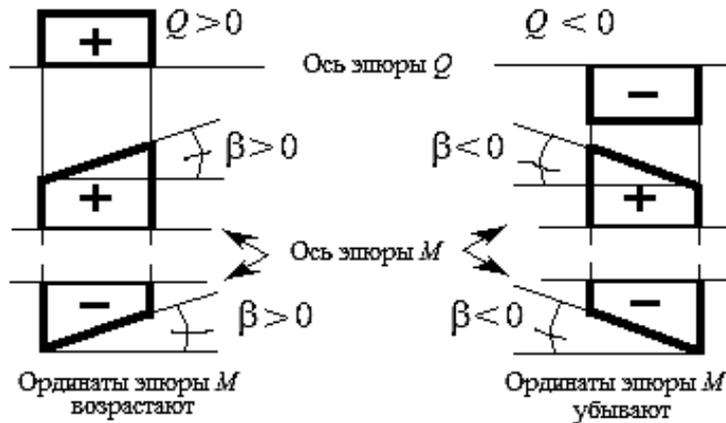


Рис. 3.20. Графическая связь между  $Q$  и  $M$

Изгибающий момент есть неопределенный интеграл вида

$$M = \int Q dz + D. \quad (3.5)$$

На участке балки, свободном от поперечной силы,  $Q = 0$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 0$ , где  $\beta$  – угол наклона прямой на эюре  $M$  в данном сечении.

Из зависимости (3.5) следует  $M = D$ . Значит, эюра  $M$  ограничена прямой, параллельной оси эюры.

На участках балки, где  $Q = \operatorname{const}$ ,  $M = Qz + D$ , следовательно, эюра  $M$  – наклонная прямая.

На участках балки, где  $Q > 0$ ,  $\operatorname{tg} \beta > 0$ , изгибающий момент возрастает. Эюра  $M$  имеет наклон слева вверх налево (отсчет угла  $\beta$  против часовой стрелки).

На участках балки, где  $Q < 0$ ,  $\operatorname{tg} \beta < 0$ , изгибающий момент убывает. Эюра  $M$  имеет наклон слева вниз направо (отсчет угла  $\beta$  по часовой стрелке).

10. Дифференциальная зависимость (см. формулу (3.3)). Данная зависимость дает возможность проанализировать связь между интенсивностью распределенной нагрузки и изгибающим моментом (рис. 3.21).

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2}.$$

Изгибающий момент есть неопределенный интеграл вида

$$M = \int \left( \int q dz + C \right) dz + D. \quad (3.6)$$

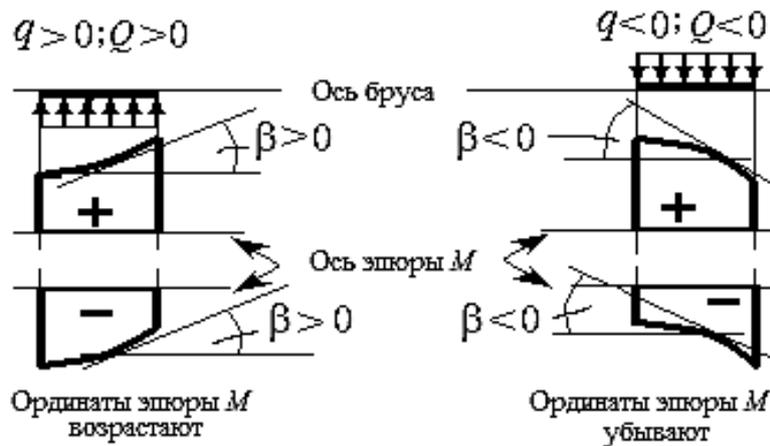


Рис. 3.21. Графическая связь между  $q$  и  $M$

На участке балки, свободном от распределенной нагрузки,  $q = 0$ . Значит,  $Q = C$ , эюра  $Q$  ограничена прямой, параллельной оси эюры.

$M = Cz + D$ , следовательно, эюра  $M$  – наклонная прямая (на рис. 3.21 не показана).

На участках балки, где  $q = \text{const}$ ,

$$M = \int (qz + C) dz + D = \frac{qz^2}{2} + Cz + D, \quad (3.7)$$

следовательно, эюра  $M$  – кривая второго порядка – парабола с выпуклостью навстречу распределенной нагрузке.

На участках балки, где  $Q > 0$ ,  $\text{tg } \beta > 0$ , изгибающий момент возрастает. Эюра  $M$  имеет наклон касательных слева вверх направо (отсчет угла  $\beta$  против часовой стрелки).

На участках балки, где  $Q < 0$ ,  $\text{tg } \beta < 0$ , изгибающий момент убывает. Эюра  $M$  имеет наклон касательных слева вниз направо (отсчет угла  $\beta$  по часовой стрелке).

11. Важным является случай, когда  $Q$  переходит через 0, меняя знак (рис. 3.22). При этом  $Q = \frac{dM}{dz} = 0$ .

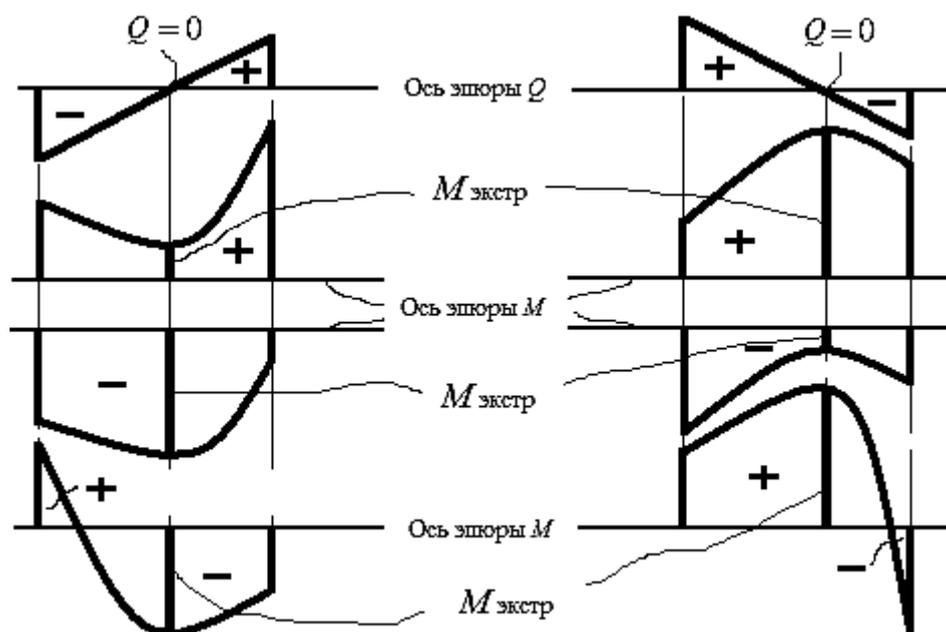


Рис. 3.22. Возможные варианты эпюр изгибающих моментов с экстремумами

Это есть *условие экстремума функции* – в сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент получает экстремальное значение (в обозначениях на рис. 3.18 – при угле  $\alpha$ , равном нулю):

– если  $Q$  меняет знак с «+» на «-», то момент  $M$  принимает значение  $\max$  (с учетом знака момента);

– если  $Q$  меняет знак с «-» на «+», момент  $M$  принимает значение  $\min$  (с учетом знака момента).

Вспомним, что при решении задачи для схемы 3.16, б было проведено исследование на экстремум для определения третьего значения ординаты изгибающего момента.

### 3.5.3. Примеры практического использования дифференциальных зависимостей и правил контроля

Студенты, успешно овладевшие методикой построения эпюр и использования дифференциальных зависимостей и правил контроля, могут *строить эпюры без проведения подробных выкладок*.

Проанализируем, как это делается, на рассмотренных ранее примерах (схемы и эпюры см. на рис. 3.14 и 3.16), вспомнив попутно комментарии (п. 7)

о графическом смысле интеграла как площади под кривой. Изобразим здесь только схемы с указанием значений опорных реакций (рис. 3.23).

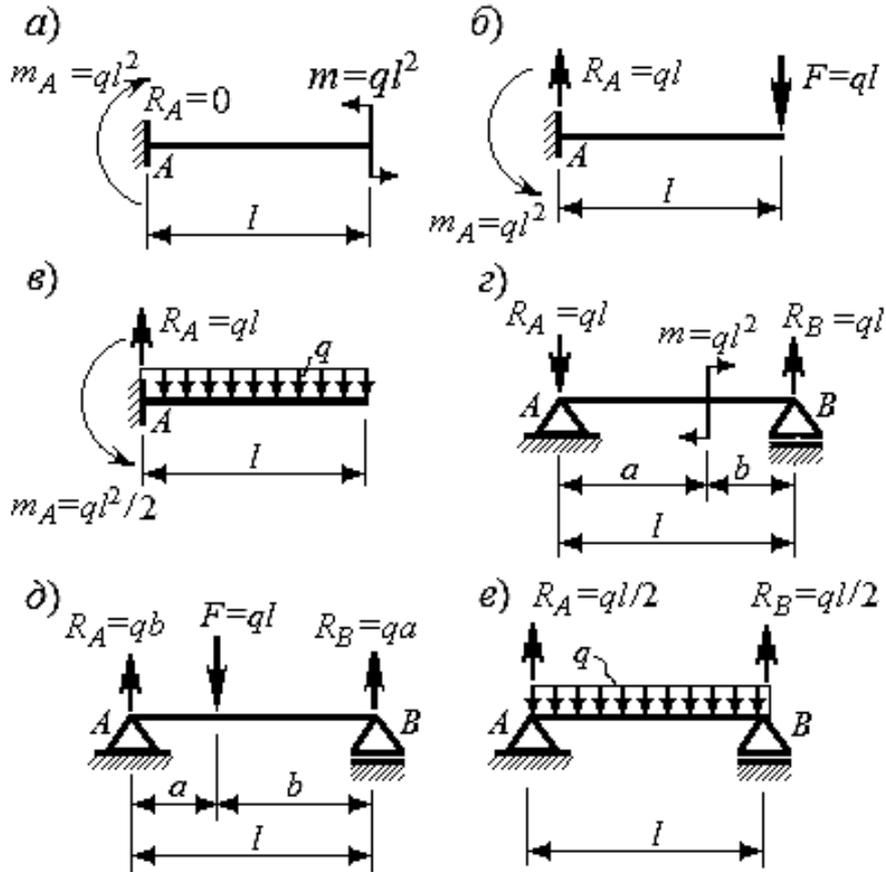


Рис. 3.23. Расчетные схемы балок (см. рис. 3.14 и 3.16)

Схемы на рис. 3.14, а и 3.23, а.

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно,  $q = 0$ .

На эпюре  $Q$  – прямая, параллельная оси эпюры. Исходя из дифференциальных зависимостей,  $Q = C = 0$  (т. к. отсутствуют сосредоточенная внешняя сила и реакция).

На эпюре  $M$  – прямая, параллельная оси эпюры. На концевой опоре и в заделке – скачки, по величине и направлению соответствующие: на конце консоли – внешней моменту, в заделке – опорному. Из дифференциальных зависимостей  $M = D = m = ql^2$  (по правилу знаков  $m > 0$ ).

Схемы на рис. 3.14, б и 3.23, б.

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно,  $q = 0$ .

На эпюре  $Q$  – прямая, параллельная оси эпюры. На концевой опоре и в заделке – скачки, по величине и направлению соответствующие опорной реакции  $R_A = ql$  и внешней силе  $F = ql$ .  $Q = C = ql > 0$ .

На эпюре  $M$  – наклонная прямая. На конце балки – 0 (не приложен сосредоточенный момент). В заделке – скачок на величину и по направлению, равный опорному моменту  $m_A = -ql^2$ .

Так как ординаты  $Q > 0$ , то ординаты  $M$  должны возрасть. Учитывая, что в данном случае  $M = Qz + D$ , ордината увеличится на значение, равное площади эпюры  $Q$ , т. е. на конце консоли

$$M = ql^2 + m_A = ql^2 - ql^2 = 0.$$

Схемы на рис. 3.14, в и 3.23, в.

К балке приложена распределенная нагрузка  $q = \text{const} < 0$ .

На эпюре  $Q$  – наклонная прямая (наклон в направлении  $q$ ) со скачком на величину реакции  $R_A = ql$  в опорном сечении. Ординаты эпюры *положительны* и должны убывать, т. к.  $q < 0$ . На конце консоли  $Q = qz + C$ . Следовательно,  $Q = -ql + R_A = -ql + ql = 0$ .

На эпюре  $M$  – парабола с выпуклостью навстречу нагрузке  $q$  и скачком в опорном сечении на величину опорного момента  $m_A = -\frac{ql^2}{2}$ . Так как  $Q > 0$ , то ординаты  $M$  должны возрасть. На конце консоли

$$M = \frac{qz^2}{2} + Cz + D = -\frac{ql^2}{2} + ql^2 - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

Схемы на рис. 3.16, а и 3.23, г.

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно,  $q = 0$ .

На эпюре  $Q$  – прямая, параллельная оси эпюры. На опорах скачки, по величине и направлению соответствующие опорным реакциям  $R_A = ql$  и  $R_B = ql$ .  $Q = C = -ql$ ;  $Q < 0$ .

На эпюре  $M$  – наклонные прямые. На концах балки – 0 (не приложены сосредоточенные моменты). В сечении, где приложен момент, на эпюре – скачок, по величине и направлению соответствующий этому моменту:  $M_C = ql^2 = ql(a + b)$ .

Так как ординаты по всей длине балки  $Q < 0$ , то ординаты  $M$  должны убывать. Учитывая, что в данном случае  $M = Qz + D$ , ординаты будут уменьшаться на величину, равную площади эпюры  $Q$ .

Значение ординаты момента в сечении  $C$  (с координатой  $a$ ) определится площадью прямоугольника из эпюры  $Q$ :  $M_C = -qla$ . Затем следует скачок на величину  $M_C = -qla + ql(a+b) = qlb$ .

На опоре  $A$  момент равен 0. На опоре  $B$  изгибающий момент определится выражением  $M_B = qlb - qlb = 0$ .

Схемы на рис. 3.16, б и 3.23, д.

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно,  $q = 0$ .

На эпюре  $Q$  – прямые, параллельные оси эпюры. На опорах – скачки, по величине и направлению соответствующие опорным реакциям  $R_A = qb$  и  $R_B = -qa$ , а в сечении  $C$  – скачок на величину и по направлению силы  $F = -ql = -q(a+b)$ .

$$Q_C = C = R_A = qb; \quad Q > 0.$$

$$Q_C = R_A - F = qb - q(a+b) = qa; \quad Q < 0.$$

На эпюре  $M$  – наклонные прямые. На концах балки – 0 (не приложены сосредоточенные моменты). В сечении, где приложена сила, на эпюре – излом (резкое изменение угла наклона прямой).

На опоре  $A$  момент равен 0. На левом участке  $Q > 0$ , поэтому ординаты  $M$  должны возрасти на величину  $M_C = Qz + D = qba$ .  $D = 0$ .

На правом участке  $Q < 0$ , следовательно, ординаты  $M$  должны убывать. На опоре  $B$  изгибающий момент определится выражением  $M_B = qba - qab = 0$ .

Схемы на рис. 3.16, в и 3.23, е.

К балке приложена распределенная нагрузка  $q = \text{const} < 0$ .

На эпюре  $Q$  – наклонная прямая (наклон в направлении  $q$ ) со скачками на величину реакций  $R_A = \frac{ql}{2}$  и  $R_B = -\frac{ql}{2}$  в опорных сечениях.

На опоре  $A$  ордината эпюры *положительна* и должна убывать, т. к.  $q < 0$ .

$$\text{На опоре } B \text{ имеем } Q = qz + C; \quad Q_B = R_A - ql = -\frac{ql}{2}.$$

Эпюра меняет знак, поэтому необходимо найти координату сечения, где  $Q = \frac{ql}{2} - qz = 0$ . Откуда  $z = l/2$ .

На эпюре  $M$  – парабола  $M = \frac{qz^2}{2} + Cz + D$  с выпуклостью навстречу нагрузке  $q$  и экстремумом в сечении, где  $z = l/2$ .

На опорах не приложены сосредоточенные моменты, поэтому  $M_A = M_B = 0$ .

Так как на левом участке  $Q > 0$ , то ординаты  $M$  должны возрастать. При  $z = l/2$  имеем экстремум, величину которого определим как площадь эпюры  $Q$  на этом участке:  $M_{\max} = \frac{1}{2} \frac{ql}{2} \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}$ .

На правом участке  $Q < 0$ . Ординаты  $M$  должны убывать на величину, определяемую площадью эпюры  $Q$ . Тогда  $M_B = \frac{ql^2}{8} - \frac{1}{2} \frac{ql}{2} \frac{l}{2} = 0$ .

В завершение темы рассмотрим еще одну, более сложную с точки зрения приложенных нагрузок, схему.

**Пример 3.** Для балки (рис. 3.24) построить эпюры  $Q$  и  $M$ .

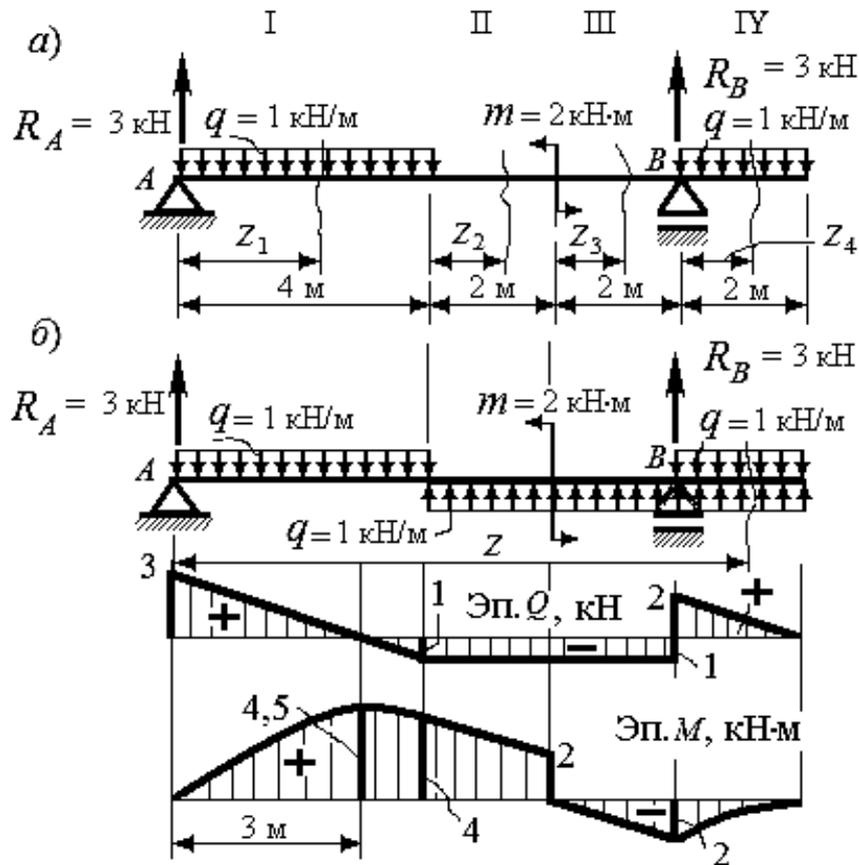


Рис. 3.24. Расчетные схемы и эпюры  $Q$  и  $M$  к примеру 3

Для построения эпюр используем рекомендации (подразд. 3.4.3): определить опорные реакции, разбить балку на участки и записать для каждого участка уравнения для поперечной силы и изгибающего момента (см. схему на рис. 3.23, а).

Значения опорных реакций приведем без расчета:

$$R_A = R_B = 3 \text{ кН.}$$

Уравнения  $Q$  и  $M$  для каждого из участков будут следующие (*отсчет координат на всех участках – слева направо*).

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м};$

$$Q_1 = R_A - qz_1 = 3 - 1z_1 \quad \text{– уравнение наклонной прямой.}$$

При  $z_1 = 0$   $Q_1 = 3 \text{ кН};$  при  $z_1 = 4 \text{ м}$   $Q_1 = -1 \text{ кН.}$

$$M_1 = R_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 4z_1 - 1 \frac{z_1^2}{2} \quad \text{– уравнение параболы.}$$

При  $z_1 = 0$   $M_1 = 0;$  при  $z_1 = 4 \text{ м}$   $M_1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

Видим, что на данном участке эпюра  $Q$  пересекает ось, меняя знак. Следовательно, на эпюре  $M$  в сечении, где  $Q$  равно нулю, имеем экстремальное значение изгибающего момента (парабола с выпуклостью навстречу направлению  $q$  и с максимальным значением в этом сечении).

Исследуем эпюру  $M$  на экстремум:  $Q_1 = 0; \quad 3 - 1z_1 = 0; \quad z_1 = 3 \text{ м.}$

$$\text{Тогда } M_{1\max} = 4 \cdot 3 - 1 \frac{3^2}{2} = 4,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Участок II:**  $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м};$

$$Q_2 = R_A - q \cdot 4 = 3 - 1 \cdot 4 = -1 \text{ кН.} \quad Q_2 = \text{const} \quad \text{– прямая, параллельная оси эпюры.}$$

$M_2 = R_A(4 + z_2) - q \cdot 4(2 + z_2) = 3(4 + z_2) - 1 \cdot 4(2 + z_2)$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_2 = 0$   $M_2 = 4;$  при  $z_2 = 2 \text{ м}$   $M_2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

**Участок III:**  $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м};$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 4 = 3 - 1 \cdot 4 = -1 \text{ кН.} \quad Q_3 = \text{const} \quad \text{– прямая, параллельная оси эпюры.}$$

$M_3 = R_A(6 + z_3) - q \cdot 4(4 + z_3) - m = 3(6 + z_3) - 1 \cdot 4(4 + z_3) - 2$  – уравнение наклонной прямой.

При  $z_3 = 0$   $M_3 = 0;$  при  $z_3 = 2 \text{ м}$   $M_3 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

**Участок IV:**  $0 \leq z_4 \leq 2$  м;

$$Q_4 = R_A - q \cdot 4 + R_B - qz_4 = 3 - 1 \cdot 4 + 3 - 1z_4 = 2 - 1z_4 - \text{наклонная прямая.}$$

При  $z_4 = 0$   $Q_4 = 2$  кН; при  $z_4 = 2$  м  $Q_4 = 0$ .

$$\begin{aligned} M_4 &= R_A(8 + z_4) - q \cdot 4(6 + z_4) - m + R_B z_4 - q \frac{z_4^2}{2} = \\ &= 3(8 + z_4) - 1 \cdot 4(6 + z_4) - 2 + 3z_4 - 1 \frac{z_4^2}{2} - \text{уравнение параболы.} \end{aligned}$$

При  $z_4 = 0$   $M_4 = -2$  кН·м; при  $z_4 = 2$  м  $M_4 = 0$ .

Видим, что такая методика получения уравнений ВСФ недостаточно удобна, особенно для применения ЭВМ.

Расположив начало координат в крайней левой точке балки (точка  $A$  на рис. 3.24, б), т. е. не смещаясь на новую границу участка, текущую координату  $z$  перемещаем слева направо и сразу располагаем на последнем – участке IV балки (см. схему на рис. 3.24, б). Тогда можно записать только два уравнения  $Q$  и  $M$ .

Данная расчетная схема имеет принципиальное отличие от схемы на рис. 3.24, а – начиная с границы участков I–II к балке (до ее конца) приложена распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 1$  кН/м, но с обратным знаком. Это сделано в связи с тем, что распределенная нагрузка  $q = 1$  кН/м приложена только на участке I и чтобы учесть данное обстоятельство при записи уравнений для  $Q$  и  $M$ , на последующих участках необходимо, начиная с границы между участками I и II и далее до конца балки, приложить так называемую компенсирующую нагрузку.

Компенсирующая нагрузка – это распределенная нагрузка интенсивностью, равной той, что обрывается на границе участков, и имеющая противоположное направление.

Заметим, что распределенная нагрузка на консоли приложена до конца балки, поэтому компенсировать ее нет необходимости.

Уравнения в этом случае будут иметь вид:

$$Q = 3z^0 - 1z|_I + 1(z-4)|_{II,III} + 3(z-8)^0 - 1(z-8)|_{IV}; \quad (3.8)$$

$$M = 3z - \frac{1z^2}{2}|_I + 1 \frac{(z-4)^2}{2}|_{II} - 2(z-6)^0|_{III} + 3(z-8) - 1 \frac{(z-8)^2}{2}|_{IV}. \quad (3.9)$$

В данных уравнениях:

– *вертикальной линией с номером участка* отделяем члены уравнения, которые описывают зависимость ВСФ на рассматриваемом участке (слева от этой линии);

– *z – текущая координата* сечения, для которого проводится расчет ВСФ. Отсчет координаты – от крайней левой точки балки. Значение координаты указывает на номер участка, для которого производится расчет ВСФ, и, соответственно, на те члены уравнения, которые необходимо использовать в расчете;

– *множители в нулевой степени*, как известно, равны единице. Их включение в уравнения позволяет получить выражения в обобщенном виде.

Например,  $z = 9$  м. Тогда это будет участок IV и уравнения примут вид:

$$Q = 3 \cdot 9^0 - 1 \cdot 9 + 1(9 - 4) + 3(9 - 8)^0 - 1(9 - 8) = 1 \text{ кН};$$

$$M = 3 \cdot 9 - \frac{1 \cdot 9^2}{2} + \frac{1(9 - 4)^2}{2} - 2(9 - 6)^0 + 3(9 - 8) - \frac{1(9 - 8)^2}{2} = -0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

К такому подходу при записи уравнений еще вернемся в дальнейшем (при рассмотрении метода начальных параметров).

### **3.6. Построение и контроль эпюр ВСФ для статически определимых рам**

*Рамами называют системы, составленные из стержней, соединенных в узлах* (рис. 3.25).

*Вертикальные стержни рамы называют стойками, а горизонтальные – ригелями.*

*Ось рамы представляет собой ломаную линию.*

*В узлах стержни рамы соединяются чаще всего жестко* (см. рис. 3.25, а, б, г, д), но иногда используется соединение посредством шарниров (см. рис. 3.25, в).

*Жесткое соединение устраняет возможность взаимного поворота скрепленных в узле стержней, т. е. в узловой точке углы между их осями при деформации от нагрузки остаются неизменными.*

*При шарнирном соединении, наоборот, в узловой точке возможен взаимный поворот стержней.*

*Сам узел от действия нагрузок может иметь как угловые, так и линейные перемещения.*

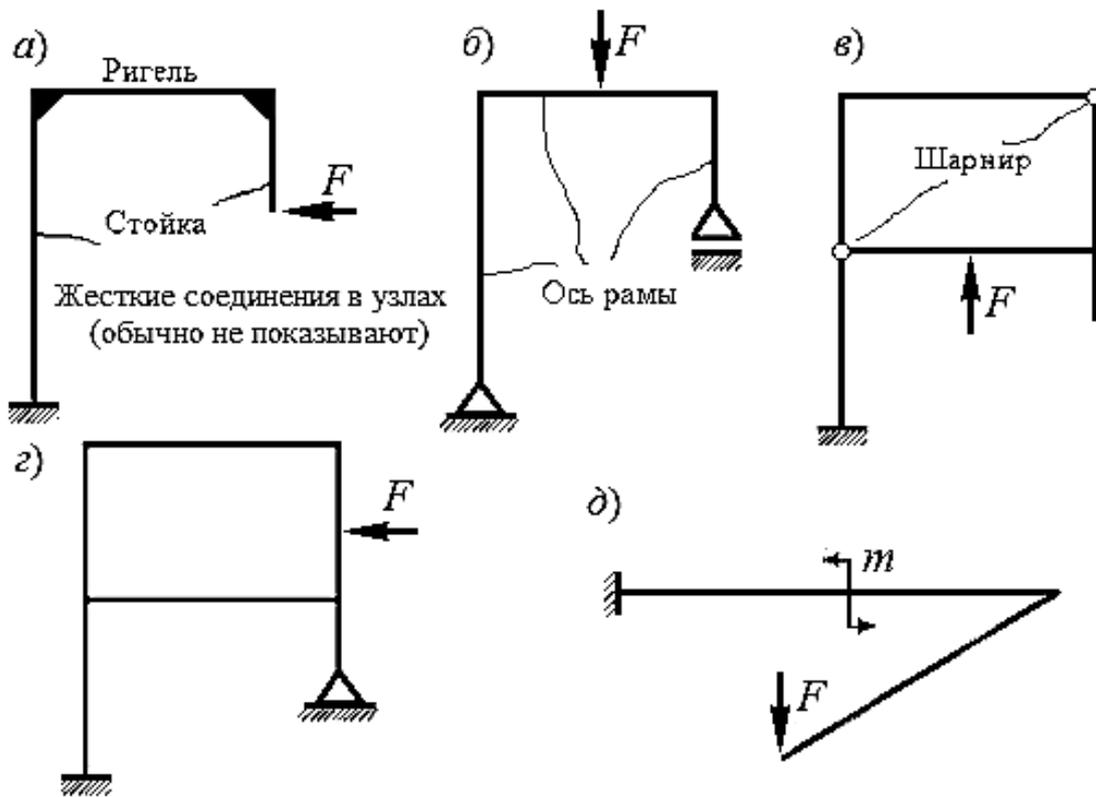


Рис. 3.25. Расчетные схемы рам

В сопротивлении материалов, строительной механике, а также в ряде специальных дисциплин инженеру приходится иметь дело с различными расчетными схемами рам:

- рамы *плоские и пространственные*;
- рамы *статически определимые и статически неопределимые*.

В *плоских рамах* оси стержней и внешние нагрузки располагаются в одной плоскости (см. рис. 3.25, а–г), в *пространственных* – в разных плоскостях (см. рис. 3.25, д).

*Статически определимые рамы* (см. рис. 3.25, а–в, д) – стержневые системы, в которых *опорные реакции* (так называемые *усилия связей*) можно определить, используя уравнения равновесия (уравнения статики).

Если *число опорных реакций* (число связей) больше, чем *число уравнений статики*, которые можно составить для данной системы, – рама *статически неопределимая* (см. рис. 3.25, г).

Каждый прямолинейный участок рамы можно рассматривать как балку. *Усилия в узлах передаются от одного стержня к другому* в соответствии с законами теоретической механики (имеются в виду, в частности, правила переноса сил вдоль линии действия и их параллельный перенос).

**Пример 1.** Рассмотрим схему плоской статически определимой рамы (рис. 3.26). Она нагружена простой нагрузкой – одной сосредоточенной силой.

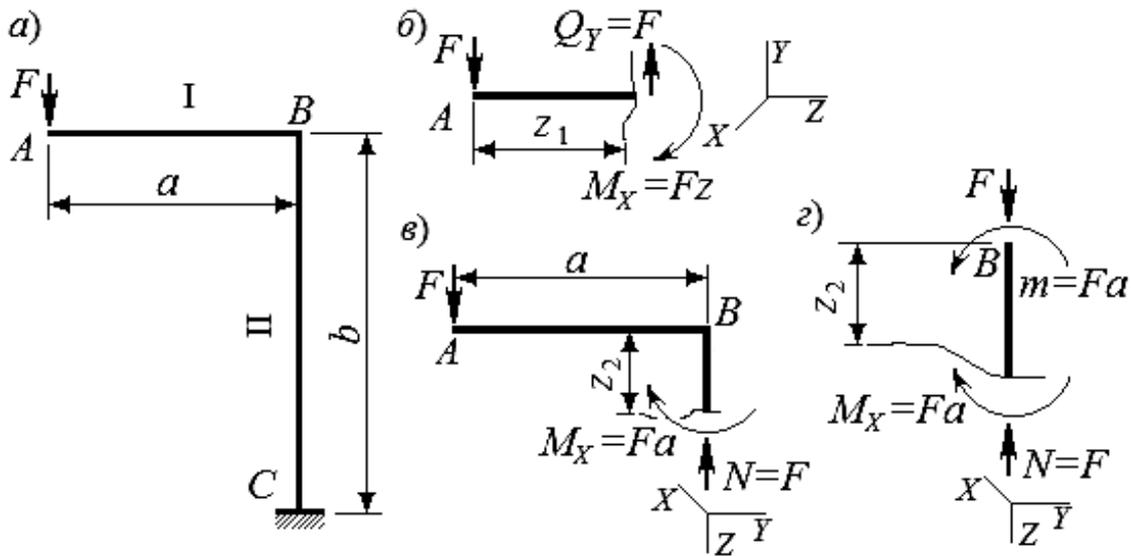


Рис. 3.26. Расчетная схема рамы и внутренние силовые факторы в произвольных сечениях стержней

Следуя методу сечений, определим действующие в произвольных сечениях стержней рамы ВСФ, используя при этом систему координат, показанную на рис. 3.26, б–г (ось  $Z$  направлена вдоль оси стержня).

Видим, что на участке  $I$  рамы – ригеле  $AB$  – действуют поперечная сила и изгибающий момент (см. рис. 3.26, б).

На участке  $II$  рамы – стойке  $BC$  – будут приложены продольная сила и изгибающий момент (см. рис. 3.26, в, г). На этих рисунках показан один и тот же участок  $II$ , но в первом случае (см. рис. 3.26, в) рассматриваются два стержня, а во втором – только часть стержня  $BC$ , к началу которого с использованием правил теоретической механики приведены внешние нагрузки, действующие слева (см. рис. 3.26, г).

В данном случае слева, в точке  $A$ , приложена сила. При параллельном переносе силы в начало второго участка, в точку  $B$ , в этой точке приложим силу и момент.

Таким образом, в сечениях стержней плоской рамы (в отличие от балок) могут действовать три ВСФ:  $N, Q_y, M_x$  или  $N, Q_x, M_y$ .

Осталось договориться о правиле знаков. Правила знаков для продольной и поперечной сил принимаем такими же, как для стержней и балок:

–  $N > 0$ , если равнодействующая проекций сил на продольную ось действует от сечения (растяжение);

–  $Q > 0$ , если равнодействующая проекций сил на ось, перпендикулярную оси бруса, поворачивает сечение *по часовой стрелке*.

При построении данных эпюр положительные ординаты откладываются с *внешней стороны* контура рамы. Тогда для схемы, показанной на рис. 3.25,  $N$  и  $Q_y$  отрицательны, поэтому ординаты этих эпюр откладываем *внутри контура рамы*.

Для изгибающего момента специального правила знаков не устанавливают.

Например, если изгибающий момент вызывает сжатие внешнего волокна стержня, принимаем такое направление этого момента положительным. Тогда на рис. 3.25, приняв внешними верхнее волокно на участке  $AB$  и правое волокно на участке  $BC$ , видим, что  $M_x$  на обоих участках имеет отрицательный знак.

При составлении уравнений для изгибающего момента принимают по собственному усмотрению какое-либо направление момента положительным.

При построении эпюр изгибающих моментов ординаты эпюр условимся откладывать на сжатом волокне: в данном примере по ригелю ординаты  $M_x$  откладываем на нижнее волокно, а по стойке – на левое.

Знаки на эпюре  $M$  обычно не ставятся.

В рассматриваемом примере получим следующие эпюры (рис. 3.27, а).

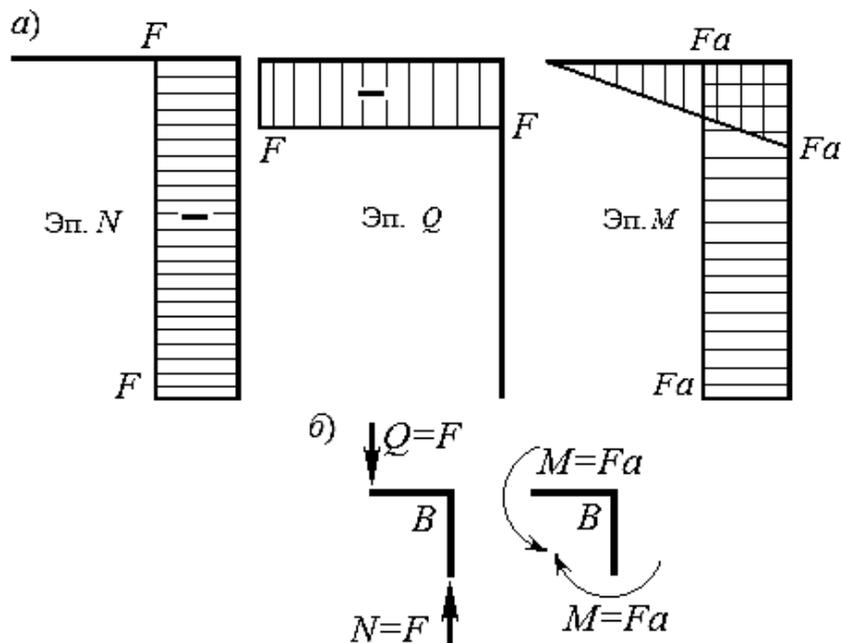


Рис. 3.27. Эпюры ВСФ для схемы, изображенной на рис. 3.26

Построению эпюр должны *предшествовать определение опорных реакций и их проверка*. Исключение – рама-консоль (см. рис. 3.25, а и 3.26). В этих случаях можно вести расчет, перемещаясь от свободного конца рамы к опоре.

Контроль правильности построения эпюр включает в себя все правила, которые были изложены ранее. При этом расчетную схему и эпюры анализируем, рассматривая каждый участок так, чтобы он находился в правой системе координат (для данной схемы слева направо вниз).

Кроме того, существует еще одно, специфическое, правило: эпюры  $N$  и  $Q$  должны взаимно уравниваться в узлах, а эпюра  $M$  должна сама себя уравнивать в узлах.

Для данного примера (рис. 3.27, б): в узле  $B$  со стороны стойки  $BC$  действует отрицательная продольная сила  $N = F$ , а со стороны ригеля  $AB$  – отрицательная поперечная сила  $Q = F$ . Со стороны ригеля  $AB$  и со стороны стойки  $BC$  в узле  $B$  действуют изгибающие моменты  $M = Fa$ . Эти моменты прикладываем так, чтобы сжимались по отношению к исследуемому узлу соответственно нижнее и левое волокна стержней. Видим, что требования равновесия в исследуемом узле соблюдаются.

**Пример 2.** В завершение рассмотрим более сложный случай расчетной схемы рамы (рис. 3.28).

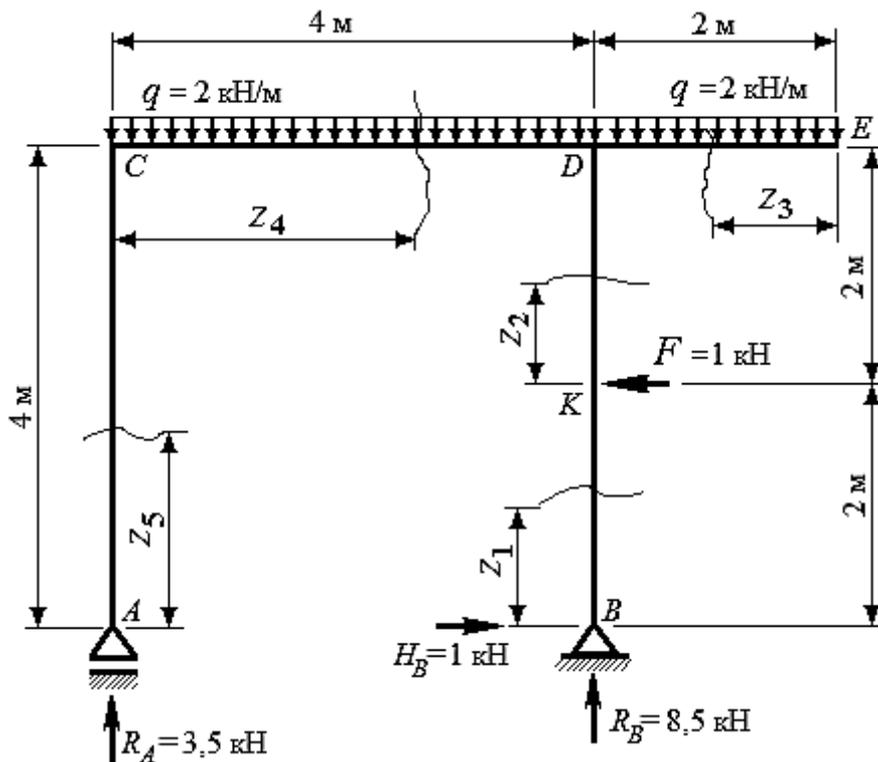


Рис. 3.28. Расчетная схема для рамы к примеру 2

1. Определяем опорные реакции, для чего составляем три уравнения равновесия, т. к. неизвестными являются три реакции. На опоре  $A$  одна составляющая  $R_A$  – проекция сил на вертикальную ось; на опоре  $B$  две составляющие

щие:  $H_B$  – проекция сил на горизонтальную ось и  $R_B$  – на вертикальную. Принимаем следующие обозначения осей: для горизонтальной оси –  $X$ , для вертикальной –  $Y$ .

$$\sum X = 0; \Rightarrow H_B - F = 0; \Rightarrow H_B = 1 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A = 0; \Rightarrow 1 \cdot 2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0; \Rightarrow R_B = 8,5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0; \Rightarrow 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0; \Rightarrow R_A = 3,5 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \Rightarrow R_A + R_B - 2 \cdot 6 = 0; \Rightarrow 3,5 + 8,5 - 12 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

*Реакции определены правильно.*

2. Разбиваем раму на участки: их пять – по числу стержней.

3. Используя метод сечений, записываем для каждого участка уравнения ВСФ.

*Для изгибающего момента примем знак «+», если при изгибе стержней сжимается наружное волокно (AC – левое, CD – верхнее, DE – верхнее, DK и DB – правое).*

**Участок BK:**  $0 \leq z_1 \leq 2$  м;

$$N_{BK} = -R_B = -8,5 \text{ кН}; \quad Q_{BK} = -H_B = -1 \text{ кН};$$

$$M_{BK} = H_B z_1 = 1 z_1 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=2} = 2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Участок KD:**  $0 \leq z_2 \leq 2$  м;

$$N_{KD} = -R_B = -8,5 \text{ кН}; \quad Q_{KD} = -H_B + F = -1 + 1 = 0;$$

$$M_{KD} = H_B (2 + z_2) - F z_2 = 1(2 + z_2) - 1 z_2 \Big|_{z=0} = 2 \Big|_{z=2} = 2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Участок ED:**  $0 \leq z_3 \leq 2$  м;

$$N_{ED} = 0; \quad Q_{ED} = q z_3 = 2 z_3 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=2} = 4 \text{ кН};$$

$$M_{ED} = -q \frac{z_3^2}{2} = -2 \frac{z_3^2}{2} \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=2} = -4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Участок AC:**  $0 \leq z_5 \leq 4$  м;

$$N_{AC} = -R_A = -3,5 \text{ кН}; \quad Q_{AC} = 0; \quad M_{AC} = 0.$$

**Участок CD:**  $0 \leq z_4 \leq 4$  м;

$$N_{CD} = 0; \quad Q_{CD} = R_A - q z_4 = 3,5 - 2 z_4 \Big|_{z=0} = 3,5 \Big|_{z=4} = -4,5 \text{ кН};$$

$$M_{CD} = R_A z_4 - q \frac{z_4^2}{2} = 3,5 z_4 - 2 \frac{z_4^2}{2} \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=4} = -2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

На данном участке  $Q$  меняет знак, поэтому проведем исследование на экстремум.  $Q_{CD} = R_A - q z_4 = 0; \quad Q_{CD} = 3,5 - 2 z_4 = 0; \Rightarrow z = 1,75$  м.

$$\text{Тогда } M_{\max} = 3,5 \cdot 1,75 - 2 \frac{1,75^2}{2} = 3,06 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4. По полученным данным строим эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 3.29). Тонкой линией на эпюрах показаны оси рамы.

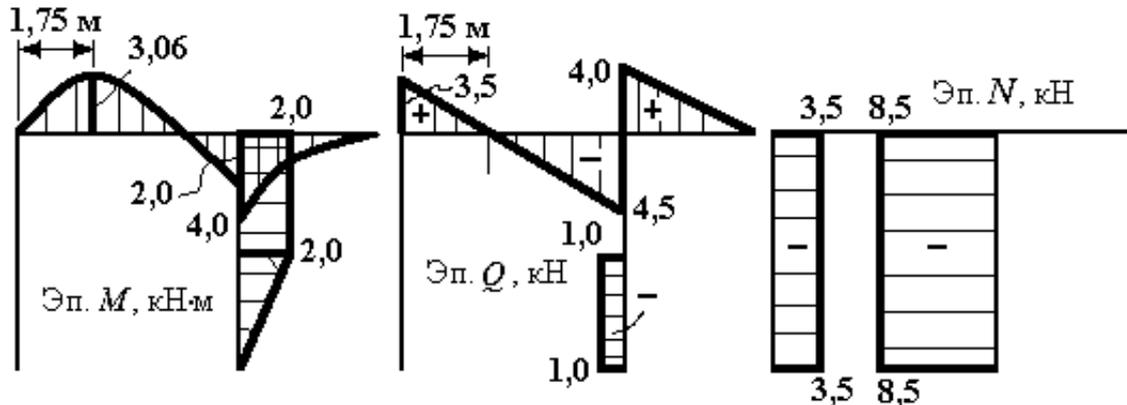


Рис. 3.29. Эпюры ВСФ для расчетной схемы рамы к примеру 2

5. Проводим проверку правильности построения эпюр.

Видим, что скачки на эпюрах присутствуют в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы (в том числе и реакции). На эпюре  $M$  скачков нет.

Линии, которыми очерчены эпюры, соответствуют расчетной схеме (наклонные прямые и параболы).

На участках, где  $Q$  положительна, ординаты  $M$  возрастают, и наоборот (при расположении участков в правой системе координат).

В сечении, где  $Q = 0$ , на эпюре  $M$  – экстремум.

Рассмотрим равновесие узлов (рис. 3.30), анализируя построенные эпюры (см. рис. 3.29).

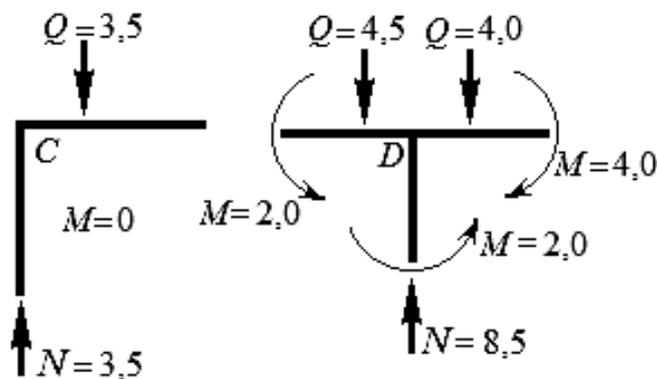


Рис. 3.30. К контролю правильности решения для схемы к примеру 2

Узел  $C$ : снизу по стойке действует сжимающая продольная сила, справа, со стороны ригеля, – положительная поперечная сила, равные между собой. Изгибающие моменты со стороны стойки и ригеля равны нулю.

Узел *D*: снизу по стойке действует сжимающая продольная сила, слева, со стороны ригеля, – отрицательная поперечная сила; справа, со стороны консоли, – положительная поперечная сила. Сумма сил равна нулю. Изгибающий момент: снизу, со стороны стойки, сжимает правое волокно, слева, со стороны ригеля, и справа, со стороны консоли, – нижнее волокно. Сумма моментов равна нулю.

Эпюры построены правильно.

### Контрольные вопросы

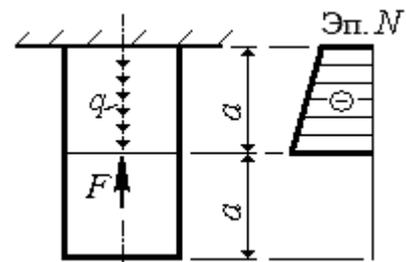
1. Дайте определения всем внутренним силовым факторам. Каковы правила знаков при построении эпюр?
2. Как определить равнодействующую от равномерно распределенной нагрузки, поперечную силу и изгибающий момент от ее действия?
3. Как с помощью дифференциальных зависимостей построить и проверить правильность построения эпюр  $Q$  и  $M$  в балках?
4. Каковы правила знаков при построении эпюр в рамах?
5. В чем заключается проверка правильности построения эпюр в рамах?
6. Укажите, под каким номером приведен правильный ответ для заданной схемы нагружения бруса:

1)  $F > qa$ ;

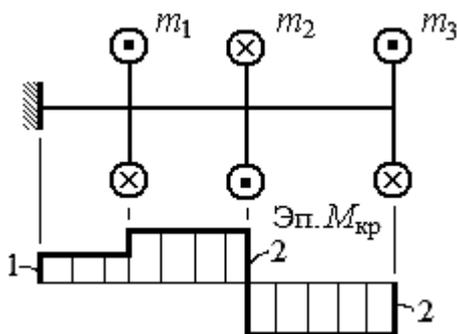
2)  $F < qa$ ;

3)  $F = qa$ ;

4)  $F = 0$ .



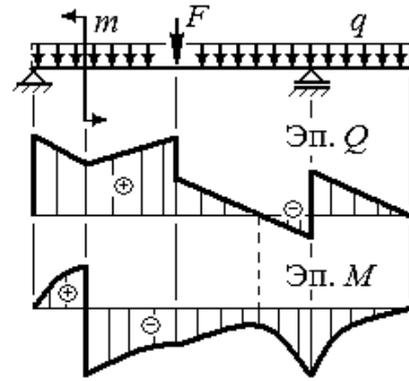
7. Под каким номером указан правильный ответ для заданной схемы нагружения бруса?



Номер ответа	$m_1$ , кН·м	$m_2$ , кН·м	$m_3$ , кН·м
1	1	4	2
2	1	2	2
3	1	1	4
4	1	2	4

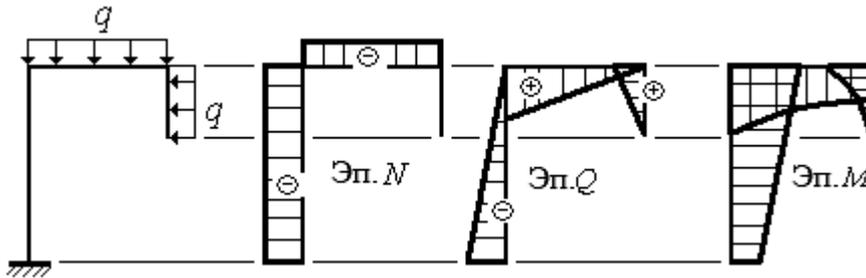
8. Укажите, в каком ответе перечислены правильно построенные эпюры  $Q$  и  $M$ :

- 1) только эпюра  $Q$ ;
- 2) только эпюра  $M$ ;
- 3) эпюры  $Q$  и  $M$ ;
- 4) обе эпюры неправильны.

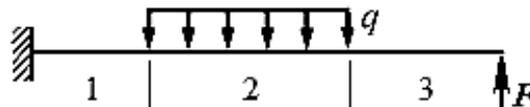


9. Для заданной схемы рамы построены эпюры. Укажите, какая из них правильная:

- 1) все правильные;
- 2)  $N, M$ ;
- 3)  $Q, M$ ;
- 4) все неправильные.



10. На каких участках балки, показанной на рисунке, эпюра поперечных сил очерчивается прямой линией, параллельной оси балки?



11. Поперечная сила на эпюре  $Q$  изменяется скачкообразно в сечениях, где к балке приложены:

- 1) сосредоточенный момент;
- 2) сосредоточенная сила;
- 3) сосредоточенные сила и момент;
- 4) таких сечений нет.

## 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

### 4.1. Определение механических характеристик

*Механические характеристики материалов – числовые значения, характеризующие прочность, жесткость, пластичность, упругость, вязкость и другие свойства. Они определяются экспериментально, на основе результатов испытаний образцов.*

Практически на каждый вид испытаний разработаны соответствующие *Стандарты*, в которых регламентированы все этапы их проведения: вид, размеры, требования к механической обработке образцов, требования к испытательным машинам, методика проведения и обработки результатов испытаний.

Испытательные лаборатории оснащены универсальными и специальными машинами, позволяющими проводить определение различных характеристик материалов. В СНГ испытательное оборудование производится в Российской Федерации (АО «Точприбор», г. Иваново и «ИПО Точмашприбор», г. Армавир).

*Наиболее важными и чаще всего используемыми в расчетах на прочность и жесткость являются механические характеристики материалов, которые определяются по результатам испытаний образцов на растяжение и сжатие.*

Испытания проводятся на универсальных испытательных машинах, которые снабжены устройствами, показывающими нагрузку, которая передается на образец – *силоизмерительные устройства*. Эти машины снабжаются также устройствами, с помощью которых записывается диаграмма деформирования – *вычерчивается график «удлинение образца – нагрузка на образце»*.

В настоящее время в связи с бурным развитием компьютерной и микропроцессорной техники многие этапы испытаний автоматизированы.

#### 4.1.1. Диаграммы деформирования

Диаграммы деформирования строятся при различных видах нагружения: при растяжении, при сжатии, при изгибе, при кручении и т. д. Построение диаграмм рассмотрим на примере испытаний на растяжение.

Испытанию обычно подвергаются цилиндрические или плоские образцы определенных размеров, устанавливаемых Стандартом на испытания при растяжении. На рис. 4.1, а показан вид цилиндрического и плоского образцов.

При определении размеров образца, исходя из его диаметра  $d_0$ , определяется расчетная (рабочая) длина  $l_0$ . При определении общей длины образцов предусматриваются участки (головки) для обеспечения размещения образца в захватах машины.

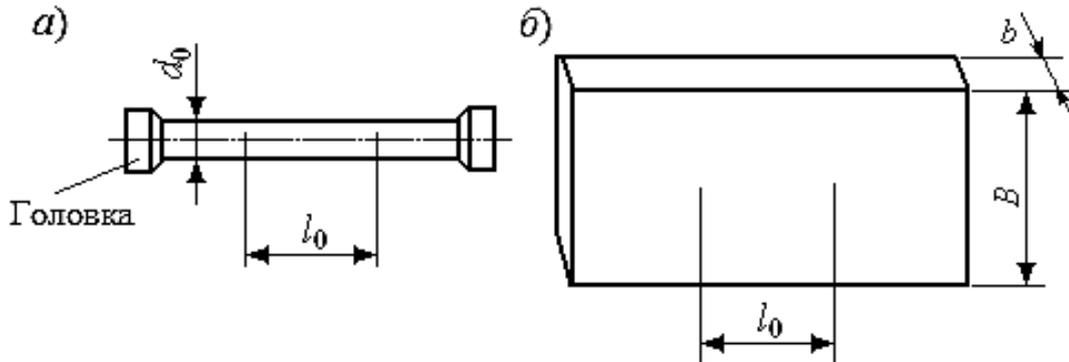


Рис. 4.1. Образцы для испытаний на растяжение: *a* – цилиндрический; *б* – плоский

Обычно, в соответствии со Стандартом, расчетная длина для нормальных образцов  $l_0 = 10d_0$ , а для укороченных –  $l_0 = 5d_0$ .

Исходя из площади цилиндрического образца, определяют его диаметр:

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}; \quad d_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} = 1,13\sqrt{A_0}. \quad (4.1)$$

Тогда для нормальных образцов

$$l_0 = 10d_0 = 11,3\sqrt{A_0}; \quad (4.2)$$

для укороченных –

$$l_0 = 5d_0 = 5,65\sqrt{A_0}. \quad (4.3)$$

Эти зависимости используются также и для расчета размеров плоских образцов (рис. 4.1, б):

$$B \geq 3b; \quad A_0 = Bb; \quad l_0 = 11,3\sqrt{Bb}. \quad (4.4)$$

Порядок испытаний следующий. Образец устанавливается в захватах машины и плавно нагружается. В результате нагружения образец деформируется.

В процессе испытания производится запись нагрузки и удлинения образца – вычерчивается *диаграмма растяжения* (диаграмма деформирования).

Диаграммы, изображенные на рис. 4.2, характерны для пластичных материалов, например, для малоуглеродистой стали или отожженной меди (*а*), для хрупких материалов – чугуна (*б*), для некоторых хрупко-пластичных материалов – латуни, марганцовистые и алюминиевые бронзы (*в*). Большинство металлов и сплавов дают диаграмму, изображенную на рис. 4.2, *г*.

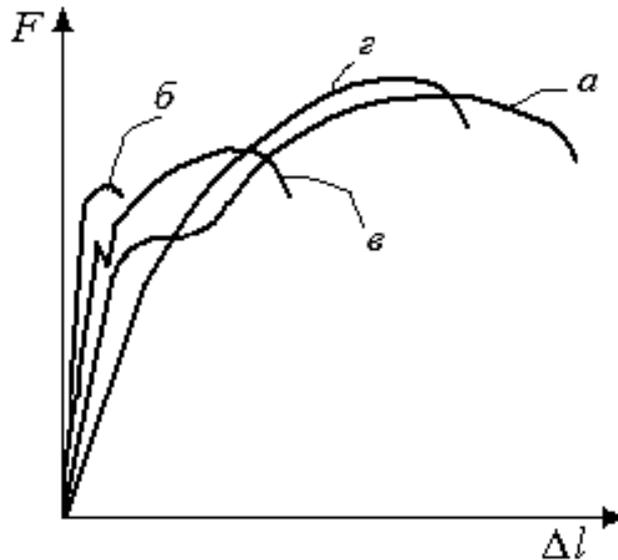


Рис. 4.2. Диаграммы растяжения материалов

Видим, что для материалов с разными пластическими и другими свойствами диаграммы значительно отличаются.

Эти особенности подробно проанализируем при выполнении соответствующих лабораторных работ.

Рассмотрим процесс деформирования образца на примере диаграммы для малоуглеродистой стали, имеющей все характерные участки (рис. 4.3).

При малых значениях силы  $F$  между *нагрузкой и удлинением* имеет место *прямая пропорциональная зависимость*. Материал деформируется, подчиняясь *закону Гука (прямая OA)*. В точке  $A$  нагрузка будет равна  $F_{\text{пл}}$  (*нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности материала*).

Если образец нагрузить до нагрузки, не превышающей вышеуказанную, то после снятия нагрузки он полностью восстановит свои форму и размеры.

В этой зоне образец испытывает *только упругие деформации*.

При дальнейшем увеличении нагрузки деформации будут расти несколько быстрее нагрузки – кривая  $AB$ . И если образец разгрузить в точке  $B$ , то в материале появятся *незначительные по величине остаточные деформации*, характеризующиеся отрезком  $OB_1$ .

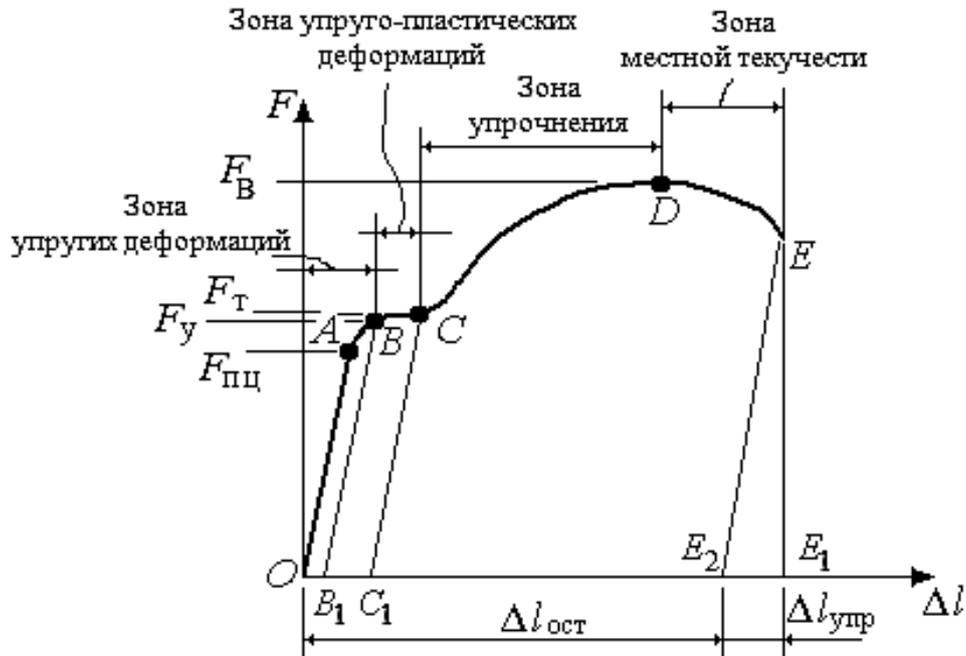


Рис. 4.3. Диаграмма деформирования малоуглеродистой стали и зоны диаграммы

Обычно их определяют в относительных величинах: относительные линейные деформации определяются отношением абсолютной линейной деформации к исходной длине (в данном случае – к расчетной длине образца).

Например, если образец длиной 1 м растягивается некоторой силой и получает абсолютную деформацию 1 мм, то его относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{1 \cdot 10^3} 100 \% = 0,1 \% . \quad (4.5)$$

Для точки B эти деформации составят всего 0,001 % и не будут опасными для конструкции. Допускают, что остаточные деформации для данной точки не должны превышать 0,05 %.

Считается, что до точки B диаграммы материал сопротивляется нагружению упруго. Нагрузка  $F_y$  – нагрузка, соответствующая пределу упругости материала. Участок диаграммы OB – зона упругих деформаций.

Дальнейшее увеличение нагрузки вызовет значительные по величине деформации, при этом на данной диаграмме фиксируется постоянство нагрузки при увеличении деформации – материал «течет».

На диаграмме – так называемая площадка текучести (практически это прямая BC). В точке C текучесть заканчивается, а нагрузка  $F_t$  соответствует пределу текучести. Измеренная в этот момент остаточная деформация обычно не превышает  $\approx 0,2$  %. Участок диаграммы BC – зона упруго-пластических деформаций.

Дальнейшее нагружение и деформирование образца идет с увеличением нагрузки и деформации (кривая  $CD$ ). Зависимость между исследуемыми параметрами криволинейная. В точке  $D$  отмечается максимальная нагрузка, которую может выдержать образец. Эта нагрузка *соответствует пределу прочности* материала  $F_B$ . Участок диаграммы  $CD$  – зона упрочнения.

При достижении этой нагрузки на образце образуется шейка: наблюдается постепенное местное сужение. Деформация образца локализуется в области шейки, диаметр уменьшается и, при достижении определенного его значения, происходит разрушение образца. Фиксируется нагрузка в момент разрушения.

Площадь поперечного сечения образца уменьшается, поэтому на графике наблюдается снижение нагрузки. Участок диаграммы  $DE$  – участок *местной текучести*.

#### 4.1.2. Условные и истинные диаграммы

Как уже отмечалось, диаграммы используются для определения механических характеристик. При их построении не фиксируется изменение (уменьшение) площади поперечного сечения в процессе нагружения (растяжения) образца. Такие диаграммы называются *условными* диаграммами деформирования (рис. 4.4, *а*).

Начиная с точки  $B$ , сначала не очень явно, а на участке местной текучести – *значительно* изменяется площадь сечения. При углубленном анализе свойств материалов исследователи *учитывают* изменение площади сечения измерением ее в процессе нагружения – такие диаграммы называют *истинными* (рис. 4.4, *б*).

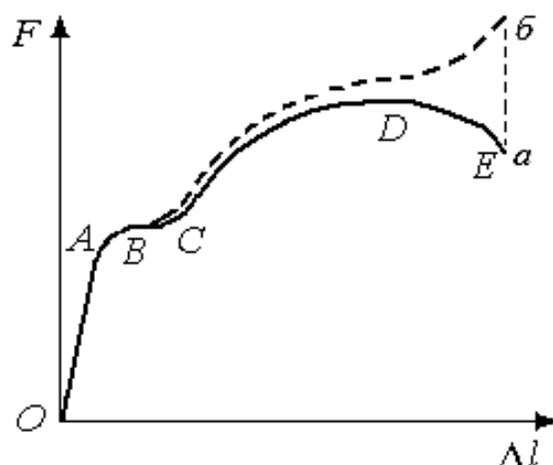


Рис. 4.4. Условная (*а*) и истинная (*б*) диаграммы растяжения

### 4.1.3. Механические характеристики материала

Нагрузка, однако, не может характеризовать механические свойства материала, т. к. ее величина зависит от конкретных размеров образца. Поэтому основные механические характеристики вычисляют по формулам, используя данные, полученные при проведении испытаний.

Полученная в процессе испытания диаграмма *обычно перестраивается в относительных координатах*: нормальное напряжение  $\sigma$  – относительная продольная деформация  $\varepsilon$  (рис. 4.5). Такие диаграммы дают возможность сравнивать результаты испытаний, полученные в разных лабораториях.

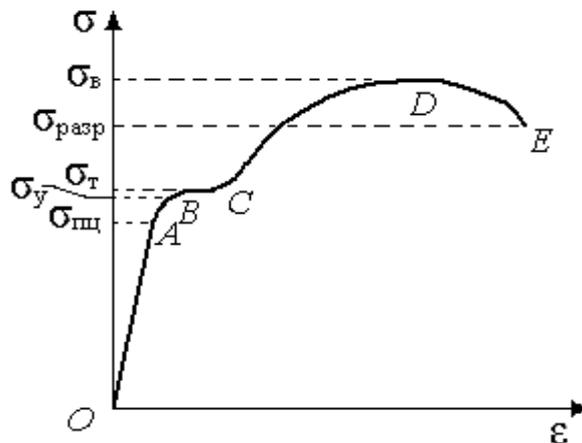


Рис. 4.5. Условная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали

Как будет доказано далее, нормальные напряжения при растяжении определяются по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (4.6)$$

где  $A_0$  – первоначальная площадь поперечного сечения образца.

Относительная продольная деформация определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (4.7)$$

где  $l_0$  – расчетная длина образца.

Следовательно, диаграммы  $F - \Delta l$  и  $\sigma - \varepsilon$  будут отличаться только масштабом.

Таким образом, механические характеристики определяются делением соответствующей нагрузки на начальную площадь поперечного сечения образца  $A_0$ .

*Предел пропорциональности*

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}. \quad (4.8)$$

*Предел пропорциональности – наибольшее напряжение, при котором материал образца следует закону Гука.*

*Предел упругости*

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}. \quad (4.9)$$

*Предел упругости – максимальное напряжение, при котором образец деформируется без остаточных деформаций.*

*Предел текучести*

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}. \quad (4.10)$$

*Предел текучести – напряжение, при котором деформации растут без видимого увеличения нагрузки.*

*Предел прочности*

$$\sigma_B = \frac{F_B}{A_0}. \quad (4.11)$$

*Предел прочности – максимальное напряжение, которое выдерживает образец без разрушения.*

Значения механических характеристик приводятся в учебниках по сопротивлению материалов, а также в справочной литературе.

Например, эти характеристики для стали Ст 3 имеют значения в следующих пределах:

$$\sigma_{\text{пц}} \approx \sigma_y = 200 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 220 \dots 260 \text{ МПа}; \quad \sigma_B = 340 \dots 420 \text{ МПа}.$$

*Опасными для пластичных материалов являются напряжения, равные пределу текучести  $\sigma_T$ , т. к. при достижении этого значения в материале*

возникают пластические деформации, которые могут привести к выходу из строя элемента конструкции.

Для хрупких материалов, не получающих при нагружении остаточных деформаций, опасными будут напряжения, равные пределу прочности  $\sigma_B$ , – наступает разрушение.

Для чугуна при испытаниях на сжатие предел прочности имеет значения  $\sigma_{Bc}$  до 380 МПа, на растяжение  $\sigma_{Bp}$  – до 140 МПа.

Отметим, что если материал деформируется без площадки текучести (рис. 4.2, з), то определяют так называемый условный предел текучести: напряжение, при котором остаточная деформация образца составляет 0,2 %. Условный предел текучести обозначается  $\sigma_{0,2}$ .

При испытаниях некоторых материалов затруднительно точно определить предел упругости. В этих случаях определяют условный предел упругости  $\sigma_{0,05}$  – напряжение, при котором относительная линейная деформация образца равна 0,05 %.

#### 4.1.4. Закон разгрузки и повторного нагружения

Если после нагружения образца выше  $F_{\text{пл}}$  (выше точки  $B$ ) разгрузить его в зоне упрочнения (например, в точке  $K$ ), то в материале образца сохранятся остаточные деформации, определяемые его пластическими свойствами (рис. 4.6).

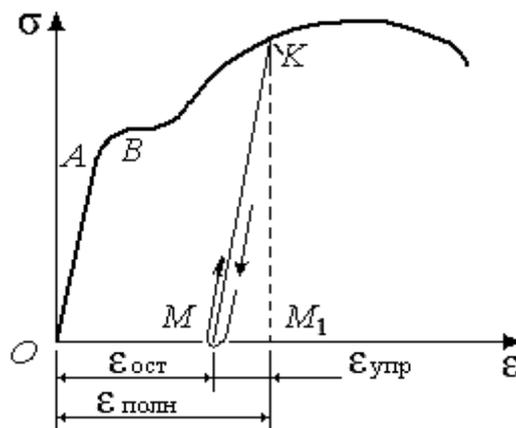


Рис. 4.6. К закону разгрузки и повторного нагружения

При этом линия разгрузки на диаграмме пойдет по линии  $KM$ , параллельной  $OA$ . При повторном нагружении линия на диаграмме пойдет по линии  $MK$  и далее до предела прочности. Таким образом, материал не проходит участок упругопластических деформаций, т. е. *повышаются упругие свойства материала*. Данное явление носит название «наклеп». Наклеп может оказывать

как положительное, так и отрицательное действие. В машиностроении, например, обработка резанием совмещается с поверхностно пластическим деформированием (ППД). При этом повышается износостойкость и усталостная прочность рабочих поверхностей.

Полная деформация материала образца для точки  $K$  ( $\epsilon_{\text{полн}}$ ) характеризуется отрезком  $OM_1$  и состоит из упругой деформации  $\epsilon_{\text{упр}}$  (отрезок  $MM_1$ ) и остаточной деформации  $\epsilon_{\text{ост}}$  (отрезок  $OM$ ):

$$\epsilon_{\text{полн}} = \epsilon_{\text{упр}} + \epsilon_{\text{ост}}. \quad (4.12)$$

#### ***4.1.5. Пластическое и хрупкое состояние материалов***

В разд. 2.1 были даны определения пластичности и хрупкости материалов:

- *пластичность* есть свойство материала *деформироваться с остаточными деформациями без нарушения сплошности и образования трещин;*
- *хрупкость* есть свойство материала *к моменту разрушения претерпевать весьма малые деформации:* тело практически не изменяет своих размеров.

Один и тот же материал в разных условиях может находиться как в хрупком, так и в пластичном состоянии.

Материал, находящийся в пластическом состоянии, одинаково хорошо воспринимает как растягивающие, так и сжимающие нагрузки.

*Хрупкий материал плохо воспринимает растяжение и достаточно хорошо – сжатие.*

*Более опасным является хрупкое состояние материала.*

*Пластичность материала оценивается двумя характеристиками, которые определяются по результатам испытаний образцов: относительным удлинением и относительным сужением.*

Относительное удлинение

$$\delta = \frac{l_{\text{к}} - l_{\text{н}}}{l_{\text{н}}} 100 \%,$$

где  $l_{\text{к}}$  – конечная длина образца (расстояние между рисками после разрыва);  $l_{\text{н}}$  – начальная (расчетная) длина образца.

Относительное сужение

$$\psi = \frac{F_{\text{н}} - F_{\text{к}}}{F_{\text{н}}} 100 \%,$$

где  $F_n$  – начальная площадь поперечного сечения образца (до нагружения);  $F_k$  – конечная площадь поперечного сечения образца (в месте разрыва: в шейке).

#### **4.1.6. Типы разрушений**

Разрушение материала может идти по механизму *хрупкого (упругого)* разрушения или по механизму *вязкого (пластичного)* разрушения.

При хрупком разрушении образец не имеет остаточных деформаций и, совместив две его части, получаем исходный образец (*форма и размеры его не изменяются*).

При пластичном разрушении протекают пластические деформации и *форма и размеры образца в значительной степени изменяются*.

Сравнение диаграмм растяжения показывает, что *протяженность* их в направлении оси удлинений для пластичных материалов значительно больше, чем для хрупких.

Реальные материалы разрушаются по смешанному типу – в зоне разрушения присутствуют признаки обоих механизмов. Более подробно типы разрушения изучают в дисциплине «Механика разрушения».

#### **4.1.7. Влияние температуры и фактора времени на механические характеристики материалов**

Температура, время и скорость нагружения являются внешними факторами, которые в значительной степени влияют на механические характеристики материалов. Для исследований используются специальные методики и испытательное оборудование. При этом, наряду с обычными механическими характеристиками (рассмотрены ранее), определяются и специальные – присущие данным испытаниям.

Рост температуры способствует повышению пластических свойств большинства материалов. Однако, например, малоуглеродистая сталь в диапазоне температур 300...330 °С проявляет склонность к хрупкому разрушению (*синеломкость*). При этом пределы текучести и прочности быстро снижаются (рис. 4.7).

*Понижение температуры способствует охрупчиванию* большинства материалов, даже высокопластичных, при нормальных условиях. Прочностные характеристики повышаются. Это явление – *хладноломкость*.

*Повышение скорости нагружения* (переход от статического нагружения к динамическому), увеличение времени воздействия нагрузки также оказывают *специфическое влияние на свойства материалов*, причем разных по-разному.

При высоких скоростях нагружения проявляется склонность материала к хрупкому разрушению, а увеличение времени силового воздействия сказывается на повышении пластичности (даже стекло!).

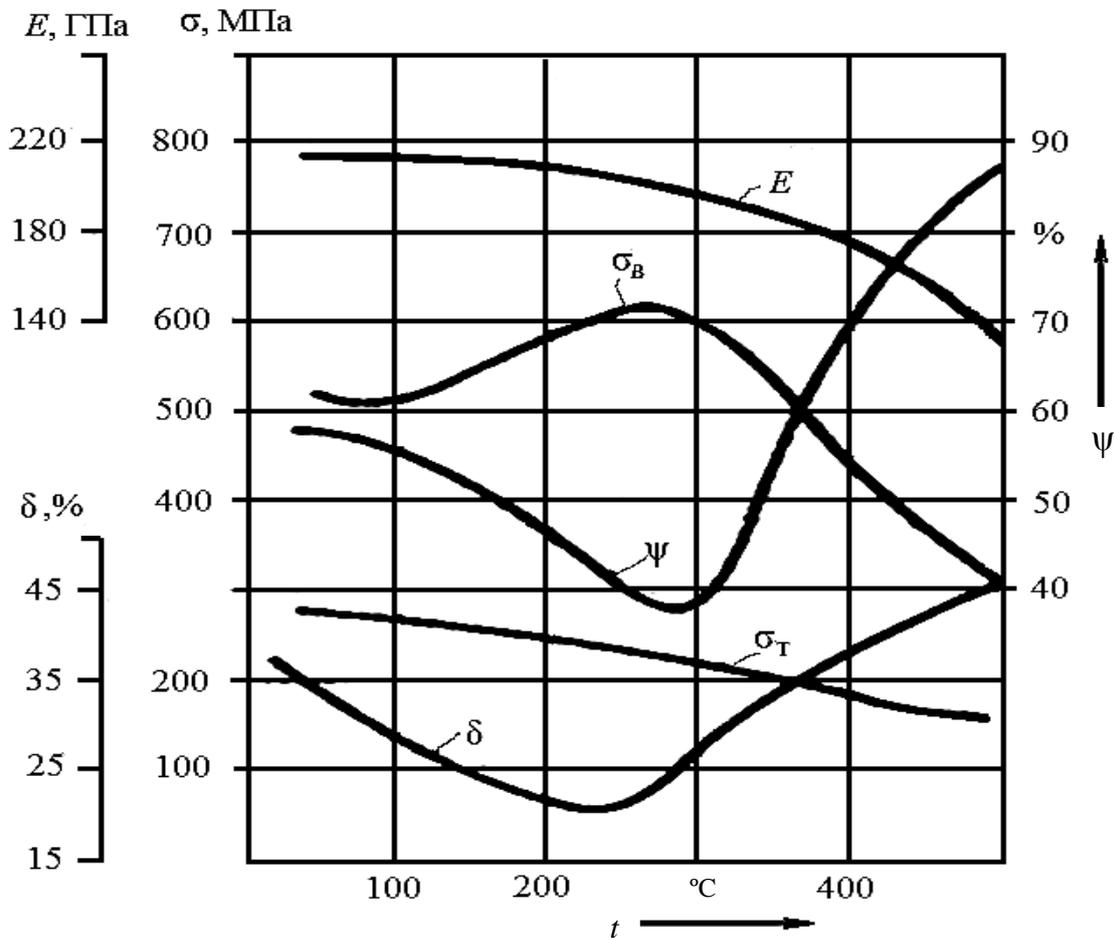


Рис. 4.7. Влияние повышения температуры на механические характеристики низкоуглеродистой стали

Еще более сложным является совместное воздействие разных факторов.

Условия работы конструкций все более усложняются, поэтому особенности поведения материалов необходимо учитывать на этапе их проектирования.

### **Контрольные вопросы**

1. Для чего строятся диаграммы растяжения?
2. Как определяется расчетная длина образца?
3. В чем отличие условной и истинной диаграмм?
4. Сформулируйте закон разгрузки и повторного нагружения.
5. Почему хрупкое состояние материала является наиболее опасным?

## 5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Растяжением или сжатием называют вид нагружения бруса, в поперечном сечении которого возникает *только продольная сила  $N$* . Иногда говорят – *центральное (простое или осевое) растяжение*.

В реальных конструкциях, кроме продольной силы, в сечениях бруса действуют и другие силовые факторы.

Растяжение (сжатие) встречается:

- в различных элементах строительных конструкций (мачты, колонны, опоры, трубы, стержни ферм);
- в элементах механизмов и машин (шток поршня, трос) и т. д.

### 5.1. Напряжения и деформации

#### 5.1.1. Нормальные напряжения

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения  $A$ , к концам которого вдоль его оси приложены равные и противоположно направленные силы  $F$  (рис. 5.1, *a*).

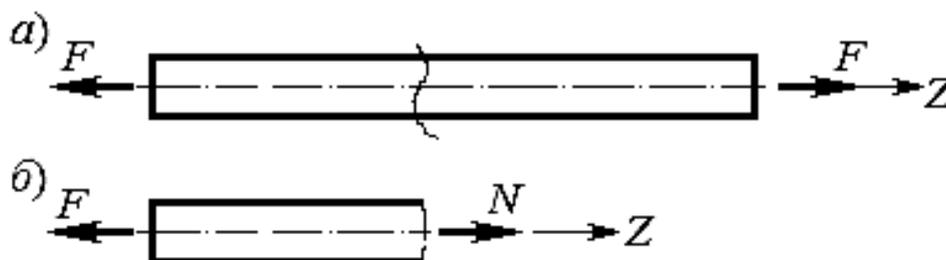


Рис. 5.1. Центральное растяжение стержня

В произвольном сечении возникает продольная сила  $N = F$  (рис. 5.1, *б*).

Обратимся к п. 2.5.3 и рис. 2.29. Видим, что продольная сила  $N$  является равнодействующей внутренних сил  $\sigma dA$ , действующих на бесконечно малых площадках  $dA$ , а касательные напряжения равны нулю:  $\tau_x = \tau_y = 0$ .

Покажем произвольное поперечное сечение стержня (рис. 5.2). В этом сечении выделим элементарную площадку  $dA$ .

Продольная сила в сечении  $A$  определяется интегралом  $N = \int_F \sigma dA$ . Анализ показывает, что на достаточном удалении от мест приложения внешней силы (гипотеза Сен-Венана) сечения после нагружения остаются плоскими, а только

перемещаются параллельно самим себе (гипотеза Бернулли – плоских сечений). Следовательно, по всему сечению действуют нормальные напряжения одинаковой величины:  $\sigma = \text{const}$ .

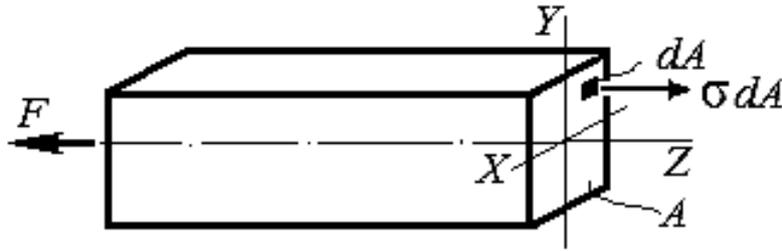


Рис. 5.2. Произвольное сечение стержня

Нормальная сила  $N = \sigma \int_F dA = \sigma A$ , откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (5.1)$$

### 5.1.2. Продольные и поперечные деформации

Под действием продольной силы стержень изменяет свою длину (деформируется – удлиняется или укорачивается). Приращение длины стержня  $\Delta l$  – абсолютная линейная деформация его.

Рассмотрим участок стержня элементарной длины  $dz$  (рис. 5.3, а). Видим, что после приложения нагрузки – продольной силы  $N = \int_F \sigma dA$ , где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня, данный участок получит абсолютную линейную деформацию  $\Delta dz$ .

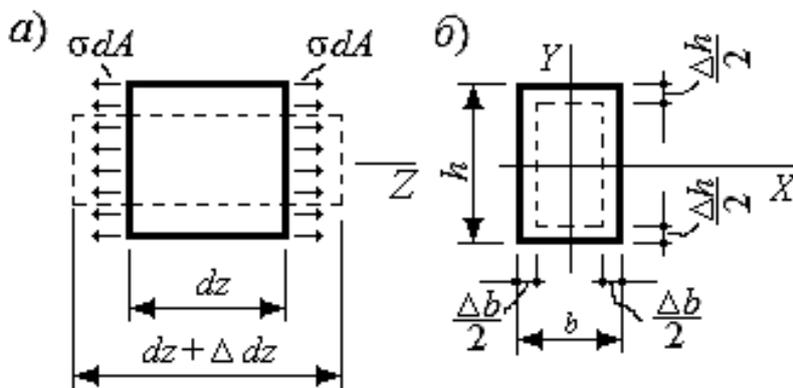


Рис. 5.3. Продольная (а) и поперечная (б) деформации элементарного участка

Знаем, что *относительная продольная деформация* определяется отношением

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (5.2)$$

С учетом принципа Сен-Венана и выводов в п. 5.1.1 о том, что нормальные напряжения при растяжении-сжатии постоянны, следует *постоянство продольной деформации по высоте и ширине сечения*  $\varepsilon = \text{const}$  – справедлива гипотеза плоских сечений.

Суммируя абсолютные удлинения малых элементов  $\Delta dz = \varepsilon dz$  по всей длине стержня, получим

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dz = \varepsilon \int_0^l dz = \varepsilon l. \quad (5.3)$$

*Относительная продольная деформация стержня при простом растяжении*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (5.4)$$

Видно, что и в направлении осей  $X$  и  $Y$  поперечное сечение стержня также деформируется – поперечные размеры сечения уменьшаются при его растяжении и увеличиваются при сжатии (рис. 5.3, б). Это есть *поперечная деформация*: абсолютная ( $\Delta h$  и  $\Delta b$ ) и относительная:

$$\varepsilon'_h = -\frac{\Delta h}{h}; \quad \varepsilon'_b = -\frac{\Delta b}{b}. \quad (5.5)$$

Они записаны со знаком «минус», т. к. продольная и поперечная деформации имеют обратные знаки. Отметим, что для изотропных материалов  $\varepsilon'_h = \varepsilon'_b = \varepsilon'$ .

### 5.1.3. Упругие постоянные материала

Опытами установлено, что *отношение относительной поперечной к относительной продольной деформации* для каждого материала есть **величина постоянная**. Это отношение, взятое по абсолютной величине, называется коэффициентом поперечной деформации (*коэффициентом Пуассона*):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (5.6)$$

Коэффициент Пуассона  $\mu$  – всегда положительная безразмерная величина. Определяется опытным путем для каждого материала и условий испытаний. Эту величину впервые теоретически получил француз Пуассон (для всех материалов – 0,25).

В упругой стадии работы большинства конструкционных материалов напряжения и деформации (например, при растяжении) связаны прямой пропорциональной зависимостью – см. рис. 4.5, участок  $OA$ :

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (5.7)$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности.

Коэффициент  $E$  называется модулем продольной упругости при растяжении (модулем упругости I рода, модулем Юнга).

Из вышеуказанного графика (см. рис. 4.5) и формулы (5.7) следует, что модуль продольной упругости определяется углом наклона  $\alpha$  прямой на участке  $OA$ , т. е. отношением

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha. \quad (5.8)$$

Модуль упругости I рода есть вторая упругая постоянная материала. Он характеризует способность материала сопротивляться упругим деформациям растяжения или сжатия. Определяется опытным путем – испытанием образца, изготовленного из исследуемого материала. Имеет размерность напряжений. Впервые идею об этом модуле высказал в 1800 г. англичанин Томас Юнг, а современное толкование модуля дал в 1826 г. француз Луи Навье.

В табл. 5.1 приводятся значения упругих постоянных для некоторых конструкционных и строительных материалов при нормальных условиях испытаний.

Табл. 5.1. Упругие постоянные некоторых конструкционных и строительных материалов

Материал	$E$ , МПа	$\mu$
Стали	$(1,8...2,1) \cdot 10^5$	0,24...0,3
Алюминиевые сплавы	$0,7 \cdot 10^5$	0,3

Окончание табл. 5.1

Материал	$E$ , МПа	$\mu$
Медные сплавы	$(1,1...1,3) \cdot 10^5$	0,31...0,35
Чугун	$(1,15...1,6) \cdot 10^5$	0,23...0,27
Бетон	$(0,04...0,4) \cdot 10^5$	0,2
Кирпичная кладка	$(0,01...0,08) \cdot 10^5$	0,25
Древесина (вдоль волокна)	$0,1 \cdot 10^5$	0,5
Древесина (поперек волокна)	$0,04 \cdot 10^5$	0,02
Резина	$0,0007 \cdot 10^5$	0,5

### 5.1.4. Закон Гука

Данный закон впервые был сформулирован англичанином *Робертом Гуком* в 1676 г. в следующем виде: «*Ut tension, sic vis* – Каково удлинение, такова и сила».

Установлен опытным путем: при растяжении стержня силой  $F$  он получит абсолютную деформацию  $\Delta l$ ; при пропорциональном увеличении силы в такой же пропорции увеличится и деформация.

*Закон Гука описывается формулой (5.7), справедливой в пределах упругих деформаций материала, и формулируется следующим образом: нормальные напряжения прямо пропорциональны относительным линейным деформациям.*

Известно, что  $\sigma = \frac{N}{A}$ , а  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ . После подстановки этих зависимостей в формулу (5.7) получим

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}. \quad (5.9)$$

Данная формула – еще одна форма записи закона Гука: абсолютное удлинение или укорочение стержня  $\Delta l$  прямо пропорционально нормальной силе  $N$  и его первоначальной длине  $l$  и обратно пропорционально модулю упругости материала  $E$  и площади поперечного сечения стержня  $A$ .

Формула (5.9) широко используется для расчета абсолютной линейной деформации стержня и перемещений поперечных сечений.

*Произведение  $EA$  характеризует жесткость стержня при его осевом растяжении-сжатии.*

## 5.2. Методы расчета конструкций

Конечная цель расчета конструкции – обеспечение заданной прочности ее при минимальных затратах материала. В настоящее время при проектировании конструкций в машиностроении и строительстве используются методы расчета по допускаемым напряжениям, по разрушающим нагрузкам и по предельным состояниям.

### 5.2.1. Метод расчета по допускаемым напряжениям

При применении данного метода величина максимальных рабочих напряжений в опасном сечении бруса (или в наиболее нагруженных элементах конструкции) ограничивается так называемыми *допускаемыми напряжениями*. Этот метод известен и используется в расчетах начиная с XVIII в., преимущественно в машиностроении. Он будет рассмотрен далее.

### 5.2.2. Метод расчета по разрушающим (предельным) нагрузкам

Данный метод предполагает определение расчетным путем максимальной нагрузки, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и не претерпевая непрерывно нарастающих пластических деформаций. Начал использоваться с 30-х гг. XX в. и в основном *при расчетах в строительстве*. Идея расчета (1904) принадлежит советскому ученому А. Ф. Лолейту: наибольшая нагрузка на конструкцию  $F_{\max}$  ограничивается ее *допускаемым значением*  $[F]$ , получаемым делением *предельной нагрузки*  $F_{\text{оп}}$  на *коэффициент запаса прочности*  $n$ :

$$F_{\max} \leq [F] = \frac{F_{\text{оп}}}{n}.$$

Для пластичных материалов  $F_{\text{оп}} = \sigma_{\text{T}}A$ , для хрупких –  $F_{\text{оп}} = \sigma_{\text{В}}A$ .

Величина  $n$  выбирается не меньше, чем при расчете по допускаемым напряжениям. Подходы к его определению рассмотрим далее.

### **5.2.3. Метод расчета по предельным состояниям**

Данный метод предложен в СССР и начал применяться с 1955 г. В настоящее время его используют во всем мире при расчете конструкций промышленных и гражданских зданий и сооружений (мостов, металлических конструкций кранов и др., в том числе и сварных конструкций), *за исключением механических узлов и деталей машиностроительных конструкций*. Последние рассчитываются по допускаемым напряжениям.

Основное преимущество метода – вместо одного коэффициента (запаса прочности) в расчет вводится несколько коэффициентов. Этот метод подробнее рассмотрим в конце изучения дисциплины.

## **5.3. Метод расчета по допускаемым напряжениям**

### **5.3.1. Предельное состояние**

Рассматриваемый метод расчета основан на сравнении опасных нагрузок с фактическими нагрузками. Следовательно, необходимо знать величину этих опасных нагрузок, которые будут характеризоваться *предельным состоянием материала, при котором происходит разрушение или наблюдаются пластические деформации*.

### **5.3.2. Критерии предельного состояния**

Критерии наступления предельного состояния *устанавливаются экспериментально* при испытаниях образцов (см. п. 4.1.3). *Для пластичных материалов опасным является предел текучести, для хрупких – предел прочности*.

### **5.3.3. Коэффициент запаса**

При проектировании деталей и элементов конструкций необходимо обеспечить надежность при их работе, а также долговечность и экономичность.

Надежной считается конструкция, которая сохраняет свои качества в течение срока эксплуатации. Иначе говоря, *конструкция надежна, если она обладает устойчивостью по отношению к всевозможным отклонениям, возникающим в процессе изготовления, транспортировки, монтажа и т. п.*

Понятие надежности, в зависимости от назначения конструкции и условий ее эксплуатации, может включать, например, обеспечение безотказности, долговечности (т. е. *сохранении свойств в течение заданного времени эксплуатации*) ее.

Как уже было указано, величина максимальных рабочих напряжений в опасном сечении бруса (или в наиболее нагруженных элементах конструкции) не должна достигать опасных значений. Для обеспечения *надежности и долговечности* эти *опасные напряжения снижают* до некоторой величины, т. е. их величина ограничивается так называемыми *допускаемыми напряжениями*.

Величина *допускаемых напряжений* устанавливается для каждого материала на основе опыта, путем расчета. Обозначают напряжение символом его в квадратных скобках: нормальные напряжения  $[\sigma]$ , касательные напряжения  $[\tau]$ .

Из опыта определяют опасное напряжение (предел текучести – для пластичного материала и предел прочности – для хрупкого).

В зависимости от условий работы и назначения, характера нагружения конструкции, требований к экономии, надежности и безопасности, требований к точности расчетов *назначают коэффициент запаса  $n > 1$* . Этот коэффициент можно назвать «*коэффициент незнания*»: *чем меньше мы знаем об условиях эксплуатации проектируемой конструкции и свойствах материала, чем меньше мы уверены в правильности выбранной расчетной схемы – тем больше должна быть величина коэффициента запаса*.

Допускаемое напряжение для пластичных материалов (например, углеродистая сталь)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T};$$

допускаемое напряжение для хрупких материалов (например, чугун)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B},$$

где  $n_T$  – коэффициент запаса прочности по пределу текучести;  $n_B$  – коэффициент запаса прочности по пределу прочности.

Их усредненные значения:

- в машиностроении (стали)  $n_T = 1,4 \dots 1,6$ ;  $n_B = 2,5 \dots 3,0$ ;
  - в строительстве: бетон, железобетон  $n_B = 2,0 \dots 3,5$ ; дерево  $n_B = 3,5 \dots 6,0$ ;
- сталь  $n_T = 1,5$ .

Например, для стали Ст 3 при обычных условиях эксплуатации обычных конструкций  $\sigma_T = 240$  МПа,  $n_T = 1,5$ . Тогда  $[\sigma] = 240 : 1,5 = 160$  МПа.

Рекомендации по выбору коэффициентов приводятся в литературе, а также в *строительных нормах Беларуси (СНБ)* и *строительных нормах и правилах (СНиП)* – в России.

Общие рекомендации по выбору коэффициентов запаса приведены в табл. 5.2.

Табл. 5.2. Значения коэффициентов запаса

Характер нагружения	Отрасль техники			
	Машиностроение		Строительство	
	Свойства материала			
	Пластичные $n_T$	Хрупкие $n_B$	Пластичные $n_T$	Хрупкие $n_B$
Статическое	1,4...1,6	2,5...3,0	2,4...2,6	3,0...9,0
Динамическое (удар)	2,8...5,0	Не используются	2,8...5,0	Не используются
Повторно-переменное	5,0...15,0	Не используются	5,0...15,0	Не используются

### 5.3.4. Условие прочности. Типы задач при расчетах на прочность

Исходя из рассматриваемого подхода, условие прочности может быть записано соответственно для нормальных или касательных напряжений в виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.10)$$

Заметим, что *перенапряжение* (превышение величины максимальных напряжений над допускаемыми) *не должно быть более 5 %*.

Порядок проведения расчета:

- *определить вид нагружения* (путем построения эпюр внутренних силовых факторов);
- на основании анализа эпюр *определить опасное сечение бруса* (сечение, в котором приложен экстремальный по величине внутренний силовой фактор);
- для выявленного вида нагружения и для его опасного сечения *записать условие прочности* (в одних случаях – по нормальным напряжениям, в других – по касательным (см. формулы (5.10)), а при сложных видах нагружения условие прочности будет иметь более сложный вид).

*При центральном (осевом) растяжении-сжатии* в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения (см. п. 5.1.1). Если экстремальные по величине нормальные напряжения сравнить с допускаемыми, то получим условие прочности при растяжении-сжатии:

- для бруса *постоянного сечения* (площадь поперечного сечения  $A = \text{const}$ )

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]; \quad (5.11)$$

– для бруса *ступенчатого сечения* (размеры или форма сечения изменяются)

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (5.12)$$

Во втором случае необходимо найти *то сечение бруса*, в котором *отношение продольной силы к площади будет иметь экстремальное значение*.

*Почему разговор идет об экстремальных значениях?* Объяснение – в особенностях сопротивления нагружению пластичных и хрупких материалов: пластичные материалы безразличны к знаку деформаций, а хрупкие – хуже сопротивляются растягивающим (положительным) по знаку деформациям.

В табл. 5.3 приведены значения допускаемых напряжений для различных материалов.

Табл. 5.3. Значения допускаемых напряжений

Материал	Допускаемое напряжение, МПа	
	Растяжение	Сжатие
Сталь <b>углеродистая</b>	115...195	
Сталь <b>конструкционная</b>	110...240	
Сталь <b>легированная</b>	140...260	
Чугун в отливке <b>серый</b>	33...100	145...310
Чугун в отливке <b>ковкий</b>	85...110	95...125
Медь	30...110	
Латунь	60...130	
Бронза	50...110	
Алюминий	25...70	
Дюралюминий	70...140	
Кладка кирпичная	0,2	0,6...2,0
Бетон	0,2...1,4	2,0...24,0

*С использованием условия прочности (формулы (5.11) или (5.12)) решают три типа задач.*

**Проверка прочности.** По вышеуказанным формулам ведется расчет экстремальных напряжений, которые сравнивают со значением допускаемых напряжений. Если неравенство соблюдается, то прочность обеспечена. При этом следует стремиться к тому, чтобы напряжения были по возможности близки по величине (допускается превышение над допускаемыми, но не более чем на 5 %).

*Если величина экстремальных напряжений намного меньше допускаемых, то прочность будет обеспечена, но материал будет расходоваться нерационально.*

**Проектировочный расчет.** Используя условие прочности, решают задачу по определению площади сечения, при которой будет обеспечена прочность бруса:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \quad (5.13)$$

**Определение допускаемой нагрузки.** Используя условие прочности, решают задачу по определению нагрузки, при достижении которой брус будет оставаться прочным. Иначе говоря, определяют максимальную грузоподъемность бруса:

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (5.14)$$

## 5.4. Расчеты на жесткость

### 5.4.1. Определение осевых перемещений поперечных сечений

Осевые перемещения сечений бруса определяются абсолютной линейной деформацией его отдельных участков. При этом используется закон Гука в виде (5.8). Методику определения осевых перемещений рассмотрим на примерах.

**Пример 1.** Определим, без учета собственного веса материала, осевое перемещение  $\delta_{1-1}$  заданного сечения бруса 1–1, растянутого силой  $F$  (рис. 5.4, а). Модуль  $E = \text{const}$ .

Искомое перемещение будет определяться абсолютной линейной деформацией части бруса  $be$ , расположенной между заделкой и сечением 1–1:

$$\delta_{1-1} = \Delta l_{be}.$$

В соответствии с выражением закона Гука (5.9), необходимо рассматривать участки бруса, на которых все параметры, входящие в формулу, не меняются в пределах участка. Пользуясь принципом независимости действия сил, рассмотрим отдельные участки бруса, где будет выполняться это условие.

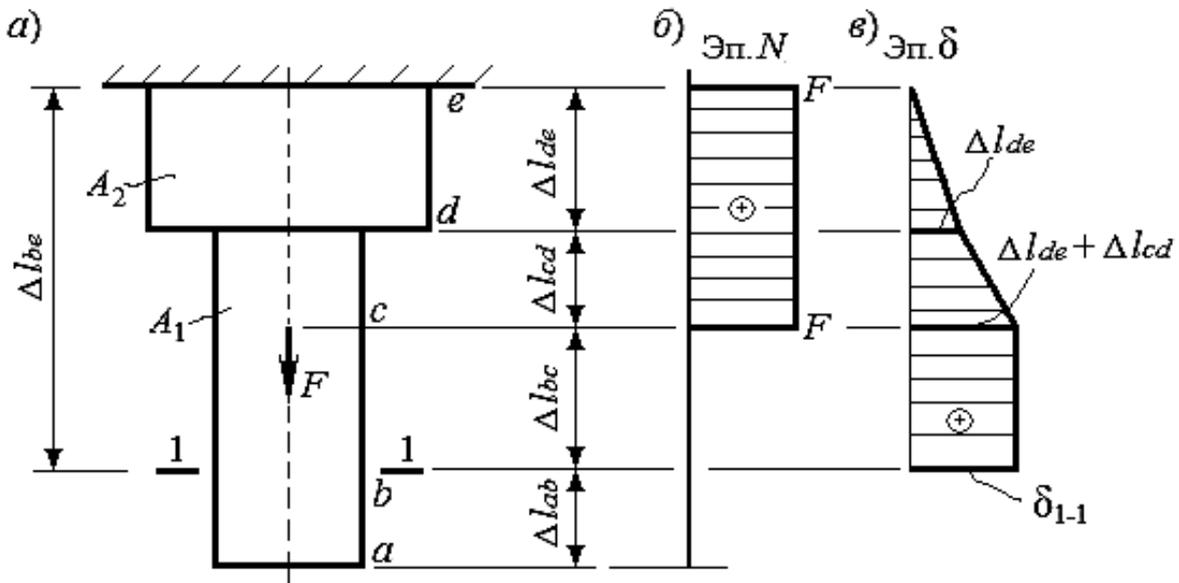


Рис. 5.4. К определению осевых перемещений без учета собственного веса

Тогда

$$\Delta l_{be} = \Delta l_{bc} + \Delta l_{cd} + \Delta l_{de}.$$

Из эпюры  $N$  (рис. 5.4, б) следует  $N_{cd} = N_{de} = F$ ;  $N_{bc} = 0$ .

Окончательно получаем

$$\delta_{1-1} = \Delta l_{be} = \frac{F}{E} \left( \frac{l_{cd}}{A_1} + \frac{l_{de}}{A_2} \right).$$

Аналогичным образом определяются перемещения любых сечений бруса. По результатам расчетов строятся также эпюры перемещений. На рис. 5.4, в показана такая эпюра. В формулу (5.9) продольная сила  $N$  подставляется с учетом знака: если  $N < 0$ , то и  $\delta < 0$ .

**Пример 2.** Определим перемещение произвольного сечения бруса от действия собственного веса его материала. Собственный вес вертикально расположенного бруса является равномерно распределенной нагрузкой, приложенной вдоль его оси (рис. 5.5). Интенсивность этой нагрузки

$$q = \gamma A,$$

где  $\gamma$  – удельный вес материала бруса;  $A$  – площадь поперечного сечения бруса.

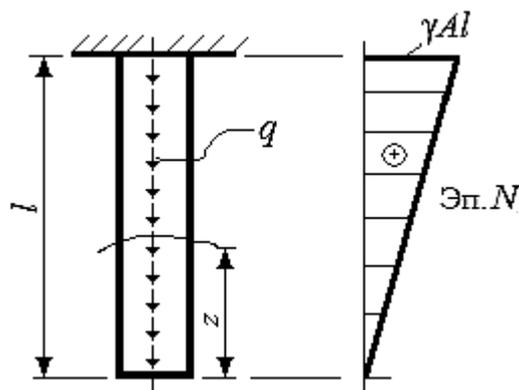


Рис. 5.5. Брус, нагруженный вдоль своей оси собственным весом

Продольную силу в произвольном сечении с координатой  $z$  найдем по формуле

$$N = qz = \gamma Az.$$

*Полное удлинение*, в соответствии с законом Гука, определим как интеграл по длине бруса:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = \int_0^l \frac{\gamma Az dz}{EA} = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (5.15)$$

Умножив числитель и знаменатель в полученной зависимости на  $A$  с учетом, что  $\gamma Al = G$  – вес бруса в целом, имеем формулу для определения абсолютной линейной деформации (перемещения свободного конца) бруса от его собственного веса

$$\Delta l = \frac{Gl}{2EA}. \quad (5.16)$$

#### 5.4.2. Условие жесткости. Типы задач

По аналогии с условием прочности можно записать условие жесткости, т. е. ограничить перемещения сечений бруса. Для центрального растяжения-сжатия, в соответствии с законом Гука (5.9), условие жесткости

$$\Delta l_{\max} = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l]. \quad (5.17)$$

Значение допускаемой абсолютной деформации задают в зависимости от требований, предъявляемых к жесткости бруса.

По формуле (5.17) *проверяется жесткость стержня*.

**Проектировочный расчет** проводим, решая неравенство (5.17) относительно площади:

$$A \geq \frac{Nl}{E[\Delta l]}. \quad (5.18)$$

**Допускаемая нагрузка** (грузоподъемность), при которой обеспечивается заданная жесткость,

$$[N] \leq \frac{EA[\Delta l]}{l}. \quad (5.19)$$

## 5.5. Статически определимые и статически неопределимые системы при растяжении-сжатии

*Цель расчета бруса и стержневой системы* (состоящей из отдельных брусьев – стержней), как и любой конструкции, – *определение размеров поперечных сечений стержней, при которых обеспечивается прочность или жесткость или и то и другое*. Исходя из условий прочности и жесткости при центральном растяжении-сжатии, видим, что в первую очередь необходимо знать экстремальное значение продольной силы.

### 5.5.1. Расчет статически определимых систем

Под статически определимыми стержневыми системами понимают такие, в которых усилия в стержнях и на опорах (опорные реакции) определяются из уравнений статики. Опасное сечение (где действуют экстремальные продольные силы) легко определяется из эпюры  $N$ , и далее задача решается с применением соответствующих условий – прочности и жесткости.

Расчет статически определимой стержневой системы (рис. 5.6), представляющей собой два симметрично расположенных стержня, соединенных в

точках  $A, B, C$  посредством шарниров, сводится к определению усилий  $N_1$  и  $N_2$  в стержнях  $AB$  и  $AC$ .

Эти усилия направлены вдоль стержней, т. к. соединяются посредством шарниров.

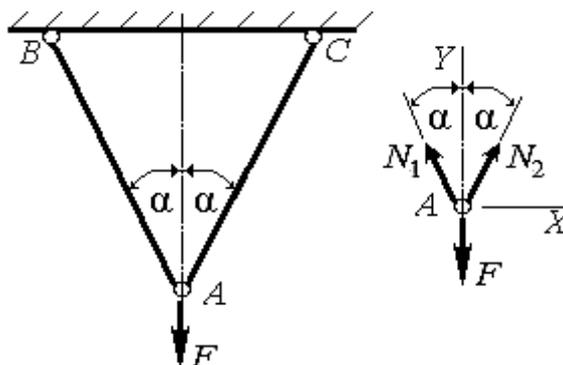


Рис. 5.6. Статически определимая стержневая система

Для определения осевых усилий запишем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_2; \quad (5.20)$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F = 0; \quad N_1 = N_2 = 0,5 \frac{F}{\cos \alpha}. \quad (5.21)$$

По известным усилиям определяются опасные сечения стержней и проводится расчет в соответствии с поставленной задачей.

### 5.5.2. Расчет статически неопределимых систем

Статически неопределимыми называют системы, в элементах (стержнях) которых усилия не могут быть определены с помощью уравнений статики. Говорят, что *система имеет дополнительные («лишние») связи* (рис. 5.7).

На рис. 5.7, а показана стержневая система, составленная из трех стержней, соединенных шарнирно. В стержнях действуют *три усилия*, направленные вдоль этих стержней (см. рис. 5.7, б).

Как и в случае системы, изображенной на рис. 5.6, можно составить *только два уравнения* равновесия:

$$\sum X = 0; \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; \quad (5.22)$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - F = 0. \quad (5.23)$$

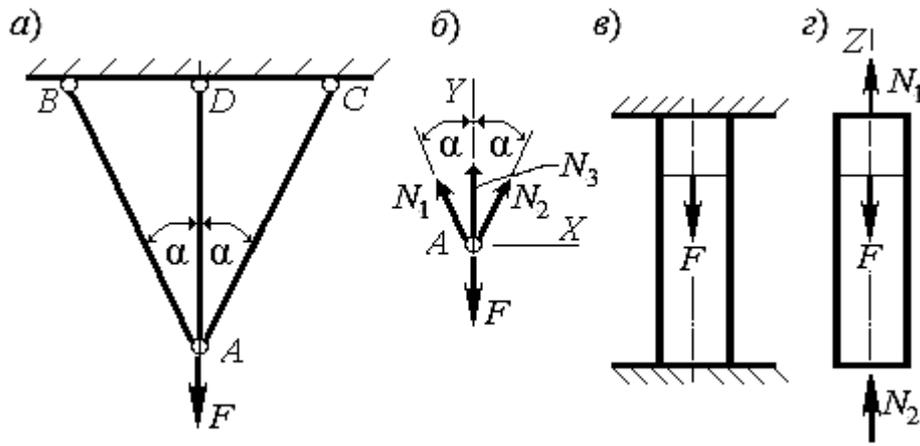


Рис. 5.7. Примеры статически неопределимых систем

На рис. 5.7, в стержень опирается на две жесткие опоры. Возникают две реакции:  $N_1$  и  $N_2$  (см. рис. 5.7, г). Можем составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; \quad N_1 + N_2 - F = 0. \quad (5.24)$$

В уравнении – два неизвестных осевых усилия:  $N_1$  и  $N_2$ , т. к. их величина будет зависеть от положения точки приложения заданной силы  $F$  (рис. 5.9, б).

Данные схемы *один раз статически неопределимые*. В них присутствует одна связь (один из стержней или опорная связь) – «лишняя».

Наличие этих связей обусловлено требованиями к прочности и жесткости конструкции или условиями ее работы.

Такие связи называют «*лишними*» потому, что *они не являются необходимыми* для обеспечения равновесия конструкции, а также ее геометрической неизменяемости (*деформация стержней и соответствующие ей перемещения отдельных точек системы могут возникать только от действия внешних сил*).

Число лишних неизвестных или *степень статической неопределимости* системы устанавливается *разностью между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики*.

Для решения задачи по определению неизвестных усилий (говорят – для раскрытия статической неопределимости) необходимо составить дополнительные уравнения. Их количество равно степени статической неопределимости.

Дополнительные уравнения составляются на основе общего принципа: *условий совместности деформаций*: т. к. стержни соединяются между собой определенным образом – шарнирно, жестко или в соединении имеются некоторые зазоры, *стержни этой системы деформируются совместно*.

Методику раскрытия статической неопределимости рассмотрим на примерах.

**Пример 1** (см. рис. 5.7, а). В стержнях действуют *три* усилия, направленные вдоль этих стержней.

Примем, что площадь поперечного сечения боковых стержней одинакова:  $A_1 = A_2 = A$ , а средний стержень имеет площадь  $nA$ . Тогда, решая систему уравнений (5.22) и (5.23) при условии, что  $N_1 = N_2$ , получим

$$N_1 = N_2 = 0,5 \frac{F - N_3}{\cos \alpha}. \quad (5.25)$$

**1. Силовая сторона задачи.** Составляют уравнения равновесия (в данном случае – два). Они были составлены ранее (см. уравнения (5.22) и (5.23)). Имеем три неизвестных усилия и два уравнения статики. Система *один раз статически неопределима*.

**2. Геометрическая сторона задачи.** Рассмотрим перемещения стержней, сходящихся в точке  $A$  (рис. 5.8). Под действием внешней силы исследуемая точка переместится в положение  $A_1$ . Концы стержней  $AB$ ,  $AD$ ,  $AC$  соединены шарнирно в точке  $A$ , поэтому они получают соответствующие удлинения. Причем эти *стержни деформируются совместно*, в соответствии с геометрией системы.

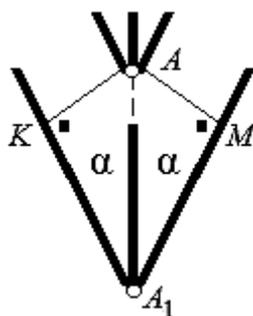


Рис. 5.8. Перемещения стержней в узле  $A$  системы (см. рис. 5.7, б)

Мысленно рассоединим стержни в ненагруженном состоянии (в точке  $A$ ) и соединим их в положении после нагружения (в точке  $A_1$ ). Концы крайних стержней переместятся по дуге из точки  $A$  соответственно в точку  $K$  и точку  $M$  и, удлинившись, соединятся в точке  $A_1$ . Вертикальное перемещение точки  $A$  **весьма мало**; угол  $AA_1M$  равен углу  $AA_1K$ ; дуги можно заменить прямыми, поэтому углы  $AKA_1$  и  $AMA_1$  – прямые.

Ввиду симметрии системы, абсолютные удлинения крайних стержней будут равны между собой:  $\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC}$ . Геометрически эти деформации определяются отрезками  $KA_1 = MA_1$ . Средний стержень удлинится на величину отрезка  $AA_1$  и его удлинение  $\Delta l_{AD}$ .

Рассматривая прямоугольные треугольники  $AKA_1$  и  $AMA_1$ , можем записать соотношение сторон:

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} = \Delta l_{AD} \cos \alpha. \quad (5.26)$$

Уравнение (5.26) и есть уравнение совместности деформаций рассматриваемой системы.

**3. Физическая сторона задачи.** В уравнении совместности деформаций выразим абсолютную деформацию через продольные силы по закону Гука:

$$\frac{N_1 l_{AB}}{EA} = \frac{N_3 l_{AD}}{EnA} \cos \alpha.$$

Ввиду малости перемещений, длина стержней мало меняется и тогда  $l_{AB} = \frac{l_{AD}}{\cos \alpha}$ .

После преобразований получим зависимость

$$N_1 = \frac{N_3 \cos^2 \alpha}{n}. \quad (5.27)$$

**4. Решение системы уравнений (синтез).** Решаем систему уравнений (5.25) и (5.27) и после преобразований получим зависимости, с помощью которых определяются искомые усилия в стержнях:

$$N_3 = \frac{Pn}{2 \cos^3 \alpha + n}; \quad N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + n}. \quad (5.28)$$

Видим, что с увеличением площади среднего стержня (с увеличением коэффициента  $n$ ) усилие в нем уменьшится; усилия в крайних стержнях также изменятся.

В этом отличительная особенность статически неопределимых систем от статически определимых: увеличение жесткости ( $EA$ ) одних элементов приводит к увеличению в них усилий и, обычно, к уменьшению усилий в других стержнях.

В статически определимых системах усилия в элементах не зависят от их жесткости.

**5. Решение задачи в соответствии с ее условием.** По известным усилиям, записав условие прочности или условие жесткости, решаем поставленную задачу: проверяем прочность и (или) жесткость, проводим проектировочный расчет или определяем допустимое значение нагрузки.

**Пример 2.** Рассмотрим методику раскрытия статической неопределенности для стержня, изображенного на рис. 5.7, в. Стержень имеет площадь поперечного сечения  $A$  и изготовлен из материала с модулем упругости I рода  $E$ . Неизвестны два усилия –  $N_1$  и  $N_2$ . Уравнение равновесия было записано ранее (см. рис. 5.7, г и формулу (5.24)).

Рассмотрим геометрическую сторону задачи и составим уравнение совместности деформаций для опорных сечений, в которых перемещения равны нулю (рис. 5.9).

Отбросим мысленно нижнюю опору (рис. 5.9, б).

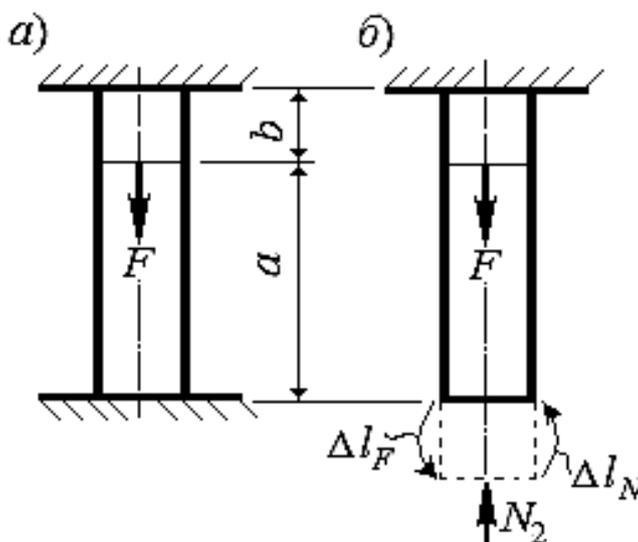


Рис. 5.9. Стержень, защемленный с двух сторон

Это опорное сечение станет свободным и переместится вниз за счет абсолютной линейной деформации  $\Delta l_F$  участка длиной  $b$  под действием силы  $F$ .

С другой стороны, рассматриваемое опорное сечение – неподвижно, следовательно, перемещение его должно быть равно нулю. Это условие будет выполняться, если реакция на опоре  $N$  будет по величине и направлению такой, что абсолютная линейная деформация от ее действия  $\Delta l_N$  окажется равной по величине и противоположной по направлению деформации  $\Delta l_F$ .

Условие совместности деформаций запишется в виде

$$\Delta l_F = \Delta l_N. \quad (5.29)$$

По закону Гука

$$\frac{F b}{E A} = \frac{N_2 (a + b)}{E A}. \quad (5.30)$$

Таким образом,  $N_2 = \frac{F b}{a + b}$ . Статическая неопределимость раскрыта.

### 5.5.3. Расчеты в связи с наличием натягов при сборке конструкций

На практике встречаются и другие задачи, например, связанные с *неточностью* изготовления элементов (стержней).

Неточность изготовления (даже незначительные погрешности) требует приложения *дополнительных усилий* для сборки узла, при этом возникают *натяги* и соответствующие *монтажные напряжения*.

**Пример 1.** Средний стержень (см. рис. 5.7, а) изготовлен короче проектного размера на малую величину  $\Delta$  (рис. 5.10, а). Для сборки стержней в узле А необходимо средний стержень растянуть, а крайние стержни сжать (рис. 5.10, б).

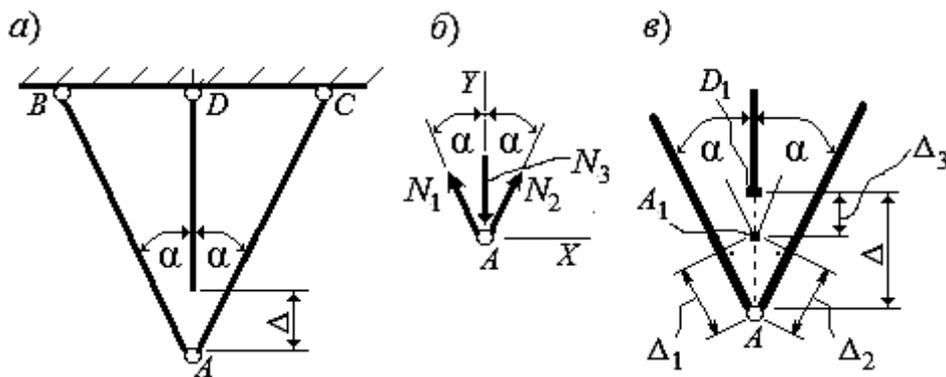


Рис. 5.10. Система из трех стержней с зазором в узле

Уравнения равновесия

$$\sum X = 0; \quad N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_2; \quad (5.31)$$

$$\sum Z = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - N_3 = 0. \quad (5.32)$$

Неизвестны два усилия. *Задача один раз статически неопределима.*

Рассмотрим геометрическую сторону задачи (рис. 5.10, в). Крайние стержни будут укорачиваться на величину  $\Delta_1 = \Delta_2 = AA_1 \cos \alpha$ , а средний стержень удлинится на величину  $\Delta_3 = D_1 A_1$ . Тогда уравнение совместности деформаций запишется в виде

$$\Delta = D_1 A_1 + AA_1 = \Delta_3 + \frac{\Delta_2}{\cos \alpha}. \quad (5.33)$$

Ход дальнейшего решения аналогичен порядку решения в предыдущих примерах. Видим, что средний стержень, еще до нагружения внешней силой, будет растянут некоторой нагрузкой, т. е. *напряжения от натяга будут суммироваться с напряжениями от эксплуатационных нагрузок*, что не учитывается в обычных расчетах и может привести к потере прочности.

Примеры положительного эффекта от натяга:

- монтаж бандажа на колесо (металлическое кольцо разогревается и насаживается на колесо, при охлаждении кольцо обжимает колесо);
- предварительно напряженные железобетонные конструкции (в растянутой зоне бетонной плиты располагают предварительно напряженную сжимающими напряжениями стальную арматуру).

**Пример 2.** Стержень, имеющий жесткость  $EA$  (см. рис. 5.7, в), изготовлен короче заданной длины на величину  $\Delta$  (рис. 5.11, а). Вид расчетной схемы и порядок решения будут зависеть от величины перемещения нижнего сечения (определяемого величиной и положением по длине силы  $F$ , а также жесткостью стержня):

а) величина перемещения нижнего сечения **меньше** величины зазора – абсолютная линейная деформация стержня  $\Delta l_F < \Delta$ . Задача *статически определима*;

б) величина перемещения нижнего сечения **больше** или равна величине зазора – абсолютная линейная деформация стержня  $\Delta l_F \geq \Delta$ . Задача *статически неопределима*.

Таким образом, в первую очередь необходимо найти величину перемещения нижнего сечения, которое будет определяться деформацией участка бруса длиной  $b$  от действия силы  $F$ :

$$\Delta l_F = \frac{Fb}{EA}.$$

Решение для случая  $\Delta l_F < \Delta$  традиционно для решения статически определимых задач.

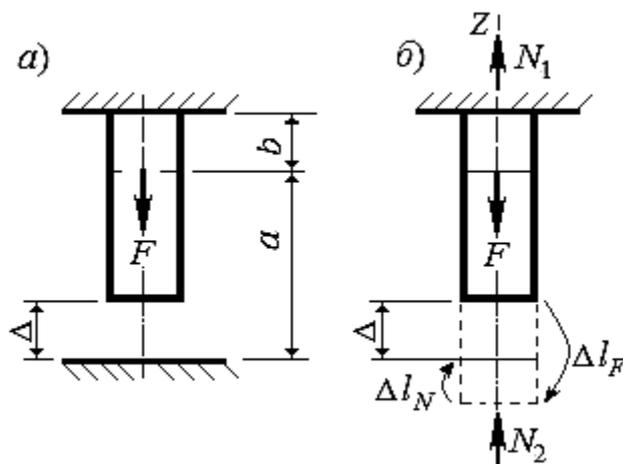


Рис. 5.11. К расчету стержня, выполненного с зазором

В случае, если  $\Delta l_F \geq \Delta$ , необходимо раскрыть статическую неопределимость.

На опорах возникнут две реакции, величины которых неизвестны (рис. 5.11, б). Уравнение равновесия

$$\sum Z = 0; \quad N_1 + N_2 - F = 0.$$

Уравнение совместности деформаций получим, рассматривая схему (см. рис. 5.11, б):

$$\Delta l_F = \Delta + \Delta l_N.$$

В соответствии с законом Гука

$$\frac{Fb}{EA} = \Delta + \frac{N_2(a+b)}{EA}.$$

Получаем  $N_2 = \frac{Fb - \Delta EA}{a+b}$ . Статическая неопределимость раскрыта.

#### 5.5.4. Расчеты в связи с изменением температуры

Напряжения в сечении стержня также будут возникать даже при отсутствии внешних нагрузок.

Рассмотрим стержень длиной  $l$  и площадью  $A$ , изготовленный из материала с модулем упругости  $E$ . Оба конца стержня жестко защемлены (рис. 5.12, а).

Начальная температура стержня  $t_1$ . Определить напряжения, которые возникнут в сечении стержня, если он нагревается до температуры  $t_2$ . Пусть градиент температуры будет положительным:

$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0.$$

Как известно, при нагреве материалы расширяются, т. е. стержень будет стремиться удлиниться и распирать опорные сечения, но из-за наличия этих жестких опор в них возникнут реакции  $N_1$  и  $N_2$ .

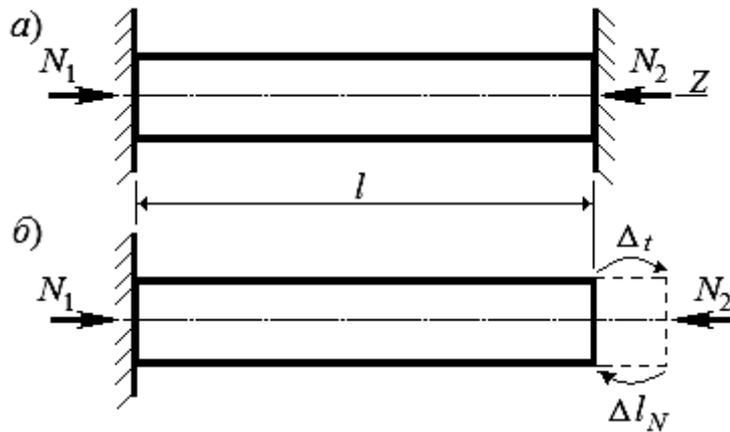


Рис. 5.12. Стержень, подвергнутый действию градиента температур

Уравнение равновесия  $\sum Z = 0$ ;  $N_1 - N_2 = 0$ ;  $N_1 = N_2$ . Стержень *один раз статически неопределим*.

Оба конца стержня закреплены жестко, поэтому его *длина  $l$  изменяться не будет*. То есть перемещения опорных сечений равны нулю, следовательно, температурная линейная деформация  $\Delta_t = 0$ .

В отсутствие одной из опор, например правой (рис. 5.12, б), стержень удлинится на величину  $\Delta_t$ . Это удлинение должно компенсироваться абсолютной линейной деформацией от действия реакции  $\Delta l_N$ .

Уравнение совместности деформаций  $\Delta_t = \Delta l_N$ .

По известной из курса физики формуле определим температурную деформацию стержня:

$$\Delta_t = \alpha l \Delta t, \quad (5.34)$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала стержня, град $^{-1}$ .

По закону Гука  $\Delta l_N = \frac{N_2 l}{EA}$ . *Сила сжимает стержень!*

Приравняв полученные зависимости, определим значение реакции на опоре и соответствующие температурные напряжения:

$$\sigma_t = \frac{N_2}{A} = \alpha E \Delta t. \quad (5.35)$$

Отметим, что температурные (при нагреве стержня) напряжения по знаку – сжимающие. Следовательно, в случае охлаждения такого стержня ( $\Delta t = t_2 - t_1 < 0$ ), нормальные напряжения будут растягивающими. Кроме того, видим, что на величину напряжений не влияет длина стержня. Эти обстоятельства следует учитывать при использовании хрупких материалов, а также, если стержень подвергается действию изменяющихся по величине и знаку температур.

Отметим, что на практике встречаются достаточно сложные схемы стержневых систем, и в каждом конкретном случае задача сводится к геометрическому анализу деформаций и составлению соответствующих уравнений совместности деформаций.

В заключение рассмотрим еще один пример.

**Пример 1.** Абсолютно жесткий брус (рис. 5.13, а) подвешен на стержнях, прикрепленных шарнирами, и нагружен силой  $F$ . Площадь стержней, соответственно, равна  $2A$  и  $A$  ( $A = 10 \text{ см}^2$ ). Длина стержней  $2l$  и  $l$ .

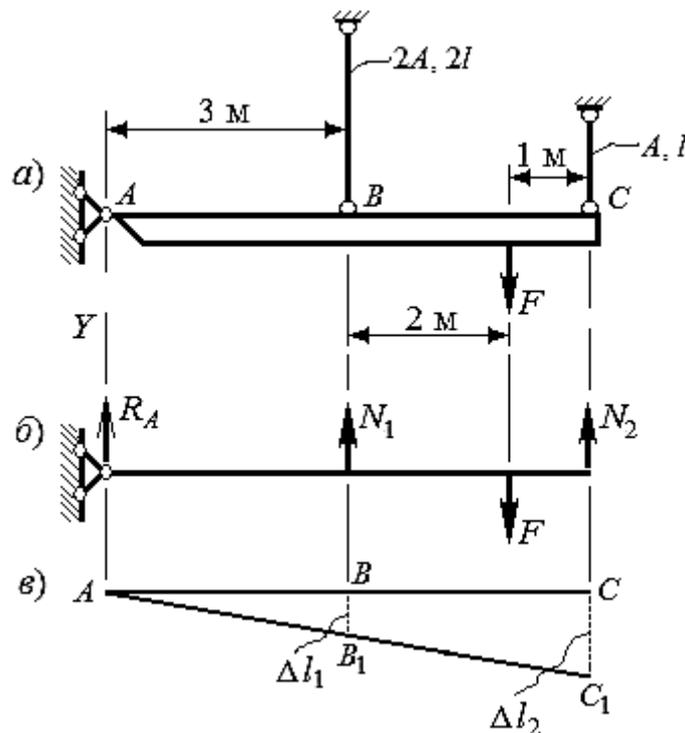


Рис. 5.13. Расчетная схема стержня к примеру 1

Определить значение допускаемой силы  $[F]$  из расчета по допускаемым напряжениям и из расчета по разрушающим (предельным) нагрузкам.

Материал стержней – сталь Ст 3 ( $[\sigma] = 160$  МПа;  $\sigma_T = 240$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа).

Можно составить два уравнения равновесия для силовой схемы (рис. 5.13, б). Так как стержни соединены с жестким брусом посредством шарниров, то усилия в стержнях будут направлены вдоль оси этих стержней:

$$\Sigma Y = 0; \quad N_1 + N_2 - F + R_A = 0; \quad (5.36)$$

$$\Sigma m_A = 0; \quad 3N_1 - 5F + 6N_2 = 0. \quad (5.37)$$

Первое из них включает и неизвестную реакцию, т. е. имеем *три неизвестных*. Во втором уравнении *неизвестных два* – усилия  $N$  в стержнях. Следовательно, в решении удобнее использовать второе уравнение равновесия (5.37).

Рассмотрим *геометрическую сторону* задачи (рис. 5.13, в). Под действием внешней силы  $F$  брус, оставаясь прямым (абсолютно жесткий брус – не деформирующийся), повернется вокруг шарнира  $A$  на некоторый угол. Стержни в местах крепления удлинятся, т. е. точки  $B$  и  $C$  переместятся вертикально в положения  $B_1$  и  $C_1$ . Отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  – абсолютные линейные деформации стержней. Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$  имеем

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad 2\Delta l_1 = \Delta l_2. \quad (5.38)$$

Получили *уравнение совместности деформаций*.

Подставляем в полученное уравнение усилия в соответствии с формулой закона Гука (*физическая сторона задачи*).

$$2 \frac{N_1 l_1}{E A_1} = \frac{N_2 l_2}{E A_2}; \quad 2 \frac{N_1 1}{10} = \frac{N_2 2}{20}; \quad N_1 = 0,5N_2. \quad (5.39)$$

Решаем систему уравнений (5.37) и (5.39):

$$3 \cdot 0,5N_2 - 5F + 6N_2 = 0.$$

Значения усилий в стержнях в долях силы  $F$

$$N_2 = 0,67F; \quad N_1 = 0,5 \cdot 0,67F = 0,33F. \quad (5.40)$$

**Расчет по допускаемым напряжениям.**

Из условия прочности  $\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ , с учетом того, что максимальные нормальные напряжения возникают во втором стержне, имеем

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,67P}{A} = [\sigma].$$

Решаем уравнение относительно силы  $F$ :

$$[F] = \frac{A[\sigma]}{0,67} = \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^3}{0,67} = 238,8 \text{ кН.}$$

**Расчет по разрушающей нагрузке** (см. п. 5.2.2).

Материал стержней – сталь, т. е. *пластичный материал. Второй стержень более нагружен* (см. формулу (5.40)). Поэтому, после достижения напряжением во втором стержне значения *предела текучести, этот стержень нагружаться не будет* (напряжения не растут, увеличиваются деформации – см. диаграмму растяжения на площадке текучести).

Нагрузку, при ее дальнейшем увеличении, будет воспринимать *первый стержень* (до достижения в нем предела текучести).

Таким образом,  $N_2 = \sigma_T A$ ;  $N_1 = \sigma_T 2A$  и уравнение (5.37) примет вид:

$$3\sigma_T 2A - 5F + 6\sigma_T A = 0.$$

Откуда получаем значение силы, при котором в обоих стержнях напряжения достигнут предела текучести, – *предельная грузоподъемность системы*:

$$F_T = \frac{12 \cdot 240 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{5} = 576 \text{ кН.}$$

Разделим предельное значение силы на коэффициент запаса  $n_T$  ( $n_T = 1,5$ ) и получим допускаемое значение силы:

$$[F_T] = 576 : 1,5 = 384 \text{ кН.}$$

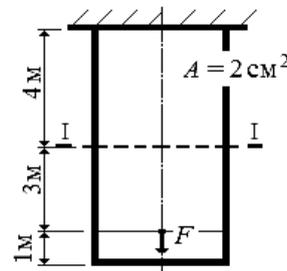
Видим, что при расчете во втором случае допускаемая нагрузка выше, чем в первом, на величину  $384 : 238,8 = 1,61$ , т. е. *расчет по разрушающим*

нагрузкам дает возможность в большей степени использовать свойства материала и особенности стержневой системы.

### Контрольные вопросы

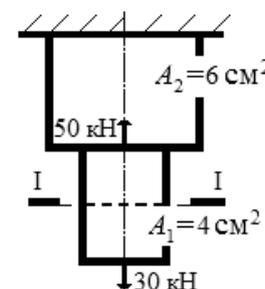
1. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение силы  $F$ , при которой сечение I–I стержня переместится на  $\Delta_{I-I} = 0,04$  см ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа):

- 1)  $F = 4$  кН;                      3)  $F = 8$  кН;  
2)  $F = 6$  кН;                      4)  $F = 10$  кН.



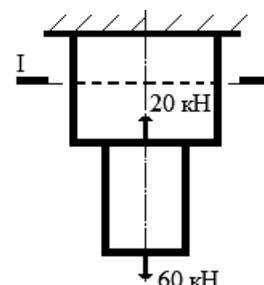
2. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение нормального напряжения в сечении I–I:

- 1)  $\sigma_{I-I} = 200$  МПа;              3)  $\sigma_{I-I} = 75$  МПа;  
2)  $\sigma_{I-I} = 125$  МПа;              4)  $\sigma_{I-I} = -50$  МПа.



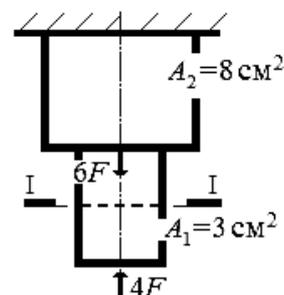
3. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение площади  $A$  поперечного сечения I–I, если  $\sigma_{I-I} = 50$  МПа:

- 1)  $A_{I-I} = 8$  см²;                      3)  $A_{I-I} = 12$  см²;  
2)  $A_{I-I} = 4$  см²;                      4)  $A_{I-I} = 16$  см².

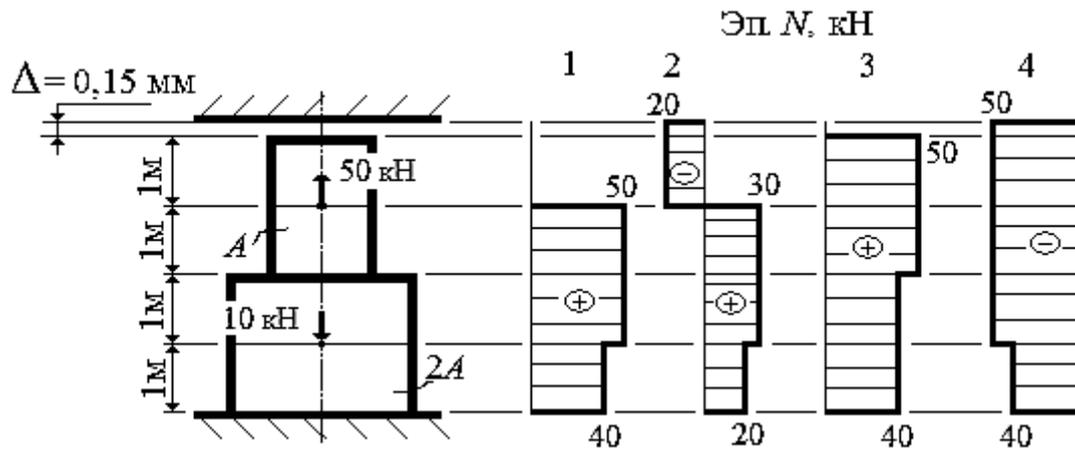


4. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение силы  $F$ , если в заданном сечении I–I возникают нормальные напряжения  $|\sigma_{I-I}| = 80$  МПа:

- 1)  $F = 12$  кН;                      3)  $F = 6$  кН;  
2)  $F = 4$  кН;                      4)  $F = 2,4$  кН.



5. Под каким номером изображена правильная эпюра продольных сил  $N$  ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $A = 10$  см<sup>2</sup>)?



## 6. КРИТЕРИИ (ТЕОРИИ) ПРОЧНОСТИ

При рассмотрении вопросов данной темы воспользуемся решениями, полученными в курсе «Теория упругости», с учетом традиционных для сопротивления материалов допущений и гипотез.

Из предыдущих подразд. 2.4, 2.5 и разд. 5 уже известно, что взаимодействие между конструкциями и их элементами характеризуется внешними силами и, как следствие, внутренними силовыми факторами в различных сечениях, напряжениями и деформациями, которые будут иметь различные значения в разных точках по разным направлениям. В свою очередь, именно значения напряжений и деформаций определяют прочность и жесткость конструкции и ее элементов. Величина и направление этих напряжений и деформаций зависят не только от ВСФ, но и от положения плоскости, по которой их определяют, а, как известно, через точку можно провести сколь угодно много плоскостей.

*Совокупность напряжений, действующих по возможным площадкам, проведенным в исследуемой точке, – напряженное состояние в точке.*

*Совокупность деформаций, возникающих в исследуемой точке по различным направлениям, – деформированное состояние в точке.*

### 6.1. Основы теории напряженного состояния

#### 6.1.1. Напряженное состояние в точке

Рассмотрим тело, нагруженное произвольной системой внешних нагрузок и находящееся в равновесии, и выделим в окрестности какой-то точки  $K$  этого тела параллелепипед (рис. 6.1) с гранями бесконечно малой длины  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Иначе говоря, в окрестностях исследуемой точки проведем шесть взаимно перпендикулярных плоскостей.

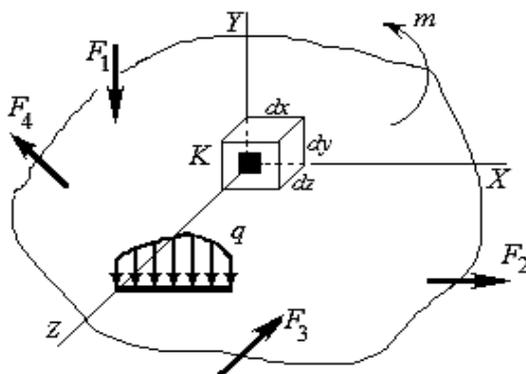


Рис. 6.1. Произвольным образом нагруженное тело

Предположим, что известны напряжения, действующие по граням этого параллелепипеда. Ввиду малости граней можно считать, что напряженное состояние во всех его точках одинаково и совпадает с напряженным состоянием в исследуемой точке  $K$ . Поэтому как по граням, так и по любым его сечениям напряжения считаются распределенными равномерно.

Изобразим параллелепипед в большем масштабе (рис. 6.2). Выберем произвольную систему координат.

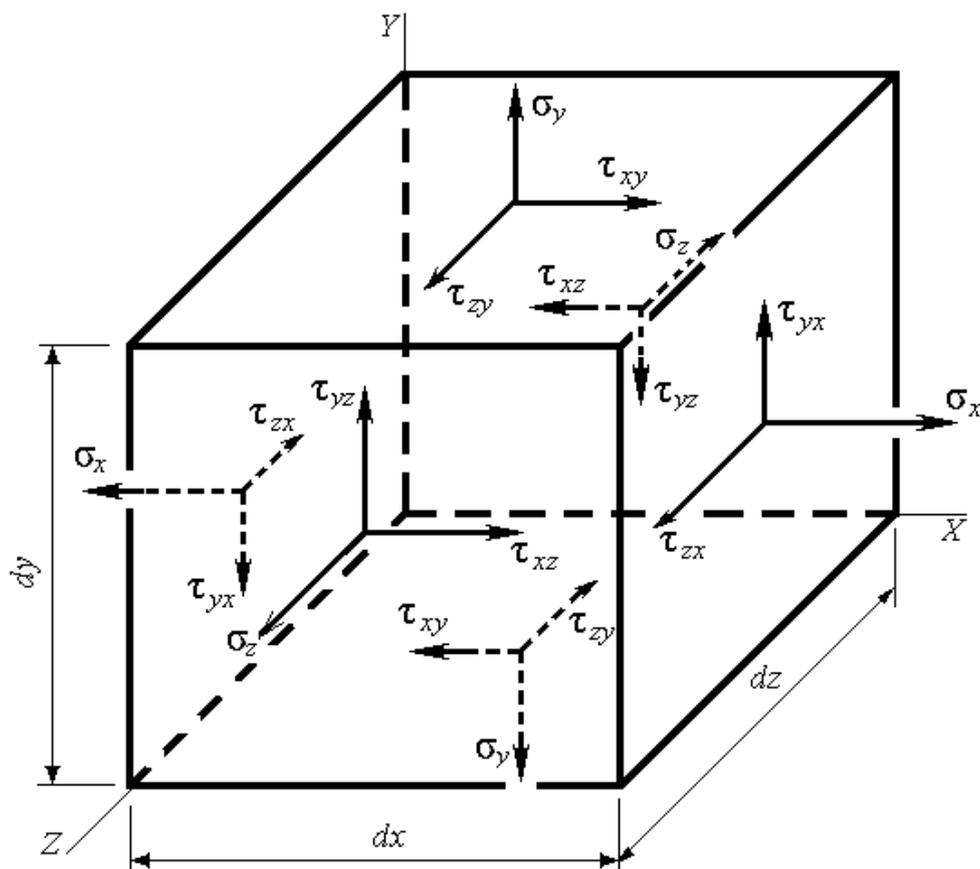


Рис. 6.2. Напряжения в окрестностях произвольной точки нагруженного тела

К каждой из граней параллелепипеда, как известно из подразд. 2.5, приложено какое-то *полное напряжение* (в центре тяжести этой грани), вектор которого можно разложить на три составляющие (их еще называют *компонентами напряжений*): нормальное  $\sigma$  и два касательных  $\tau$ .

На рисунке *пунктиром* показаны векторы компонент напряжений, приложенные к *невидимым* граням.

Обозначения векторов напряжений будем осуществлять в соответствии с правилами, принятыми в теории упругости.

**Нормальным напряжениям**  $\sigma$  присваиваем индексы в соответствии с осями, которым они параллельны:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ .

### Касательные напряжения $\tau$ :

- *первый индекс* – соответствует оси, которой параллелен вектор этого напряжения, т. е. направлению оси, параллельно которой оно действует;
- *второй индекс* – соответствует оси, которая перпендикулярна площадке (соответствует индексу при  $\sigma$ ), т. е. направлению нормали к площадке, где оно действует.

**Знаки напряжений** также определяем в соответствии с традиционными подходами теории упругости. На рис. 6.2 по видимым граням приложены **положительные** по направлению напряжения:

- нормальные напряжения – *направление вектора совпадает с направлением координатной оси*, напряжению присваиваем знак  $(+\sigma)$ ;
- касательные напряжения – *на площадке, где вектор нормального напряжения имеет положительное направление* (т. е. его направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси), *направление вектора касательного напряжения  $\tau$  положительно, когда оно также совпадает по направлению с соответствующей координатной осью.*

На параллельных гранях из условия равновесия напряжения равны попарно. Поэтому количество неизвестных напряжений равно девяти: три –  $\sigma$  и шесть –  $\tau$ .

### 6.1.2. Закон парности касательных напряжений

Тело, в котором выделен параллелепипед, находится в равновесии. Поэтому этот параллелепипед (см. рис. 6.2) под действием сил, приложенных к его граням, также должен находиться в равновесии. Длины ребер параллелепипеда обозначены  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Составим шесть уравнений равновесия статики. Силу, действующую по грани, определяем произведением значения напряжения на площадь грани, где это напряжение приложено. Получаем три уравнения:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0. \quad (6.1)$$

Например, уравнение  $\sum X = 0$  имеет вид:

$$\sigma_x dydz - \sigma_x dydz + \tau_{xy} dx dz - \tau_{xy} dx dz + \tau_{xz} dx dy - \tau_{xz} dx dy = 0.$$

Данные уравнения дают тождественный нуль, т. к. напряжения, приложенные по противоположным граням, взаимны (имеют одинаковые значения и противоположны по направлению).

Моменты, действующие относительно каждой из осей,

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \quad (6.2)$$

Запишем, например, уравнение  $\sum M_x = 0$ , имея в виду, что момент определяется произведением силы на плечо:

$$\sum M_x = (\tau_{zy} dx dz) dy - (\tau_{yz} dx dy) dz = 0.$$

Здесь, например, для первого слагаемого сила  $\tau_{zy} dx dz$ , а плечо  $dy$ .

Другие напряжения дают либо моменты, равные нулю (которые пересекают ось  $X$  или параллельны ей), либо уравновешивают друг друга. Откуда  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Оставшиеся два уравнения:  $\sum M_y = 0$  и  $\sum M_z = 0$  дают еще два равенства:  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  и  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Таким образом, получаем зависимости, которые носят название «закон парности касательных напряжений»:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

*Касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам и перпендикулярные к общему ребру, равны по величине и направлены либо к ребру, либо от ребра.*

Таким образом, неизвестными, которые необходимо определить, будут значения и направления *шести компонент* напряжений:

$$\sigma_x; \quad \sigma_y; \quad \sigma_z; \quad \tau_{xy}; \quad \tau_{yz}; \quad \tau_{zx}.$$

Из этих компонент напряжений (и парных им) составляют матрицу, которая называется «тензор напряжений»:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (6.4)$$

### 6.1.3. Главные напряжения и главные площадки

При изменении положения граней выделенного элемента (при повороте этих граней) напряжения на них также будут изменять свою величину и направление.

В теории упругости доказано, что всегда можно найти такое положение элемента, при котором на его гранях касательные напряжения будут отсутствовать, т. е. будут равняться нулю.

*Площадки, по которым не действуют  $\tau$ , называются главными площадками, а нормальные напряжения  $\sigma$  на этих площадках – главными напряжениями.*

В теории упругости также доказывается, что в каждой точке любым образом нагруженного тела всегда имеется, по крайней мере, *три главные взаимно перпендикулярные площадки.*

Главные напряжения принято обозначать  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , при этом полагают, что в алгебраическом смысле

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (6.5)$$

Например, расчетом определены следующие значения напряжений: касательные напряжения равны нулю; нормальные напряжения равны, соответственно,  $-1000$ ;  $600$ ;  $100$  МПа. Тогда  $\sigma_1 = 600$  МПа;  $\sigma_2 = 100$  МПа;  $\sigma_3 = -1000$  МПа.

### 6.1.4. Виды напряженного состояния

Вид напряженного состояния *определяется количеством действующих главных напряжений.*

#### 1. Линейное (одноосное) напряженное состояние (рис. 6.3).

К граням элементарного параллелепипеда приложено только одно нормальное напряжение. Если это напряжение *растягивающее*, то имеем наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  (см. рис. 6.3, *a*).

Схемы на рис. 6.3, *a, б* аналогичны – во втором случае вместо параллелепипеда изображена одна плоская грань.

На рис. 6.3, *в* – приложено только одно *сжимающее* нормальное напряжение, поэтому обозначаем его  $\sigma_3$ .

Естественно, что вместо горизонтальных сторон прямоугольника могут быть нагружены вертикальные стороны.

#### 2. Плоское (двухосное) напряженное состояние (рис. 6.4).

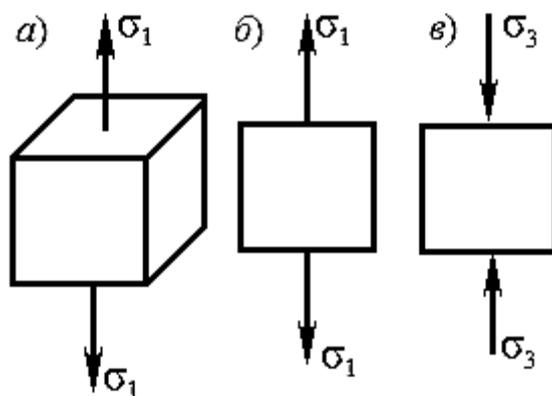


Рис. 6.3. Линейное напряженное состояние

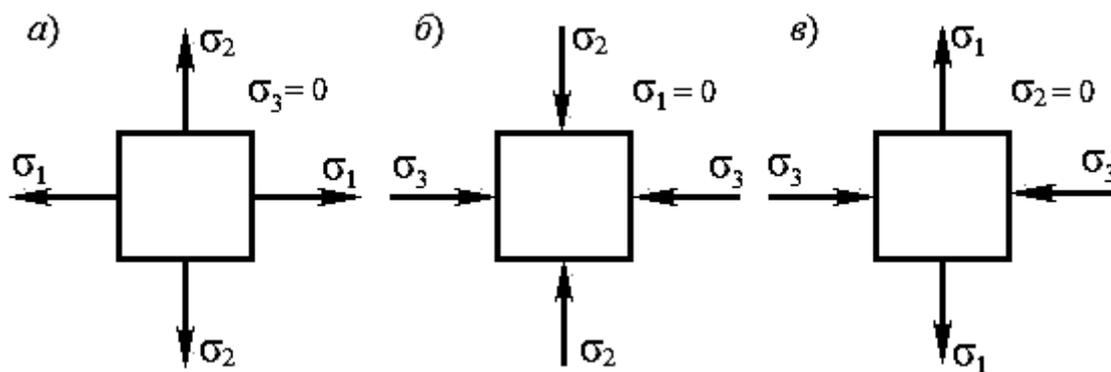


Рис. 6.4. Плоское напряженное состояние

В этом случае по любым двум взаимно перпендикулярным граням параллелепипеда (по граням произвольного плоского элемента) могут быть приложены два одинаковых по величине и направлению нормальных напряжения.

Если оба напряжения *растягивающие*, то они обозначаются  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$  (см. рис. 6.4, а), если *сжимающие*, то  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ,  $\sigma_1 = 0$  (см. рис. 6.4, б).

Но может быть и еще один вариант (см. рис. 6.4, в). В этом случае *одно нормальное напряжение – растягивающее, другое – сжимающее*. Следовательно, *наибольшее по величине нормальное напряжение* обозначается  $\sigma_1$ , *наименьшее*, соответственно,  $\sigma_3$ , а  $\sigma_2 = 0$ .

### 3. Объемное (трехосное) напряженное состояние (рис. 6.5).

В этом случае вариантов приложения напряжений еще больше. Подходы к обозначениям главных напряжений рассмотрены достаточно подробно ранее.

В большинстве случаев в инженерных расчетах встречаются *линейное* или *плоское напряженные состояния*.

*Рассмотрим более подробно теоретические предпосылки определения главных напряжений и напряжений, действующих по любым (произвольным) площадкам.*

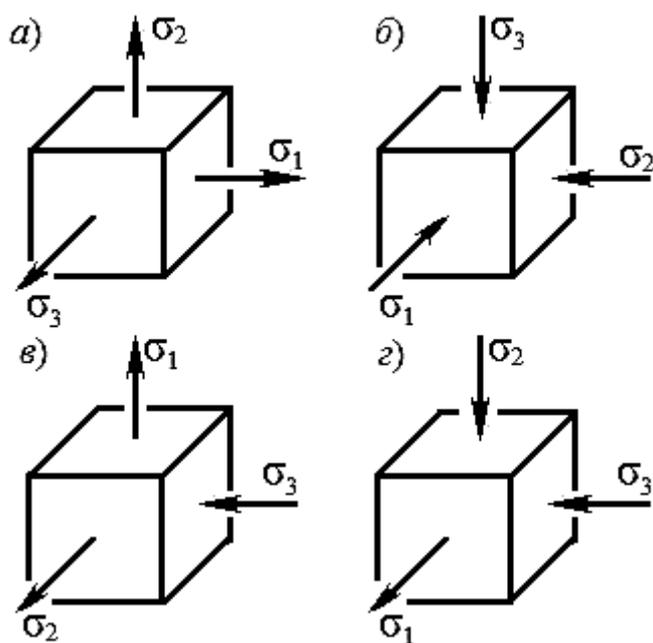


Рис. 6.5. Объемное напряженное состояние

В теории напряженного состояния рассматриваются два типа задач.

*Прямая задача.* По известным в точке главным напряжениям требуется определить нормальные и касательные напряжения по площадкам, наклоненным под заданным углом к главным площадкам.

*Обратная задача.* По известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку, требуется найти главные напряжения.

### 6.1.5. Линейное напряженное состояние

*Вычислим нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках.*

Рассмотрим стержень, который растягивается силой  $F$  (рис. 6.6, а). В поперечных сечениях (*перпендикулярных оси стержня*) величина нормального напряжения может быть определена по известной формуле (см. подразд. 5.1)

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}. \quad (6.6)$$

Касательные напряжения  $\tau = 0$ . В данном случае это будет *главное напряжение*  $\sigma_1 = +\sigma$ . Значения остальных главных напряжений  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .

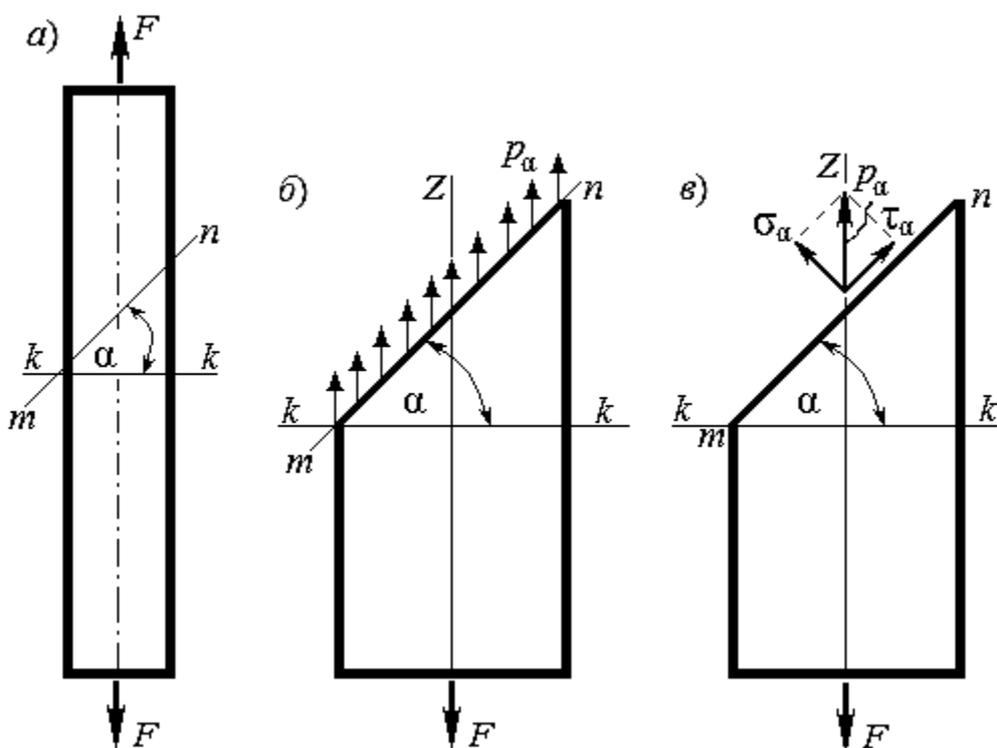


Рис. 6.6. К определению напряжений для линейного напряженного состояния

Заметим, что при сжимающей нагрузке  $F$   $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\sigma$ . Известно главное напряжение (см. формулу (6.6)), т. е. решаем прямую задачу.

Рассечем стержень сечением  $mn$ , наклоненным к поперечному сечению  $tk$  под углом  $\alpha$  (рис. 6.6, б). Отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части стержня.

Предположим, что по наклонной площадке полное напряжение  $p_\alpha$  распределено равномерно (так же как и по поперечному сечению) и направлено оно параллельно оси стержня.

Уравнение равновесия  $\sum Z = 0$  запишем в виде

$$F - p_\alpha A_\alpha = 0, \quad (6.7)$$

где  $A_\alpha$  – площадь сечения  $mn$ .

Из формулы (6.7)

$$p_\alpha = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F}{A / \cos \alpha} = \sigma_1 \cos \alpha. \quad (6.8)$$

Здесь  $\sigma_1 = \frac{F}{A}$  – главное напряжение (действующее в поперечном сечении стержня).

Разложим  $P_\alpha$  на составляющие, которые приложим: одну ( $\sigma_\alpha$ ) – по нормали к сечению  $mn$ , другую ( $\tau_\alpha$ ) – в его плоскости (рис. 6.6, в). Получим следующие соотношения:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Таким образом, *нормальные напряжения* по наклонной площадке

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (6.9)$$

*касательные напряжения* по наклонной площадке

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.10)$$

Исследуем формулы (6.9) и (6.10).

1. Угол  $\alpha = 0^\circ$  (поперечные сечения стержня). Так как  $\cos 0 = 1$ , а  $\sin 0 = 0$ , то  $\sigma_{0^\circ} = \sigma_1$ ;  $\tau_{0^\circ} = 0$ .

*Касательные напряжения в поперечных сечениях не возникают. В поперечном сечении действуют максимальные нормальные напряжения. Поперечное сечение стержня является главной площадкой.*

2. Угол  $\alpha = 90^\circ$ . Это сечения, параллельные продольной оси стержня. Так как  $\cos 90^\circ = 0$ , а  $\sin 180^\circ = 0$ , то  $\sigma_{90^\circ} = 0$ ;  $\tau_{90^\circ} = 0$ .

*В продольных сечениях стержня напряжения отсутствуют.*

3. Угол  $\alpha = 45^\circ$ . Это сечения, расположенные так, как показано на рис. 6.7.

Так как  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $\cos^2 45^\circ \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$  и  $\sin 90^\circ = 1$ , то, например, для схемы (см. рис. 6.7, а)

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1; \quad \tau_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_1. \quad (6.11)$$

Таким образом, в рассматриваемом сечении нормальные и касательные напряжения равны по величине:  $\sigma_{45^\circ} = \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma_1}{2}$ .

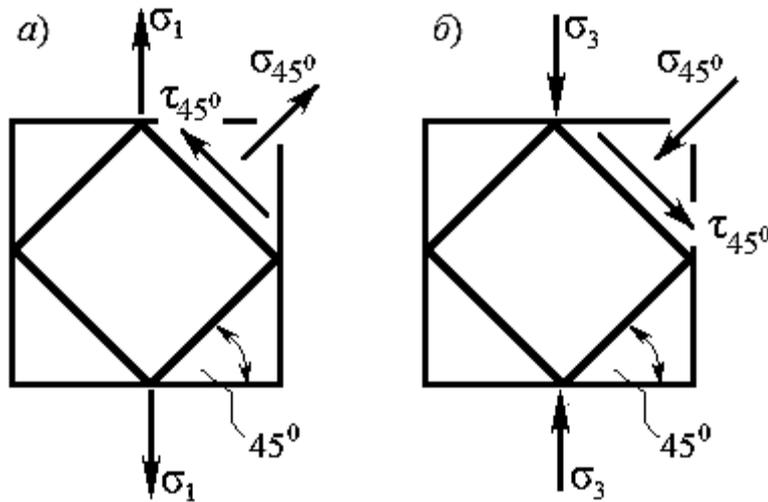


Рис. 6.7. Опасное положение площадок для линейного напряженного состояния

*Нормальные* напряжения равны половине главного напряжения, а *касательные* – *максимальны по величине* и также равны половине главного напряжения.

*Наибольшие касательные напряжения возникают по площадкам, проходящим под углом 45° к оси стержня.*

На схеме (см. рис. 6.7, б) на главной площадке приложено *сжимающее* нормальное напряжение. Тогда в формулы (6.11) вместо  $\sigma_1$  подставляем  $\sigma_3$ :

$$\sigma_{45^\circ} = \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma_3}{2}.$$

Таким образом, можно дать объяснение особенностям разрушения чугунного кубика под действием сжимающей силы: *образец разрушается именно по плоскостям, наклоненным к линии действия силы на угол 45°*. По этим плоскостям одновременно действуют и нормальные, и касательные напряжения, причем *касательные достигают максимума*.

### 6.1.6. Плоское напряженное состояние

#### Решение прямой задачи.

Нормаль к площадке *a–a* составляет с главным напряжением  $\sigma_1$  угол  $\alpha$  (рис. 6.8). При этом на наклонных площадках будут действовать  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ .

Применим *принцип независимости действия сил*: величины  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  сначала определим только от действия  $\sigma_1$ , а затем только от действия  $\sigma_2$ . Получим два одноосных напряженных состояния и по формулам (6.9) и (6.10)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 (90 + \alpha);$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2(90 + \alpha) = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

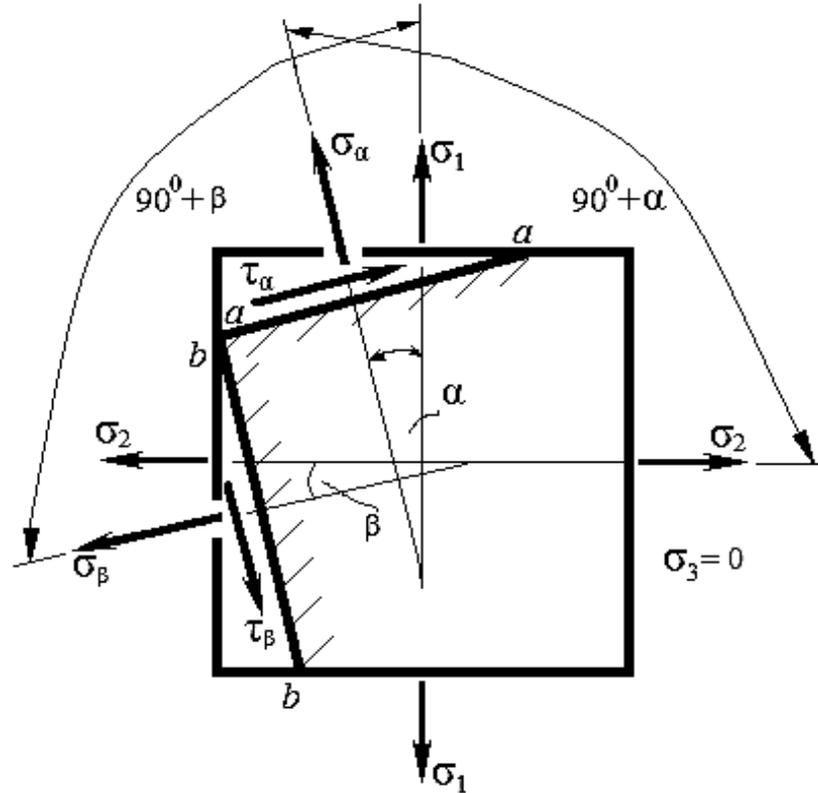


Рис. 6.8. К определению напряжений на наклонных площадках

Откуда окончательно имеем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (6.12)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.13)$$

По данным формулам могут быть получены также выражения для определения напряжений по площадке  $b-b \perp a-a$ . Угол  $\beta = \alpha + 90^\circ$ .

Следовательно, по аналогии с вышеизложенным подходом имеем

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \sigma_1 \cos^2 (\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2 (\alpha + 90^\circ);$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \quad (6.14)$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ);$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.15)$$

Складывая почленно (6.12) и (6.14), получим

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (6.16)$$

*Сумма нормальных напряжений, действующих по двум произвольным и взаимно перпендикулярным площадкам, постоянна и равна сумме главных напряжений, приложенных по главным площадкам, повернутым по отношению к произвольным.*

Сравнивая (6.13) и (6.15), видим, что

$$\tau_{\beta} = -\tau_{\alpha}. \quad (6.17)$$

Получили доказательство закона парности касательных напряжений (см. формулу (6.3)).

Касательные напряжения  $\tau_{\alpha}$ , в соответствии с (6.15), достигнут максимального значения при  $\alpha = \pm 45^\circ$ :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (6.18)$$

*Максимальные касательные напряжения  $\tau$  действуют по площадкам, наклоненным к главным площадкам на угол  $45^\circ$ .*

*Во все полученные формулы значения напряжений нужно подставлять со своим знаком.*

### **Решение обратной задачи (рис. 6.9).**

Приведем расчетные формулы без вывода. Вывод формулы для вычисления главных напряжений при плоском напряженном состоянии осуществлен в п. 6.1.8.

*Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0$ , на который необходимо повернуть произвольные площадки, чтобы получить главные площадки:*

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (6.19)$$

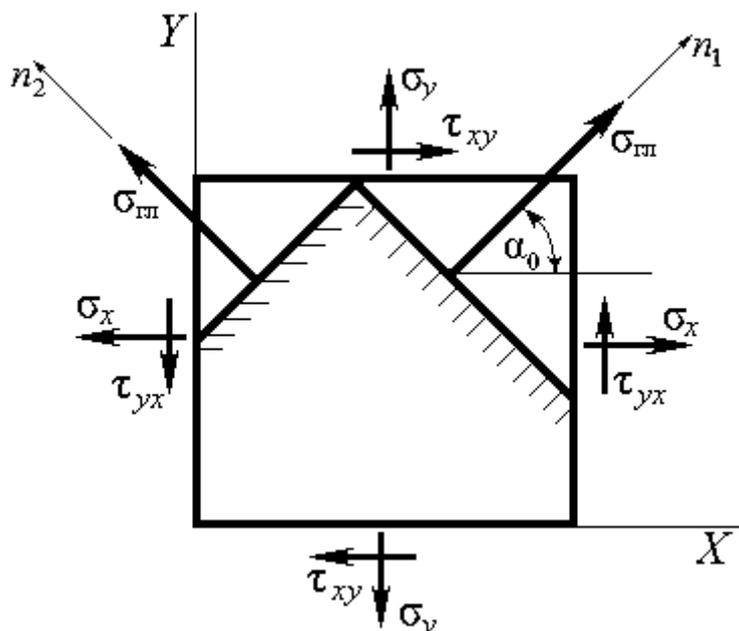


Рис. 6.9. К определению главных напряжений

*Значения главных напряжений*

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (6.20)$$

При суммировании получаем максимальное главное напряжение, а вычитая – минимальное.

Заметим, что в учебной литературе могут встретиться и другие варианты написания двух последних формул, что связано, в частности, с подходами к обозначениям напряжений (см., например, п. 6.1.8).

### **6.1.7. Объемное напряженное состояние**

В инженерной практике встречается редко, главным образом при решении контактных задач. Рассматривается в курсе «Теория упругости».

Пусть *грани параллелепипеда – главные площадки*. Проведем площадку (рис. 6.10), имеющую нормаль  $n$ , которая образует углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  к направлениям главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (система координат 1, 2, 3).

Векторы напряжений по этой произвольной площадке не параллельны ни одному из главных напряжений.

Запишем формулы для расчета нормальных  $\sigma_\alpha$  и касательных  $\tau_\alpha$  напряжений, действующих по произвольной площадке:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (6.21)$$

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2}. \quad (6.22)$$

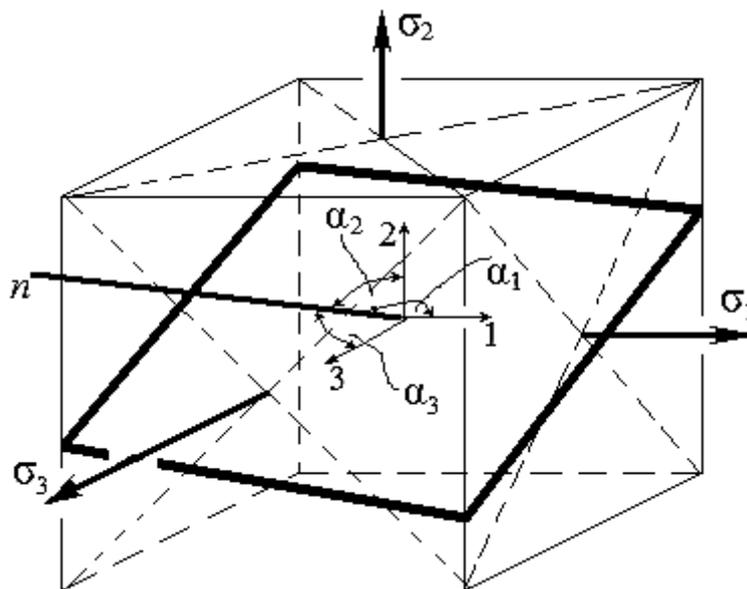


Рис. 6.10. К определению нормальных и касательных напряжений на площадке с нормалью  $n$

*Максимальное значение касательных напряжений определяется полуразностью экстремальных значений главных напряжений:*

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

**Пример 1.** В опасной точке нагруженного тела напряженное состояние оказалось таким, как показано на схеме (рис. 6.11, а). Определить положение главных площадок и значения главных напряжений.

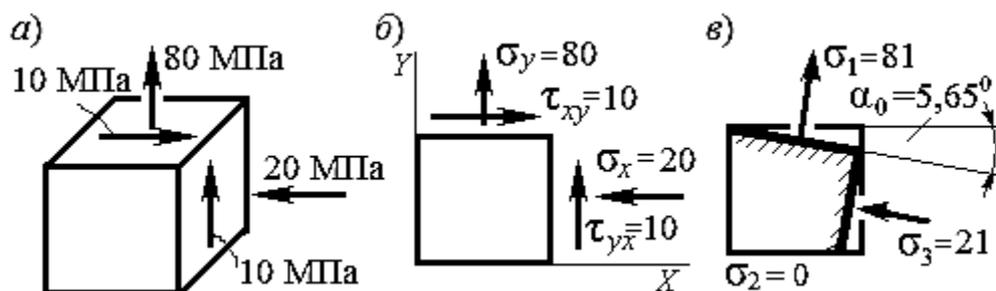


Рис. 6.11. Схема напряженного состояния к примеру 1

*Решение.*

1. Выбираем систему координат, положительные направления осей и в соответствии с выбранной системой координат обозначаем заданные напряжения, приложенные к произвольным площадкам (рис. 6.11, б).

2. По формуле (6.20) определяем значения главных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{гл}} = \sigma_{\text{max,min}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{-20 + 80}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-20 - 80)^2 + 4 \cdot 10^2} = 30 \pm 51.\end{aligned}$$

3. Обозначаем главные напряжения в соответствии с принятым правилом:

$$\sigma_1 = 30 + 51 = 81 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 30 - 51 = -21 \text{ МПа}.$$

*Это плоское напряженное состояние.*

4. По формуле (6.19) находим угол, на который необходимо повернуть произвольные площадки, чтобы получить главные:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 10}{-20 - 80} = -0,2.$$

Тогда  $\operatorname{arctg} 2\alpha_0 = -11,3^\circ$ , а  $\alpha_0 = -5,65^\circ$ . Знак «минус» указывает на то, что отсчет угла – по часовой стрелке.

5. Показываем положение главных площадок и вектора главных напряжений на схеме (рис. 6.11, в).

6. Проверяем правильность решения:

– *сумма напряжений – величина постоянная:*

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y; \quad 81 + (-21) = 80 + (-20);$$

– *направление поворота произвольных площадок:* для получения положения главных площадок произвольную площадку, по которой приложено максимальное нормальное напряжение, необходимо повернуть по направлению приложенного к ней касательного напряжения.

В данном примере по площадке, где приложено максимальное напряжение  $\sigma_y = 80$  МПа, действует касательное напряжение  $\tau_{xy} = 10$  МПа. Это напряжение поворачивает указанную площадку по ходу часовой стрелки (при

взгляде изнутри элемента). Следовательно, данную произвольную площадку необходимо повернуть также по часовой стрелке и получить положение главной площадки, что соответствует решению.

### 6.1.8. Вывод формул для решения обратной задачи (плоское напряженное состояние)

При двухосном напряженном состоянии все напряжения действуют в одной плоскости.

Пусть известны напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам (рис. 6.12, а). Под углом  $\alpha$  будет располагаться сечение, по которому действуют главные напряжения – *главные площадки*.

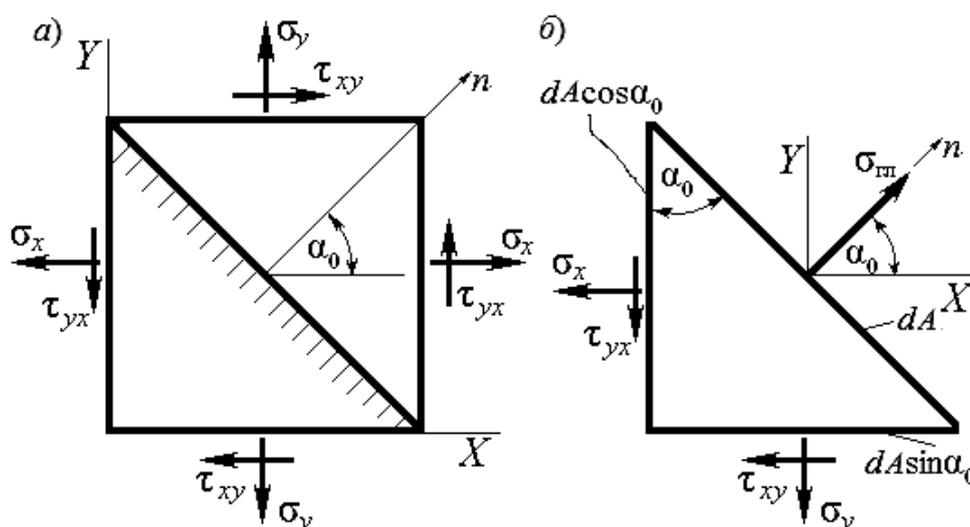


Рис. 6.12. К выводу формул для определения главных напряжений

Нормаль  $n$  к главной площадке составляет угол  $\alpha_0$  с осью  $X$ . Угол считают *положительным*, если он отсчитывается *против* хода часовой стрелки.

Рассмотрим равновесие отсеченной призмы (рис. 6.12, б). Пусть по наклонной грани  $dA$  действует  $\sigma_{\text{гл}}$ , т. е. это главная площадка, положение которой и значения главных напряжений неизвестны.

Спроецируем все силы на оси  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{cases} \sigma_{\text{гл}} dA \cos \alpha_0 - \sigma_x dA \cos \alpha_0 + \tau_{xy} dA \sin \alpha_0 = 0; \\ \sigma_{\text{гл}} dA \sin \alpha_0 - \sigma_y dA \sin \alpha_0 + \tau_{yx} dA \cos \alpha_0 = 0. \end{cases}$$

Получили систему однородных дифференциальных уравнений. Определим неизвестные  $\sigma_{\text{гл}}$  и  $\alpha_0$ , решив систему уравнений

$$\begin{cases} (\sigma_{\text{гл}} - \sigma_x) \cos \alpha_0 + \tau_{xy} \sin \alpha_0 = 0; \\ (\sigma_{\text{гл}} - \sigma_y) \sin \alpha_0 + \tau_{yx} \cos \alpha_0 = 0. \end{cases}$$

$$(\sigma_{\text{гл}} - \sigma_x) + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha_0 = 0; \quad (6.23)$$

$$(\sigma_{\text{гл}} - \sigma_y) \operatorname{tg} \alpha_0 + \tau_{yx} = 0. \quad (6.24)$$

Из уравнения (6.24) найдем значение  $\operatorname{tg} \alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\tau_{yx}}{\sigma_{\text{гл}} - \sigma_y}. \quad (6.25)$$

По полученной формуле, так же как и по (6.19), можно определить *направление вектора главного напряжения*, т. е. положение главной площадки.

Подставим в (6.23) значение  $\operatorname{tg} \alpha_0$  из (6.25):

$$(\sigma_{\text{гл}} - \sigma_x) - \frac{\tau_{xy} \tau_{yx}}{\sigma_{\text{гл}} - \sigma_y} = 0.$$

По закону парности  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Далее следует ряд преобразований:

$$(\sigma_{\text{гл}} - \sigma_x)(\sigma_{\text{гл}} - \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0;$$

$$\sigma_{\text{гл}}^2 - \sigma_{\text{гл}} \sigma_x - \sigma_{\text{гл}} \sigma_y + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0;$$

$$\left( \sigma_{\text{гл}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2);$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{гл}} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}; \\ \sigma_{\text{гл}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{4} - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 2\sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Окончательно получили формулу для вычисления главных напряжений при плоском напряженном состоянии, аналогичную (6.20),

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (6.26)$$

## 6.2. Деформации при сложном напряженном состоянии

### 6.2.1. Деформированное состояние в точке

*Деформированным состоянием в точке будем называть совокупность деформаций по различным направлениям и по различным плоскостям, проходящим через исследуемую точку.*

Рассматривая понятия о перемещениях и деформациях (п. 2.5.2), было выяснено, что *компонентами деформаций являются относительные линейные и относительные угловые (углы сдвига) деформации.*

По аналогии с напряжениями в теории упругости рассматривают также *главные оси деформаций* (по направлению которых отсутствуют угловые деформации) и *главные деформации*. Обозначение их аналогично обозначениям главных напряжений, т. е.  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

### 6.2.2. Обобщенный закон Гука

Выделим вокруг напряженной точки прямоугольный параллелепипед с длиной ребер, *равной единице*. Пусть, кроме того, грани параллелепипеда являются главными площадками.

Под действием  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  эти грани будут испытывать деформацию по всем трем направлениям (по направлениям главных напряжений) (рис. 6.13).

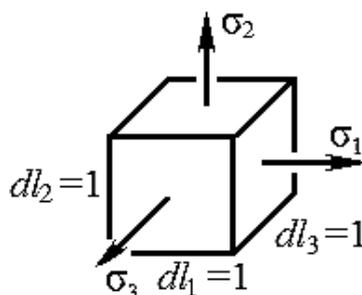


Рис. 6.13. Объемное напряженное состояние на единичных площадках

Вычислим эти деформации, обозначив относительную деформацию по направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  соответственно через  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Как известно,

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta dl_1}{dl_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta dl_2}{dl_2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta dl_3}{dl_3}.$$

Используя принцип независимости действия сил (рис. 6.14), можно определить деформацию от каждого из напряжений и суммировать их. Например, по направлению главного напряжения 1

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}. \quad (6.27)$$

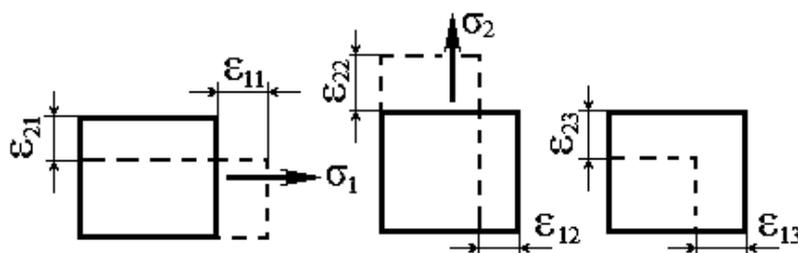


Рис. 6.14. Относительные линейные деформации по направлениям главных напряжений

*Первый индекс* указывает направление деформации, а *второй* – на напряжение, вызвавшее эту деформацию (т. е. причину). Определим их, учитывая, что, например, деформация от действия напряжения 1 по его направлению есть

*продольная деформация*  $\varepsilon_{11}$ , а деформации в этом же направлении, но от действия напряжений 2 и 3, – *поперечные* ( $\varepsilon_{12}$  и  $\varepsilon_{13}$ ). По закону Гука, с учетом выражения для определения коэффициента Пуассона (знаки продольной и поперечной деформаций всегда обратные), получим

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}; \quad \varepsilon' = -\mu \varepsilon; \quad \varepsilon' = \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E};$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}. \quad (6.28)$$

Подставляя в (6.27), имеем выражение

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Выполнив аналогичные операции для деформаций по направлениям 2 и 3, получим три уравнения (6.29), которые носят название «*обобщенный закон Гука*».

Известно, что *касательные напряжения не влияют на величину относительных линейных деформаций*. Поэтому эти деформации по направлениям и от действия нормальных напряжений, действующих по площадкам общего положения (произвольным площадкам), будут определяться по формулам, аналогичным (6.29):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]; \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Видно, что равенство нулю одного из напряжений не означает равенства нулю деформации по этому направлению.

### 6.2.3. Относительное изменение объема

Под действием внешних сил упругое тело деформируется, объем его изменяется и в нем накапливается потенциальная энергия. В процессе нагружения тела потенциальная энергия проявляется в виде работы, совершаемой внутренними силами.

В общем случае, когда напряженное состояние в различных точках различно, для определения потенциальной энергии деформации необходимо знать изменение объема и количество энергии в каждой элементарной частице тела. Особенно это важно при рассмотрении процесса развития трещин, при решении контактных задач и т. п.

Отношение приращения объема элементарного параллелепипеда к его исходному объему называется относительным изменением объема этого параллелепипеда:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta dV}{dV}. \quad (6.31)$$

Рассмотрим элементарный параллелепипед (см. рис. 6.13), но уже с произвольной элементарной длиной ребер  $dl_1, dl_2, dl_3$ . Первоначальный объем его определится произведением длин ребер:  $dV = dl_1 dl_2 dl_3$ .

После нагружения длина ребер изменится, и они получают соответствующие абсолютные деформации. Конечная длина ребер равна, соответственно,

$$dl_1 + \Delta dl_1 = dl_1 (1 + \varepsilon_1); \quad dl_2 + \Delta dl_2 = dl_2 (1 + \varepsilon_2); \quad dl_3 + \Delta dl_3 = dl_3 (1 + \varepsilon_3).$$

Объем параллелепипеда после деформации получим, перемножив конечные длины граней:

$$\begin{aligned} dV + \Delta dV &= dl_1 (1 + \varepsilon_1) dl_2 (1 + \varepsilon_2) dl_3 (1 + \varepsilon_3) = \\ &= dl_1 dl_2 dl_3 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Величины относительных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  весьма малы (в упругой области), поэтому их произведениями можно пренебречь. Тогда из последнего выражения получим

$$dV + \Delta dV = dV(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Поделим правую и левую части полученного уравнения на  $dV$  и имеем

$$\Delta dV = dV(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Используя понятие относительного изменения объема (6.31), получим формулу

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (6.32)$$

Анализ формулы (6.32) позволяет сделать следующие важные **выводы**.

*Относительное изменение объема тела равно сумме относительных деформаций.*

*Относительное изменение объема есть величина безразмерная.*

*Объем тела не изменяется, если сумма относительных деформаций равна нулю.*

Подставим в (6.32) значения  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  из обобщенного закона Гука (6.29):

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{1}{E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2)] = \\ &= \frac{1}{E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned}$$

Таким образом, относительное изменение объема определяется по полученной ранее формуле или с учетом (6.30) – в другом варианте:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (6.33)$$

Приведем несколько следствий из последней формулы.

1. Объем тела не изменится, если сумма нормальных напряжений окажется равной нулю.

2. Сумма нормальных напряжений есть величина постоянная:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

3. При всестороннем сжатии (гидростатическом сжатии) материала нормальные напряжения равны по величине:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma.$$

В этом случае относительное изменение объема  $\varepsilon_v = -3\sigma \frac{1-2\mu}{E}$ , откуда следует, что должно выполняться условие  $\mu \leq 0,5$  (т. к. при  $\mu > 0,5$  объем тела должен увеличиваться, что *противоречит природе вещей*).

4. При  $\mu = 0,5$  объем тела изменяться не будет ( $\varepsilon_v = 0$ ).

#### 6.2.4. Потенциальная энергия деформации

Вернемся к рассмотрению элементарного параллелепипеда (см. рис. 6.13) с ребрами элементарной длины.

На основании закона сохранения энергии потенциальная энергия деформации элементарного параллелепипеда  $dU$  равна работе внешних сил  $dW$ , приложенных к его граням. *Предполагается, что все внешние силы действуют одновременно и прикладываются статически, деформации упругие, потери энергии пренебрегаем.* Следовательно,  $dU = dW$ . Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо определить работу.

*Работу совершают внешние силы на некоторых перемещениях.* Рассмотрим участок пропорциональности диаграммы растяжения (рис. 6.15). Видим, что работа *графически* будет определяться заштрихованной площадью треугольника под наклонной прямой и, следовательно, формулой (6.34).

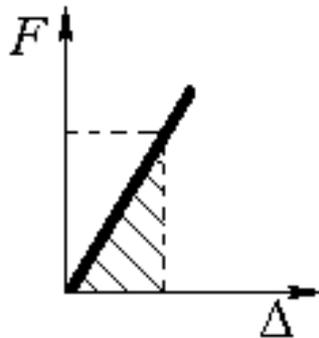


Рис. 6.15. К определению понятия работы при упругой деформации

$$W = \frac{1}{2} F \Delta, \quad (6.34)$$

где  $F$  – приложенная сила;  $\Delta$  – соответствующая этой силе абсолютная линейная деформация.

Работа  $dW$  внешних сил на этих удлинениях и равная ей потенциальная энергия  $dU$  элементарного параллелепипеда

$$\begin{aligned} dW = dU &= \frac{\sigma_1 dl_2 dl_3 \Delta dl_1}{2} + \frac{\sigma_2 dl_1 dl_3 \Delta dl_2}{2} + \frac{\sigma_3 dl_2 dl_1 \Delta dl_3}{2} = \\ &= \frac{dl_1 dl_2 dl_3}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Сила  $F$  определяется (см. рис. 6.13) произведением напряжения на площадь грани, а каждое из ребер (см. п. 6.2.3) удлиняется на величину  $\Delta dl = \varepsilon dl$ .

Полная удельная потенциальная энергия деформации определяется как отношение  $\frac{dU}{dV} = u$ . Тогда

$$u = \frac{dl_1 dl_2 dl_3}{2(dl_1 dl_2 dl_3)} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (6.36)$$

Если относительные деформации  $\varepsilon$  заменить их выражениями из обобщенного закона Гука (6.29), то получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 - \mu \sigma_1 (\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2^2 - \mu \sigma_2 (\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_3^2 - \mu \sigma_3 (\sigma_2 + \sigma_1) \right] = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \mu \sigma_1 \sigma_2 - \mu \sigma_1 \sigma_3 - \mu \sigma_2 \sigma_1 - \mu \sigma_2 \sigma_3 - \mu \sigma_3 \sigma_2 - \mu \sigma_1 \sigma_3 \right] = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Размерность удельной потенциальной энергии – ньютон-метр на кубический метр ( $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{м}^3$ ) или ньютон на метр в квадрате ( $\text{Н} / \text{м}^2$ ), т. е. размерность напряжений.

Под действием внешних сил изменяется не только объем параллелепипеда, но и его форма. Таким образом, полная удельная потенциальная энергия может быть определена двумя составляющими – удельной потен-

циальной энергией изменения объема  $u_{об}$  и удельной потенциальной энергией изменения формы  $u_{\phi}$ .

Рассмотрим эти составляющие потенциальной энергии, руководствуясь принципом суперпозиции (рис. 6.16).

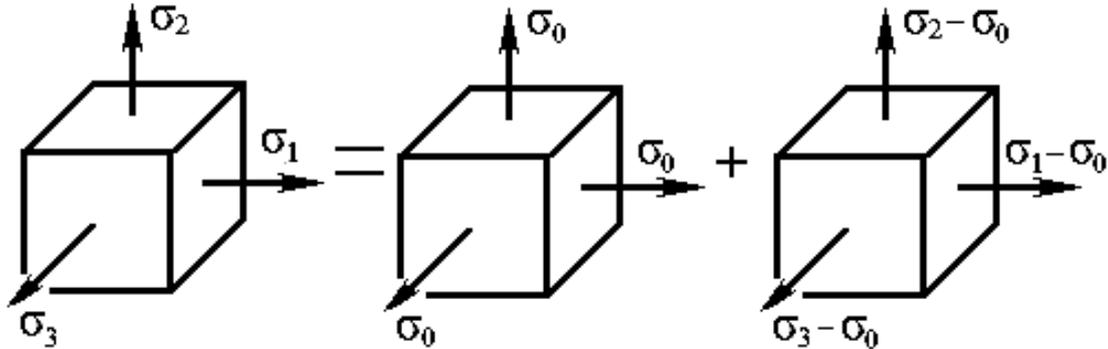


Рис. 6.16. Схемы напряженных состояний, определяющих составляющие потенциальной энергии деформации

Элементарный параллелепипед *изменит только объем*, если по его граням будут приложены *одинаковые по величине и направлению напряжения*:

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3.$$

Данное *напряжение назовем средним*, определив его значение по формуле

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (6.38)$$

*Форма параллелепипеда в этом случае не изменится – будет постоянной.*

*Разность напряжений* (соответствующих главных и среднего), приложенных к граням, *вызовет только изменение формы параллелепипеда*, т. к. в соответствии с выводами, полученными в п. 6.2.3, сумма приложенных к граням напряжений равна нулю:

$$\sigma_1 - \sigma_0 + \sigma_2 - \sigma_0 + \sigma_3 - \sigma_0 = 0.$$

Если описать исследуемые напряженные состояния соответствующими тензорами, то получим

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \\ \sigma_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_0 \\ \sigma_3 - \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad (6.39)$$

или

$$T_\sigma = T_0 + D_\sigma,$$

где  $T_\sigma$  – исследуемый тензор напряженного состояния;  $T_0$  – шаровой тензор;  $D_\sigma$  – девиатор напряжений (итал. – *de via* – отклонение от дороги или направления).

Выражение для удельной потенциальной энергии изменения объема получим, подставив в (6.37) вместо главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  среднее напряжение  $\sigma_0$  :

$$\begin{aligned} u_{o6} &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2 - 2\mu(\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2) \right] = \\ &= \frac{1-2\mu}{2E} 3\sigma_0^2 = \frac{1-2\mu}{2E} 3 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Или через напряжения по произвольным площадкам:

$$u_{o6} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad (6.41)$$

Аналогично выражение для удельной потенциальной энергии изменения формы получим, подставив в (6.37), в соответствии с рис. 6.15 и формулой (6.39), вместо главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  разность этих напряжений и среднего напряжения  $\sigma_0$  :

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1}{2E} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2 - \right. \\ &- 2\mu \left[ (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) + (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0) \right] \left. \right\} = \\ &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Для единообразия последнюю формулу запишем в виде

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (6.43)$$

Эта же энергия может быть определена и через напряжения, действующие по произвольным площадкам:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (6.44)$$

### 6.3. Теории (гипотезы или критерии) прочности

#### 6.3.1. Назначение теорий прочности

Важнейшая задача инженерного расчета – *оценка прочности тела по известному напряженному состоянию.*

Ранее было установлено, что напряженное состояние в какой-либо точке тела полностью определяется главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ : *одним главным напряжением – линейное напряженное состояние, двумя – плоское и тремя – объемное.*

При возрастании действующей нагрузки главные напряжения будут соответствующим образом увеличиваться и, при некотором определенном их значении, наступит *опасное* или так называемое *предельное напряженное состояние* в исследуемой точке. Таким образом, оценку опасности напряженного состояния можно выполнить, установив значения главных напряжений, *при которых наступает предельное напряженное состояние.*

В зависимости от соотношений между  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и вида напряженного состояния материал тела может находиться *в одном из трех механических состояний: упругом, пластичном или состоянии разрушения. Безопасным является упругое состояние.*

Наиболее просто *задача оценки прочности бруса* решается для простых видов нагружения, например, при растяжении или сжатии (одноосное напряженное состояние), т. к. в этом случае значения предельных (опасных) напряжений легко установить экспериментально.

Напомним, что для *пластичных материалов опасным напряжением является предел текучести  $\sigma_T$ , для хрупких – предел прочности  $\sigma_B$ .*

Следовательно, для обеспечения прочности бруса уровень опасных напряжений необходимо снизить, т. е. ввести так называемый коэффициент запаса  $n$ .

Таким образом, условие, при котором будет обеспечена прочность бруса (*условие прочности*) при одноосном напряженном состоянии, имеет вид:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{раст}} = \frac{\sigma_T}{n_T}; \quad \sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{сжат}} = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (6.45)$$

В случае сложного напряженного состояния *опасное состояние для одного и того же материала может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений* в зависимости от соотношения между ними. Поэтому экспериментальная оценка опасного состояния при таких обстоятельствах практически исключается из-за бесчисленного множества соотношений между напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , каждое из которых нужно было бы моделировать для получения экспериментальных данных о механических характеристиках материала и степени опасности этого состояния.

Все это приводит к необходимости создания *такой методики расчета*, которая позволяла бы *оценить степень опасности* любого напряженного состояния для того или иного материала, *основываясь на результатах опытов при простом растяжении-сжатии*.

Решение этой важной задачи осуществляется с помощью теорий, которые первоначально были названы *теориями прочности*.

Построение таких теорий основывается на предпосылке, состоящей в том, что *два каких-либо напряженных состояния считаются равнопрочными и равноопасными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся предельными*.

В этом случае *коэффициенты запаса прочности* для обоих напряженных состояний при указанных условиях будут *одинаковыми*.

Чтобы использовать вышепринятую предпосылку, необходимо связать главные напряжения двух равноопасных состояний какой-либо определенной зависимостью. Это оказывается возможным, *если известна общая для обоих рассматриваемых состояний причина разрушения материала или его перехода в предельное напряженное состояние*. Иначе говоря, выбирается некий *критерий прочности* (критерий предельного напряженно-деформированного состояния), например, *переход материала бруса из упругого состояния в пластичное*.

Однако определение истинной причины разрушения материала является труднейшей и на сегодняшний день до конца не разрешенной задачей.

Это обстоятельство *не позволило* до настоящего времени создать *единую общую теорию прочности* и повлекло за собой появление многих теорий, каждая из которых основывается на своей гипотезе о причине достижения предельного напряженного состояния.

### 6.3.2. Понятие об эквивалентных напряжениях

При разработке теорий прочности вводится гипотеза о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора (критерия). Таким образом, *предусматривается возможность проверки этого критерия сопоставлением данного (сложного) напряженного состояния с простым (обычно с одноосным)*. При этом устанавливается значение *эквивалентного (расчетного) напряжения*  $\sigma_{\text{экв}}$ , которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса прочности  $n$ .

*Под коэффициентом запаса прочности в общем случае напряженного состояния понимают число, показывающее, во сколько раз нужно одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.*

По напряжениям, действующим по произвольным площадкам (рис. 6.17), определяются главные напряжения и, с учетом критерия перехода к предельному состоянию, эквивалентные напряжения, которые, в свою очередь, сравниваются с допускаемыми напряжениями.

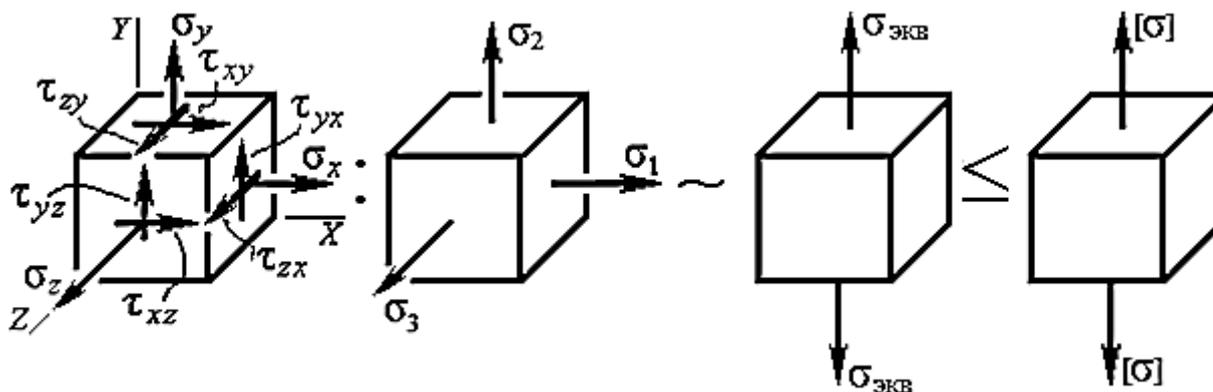


Рис. 6.17. К понятию эквивалентных напряжений

### 6.3.3. Теории прочности

Исходя из гипотезы, которая указывает на причину наступления предельного состояния, составляются соответствующие расчетные формулы и условия, связывающие между собой определенной зависимостью главные напряжения изучаемого напряженного состояния (плоского или объемного)

с главным напряжением при одноосном растяжении. Получают так называемые теории (критерии, гипотезы) прочности. *Название теории указывает на причину наступления предельного состояния.*

Теория или гипотеза, как известно, требует экспериментального подтверждения. Поэтому она оценивается сходимостью результатов расчета по оцениваемой гипотезе и результатов эксперимента, в котором моделируется исследуемое напряженное состояние или условия работы тела.

*6.3.3.1. Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений).*

*Причиной перехода материала из упругого состояния в пластическое являются наибольшие нормальные напряжения. То есть если наибольшие нормальные напряжения достигают какой-то определенной величины, то наступает предельное состояние. Эта теория была сформулирована в XVI в. Галилео Галилеем.*

Как известно, главные напряжения обозначаются  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , т. е.  $\sigma_1$  является наибольшим по величине. Поэтому  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ .

Тогда условие прочности по I теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (6.46)$$

Главный недостаток данной теории – в ней не учитываются  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , т. е. будто они не влияют на прочность тела.

В расчетной практике *не применяется и имеет лишь историческое значение. Дает удовлетворительные результаты только при одноосном растяжении весьма хрупких материалов: камень, кирпич, керамика, стекло, инструментальная сталь. Причем в материале должны отсутствовать явно выраженные дефекты. При всестороннем сжатии тела – экспериментально не подтверждается.*

*6.3.3.2. Вторая теория (теория наибольших относительных деформаций).*

Данная теория предполагает, что *причиной наступления предельного состояния является деформация, величина которой достигает определенного значения и приводит к переходу материала тела из упругого состояния в пластическое. Теория предложена в 1682 г. Мариоттом.*

По аналогии с главными напряжениями будем считать, что  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ . Тогда можно записать следующее:  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]$ .

В соответствии с законом Гука при растяжении

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} \quad \text{и} \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Для объемного напряженного состояния применим формулы для обобщенного закона Гука (6.29):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Тогда условие прочности по II теории

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (6.47)$$

Эта теория учитывает влияние всех главных напряжений. Тем не менее плохо согласуется с результатами экспериментов, а иногда находится в явном противоречии с ними. Дает удовлетворительные результаты лишь для хрупких материалов (легированный чугун) или материалов, находящихся в хрупком состоянии при их всестороннем сжатии (все главные напряжения отрицательны). Не подтверждается для пластичных материалов. В расчетной практике не применяется.

### 6.3.3.3. Третья теория (теория наибольших касательных напряжений).

Предполагается, что предельное состояние в материале наступает тогда, когда касательные напряжения достигнут некоего максимума, превышающего допустимое значение  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ . Теория предложена в 1783 г. Кулоном.

Для объемного напряженного состояния наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \text{а для линейного состояния} \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2},$$

откуда следует условие прочности по III теории

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (6.48)$$

Теория дает удовлетворительные результаты для пластичных материалов, одинаково хорошо сопротивляющихся как растяжению, так и сжатию. Широко применяется для расчета конструкций из пластичных материалов.

Основной ее недостаток – не учитывается влияние  $\sigma_2$  (что дает погрешность 12...15 %). Плохо согласуется с опытными данными для хрупких материалов, в особенности при всестороннем сжатии.

При плоском напряженном состоянии, в соответствии с (6.20), определив главные напряжения с учетом (6.48), получим

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma].$$

Для случая, когда  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.49)$$

Особенно эффективна теория при определении начала пластического течения материала, т. к. необратимые деформации имеют *сдвиговую природу*. Приравняв разность главных напряжений пределу текучести, получим условие текучести Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (6.50)$$

*6.3.3.4. Четвертая теория (энергетическая теория, или теория прочности удельной потенциальной энергии формоизменения).*

Теория предложена в 1904 г. (Губерт, Мизес, Генки). За причину наступления предельного напряженного состояния принимается часть удельной потенциальной энергии, которая накапливается вследствие изменения формы кубика с ребром, равным единице. Тогда

$$u_{\text{фmax}} \leq [u_{\text{ф}}].$$

Эта теория связывается с развитием только пластических деформаций, которые, как известно, характеризуются изменением формы тела,

но не сопровождаются изменением его объема. Используя зависимость (6.43), определим:

– значение *удельной потенциальной энергии формоизменения для линейного напряженного состояния* (при действии допускаемого напряжения  $[\sigma]$ ):

$$[u_\phi] = \frac{1+\mu}{6E} 2([\sigma])^2;$$

– значение этой же энергии для *объемного напряженного состояния*:

$$u_{\phi\max} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

С учетом соотношения этих энергий получим *условие прочности по IV теории прочности*

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (6.51)$$

Энергетическая теория, как и III теория, хорошо согласуется с опытами на пластичных материалах, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Она *широко применяется на практике*. Точнее третьей.

В частном случае при *плоском напряженном состоянии*

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq [\sigma].$$

Для случая, когда  $\sigma_y = 0$ ,

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.52)$$

Использование энергетической теории позволяет точнее, чем по третьей, определить условие перехода материала в пластичное состояние. Оно известно как *условие текучести Мизеса*

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \quad (6.53)$$

### 6.3.3.5. Теория прочности Мора.

Во всех вышерассмотренных теориях прочности в качестве гипотезы, устанавливавшей причину наступления предельного напряженного состояния, принималась величина какого-либо одного фактора.

В теории Мора, предложенной в XX в., не рассматриваются отдельные гипотезы, а на основе экспериментальных данных устанавливается определенная зависимость прочностных свойств материала от вида напряженного состояния.

Условие прочности Мора записывается в виде

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{Тр}}}{\sigma_{\text{Тсж}}} \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (6.54)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  – главные напряжения;  $\sigma_{\text{Тр}}$  – предел текучести материала при растяжении;  $\sigma_{\text{Тсж}}$  – предел текучести материала при сжатии.

Условие применимо для расчета элементов конструкций из хрупких материалов, материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Основное допущение данной теории – на прочность не влияет  $\sigma_2$ . Это ее недостаток.

Наилучшую сходимость расчета и эксперимента дает напряженное состояние, при котором  $\sigma_1 > 0$ , а  $\sigma_3 < 0$ . При расчетах такое напряженное состояние встречается очень часто.

Если пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы по величине, следует использовать третью теорию прочности.

Аналогично этому критерию вероятность разрушения элемента из хрупкого материала может быть оценена по критерию разрушения Мора

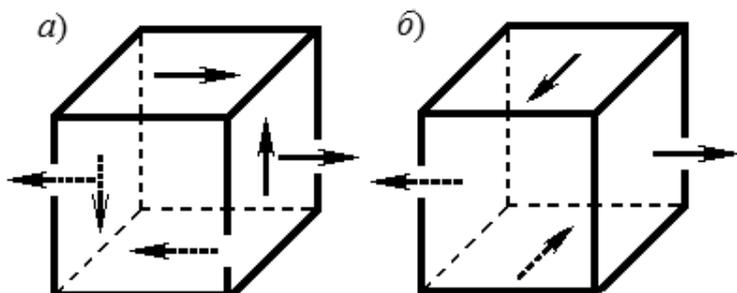
$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{Вр}}}{\sigma_{\text{Всж}}} \sigma_3 = \sigma_{\text{Вр}}, \quad (6.55)$$

где  $\sigma_{\text{Вр}}$  – предел прочности материала при растяжении;  $\sigma_{\text{Всж}}$  – предел прочности материала при сжатии.

В связи с развитием техники и усложнением условий работы материалов (космос, радиация, высокие давления, коррозия и т. п.), использованием новых, современных материалов (пластмассы, стеклопластмассы, композитные материалы и др.), разрабатываются новые теории прочности. Сведения о некоторых из них можно найти в учебной и специальной литературе.

## Контрольные вопросы

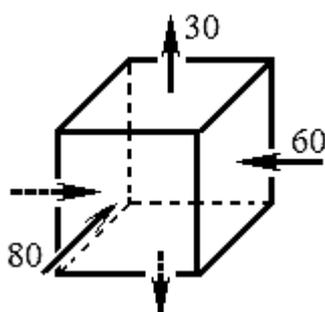
1. Укажите, на какой из схем правильно изображено напряженное состояние:



- 1) только на схеме (а);
- 2) только на схеме (б);
- 3) на схемах (а) и (б);
- 4) обе схемы неверны.

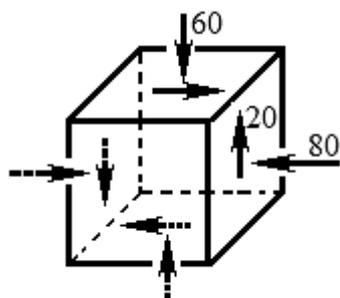
В пп. 2–9 напряжения задаются в мегапаскалях (МПа).

2. Укажите, в каком ответе правильно обозначены главные напряжения:



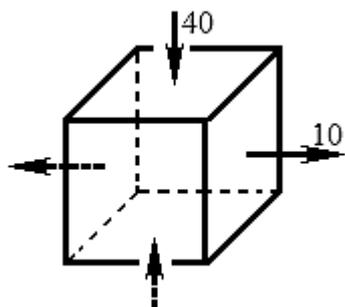
- 1)  $\sigma_1 = 80$ ;  $\sigma_2 = 60$ ;  $\sigma_3 = 30$ ;
- 2)  $\sigma_1 = 30$ ;  $\sigma_2 = -60$ ;  $\sigma_3 = -80$ ;
- 3)  $\sigma_1 = -80$ ;  $\sigma_2 = -60$ ;  $\sigma_3 = 30$ ;
- 4)  $\sigma_1 = 30$ ;  $\sigma_2 = 80$ ;  $\sigma_3 = -60$ .

3. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение главных напряжений:



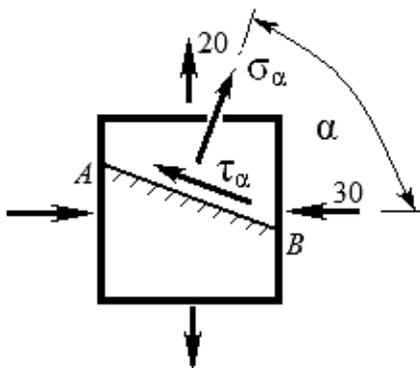
- 1)  $\sigma_{\text{гл}} = (70 \pm 22,4)$ ;
- 2)  $\sigma_{\text{гл}} = (-70 \pm 22,4)$ ;
- 3)  $\sigma_{\text{гл}} = (10 \pm 44,8)$ ;
- 4)  $\sigma_{\text{гл}} = (10 \pm 67,1)$ .

4. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение максимальных касательных напряжений:



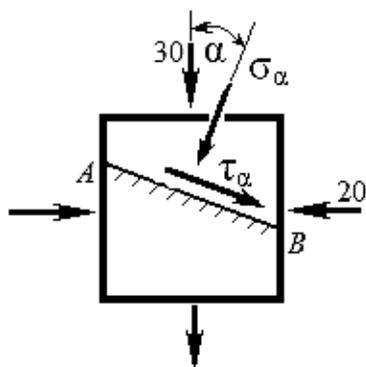
- 1)  $\tau_{\text{max}} = 50$ ;
- 2)  $\tau_{\text{max}} = -15$ ;
- 3)  $\tau_{\text{max}} = -30$ ;
- 4)  $\tau_{\text{max}} = 25$ .

5. Укажите, в каком ответе правильно записано выражение для нормальных напряжений на площадке  $AB$ :



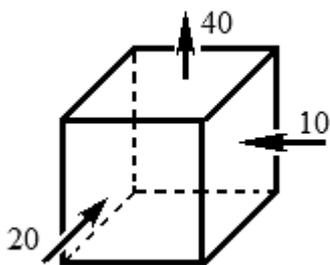
- 1)  $\sigma_\alpha = 20 \sin^2 \alpha - 30 \cos^2 \alpha$ ;
- 2)  $\sigma_\alpha = 20 \cos^2 \alpha + 30 \sin^2 \alpha$ ;
- 3)  $\sigma_\alpha = 30 \cos^2 \alpha + 20 \sin^2 \alpha$ ;
- 4)  $\sigma_\alpha = 30 \sin^2 \alpha - 20 \cos^2 \alpha$ .

6. Укажите, в каком ответе правильно записано выражение для касательных напряжений на площадке  $AB$ :



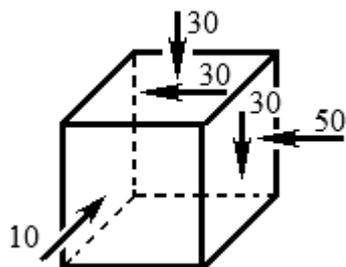
- 1)  $\tau_\alpha = 25 \sin 2\alpha$ ;
- 2)  $\tau_\alpha = -25 \sin 2\alpha$ ;
- 3)  $\tau_\alpha = 10 \sin 2\alpha$ ;
- 4)  $\tau_\alpha = -5 \sin 2\alpha$ .

7. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение относительной линейной деформации ребра  $AB$  ( $E = 10^5$  МПа;  $\mu = 0,25$ ):



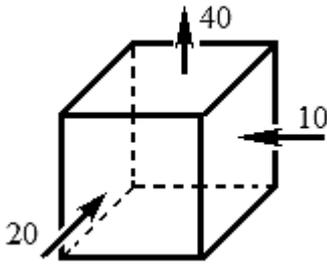
- 1)  $\epsilon_{AB} = 15 \cdot 10^{-5}$ ;
- 2)  $\epsilon_{AB} = -22,5 \cdot 10^{-5}$ ;
- 3)  $\epsilon_{AB} = -52,5 \cdot 10^{-5}$ ;
- 4)  $\epsilon_{AB} = -35 \cdot 10^{-5}$ .

8. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение относительного изменения объема параллелепипеда ( $E = 10^5$  МПа;  $\mu = 0,25$ ):



- 1)  $\epsilon_V = -135 \cdot 10^5$ ;
- 2)  $\epsilon_V = 0$ ;
- 3)  $\epsilon_V = -45 \cdot 10^5$ ;
- 4)  $\epsilon_V = -30 \cdot 10^5$ .

9. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение эквивалентного напряжения по третьей теории прочности:



- 1)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 20$ ;
- 2)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 30$ ;
- 3)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 60$ ;
- 4)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 10$ .

10. Даны два варианта напряженного состояния:

- а) 40 МПа; -60 МПа; -70 МПа;
- б) -50 МПа; -60 МПа; 70 МПа.

Укажите, в каком ответе приведен вариант напряженного состояния, при котором обеспечивается прочность по третьей теории прочности (при  $[\sigma] = 160$  МПа):

- 1) только вариант (а);
- 2) только вариант (б);
- 3) варианты (а) и (б);
- 4) в обоих вариантах прочность не обеспечена.

## 7. ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

### 7.1. Основные понятия и определения

Брус с прямой осью, как уже известно, называется стержнем.

Изгиб – такой вид нагружения (деформации) бруса, при котором в его поперечных сечениях действуют изгибающие моменты. Стержни, работающие на изгиб, называют балками.

В большинстве случаев одновременно с изгибающим моментом возникают и поперечные силы. Такой вид изгиба называют поперечным; если же в сечениях действуют только изгибающие моменты, то такой вид изгиба называют чистым (рис. 7.1).

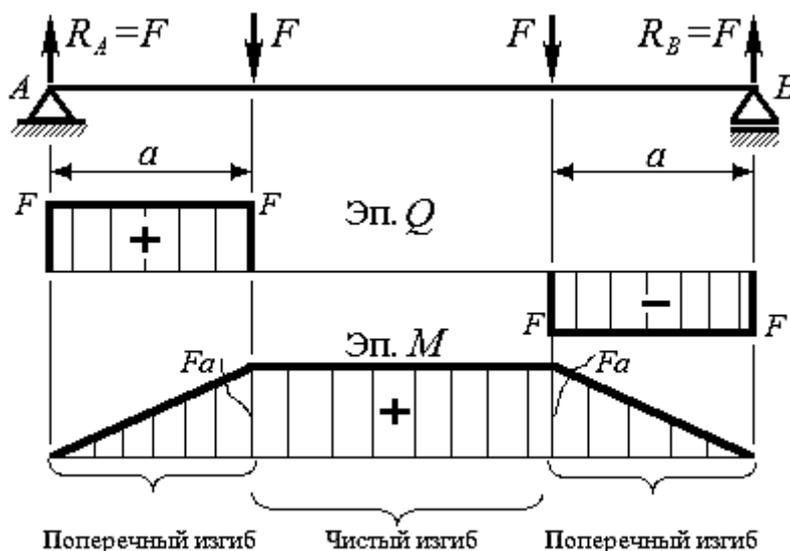


Рис. 7.1. Чистый и поперечный изгибы балки

Если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных плоскостей инерции поперечного сечения, изгиб называют плоским или прямым. Если упомянутое условие не выполняется – изгиб косой (будем рассматривать во второй части курса).

При плоском изгибе ось балки и после деформации остается в плоскости действия внешних сил – в силовой плоскости.

Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения балки называется силовой линией (рис. 7.2).

С видами нагрузок, типами опор, видами балок и определением внутренних силовых факторов ознакомление осуществлялось ранее.

При изучении изгиба будем рассматривать лишь такие балки, сечения которых имеют одну или две оси симметрии, а действующие внешние силы

лежат в одной из плоскостей симметрии. На данном этапе изучения изгиба будем рассматривать *плоский чистый и плоский поперечный изгибы* балок.

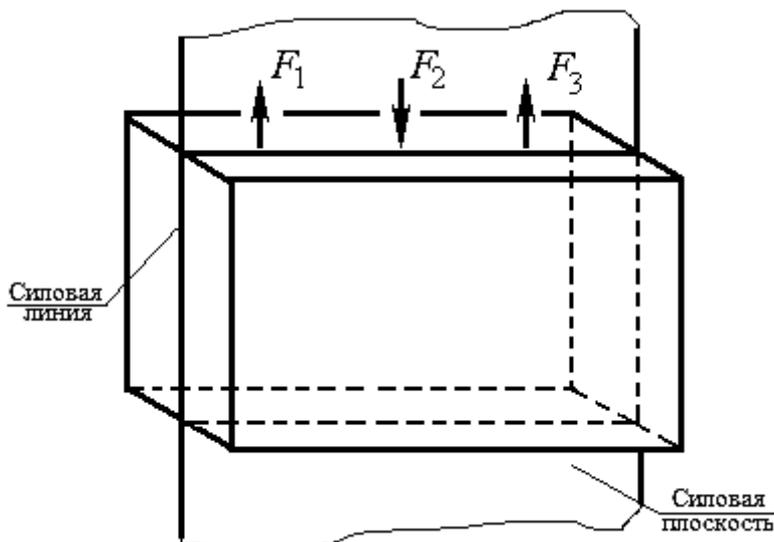


Рис. 7.2. Силовая плоскость при плоском изгибе

При выполнении расчета балок на изгиб учитывается соотношение длины пролета  $l$  и высоты сечения  $h$ . При  $l/h > 8$  расчет ведут только по изгибающему моменту; при  $5 \leq l/h \leq 8$  – по изгибающему моменту и по поперечной силе. Если же  $l/h < 5$ , то такое тело нельзя считать балкой, расчет ведут по формулам теории упругости (рассматривается расчет на изгиб пластины).

## 7.2. Плоский чистый изгиб

### 7.2.1. Особенности деформирования балок

Исследуем поведение балки при плоском чистом изгибе.

Как было сказано ранее, в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения (рис. 7.3).

Проведем до нагружения балки на ее боковой поверхности близко друг к другу линии  $kn$  и  $k_1n_1$ , перпендикулярные оси балки. Это будут два сечения, отстоящие друг от друга на расстоянии  $dz$ . Проведем между данными сечениями линии  $ab$  и  $cd$ , параллельные оси балки:  $cd$  – ближе к верхнему слою,  $ab$  – к нижнему. До деформации  $ab = cd = dz$ .

Нагрузим балку сосредоточенными моментами  $m$ . Геометрический анализ показывает, что после деформации:

- а) прямые  $kn$  и  $k_1n_1$  остались прямыми, только наклонились друг к другу;

- б) отрезок  $ab$  удлинился, а отрезок  $cd$  укоротился;  
 в) исходя из предыдущих двух выводов, где-то по высоте сечения будет располагаться отрезок, длина которого не изменилась;  
 г) ширина балки в сжатой зоне увеличилась, а в растянутой – уменьшилась.

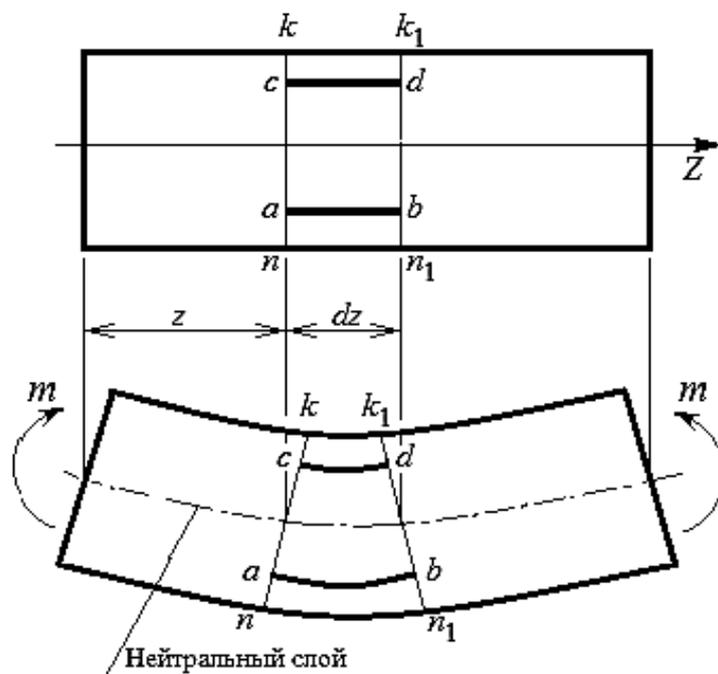


Рис. 7.3. Деформация балки при чистом изгибе

Это позволяет сделать следующие выводы о характере деформаций при чистом изгибе.

1. Поперечные сечения балки и после деформации остаются плоскими.
2. Так как верхние волокна балки сжаты, а нижние – растянуты и деформация волокон меняется непрерывно по высоте балки, то на каком-то уровне есть слой, не изменивший своей длины, – это так называемый нейтральный слой.
3. Нейтральный слой перпендикулярен плоскости симметрии балки и пересекает плоскость каждого поперечного сечения по прямой, называемой нейтральной осью сечения. Эта ось перпендикулярна плоскости симметрии балки.
4. Повороты сечений происходят вокруг их нейтральных осей, поэтому изогнутая ось балки и после деформации остается лежать в плоскости действия внешних сил – в силовой плоскости.
5. Деформации материала балки в направлении ее ширины показывают, что ее продольные волокна испытывают обычное растяжение или сжатие.

К таким же выводам приводит и простой опыт с резиновым бруском прямоугольного сечения, на боковой поверхности которого предварительно

выполнить (например, краской) линии, параллельные оси и параллельные плоскости сечения.

### **7.2.2. Допущения, полагаемые в основу расчетов**

Экспериментальные исследования деформации балок при изгибе (п. 7.2.1) обуславливают ряд *допущений*, положенных в основу дальнейших расчетов.

1. При чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и после деформации, т. е. принимается гипотеза плоских сечений.

2. Продольные волокна друг на друга не давят и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие. При чистом изгибе – строго, а при поперечном – примерно, т. к. в последнем случае в поперечных сечениях возникают и касательные напряжения.

3. Деформации волокон не зависят от положения этих волокон по ширине сечения. Следовательно, нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются по ширине сечения одинаковыми.

Помимо допущений, введем ограничения, которые будут использоваться при дальнейших теоретических исследованиях.

1. Балка имеет хотя бы одну плоскость симметрии, а все внешние силы лежат в этой плоскости.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает в условиях плоского изгиба без коробления и скручивания.

### **7.2.3. Нормальные напряжения**

Образование деформаций при чистом изгибе можно рассматривать как результат поворота плоских поперечных сечений относительно друг друга.

Рассмотрим равновесие правой части балки (рис. 7.4, а), находящейся под действием внешнего момента  $m$  и внутренних сил, возникающих в произвольном поперечном сечении с координатой  $z$ .

Вокруг точки  $A$  выделим элементарную площадку  $dA$  (рис. 7.4, б). По этой элементарной площадке будут действовать элементарные усилия  $\sigma dA$ .

В соответствии с правилами теоретической механики можно записать шесть уравнений равновесия.

1.  $\sum X = 0, \quad 0 \equiv 0.$
2.  $\sum Y = 0, \quad 0 \equiv 0.$

Получаем тождества, т. к. внутренние силы  $\sigma dA$  перпендикулярны ЭТИМ осям.

3.  $\sum Z = 0, \quad N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (7.1)$

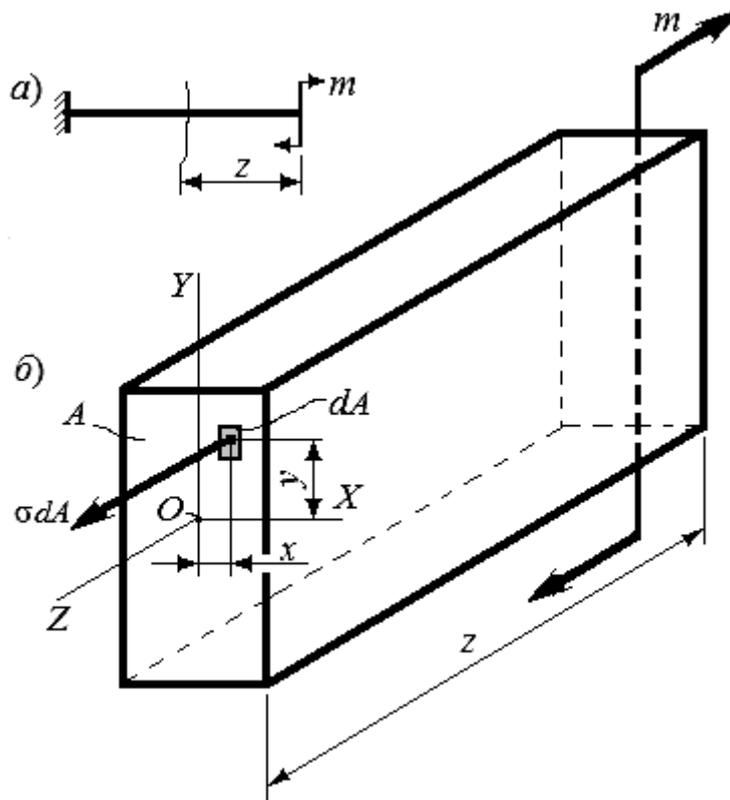


Рис. 7.4. Равновесие части балки при плоском чистом изгибе

4.  $\sum m_Z = 0, \quad 0 \equiv 0.$

Данное уравнение также обращается в тождество, т. к. внутренние усилия  $\sigma dA$  параллельны оси  $Z$ .

5.  $\sum m_Y = 0, \quad M_Y = \int_A \sigma dAx = 0. \quad (7.2)$

6.  $\sum m_X = 0, \quad M_X - m = 0; \quad M_X = \int_A \sigma dAy = 0; \quad M_X = m. \quad (7.3)$

Полученные три уравнения не могут быть решены, т. к. неизвестен закон, по которому распределяются нормальные напряжения  $\sigma$  по высоте поперечного сечения.

*Задачи* такого рода, когда уравнений равновесия (уравнений статики) недостаточно, носят, как известно, название *статически неопределимых*.

Для *определения закона распределения нормальных напряжений*  $\sigma$  в поперечном сечении балки при чистом изгибе рассмотрим, по аналогии с рис. 7.3, участок бруса (см. рис. 7.4, а) элементарно малой длины  $dz$ . Покажем этот участок до и после деформации и изобразим в увеличенном масштабе (рис. 7.5).

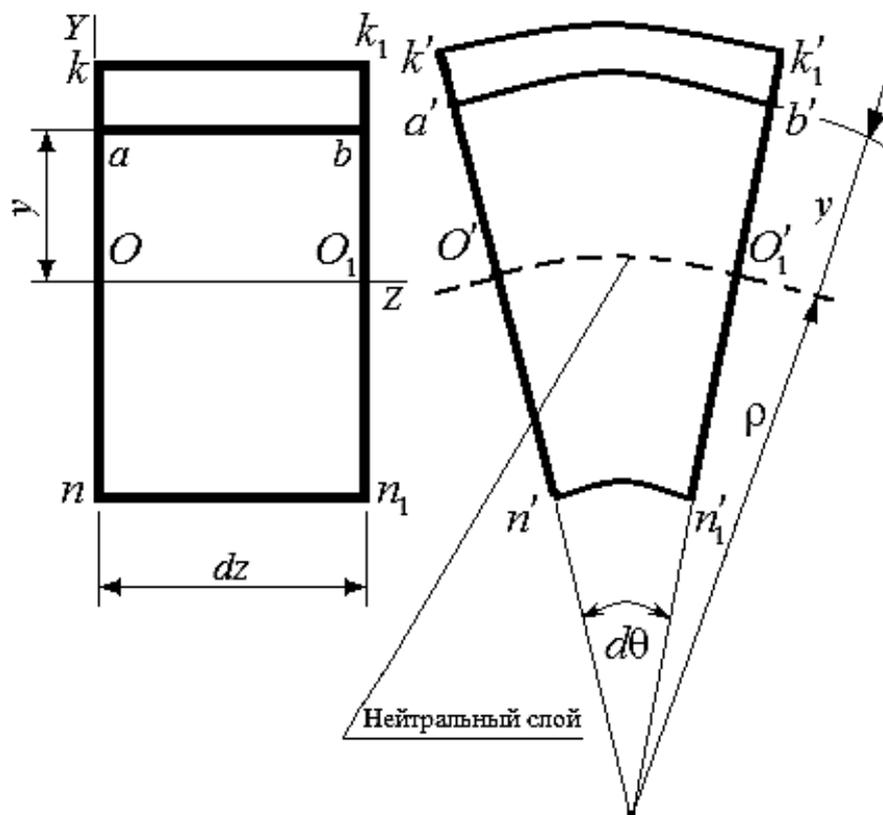


Рис. 7.5. Деформация участка балки малой длины при чистом изгибе

Рассмотрим деформацию участка балки, ограниченного сечениями  $kn$  и  $k_1n_1$ .

Под действием изгибающих моментов сечения повернутся друг относительно друга на угол  $d\theta$  (см. рис. 7.5): примут положения  $k'n'$  и  $k'_1n'_1$ . Слой  $ab$  изогнется и примет положение  $a'b'$ , а слой  $OO_1$  – положение  $O'O'_1$ . Длина слоя  $OO_1 = dz$ . Ось  $Z$  совместим с линией  $OO_1$ .

Радиус кривизны слоя  $OO_1$  обозначим  $\rho$ . В результате поворота сечений кривизна этого слоя определяется выражением

$$\operatorname{tg}d\theta = \frac{dz}{\rho}, \text{ но } d\theta \text{ – мало, поэтому } \frac{dz}{\rho} = d\theta.$$

Перепишав последнее выражение, получим зависимость

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}. \quad (7.4)$$

На некотором расстоянии  $y$  от оси  $Z$  выделим волокно  $ab$ , длина которого до деформации

$$l_{\cup ab} = dz = \rho d\theta.$$

Аналогично после деформации длина дуги  $a'b'$

$$l_{\cup a'b'} = (\rho + y)d\theta.$$

Изменение длины исследуемого волокна (его абсолютное удлинение)

$$\Delta dz = a'b' - ab = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta.$$

Относительное удлинение волокна  $ab$

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \quad (7.5)$$

По закону Гука, с учетом (7.5),  $\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$ .

Таким образом, нормальные напряжения в произвольном слое сечения

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (7.6)$$

Анализ формулы (7.6) приводит к следующим **выводам**.

1. При чистом изгибе нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону.

2. Величина нормальных напряжений в произвольном слое сечения постоянна и определяется координатой этого слоя по отношению к продольной оси балки  $Z$ , т. е. расстоянием этого слоя от нейтральной оси.

3. При  $y = 0$   $\sigma = 0$ . Следовательно, в слое  $OO_1$ , который был принят совпадающим с продольной осью балки  $Z$ , напряжения (и деформации) равны нулю. Это нейтральный слой.

4. При значениях координаты  $y = \max$   $\sigma$  также принимает максимальное или минимальное значение. Нормальные напряжения будут иметь экстремальные значения в слоях, наиболее удаленных от нейтрального слоя.

5. Нейтральная линия – геометрическое место точек сечения, удовлетворяющее условию  $\sigma = 0$ .

6. Ось  $Z$  совпадает с нейтральным слоем. Следовательно, радиус  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя.

В качестве примера на рис. 7.6 показан характер изменения нормальных напряжений по высоте прямоугольного сечения балки.

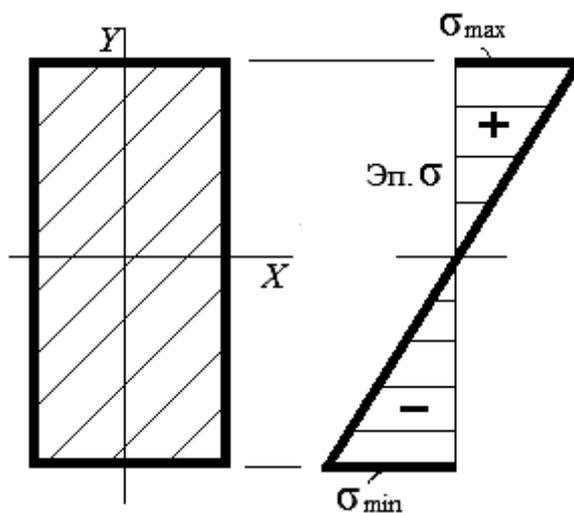


Рис. 7.6. Распределение нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки (знаки соответствуют рис. 7.5)

В слое, где находится начало координат, т. е. пересекаются оси сечения  $X$  и  $Y$ , нормальные напряжения равны нулю.

Для сечения, симметричного относительно горизонтальной оси, экстремальные значения нормальных напряжений равны по абсолютной величине.

Таким образом нами был выяснен только характер зависимости нормальных напряжений от координаты слоя, но не определена их величина, т. к. радиус кривизны нейтрального слоя  $\rho$  неизвестен.

Неизвестно также конкретное положение осей сечения  $X$  и  $Y$ .

Для ответа на поставленные вопросы, используя формулу (7.6), перепишем те уравнения равновесия, в которые входит величина  $\sigma$ : (7.1)–(7.3).

Из уравнений (7.1) и (7.6) получим

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0. \quad (7.7)$$

Но  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ , т. к. модуль  $E$  не может быть равен нулю.

Поэтому выражение (7.7) обратится в нуль при условии  $\int_A y dA = 0$ .

Интеграл вида  $\int_A y dA$  есть статический момент площади сечения относительно оси  $X$  и обозначается  $S_X$  (здесь и далее см. приложение А).

Ось  $X$  перпендикулярна оси  $Z$  (см. рис. 7.4), которая была условно совмещена со слоем радиусом  $\rho$ , который был назван нейтральным слоем. Следовательно, ось  $X$  совпадает с нейтральной осью сечения.

Равенство нулю статического момента  $S_X$  означает, что *нейтральная ось при чистом изгибе проходит через центр тяжести сечения*.

Центральная ось  $X$  поперечного сечения является его *нейтральной осью*.

Из уравнений (7.2) и (7.6)

$$\frac{E}{\rho} \int_A u x dA = 0. \quad (7.8)$$

По вышеуказанной причине  $\int_A u x dA = 0$ . Интеграл вида  $\int_A u x dA$  называется центробежным моментом инерции сечения относительно осей  $X, Y$  и обозначается  $I_{XY}$ .

Равенство нулю центробежного момента указывает на то, что *оси  $X$  и  $Y$  являются главными осями инерции*. Ось  $X$  – центральная ось сечения (см. ранее), поэтому и ось  $Y$  будет центральной.

Таким образом, *оси  $X$  и  $Y$  – главные центральные оси сечения*.

Из уравнений (7.3) и (7.6)

$$M_X = m = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (7.9)$$

Интеграл вида  $\int_A y^2 dA$  называется осевым моментом инерции сечения относительно оси  $X$  и обозначается  $I_X$ . Эта ось в данном случае является главной центральной осью и одновременно нейтральной осью сечения.

Следовательно, получаем выражение для изгибающего момента

$$M_X = \frac{E}{\rho} I_X,$$

откуда после преобразований

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_X}{EI_X}. \quad (7.10)$$

Уравнение (7.10) выражает зависимость кривизны бруса от изгибающего момента.

Произведение  $EI_X$  называется *жесткостью бруса при изгибе*.

В формулу (7.6) подставим значение  $\frac{1}{\rho}$  из формулы (7.10):

$$\sigma = E y \frac{1}{\rho} = \frac{E y M_X}{EI_X} = \frac{M_X y}{I_X}.$$

*Данное выражение используется для определения нормальных напряжений при плоском чистом изгибе и носит название «формула Навье»:*

$$\sigma = \frac{M_X y}{I_X}. \quad (7.11)$$

Ранее был сделан вывод о том, что *максимальные напряжения возникают в слоях, наиболее удаленных от нейтрального слоя*. Тогда, подставив в (7.11) максимальную координату слоя, получим

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X y_{\max}}{I_X}.$$

Отношение  $\frac{I_X}{|y_{\max}|}$  носит название осевого момента сопротивления сечения и обозначается  $W_X$ :

$$W_X = \frac{I_X}{|y_{\max}|}. \quad (7.12)$$

Аналогично определяется  $W_Y$ . Видим, что  $W_X$  и  $W_Y$  всегда больше нуля.

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X}. \quad (7.13)$$

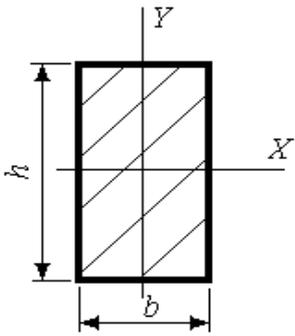
**Примечание.** Теоретические вопросы по определению статических, осевых и центробежных моментов сечений и других геометрических характеристик рассматриваются в приложении А.

#### 7.2.4. Рекомендации по определению осевых моментов сопротивления

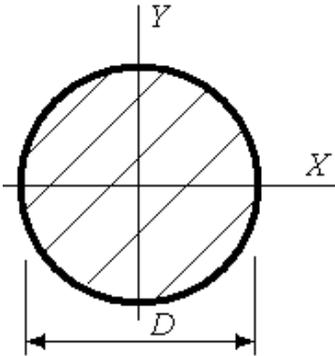
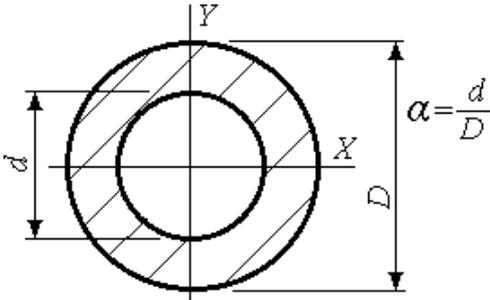
Для прокатных профилей значения  $W_X$  и  $W_Y$  приводятся в так называемых таблицах сортамента, которые можно найти в приложениях учебников по сопротивлению материалов, в том числе и в приложениях к данному учебному пособию, а также в справочной литературе.

Для простых сечений  $W_X$  и  $W_Y$  вычисляются по формулам, приведенным в табл. 7.1.

Табл. 7.1. Формулы для определения геометрических характеристик простых сечений

Вид сечения	Расчетная формула
	$I_X = \frac{bh^3}{12}; \quad  y_{\max}  = \frac{h}{2}$ $I_Y = \frac{hb^3}{12}; \quad  x_{\max}  = \frac{b}{2}$ $W_X = \frac{bh^2}{6}; \quad W_Y = \frac{hb^2}{6}$

Окончание табл. 7.1

Вид сечения	Расчетная формула
	$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$ $ y_{\max}  =  x_{\max}  = \frac{D}{2}$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^3$
	$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$ $ y_{\max}  =  x_{\max}  = \frac{D}{2}$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$

Для составных и сложных сечений  $W_x$  и  $W_y$  определяются по формуле (7.12) с учетом рекомендаций (см. приложение А «Геометрические характеристики плоских сечений»).

### 7.2.5. Условие прочности балки по нормальным напряжениям

Условие прочности по нормальным напряжениям, исходя из (7.11) и (7.13), имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_{\max}} \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (7.14)$$

Момент сопротивления сечения определяем относительно оси, перпендикулярной силовой плоскости, – в данной главе это ось  $X$ .

Проверка прочности балок при плоском чистом изгибе выполняется с использованием неравенства (7.14) – это *первый тип* расчетов.

Проектировочный расчет (подбор размеров сечения балки – *второй тип* расчетов), исходя из условия прочности, производится по формуле

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (7.15)$$

Максимальная грузоподъемность балки (допускаемые значения внешних нагрузок – *третий тип* расчетов)

$$[M] = M_{\max} \leq W_x [\sigma]. \quad (7.16)$$

### 7.2.6. Закон Гука при изгибе

Из выражения (7.10)  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E I_x}$  видим:

– моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения характеризуют сопротивляемость балки деформации изгиба (зависимость от формы и размеров сечения);

– величина  $E$  характеризует сопротивляемость балки деформации изгиба (зависимость от упругих свойств материала);

– чем больше  $I_x$  и  $E$ , тем больше  $\rho$  (кривизна бруса уменьшается), т. е. балка деформируется в меньшей степени (жесткость ее увеличивается).

Используя выражения (7.4) и (7.10), можем записать, что

$$\frac{M_x}{E I_x} = \frac{d\theta}{dz}, \quad \text{откуда} \quad d\theta = \frac{M_x dz}{E I_x}.$$

Проинтегрировав полученное выражение, запишем закон Гука при изгибе:

$$\theta = \int_l \frac{M_x}{E I_x} dz.$$

*Абсолютная деформация балки при изгибе (угол поворота сечения) прямо пропорциональна изгибающему моменту, расстоянию между сечениями и обратно пропорциональна жесткости балки при изгибе.*

### **7.2.7. Потенциальная энергия деформации**

Энергия упругих деформаций бруса при изгибе определяется работой изгибающего момента на угловом перемещении  $d\theta$  двух сечений:

$$dU = \frac{1}{2} M_x d\theta; \quad dU = \frac{1}{2} M_x \frac{M_x dz}{E I_x} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 dz}{E I_x}.$$

Тогда полная потенциальная энергия при изгибе определится интегралом:

$$U = \int_l dU = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2E I_x}.$$

При чистом изгибе балки постоянного поперечного сечения получаем

$$U = \frac{M_x^2 l}{2E I_x}.$$

## **7.3. Плоский поперечный изгиб**

При плоском (прямом) поперечном изгибе, когда в сечениях балки действуют изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ , возникают не только нормальные  $\sigma$ , но и касательные  $\tau$  напряжения (рис. 7.7).

Касательные напряжения, на основании закона их парности, возникают также и в продольных слоях ( $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ), что вызывает сдвиги отдельных волокон друг относительно друга (рис. 7.8, а). Под действием касательных напряжений поперечные сечения искривляются и сдвигаются друг относительно друга (рис. 7.8, б).

Вследствие сдвигов *гипотеза плоских сечений*, в отличие от чистого изгиба, *не выполняется: сечения, плоские до деформации, искривляются (наблюдается депланация сечения)*.

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что *влияние указанного эффекта на величину нормальных напряжений зависит от отношения высоты сечения к длине пролета (для балок это отношение мало)*.

Поэтому влиянием сдвигов на закон распределения *нормальных напряжений пренебрегают*, т. е. принимают *гипотезу Бернулли* – при расчетах используется *формула Навье*. Остается проанализировать распределение касательных напряжений.

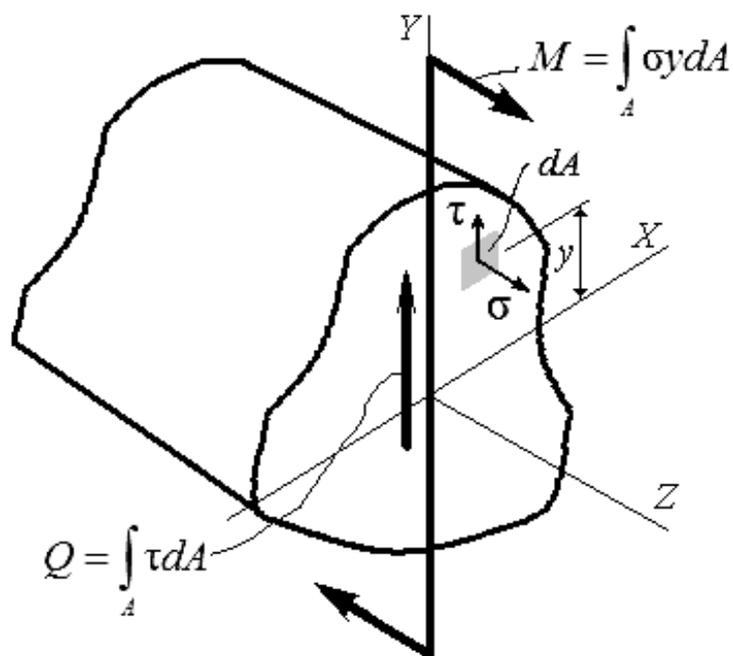


Рис. 7.7. Внутренние силовые факторы и напряжения в произвольном сечении балки при прямом поперечном изгибе

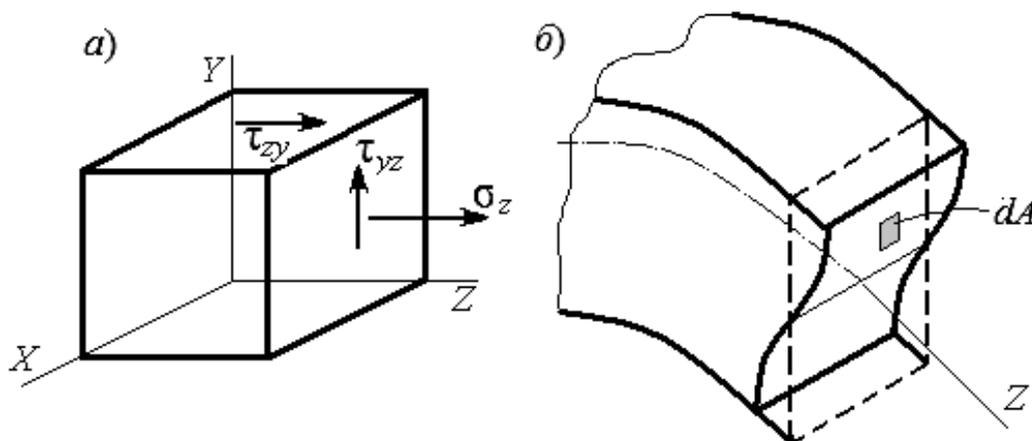


Рис. 7.8. Напряженное состояние в точке поперечного сечения и деформация сечения в связи с действием касательных напряжений

### 7.3.1. Касательные напряжения (формула Д. И. Журавского)

Рассмотрим однопролетную балку, имеющую произвольную форму поперечного сечения (с вертикальной осью симметрии), которая нагружена силой  $F$  (рис. 7.9).

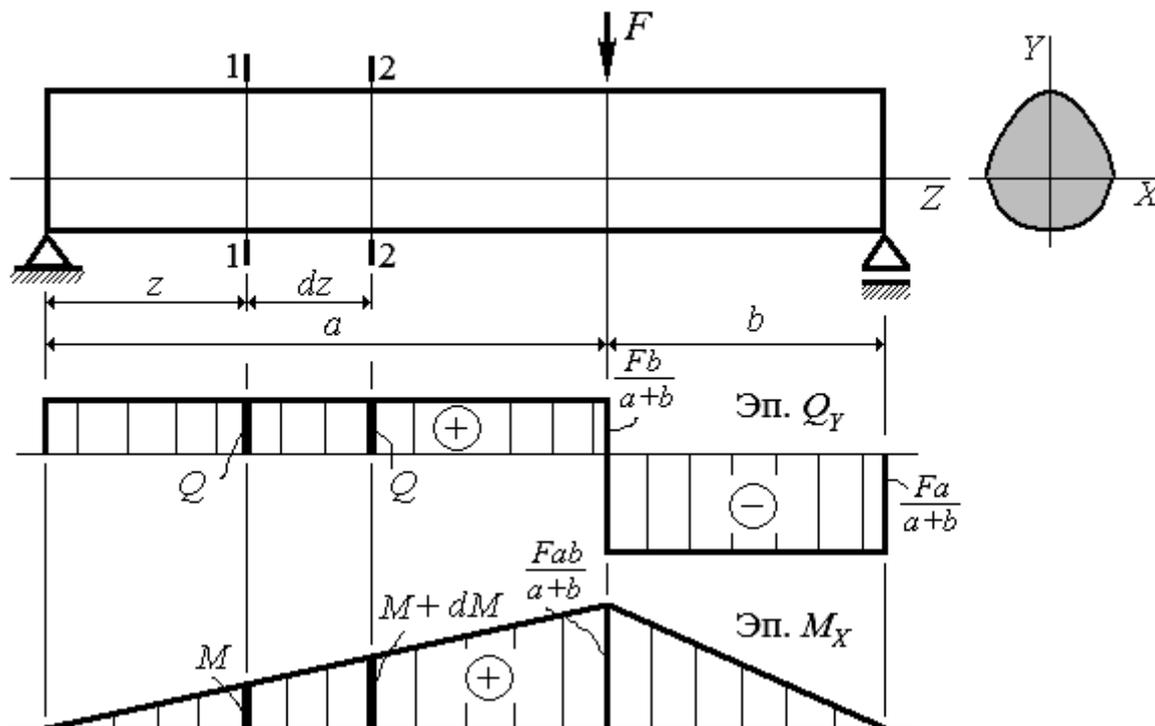


Рис. 7.9. Прямой поперечный изгиб однопролетной балки с сечением произвольной формы

Двумя близкими поперечными сечениями 1–1 и 2–2 выделим элемент длиной  $dz$ . Построим эпюры  $Q$  и  $M$ . Из эпюр внутренних силовых факторов видим, что в этих сечениях возникают положительные по знаку поперечная сила и изгибающий момент.

*Изгибающие моменты в данных сечениях не уравновешены, что противоречит методу сечений* (см. рис. 7.9 и 7.10, а).

Изобразим эпюры нормальных напряжений, а также покажем векторы касательных напряжений в сечениях 1–1 и 2–2 и парные этим напряжениям – в продольном (исследуемом) слое с координатой  $y$  (рис. 7.10, б). Приходим к выводу, что касательные напряжения в продольном слое, суммируясь с нормальными напряжениями в сечении 1–1, будут уравновешивать нормальные напряжения в сечении 2–2.

Далее покажем левое сечение (1–1) и выделим в нем произвольную элементарную площадку  $dA$  на координате  $y_1$  от оси сечения  $X$  (рис. 7.10, в).

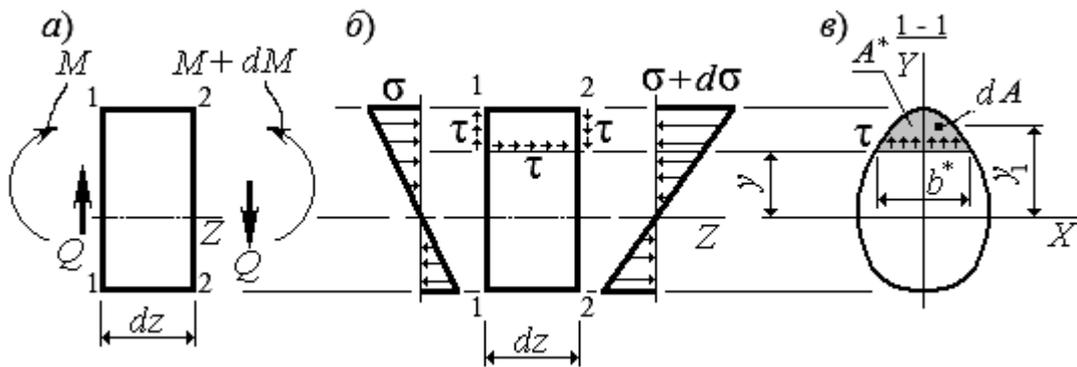


Рис. 7.10. Напряжения в сечениях балки

Продольным горизонтальным сечением, проведенным на координате  $y$  от нейтрального слоя ( $OX$ ), разделим элементарный участок бруса на две части (рис. 7.11).

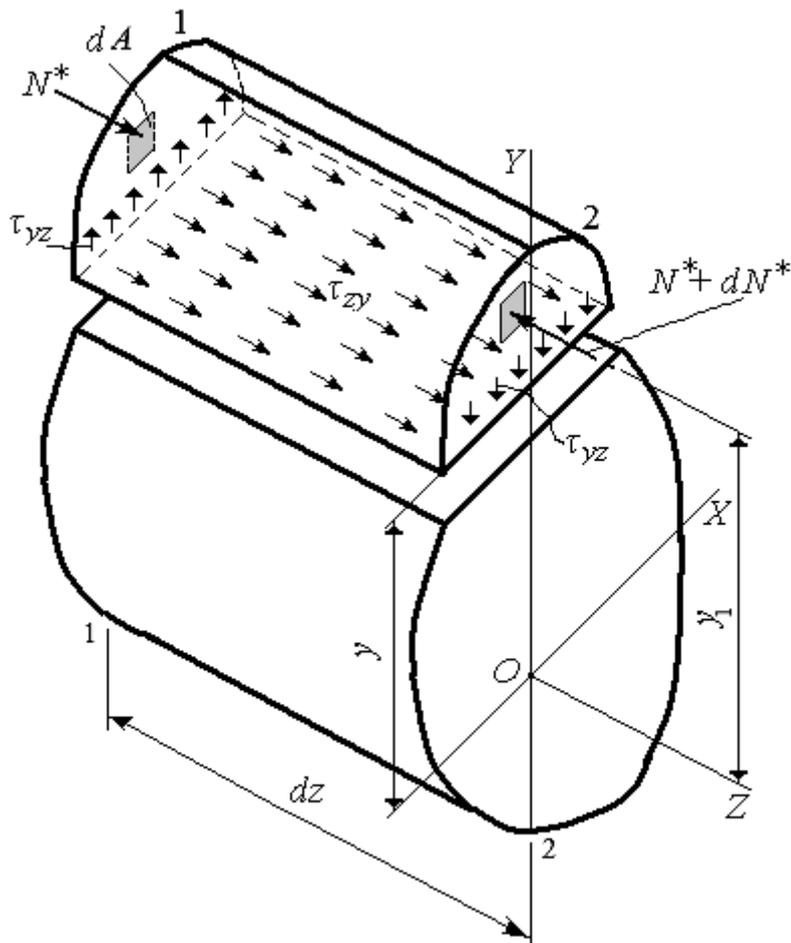


Рис. 7.11. Равновесие участка бруса элементарно малой длины  $dz$

Рассмотрим равновесие верхней части (отсеченная часть сечения выделена серым оттенком на рис. 7.10, в).

В левом сечении равнодействующая нормальных сил  $\sigma dA$  (см. рис. 7.10, в и 7.11) в пределах выделенной части (обозначена  $A^*$ ) определится произведением:

$$N^* = \int_{A^*} \sigma dA. \quad (7.17)$$

В соответствии с формулой Навье нормальные напряжения, приложенные к площадке  $dA$  на координате  $y_1$ ,  $\sigma = \frac{M_X y_1}{I_X}$ , поэтому, с учетом (7.17),

$$N^* = \int_{A^*} \frac{M_X y_1}{I_X} dA = \frac{M_X}{I_X} \int_{A^*} y_1 dA.$$

Интеграл  $\int_{A^*} y_1 dA = S_X^*$  есть статический момент площади отсеченной части относительно оси  $X$ . Тогда

$$N^* = \frac{M_X}{I_X} S_X^*. \quad (7.18)$$

В правом сечении продольная сила, по аналогии с продольной силой в левом сечении, будет определяться зависимостью

$$N^* + dN^* = \frac{M_X + dM_X}{I_X} S_X^*. \quad (7.19)$$

Разность сил по формулам (7.18) и (7.19) даст формулу для определения элементарной продольной силы

$$dN^* = \frac{dM_X}{I_X} S_X^*. \quad (7.20)$$

Эта элементарная сила (в правом сечении) должна уравниваться касательными силами  $dT$  в продольном слое элементарного участка бруса при условии, что касательные напряжения  $\tau_{zy}$  в исследуемом слое с координатой  $y$  распределены равномерно:

$$dT = \tau_{zy} b^* dz . \quad (7.21)$$

Приравниваем (7.20) и (7.21):

$$\frac{dM_X}{I_X} S_X^* = \tau_{zy} b^* dz.$$

Откуда, с учетом дифференциальной зависимости  $Q = \frac{dM}{dz}$ , получим

$$\tau_{zy} = \frac{dM S_X^*}{dz b^* I_X} = \frac{Q S_X^*}{b^* I_X}.$$

По закону парности касательных напряжений  $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$ .

Получаем формулу для *определения касательных напряжений в поперечном сечении при прямом поперечном изгибе*. Эта формула носит имя русского инженера и ученого Д. И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q S_X^*}{b^* I_X}, \quad (7.22)$$

где  $Q$  – поперечная сила в исследуемом поперечном сечении;  $I_X$  – осевой момент инерции поперечного сечения;  $S_X^*$  – статический момент части поперечного сечения, отсеченной на исследуемой высоте от нейтрального слоя – на координате  $y$  (статический момент отсеченной части);  $b^*$  – ширина поперечного сечения на исследуемой высоте от нейтрального слоя – на координате  $y$ .

Видим, что по высоте сечения бруса касательные напряжения распределяются по закону, *отличающемуся от линейного закона*.

### 7.3.2. Эпюра распределения касательных напряжений

Исследуем закон распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки, нагруженной поперечной силой  $Q$ .

1. Прямоугольное сечение (рис. 7.12). На расстоянии  $y$  от нейтральной оси (ось  $X$ ) сечения проведем прямую 1–4, параллельную этой оси, которая отсекает прямоугольник площадью  $A_{1234}$ .

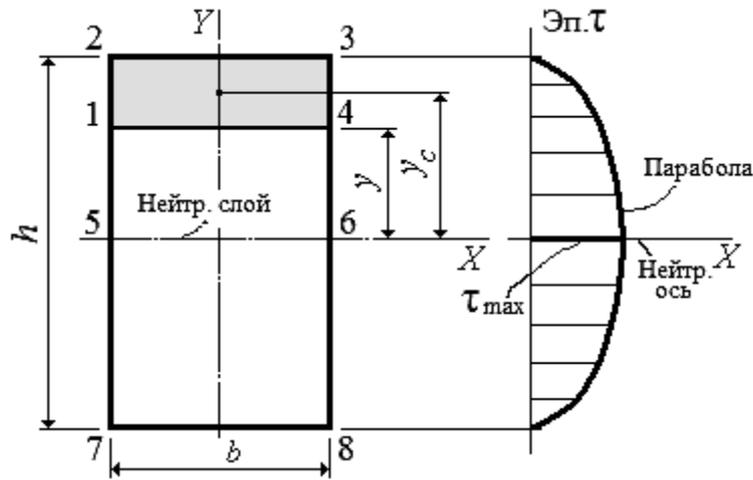


Рис. 7.12. Вид эпюры касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения

Определим значения площади  $A^*$  и статического момента  $S^*$  отсеченной части площади сечения:

$$A_{1234} = A^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right);$$

$$S_{1234} = S^* = A^* y_c = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Подставим их значения в формулу Журавского (7.22) и получим выражение

$$\tau = \frac{Q \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Анализируя данное выражение, видим, что имеем *уравнение второго порядка*, т. е. касательные напряжения по высоте сечения распределены по параболическому закону с характерными значениями:

$$y = \pm \frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0; \quad y = 0 \rightarrow \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}.$$

Здесь  $A = bh$  – площадь прямоугольного сечения.

Значения касательных напряжений в крайних слоях поперечного сечения, симметричного относительно нейтральной оси, равны нулю; в нейтральном слое – максимальны.

Можно дать этому и другое объяснение.

Касательные напряжения, в соответствии с формулой Журавского (7.22), определяются, в первую очередь, статическим моментом площади отсеченной части, т. е. *статическим моментом площади части сечения, расположенной выше слоя, в котором эти напряжения определяются*. Координата этого слоя –  $y$  определяется по отношению к нейтральному слою 5–6 (см. рис. 7.12), положение которого совпадает с положением центральной оси сечения (см. теорию изгиба):

– при  $y = \frac{h}{2}$  (это слой 2–3) площадь  $A^*$  равна нулю, следовательно, и  $S_X^* = 0$ . Касательные напряжения в верхнем крайнем слое равны нулю;

– при  $y = -\frac{h}{2}$  (это слой 7–8) площадь  $A^* = A_{2378} = bh$ . Имеем прямоугольное сечение, симметричное оси  $X$  (центральной оси прямоугольника). По определению статический момент сечения относительно центральной оси равен нулю, следовательно,  $S_X^* = 0$ . Касательные напряжения в нижнем крайнем слое также равны нулю;

– при  $y = 0$  (это слой 5–6 – *нейтральный слой*) площадь  $A^* = A_{2356} = \frac{bh}{2}$ .

Статический момент данного прямоугольного сечения

$$S_X^* = A_{2356} y_C = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}.$$

Касательные напряжения

$$\tau = \frac{Q bh^2}{b \cdot 8 \frac{bh^3}{12}} = \frac{3 Q}{2 bh} = \tau_{\max}.$$

Очень важно сравнить распределение нормальных и касательных напряжений. Видим, что:

– в слоях, наиболее удаленных от нейтральной оси (от центральной оси), нормальные напряжения имеют экстремальные значения, а касательные напряжения **равны нулю**;

– на нейтральной оси нормальные напряжения **равны нулю**, а касательные напряжения имеют **максимальные значения**.

2. Двутавровое сечение (рис. 7.13, а). Особенность этого сечения – достаточно резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки двутавра к его полке. Схематизируем сечение: заменим криволинейную форму полки прямоугольником со сторонами  $b-t$  (рис. 7.13, б).

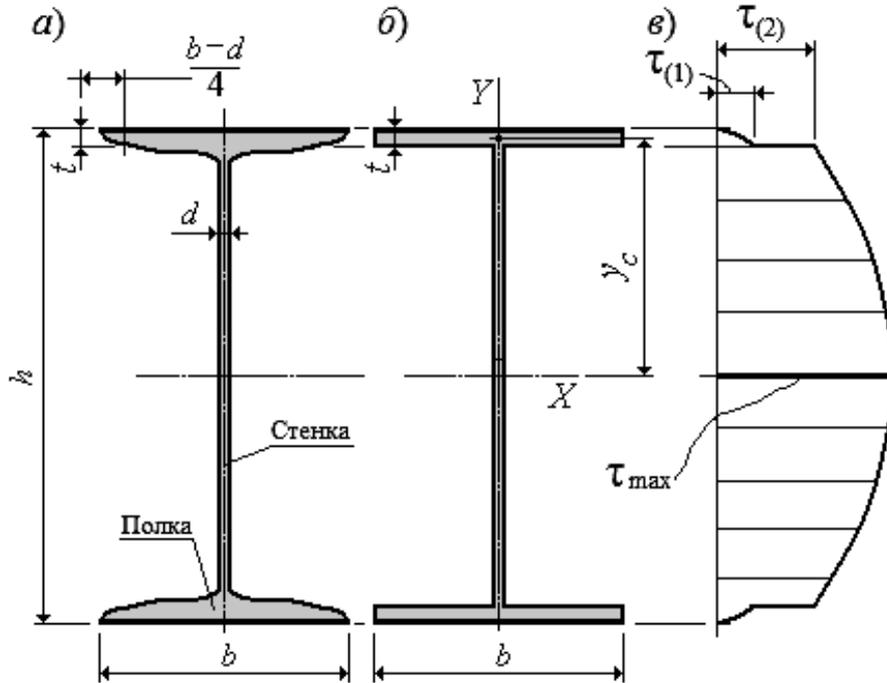


Рис. 7.13. Вид эпюры касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения

Из предыдущего анализа следует, что воздействие поперечной силы воспринимает в основном стенка. Поэтому важной является оценка распределения касательных напряжений по высоте двутавра.

*По аналогии с предыдущим примером:*

– в верхнем и нижнем слоях полок двутавра касательные напряжения равны нулю;

– в нейтральном слое (на оси  $X$ ) касательные напряжения максимальны и определяются по формуле Журавского, при этом  $S_X^* = S_{X \max}^* = S_X^{\text{полусеч}}$  – значение берется из таблиц сортамента (приведены разные обозначения, используемые в этих таблицах);  $b^* = d$  – толщина стенки двутавра (см. таблицы сортамента).

*В слое, где полка двутавра переходит в стенку, величина касательных напряжений будет определяться двумя параметрами:*

1) величиной статического момента площади отсеченной части  $S_X^*$  (прямоугольника со сторонами  $b$  и  $t$ ):

$$S_X^* = A^* y_c = bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right);$$

2) величиной ширины слоя  $b^*$  на координате, где определяется значение касательного напряжения. Будем иметь два значения и, следовательно, две величины напряжения:

$$b_{(1)}^* = b \rightarrow \tau_{(1)}; \quad b_{(2)}^* = d \rightarrow \tau_{(2)}.$$

Второе значение напряжения будет существенно больше ввиду того, что  $b \gg d$ . Покажем общий вид эпюры  $\tau$  (рис. 7.13, в).

В слое, где полка переходит в стенку, – скачок касательного напряжения, величина его приближается к значению  $\tau_{\max}$ .

*В связи с особенностями распределения касательных напряжений по высоте двутавра, необходимо проверять на прочность слой, в котором сопрягаются полка со стенкой.*

### 7.3.3. Условие прочности по касательным напряжениям

В соответствии с формулой Журавского (7.22) определяются *максимальные значения касательных напряжений* и записывается соответствующее условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_{X \max}^*}{b^* I_X} \leq [\tau]. \quad (7.23)$$

Значение поперечной силы  $Q$  берется из эпюры для исследуемого сечения.

По аналогии с другими видами нагружения возможно решение задач по проверке прочности, определение максимальной нагрузки (грузоподъемности), а также выполнение проекторочного расчета (достаточно громоздкое решение).

Для подавляющего большинства балок, работающих на изгиб,  $\tau_{\max} \gg \sigma_{\max}$ , поэтому *подбор сечений балок осуществляется из условия прочности по нормальным напряжениям.*

*По касательным же напряжениям лишь проверяют прочность или максимальную грузоподъемность.*

## 7.4. Расчет бруса на прочность по эквивалентным напряжениям (проверка прочности по 3 и 4 теориям)

### 7.4.1. Определение опасного сечения и его опасных точек

При расчете элементов конструкций по условию прочности по допускаемым напряжениям при изгибе, как известно, решается три типа задач:

- 1) проверка прочности (проверочный расчет);
- 2) подбор прочных размеров сечения (проектировочный расчет);
- 3) определение допускаемой нагрузки (максимальная грузоподъемность).

Опасным при изгибе балки будет то сечение, в котором действуют:

- максимальные (экстремальные) по величине  $M_{\max}$  и  $Q_{\max}$ ;
- оба силовых фактора ( $Q$  и  $M$ ), близкие по величине к своим максимумам.

Для того чтобы решить задачу, необходимо найти опасное сечение балки и затем – его опасную точку (слой). Особенно это важно для сложных поперечных сечений, которые применяются конструкторами.

Рассмотрим подход к проверке прочности на примере поперечного изгиба двутавра (рис. 7.14).

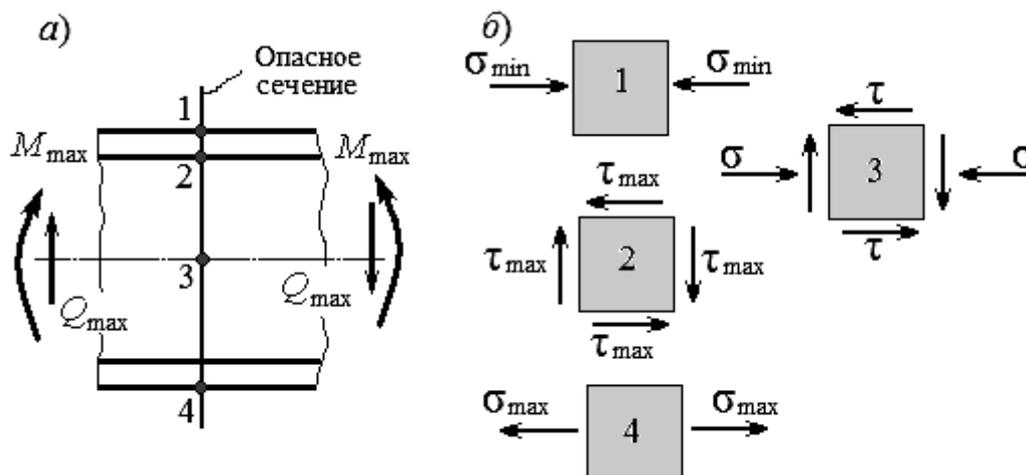


Рис. 7.14. Напряженное состояние в точках опасного сечения двутавровой балки

Пусть было выявлено опасное сечение (см. рис. 7.14, а). В этом сечении характерными будут показанные на рисунке точки 1, 2, 3, 4.

Опасной точкой данного сечения может быть одна из трех точек (см. рис. 7.14, б):

- точка 1 (и симметричная ей точка 4), в которых нормальные напряжения достигают наибольшей величины, – точки, наиболее удаленные от

нейтральной линии. Для этих точек напряженное состояние – **линейное**, т. к. *касательные напряжения равны нулю*. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma]; \quad (7.24)$$

– *точка 2*, в которой *касательные напряжения достигают наибольшей величины*, – *точка на нейтральном слое*. Для этой точки напряженное состояние – *плоское* (чистый сдвиг), т. к. *нормальные напряжения равны нулю*. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{X \max}^*}{b I_X} \leq [\tau]. \quad (7.25)$$

#### 7.4.2. Проверка прочности по теориям прочности

Проверку проводим для опасной точки опасного слоя (*точка 3*). Для данной точки характерно: *хотя в этой точке  $\sigma$  и  $\tau$  не принимают своих наибольших значений, но в своей комбинации создают опасное напряженное состояние: в этой точке напряжения близки к своим максимумам* (рис. 7.15).

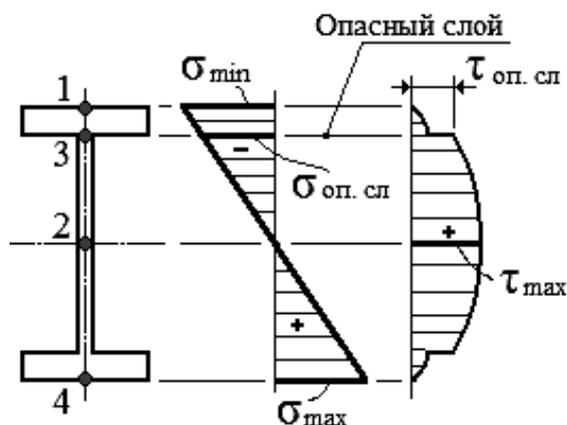


Рис. 7.15. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном слое

Материал в данной точке подвержен действию *плоского напряженного состояния*. Нормальные и касательные напряжения в опасном слое рассчитывают по общим формулам – соответственно Навье и Журавского:

$$\sigma_{\text{оп.сл}} = \frac{M y}{I_X}; \quad \tau_{\text{оп.сл}} = \frac{Q S_X^*}{b^* I_X}. \quad (7.26)$$

В рассматриваемом случае  $b^* = d$ . Подходы к определению значения  $S_X^*$  описаны ранее.

В данном случае следует использовать такое условие прочности, в котором бы учитывалось влияние обоих напряжений. В теории напряженного состояния (разд. 6) были рассмотрены теории прочности.

В случае расчетов конструкций из пластичных материалов, используются третья и четвертая теории.

Условие прочности *по третьей теории* имеет вид (см. формулу (6.49)):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.27)$$

Условие прочности *по четвертой теории* (см. формулу (6.50))

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.28)$$

Проверка прочности по теориям прочности предполагает выполнение *полного расчета балки на прочность*:

- проверка прочности (подбор сечения) балки из расчета *по условию прочности для нормальных напряжений* – по  $M_{\text{max}}$  (см. формулу (7.24));
- проверка прочности балки из *расчета по условию прочности для касательных напряжений* – по  $Q_{\text{max}}$  (см. формулу (7.25));
- проверка прочности *по третьей или четвертой теории прочности в опасном сечении* (сечение определяется сопоставлением эпюр  $Q$  и  $M$ ): это сечение, в котором оба силовых фактора ( $Q$  и  $M$ ) близки к своим максимумам. Используется формула (7.27) или (7.28).

Длительная практика расчета балок показала, что в большинстве случаев величина максимальных касательных напряжений, по крайней мере, на порядок ниже величины максимальных нормальных напряжений, поэтому опасным слоем опасного сечения является слой, наиболее удаленный от нейтральной линии, а условие (7.24) – основное условие прочности, по которому проводят расчеты.

### 7.4.3. Примеры выполнения расчета балок

**Пример 1.** Для деревянной балки прямоугольного сечения (рис. 7.16) определить допускаемую нагрузку.

Дано:  $[\sigma] = 11$  МПа,  $[\tau] = 1,5$  МПа.

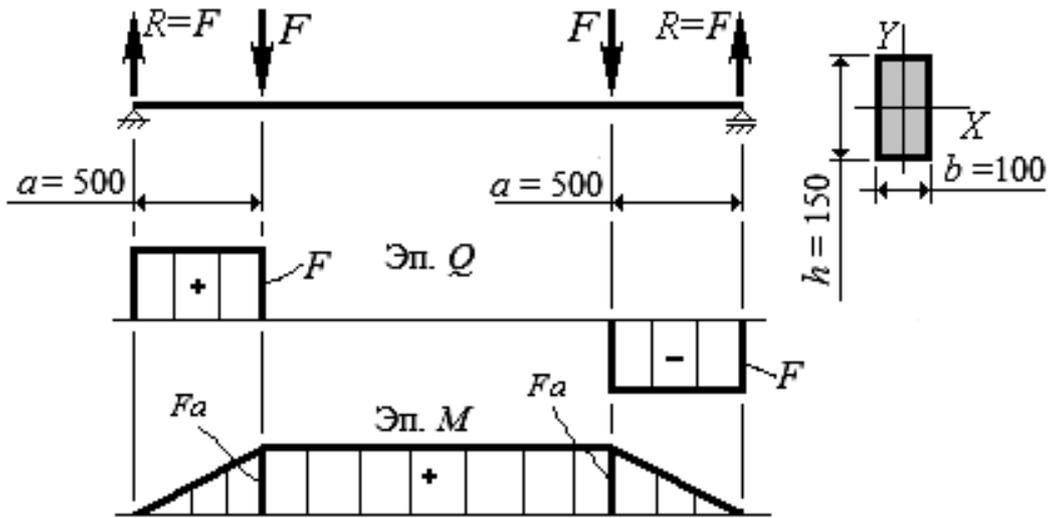


Рис. 7.16. Схема нагружения, поперечное сечение балки и эпюры \$Q\$ и \$M\$ к примеру 1

*Решение.*

Геометрические характеристики прямоугольного сечения

$$A = bh; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Строим эпюры внутренних силовых факторов, из эпюр определяем максимальные значения \$Q\$ и \$M\$.

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6Fa}{bh^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2A} = \frac{3F}{2bh}.$$

Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{6Fa}{bh^2} \leq [\sigma]; \quad \tau_{\max} = \frac{3F}{2bh} \leq [\tau].$$

Определение значений допускаемой нагрузки из условий прочности:

– по нормальным напряжениям

$$[F]_{\sigma} = \frac{[\sigma]bh^2}{6a} = \frac{11 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,15^2}{6 \cdot 0,5} = 8250 \text{ Н};$$

– по касательным напряжениям

$$[F]_{\tau} = \frac{2[\tau]bh}{3} = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,15}{3} = 15000 \text{ Н.}$$

Ответ: допускаемая нагрузка на балку – наименьшая из двух:  $[P] = 8250 \text{ Н.}$

**Пример 2.** Определить нормальные и касательные напряжения в сечении  $A$  балки (рис. 7.17) на расстоянии 5 см от верхней грани ее прямоугольного сечения (в слое  $A-A$ ).

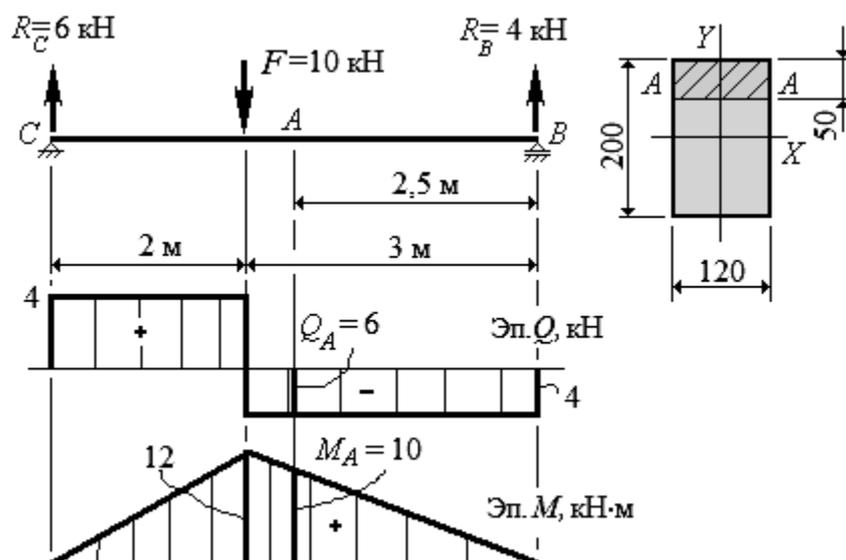


Рис. 7.17. Схема нагружения, поперечное сечение балки и эпюры  $Q$  и  $M$  к примеру 2

Решение.

Опорные реакции

$$R_C = \frac{3F}{5} = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 \text{ кН}; \quad R_B = \frac{2F}{5} = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 \text{ кН.}$$

Строим эпюры внутренних силовых факторов. Из эпюр определяем значения  $Q$  и  $M$  в заданном сечении  $A$ :

$$Q_A = -R_B = -4 \text{ кН}; \quad M_A = 2,5 R_B = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Напряжения в заданном слое  $A-A$  поперечного сечения определяются:

– нормальные напряжения по формуле Навье

$$\sigma_{A-A} = \frac{M_A y_{A-A}}{I_X};$$

– касательные напряжения по формуле Журавского

$$\tau_{A-A} = \frac{Q_A S_X^*}{b I_X}.$$

Определяем значения параметров, входящих в формулы:

$$y_{A-A} = 0,05 \text{ м}; \quad b = 0,12 \text{ м};$$

$$S_X^* = A^* y_C^* = 0,05 \cdot 0,12 \cdot (0,05 + 0,025) = -0,045 \text{ м}^3;$$

$$I_X = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,12 \cdot 0,2^3}{12} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Расчет напряжений:

– нормальные напряжения

$$\sigma_{A-A} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,05}{8 \cdot 10^{-5}} = 6,25 \text{ МПа};$$

– касательные напряжения

$$\tau_{A-A} = \frac{-4 \cdot 10^3 \cdot 0,045}{0,12 \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = -0,187 \text{ МПа}.$$

*Ответ:*  $\sigma_{A-A} = 6,25 \text{ МПа}; \quad \tau_{A-A} = -0,187 \text{ МПа}.$

## 7.5. Расчет на жесткость

Очень важным при расчете балок является определение перемещений, которые получают точки балки под действием внешних нагрузок. По аналогии с рассмотренными ранее видами нагружения *при изгибе*, наряду с расчетом на прочность, также проводят расчет на жесткость. Бывают случаи, *когда прочная балка оказывается недостаточно жесткой*.

### 7.5.1. Понятие о прогибе и угле поворота сечения

При прямом поперечном изгибе балок их точки получают линейные и угловые перемещения. Центр тяжести поперечного сечения балки перемещается вертикально, такое перемещение называют *прогибом*, а само сечение поворачивается на некоторый угол, называемый *углом поворота сечения* (рис. 7.18). *Горизонтальным перемещением* центра тяжести сечения *пренебрегаем* (смотри принцип начальных размеров).

Влиянием *поперечных сил* на перемещения при изгибе также *пренебрегаем*.

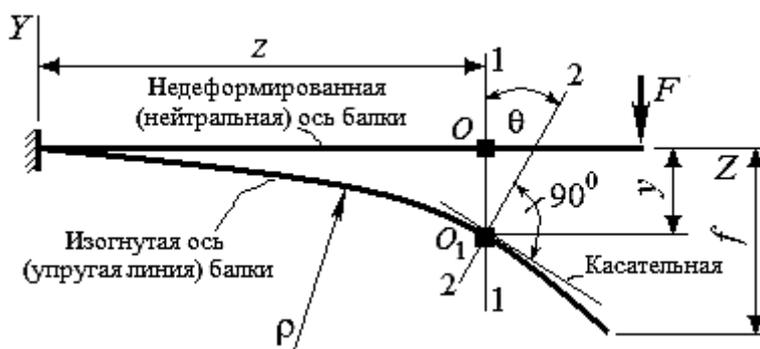


Рис. 7.18. К определению прогиба и угла поворота сечения балки: 1–1 – первоначальное положение сечения балки на координате  $z$ ; 2–2 – положение сечения балки после деформации;  $O$  – положение центра тяжести до деформации (нейтральная ось) балки;  $O_1$  – положение центра тяжести на нейтральной оси балки после ее деформации;  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя (изогнутой оси балки)

Длина оси балки остается постоянной, т. к. она расположена в нейтральном слое (нормальные напряжения  $\sigma$  в нейтральном слое равны нулю).

В результате деформации *центр тяжести сместился* в положение  $O_1$ . Вертикальное перемещение центра тяжести сечения – *прогиб обозначают*  $y$  или  $v$ . Максимальное значение прогиба (в рассматриваемом примере – см. рис. 7.18) называют *стрелой прогиба* и обозначают  $f$ .

*Сечение 1–1 повернулось* в положение 2–2, оставаясь плоским (*гипотеза плоских сечений*), на некоторый угол. *Угол поворота сечения обозначают*  $\theta$  или  $\varphi$ .

Для определения угла поворота к изогнутой оси в исследуемой точке следует провести касательную, затем провести к ней перпендикуляр (прямая 2–2). Угол между этой прямой и прямой 1–1 и есть угол поворота сечения.

Угол поворота поперечного сечения – *это угол между нормалью к недеформированной оси балки и нормалью к касательной к изогнутой оси балки*.

Угол поворота и прогиб зависят от положения сечения, вида и положения приложенных нагрузок, размеров и материала балки.

Для определения перемещений при изгибе применяют несколько методов.

### 7.5.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки и его интегрирование

При выводе формулы для определения нормальных напряжений при изгибе была получена зависимость (7.10):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (7.29)$$

Отметим, что если *вместо* сосредоточенной силы приложить момент, то получим чистый изгиб. И тогда вышезаписанное выражение будет величиной постоянной. Это значит, что *ось бруса будет изгибаться по радиусу окружности*.

Для аналитического решения задачи по определению перемещений можно использовать известное из математического анализа выражение для кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.30)$$

Приравнивая правые части уравнений (7.29) и (7.30), получим *дифференциальное уравнение изогнутой оси балки*

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}. \quad (7.31)$$

Решение этого уравнения (*его интегрирование*) вызывает определенные трудности. Поэтому обычно в инженерной практике используют так называемое *приближенное дифференциальное уравнение*. Его получают за счет следующих упрощений:

– так как прогибы на практике малы, то  $\operatorname{tg}\theta = \theta = \frac{dy}{dz} \approx 0,01$  рад,

т. е. углы поворота также малы;

– квадратом первой производной  $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$  пренебрегаем, т. к. она мала по сравнению с единицей.

Однако в случае, например, *расчета гибких нитей* эти упрощения не применяются из-за того, что величина прогиба нити будет достаточно большой, т. е. необходимо использовать точное решение.

Получаем приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \pm \frac{M}{EI}. \quad (7.32)$$

Знак радиуса кривизны может не совпадать со знаком  $M$ , поэтому в общем случае необходимо оставить знаки ( $\pm$ ).

В *правой системе координат* (ось  $y$  направлена вверх, ось  $z$  – влево) положительному значению  $M$  (сжато верхнее волокно) соответствует положительная кривизна (рис. 7.19): *прогиб отсчитывается вверх, а угол поворота – против хода часовой стрелки.*

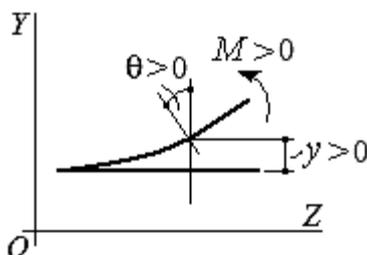


Рис. 7.19. К правилу знаков

Таким образом, *знаки момента, прогиба и угла поворота совпадают* и можно записать

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI}. \quad (7.33)$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (7.33) и получим следующее:

– для угла поворота

$$\theta = \frac{dy}{dz} = \int \frac{M}{EI} dz + C; \quad (7.34)$$

– для прогиба

$$y = \int \theta dz = \int dz \int \frac{M}{EI} dz + Cz + D. \quad (7.35)$$

Для вычисления интегралов, входящих в вышеприведенные выражения, необходимо:

- начало координат разместить в левой крайней точке бруса;
- брус разбить на участки и записать для каждого участка аналитические выражения для изгибающего момента;
- из граничных условий найти постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  (они зависят от условий на опорах и условий на границах участков).

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Для расчетной схемы (рис. 7.20) определить прогиб и угол поворота на конце консоли (точка  $B$ ). Жесткость бруса при изгибе ( $EI$ ) считать постоянной.

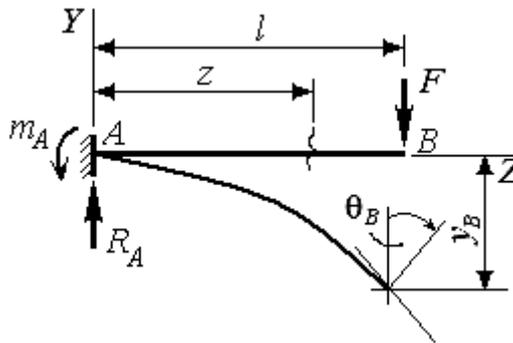


Рис. 7.20. Расчетная схема к примеру 1

*Решение.*

1. Определим опорные реакции:  $R_A = F$ ;  $m_A = -F l$ .
2. Запишем уравнение для изгибающего момента для произвольного сечения с координатой  $z$  (брус имеет один участок):

$$M = -F l + F z = -F (l - z).$$

3. Подставим в дифференциальное уравнение (7.32) уравнение изгибающего момента:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{F(l-z)}{EI}.$$

4. Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение один раз – имеем выражение для угла поворота, затем второй раз – выражение для прогиба в любом сечении балки:

$$\theta = \int \frac{d^2 y}{dz^2} dz = \int \frac{M}{EI} dz = -\frac{Fl}{EI} z + \frac{F}{2EI} z^2 + C;$$

$$y = \int \frac{M}{EI} dz \int dz = \int \theta dz = -\frac{Fl}{2EI} z^2 + \frac{F}{6EI} z^3 + Cz + D.$$

5. Определим постоянные интегрирования из условий на опоре  $A$  (при  $z = 0$ ): угол поворота и прогиб на опоре  $A$  равны нулю:  $\theta = 0$ ,  $y = 0$ . Следовательно,  $C = 0$ ,  $D = 0$ .

6. С учетом равенства нулю постоянных интегрирования получим уравнения для угла поворота и прогиба для любой точки бруса:

$$\theta = -\frac{Fl}{EI} z + \frac{F}{2EI} z^2; \quad y = -\frac{Flz^2}{2EI} + \frac{Fz^3}{6EI}.$$

7. Определим перемещения точки  $B$  ( $z = l$ ):

$$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}; \quad y_B = -\frac{Fl^3}{3EI}.$$

Знак (–) показывает, что  $y$  и  $\theta$  направлены в сторону, противоположную от положительного направления перемещений (см. рис. 7.19): угол поворота – по часовой стрелке, прогиб – вниз.

В данной балке был один участок. Если же участков будет два и более, то необходимо для каждого участка записывать по два и более дифференциальных уравнений, т. к. для каждого из участков будет свое уравнение для изгибающего момента. Соответственно, нужно определять в 2 и более раз больше постоянных интегрирования. В связи с трудностями вычислительного

характера данный метод очень трудоемок. Поэтому для определения перемещений применяются и другие методы.

**Пример 2.** Для схемы, изображенной на рис. 7.21, определить углы поворота и прогибы точек  $C$  и  $D$ . Принять жесткость сечения  $EI$  постоянной.

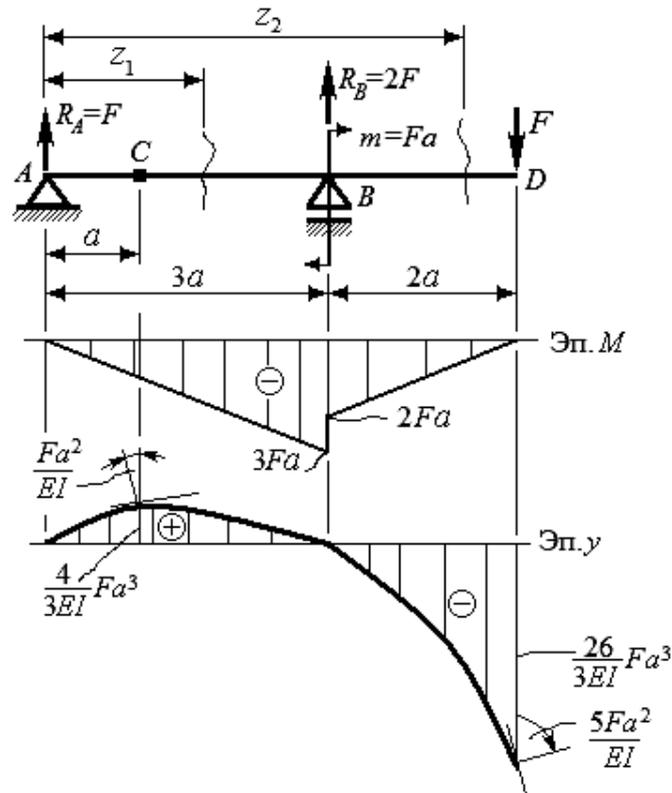


Рис. 7.21. Расчетная схема и эпюры  $M$  и  $y$  к примеру 2

*Решение.*

Определим опорные реакции:  $R_A = F$ ;  $R_B = 2F$ .

Балка имеет два участка. Запишем и проинтегрируем уравнения для изгибающего момента на этих участках. Причем на втором участке интегрируем уравнения, не раскрывая скобок (прием Клебша):

$$\int z dz = \int z d(z - a).$$

**Первый участок:**  $0 \leq z_1 \leq 3a$ ;  $M_1 = -F z$ .

$$\theta_1 = \int \frac{M_1}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \int F z dz = -\frac{F z^2}{2EI} + C_1;$$

$$y_1 = \int \theta_1 dz = -\frac{1}{EI} \int \left( \frac{F z^2}{2} + C_1 \right) dz = -\frac{F z^3}{6EI} + C_1 z + D_1.$$

**Второй участок:**  $3a \leq z_2 \leq 5a$ ;  $M_2 = -Fz + m(z-3a)^0 + 2F(z-3a)$ .

$$\theta_2 = \int \frac{M_2}{EI} dz = -\frac{Fz^2}{2EI} + \frac{Fa}{EI}(z-3a) + \frac{2F(z-3a)^2}{2EI} + C_2;$$

$$y_2 = \int \theta_2 dz = -\frac{Fz^3}{6EI} + \frac{Fa(z-3a)^2}{2EI} + \frac{F(z-3a)^3}{3EI} + C_2 z + D_2.$$

Используя граничные условия, определим постоянные интегрирования:

1) при  $z = 0$  из уравнения для  $y_1 \mapsto: y_A = 0$ , откуда  $D_1 = 0$ ;

2) при  $z = 3a$  из уравнения для  $y_1 \mapsto: y_B = 0$ , откуда

$$y_B = -\frac{F(3a)^3}{6EI} + C_1 3a = 0.$$

Следовательно,  $C_1 = \frac{3Fa^2}{2EI}$ ;

3) при  $z = 3a$  (на границе участков, т. е. в точке  $B$ ) углы поворота и прогибы равны по величине, т. к. балка непрерывна. Поэтому:

– из уравнений для углов поворота с учетом их равенства

$$\theta_1 = \theta_2 \mapsto: -\frac{F(3a)^2}{2EI} + C_1 = -\frac{F(3a)^2}{2EI} + C_2.$$

Значит,  $C_1 = C_2 = C = \frac{3Fa^2}{2EI}$ ;

– из уравнений для прогибов с учетом их равенства

$$y_1 = y_2 \mapsto: -\frac{F(3a)^3}{6EI} + C3a = -\frac{F(3a)^3}{6EI} D_2 + C3a. \text{ Значит, } D_2 = 0.$$

Таким образом, уравнения для перемещений

$$\theta_1 = -\frac{Fz^2}{2EI} + \frac{3Fa^2}{2EI}; \quad y_1 = -\frac{Fz^3}{6EI} + \frac{3Fa^2}{2EI}z;$$

$$\theta_2 = -\frac{Fz^3}{2EI} + \frac{Fa(z-3a)}{EI} + \frac{F(z-3a)^2}{EI} + \frac{3Fa^2}{2EI};$$

$$y_2 = -\frac{Fz^3}{6EI} + \frac{Fa(z-3a)^2}{2EI} + \frac{F(z-3a)^3}{3EI} + \frac{3Fa^2}{2EI}z.$$

Определим искомые перемещения.

Для точки  $C$  ( $z = a$ )

$$\theta_C = -\frac{Fa^2}{2EI} + \frac{3Fa^2}{2EI} = \frac{Fa^2}{EI}; \quad y_C = -\frac{Fa^3}{6EI} + \frac{3Fa^3}{2EI} = \frac{4Fa^3}{3EI}.$$

*В точке  $C$  сечение поворачивается против хода часовой стрелки и перемещается в вертикальном направлении вверх.*

Для точки  $D$  ( $z = 5a$ )

$$\theta_D = \frac{F}{EI} \left( -\frac{(5a)^2}{2} + a \cdot 2a + (2a)^2 + \frac{3}{2}a^2 \right) = -\frac{5Fa^2}{EI};$$

$$y_D = \frac{F}{EI} \left( -\frac{(5a)^3}{6} + \frac{a(2a)^2}{2} + \frac{(2a)^3}{3} + \frac{3}{2}a^2 5a \right) = -\frac{26Fa^3}{3EI}.$$

*В точке  $D$  сечение поворачивается по ходу часовой стрелки и перемещается в вертикальном направлении вниз.*

### 7.5.3. Порядок определения перемещений

Перемещения методом интегрирования дифференциального уравнения упругой линии определяются в следующем порядке.

1. Составляем выражения моментов для каждого из участков (слева направо). Начало координат – левая крайняя точка.

*Не забывать определять опорные реакции.*

2. Выражения для изгибающего момента на каждом из участков подставляем в подынтегральные выражения.

3. Проводим интегрирование уравнений, не раскрывая скобок.

4. Определяем постоянные интегрирования, используя граничные условия.

5. Найденные значения постоянных интегрирования подставляем в общие выражения (см. п. 2).

6. Выполняем условие задачи: подставляем координаты  $z$  заданных точек в выражения для  $\theta_z$  и  $y_z$ .

### 7.5.4. Условие жесткости

При изгибе условие жесткости записывается в виде

$$f \leq [f] = \left( \frac{1}{100} \div \frac{1}{600} L \right), \quad (7.36)$$

где  $f$  – стрела прогиба (максимальный прогиб);  $[f]$  – допускаемое значение стрелы прогиба;  $L$  – длина пролета балки.

### 7.5.5. Типы расчета на жесткость

Используя условие жесткости, проводят три типа расчетов:

- 1) проверка жесткости в соответствии с неравенством  $f \leq [f]$ ;
- 2) проектировочный расчет;
- 3) определение допускаемой нагрузки (грузоподъемности).

## 7.6. Метод начальных параметров

При определении перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии для каждого участка балки необходимо составлять уравнения изгибающего момента, интегрировать его и определять постоянные интегрирования. Это представляет *значительные трудности при большом количестве участков*.

Рассматриваемый далее *метод начальных параметров*, разработанный Н. П. Пузыревским, П. Г. Кулаковским, Н. К. Снитко, Н. И. Безуховым и А. А. Уманским, значительно упрощает решение задачи определения перемещений.

Рассмотрим балку, находящуюся в равновесии под действием сил и реакций (рис. 7.22). *Жесткость сечения балки  $EI$  постоянна по всей ее длине*.

1. Начало координат совместим с левым концом балки.
2. Составим выражение для изгибающего момента, возникающего в сечении на расстоянии  $z$  от начала координат. В это уравнение *входят все нагрузки, приложенные к балке левее от сечения*.

3. *Распределенная нагрузка обрывается, не доходя до правого крайнего сечения*, поэтому в уравнении для изгибающего момента действие распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  необходимо *записать в виде двух слагаемых* (на рис. 7.23 пунктиром показано продолжение действующей и компенсирующей нагрузок  $q$ ):

$$+q \frac{(z-c_1)^2}{2} - q \frac{(z-c_2)^2}{2}. \quad (7.37)$$

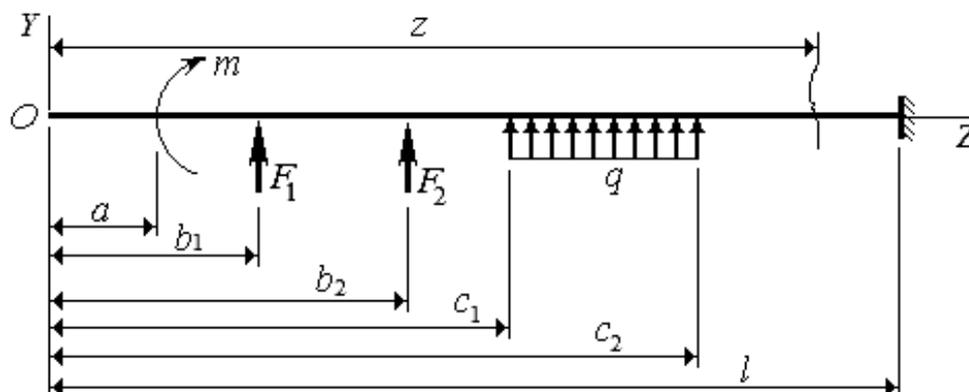


Рис. 7.22. К выводу уравнений метода начальных параметров

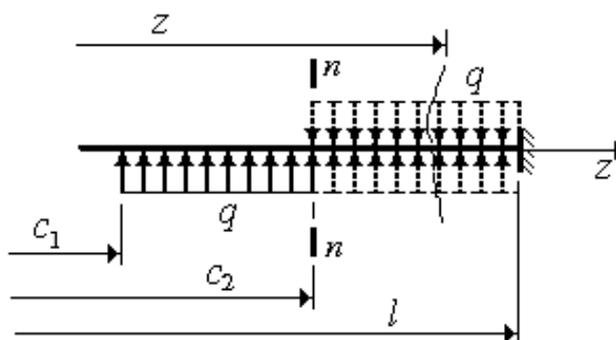


Рис. 7.23. К учету особенностей приложения распределенной нагрузки

Если *распределенная нагрузка обрывается* в сечении *n-n*, расположенном левее сечения с абсциссой *z*, то ее следует *продолжить до правого конца балки*.

Одновременно с этим на участке от сечения *n-n* до правого конца балки необходимо приложить нагрузку той же величины, но обратного знака (компенсирующую).

Тогда уравнение для изгибающего момента можно записать как

$$M_z = m(z-a)^0 + F_1(z-b_1) + F_2(z-b_2) + q \frac{(z-c_1)^2}{2} - q \frac{(z-c_2)^2}{2}.$$

Если в полученном уравнении:

- сумму  $F_1(z-b_1) + F_2(z-b_2)$  заменить на  $\sum F_i(z-b_i)$ ;
- сумму  $q \frac{(z-c_1)^2}{2} - q \frac{(z-c_2)^2}{2}$  - на  $\sum q_i \frac{(z-c_i)^2}{2}$ ;

– сумму моментов представить в виде  $\sum m_i(z - a_i)^0$ , то уравнение для изгибающего момента в произвольном сечении на последнем участке будет действительно при любом числе моментов, сосредоточенных сил и интенсивностей распределенных нагрузок, приложенных левее сечения с координатой  $z$ :

$$M = \sum m_i(z - a_i)^0 + \sum F_i(z - b_i) + \sum q_i \frac{(z - c_i)^2}{2},$$

где  $i$  – номер нагрузки, приложенной к балке;  $a_i$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены моменты;  $b_i$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены сосредоточенные силы;  $c_i$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых начинается действие распределенных нагрузок.

Поскольку  $1 = 1!$ ;  $1 \cdot 2 = 2!$ ;  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ ;  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$ , последнее выражение можно представить в следующем виде:

$$M = \sum m_i(z - a_i)^0 + \sum \frac{F_i(z - b_i)}{1!} + \sum \frac{q_i(z - c_i)^2}{2!}. \quad (7.38)$$

Подставим (7.38) в приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (7.32) и, с учетом постоянства жесткости сечения балки  $EI$ , получим

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = EI y'' = M = \sum m_i(z - a_i)^0 + \sum \frac{F_i(z - b_i)}{1!} + \sum \frac{q_i(z - c_i)^2}{2!}. \quad (7.39)$$

Интегрируем данное уравнение, не раскрывая скобок, т. е. по  $d(z - a)$ ,  $d(z - b)$ ,  $d(z - c)$ .

Иначе говоря, например,  $\int \sum M dz$  записываем в виде  $\int M(z - a)^0 d(z - a)$ , что скажется только на величине  $C_m$ .

Интегрируя один раз, получим выражение для угла поворота, второй раз – для прогиба:

$$EI y' = EI \theta = \int M dz = \sum m_i \frac{(z - a_i)}{1!} + \sum F_i \frac{(z - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{3!} + C_m; \quad (7.40)$$

$$EI y = \int EI \theta dz = \sum m_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \sum F_i \frac{(z - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{4!} + C_m z + D_m, \quad (7.41)$$

где  $C_m$  и  $D_m$  – постоянные интегрирования, которые относятся к произвольному участку  $m$  балки.

Определим эти постоянные интегрирования, для чего рассмотрим два соседних участка балки:  $m$  и  $m+1$  (рис. 7.24).

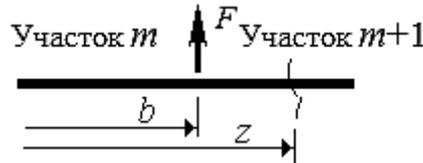


Рис. 7.24. К определению постоянных интегрирования

Для участка  $m$

$$EI \theta_m = A_z + C_m; \quad EI y_m = B_z + C_m z + D_m.$$

Здесь  $A_z$  и  $B_z$  – правые части уравнений (7.39) и (7.40) без членов, содержащих постоянные интегрирования.

Для участка  $m + 1$

$$EI \theta_{m+1} = A_z + P \frac{(z - b)^2}{2!} + C_{m+1}; \quad EI y_{m+1} = B_z + P \frac{(z - b)^3}{3!} + C_{m+1} z + D_{m+1}.$$

Но на границе участков, т. е. при  $z = b$ ,

$$EI \theta_m = EI \theta_{m+1}; \quad EI y_m = EI y_{m+1}.$$

Следовательно,

$$A_b + C_m = A_b + C_{m+1}; \quad C_m = C_{m+1};$$

$$B_b + C_m b + D_m = B_b + C_{m+1} b + D_{m+1}; \quad D_m = D_{m+1}.$$

Обобщая, для участков  $m + 1$  и  $m + 2$  получим

$$C_{m+1} = C_{m+2}; \quad D_{m+1} = D_{m+2}.$$

Окончательно

$$C_m = C_{m+1} = C_{m+2} = \dots = C; \quad D_m = D_{m+1} = D_{m+2} = \dots = D.$$

Таким образом, постоянные интегрирования  $C$  и  $D$ , входящие в соотношения (7.40) и (7.41), одинаковы для всех участков (от первого до последнего) балки.

Для определения  $C$  и  $D$  составим выражения  $\theta_0$  и  $y_0$  для левого конца балки (для сечения с координатой  $z = 0$ ). Для этого сечения все расстояния  $a$ ,  $b$ ,  $c$  будут равны нулю, следовательно,

$$EI \theta_0 = C; \quad EI y_0 = D. \quad (7.42)$$

Тогда уравнения (7.39) и (7.40) – уравнения метода начальных параметров, примут вид:

$$EI \theta = EI \theta_0 + \sum m_i \frac{z - a_i}{1!} + \sum F_i \frac{(z - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{3!}; \quad (7.43)$$

$$EI y = EI y_0 + EI \theta_0 z + \sum m_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \sum F_i \frac{(z - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{4!}. \quad (7.44)$$

Нагрузки  $F$  и  $m$ , приложенные к левому крайнему концу балки (начальное сечение балки), а также перемещения  $\theta_0$  и  $y_0$  этого конца называются начальными параметрами. Используя значения этих параметров, по уравнениям (7.42) можно определить углы поворота  $\theta$  и прогибы  $y$  любых сечений балки (уравнения (7.43) и (7.44)).

При определении углов поворота и прогибов необходимо следовать правилам:

- учитывать все нагрузки, приложенные к балке слева от сечения;
- нельзя включать нагрузки, расположенные правее от сечения;
- обычно записывают уравнения для всей балки, вертикальной чертой отделяя слагаемые, входящие в каждый из участков;

- в нижней части черты ставится номер участка, например:  $|_I, |_{II}, |_{III}$  и т. д.

Для определения начальных параметров для балок используют граничные условия – условия на опорах (рис. 7.25).

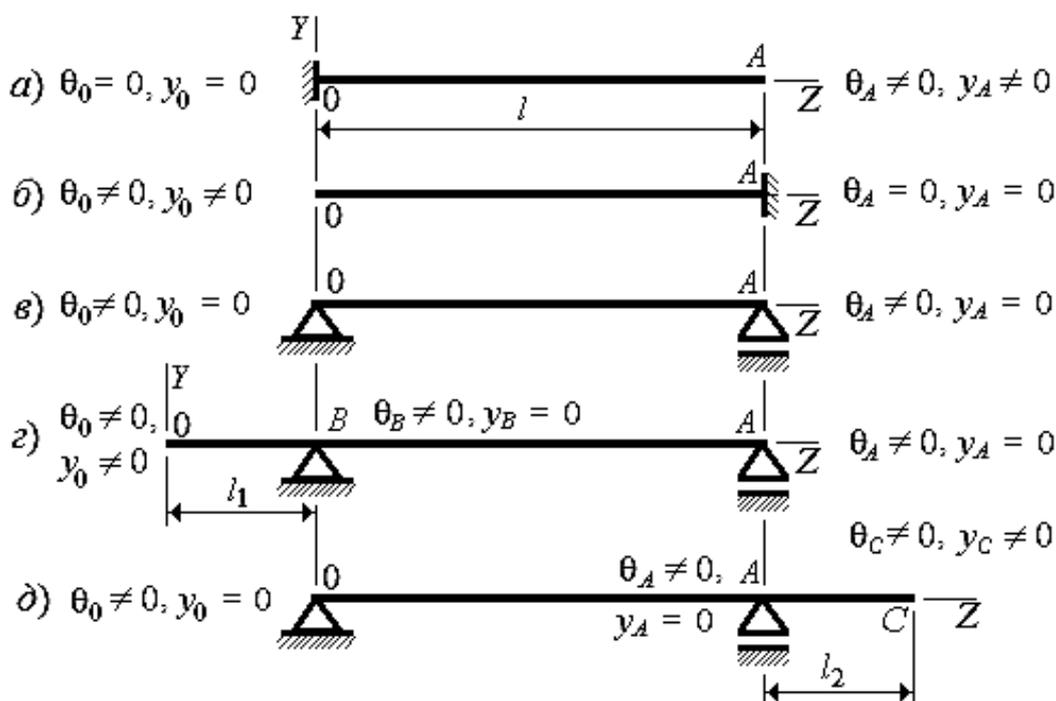


Рис. 7.25. Определение начальных параметров по условиям на опорах

В заделке отсутствуют угловые и линейные перемещения, а на шарнирных опорах – только линейные, поэтому (см. рис. 7.25):

- на схеме а – при  $z = 0$  (точка  $O$ )  $\theta_0 = 0, y_0 = 0$ ;
- на схеме б – при  $z = l$  (точка  $A$ )  $\theta_A = 0, y_A = 0$ ;
- на схеме в – при  $z = 0$  (точка  $O$ )  $y_0 = 0$ ; при  $z = l$  (точка  $A$ )  $y_A = 0$ ;
- на схеме г – при  $z = l_1$  (точка  $B$ )  $y_B = 0$ ; при  $z = l + l_1$  (точка  $A$ )  $y_A = 0$ ;
- на схеме д – при  $z = 0$  (точка  $O$ )  $y_0 = 0$ ; при  $z = l$  (точка  $A$ )  $y_A = 0$ .

Алгоритм решения задачи по определению перемещений методом начальных параметров следующий.

1. Для заданной схемы балки определяются опорные реакции.
2. Балка разбивается на участки (как при построении эпюр).
3. Записываются уравнения начальных параметров для прогиба – чаще всего (или для прогиба и угла поворота, или только для угла поворота) для последнего участка (в общем виде), в соответствии с формулами (7.43) и (7.44).
4. В соответствии с рис. 7.25 записывается система уравнений, решая которую определяют начальные параметры.
5. Записываются и решаются уравнения для определения искомым перемещений.

## 7.7. Рациональные поперечные сечения балок

Рациональным называют сечение, которое обладает минимальным весом (материалоемкостью) при обеспечении требуемой прочности, жесткости и долговечности. Основываясь на зависимостях (7.14)–(7.16), можно высказать несколько практических рекомендаций, касающихся выбора рациональных поперечных сечений.

Пусть величина максимальных напряжений в поперечном сечении, в соответствии с формулой Навье, близка к значению допускаемого напряжения. С изменением формы и размеров поперечного сечения эти напряжения могут значительно уменьшиться, и такое сечение уже не будет рациональным. Поэтому стремятся проектировать сечение бруса таким, чтобы по всей его длине напряжения были одинаковыми, т. е. чтобы обеспечивалась *равнопрочность бруса*. Но это не всегда удается осуществить на практике, особенно при изгибе бруса.

Рациональности сечения при изгибе балок добиваются:

- 1) выбором формы сечения;
- 2) выбором размеров сечения;
- 3) ориентацией сечения относительно силовой плоскости;
- 4) размещением опорных устройств.

**Пример 1.** При изгибе наиболее нагруженные слои сечения – те, которые располагаются на наибольшем удалении от нейтрального слоя и в которых сосредоточена основная масса материала. Поэтому рациональны с этой точки зрения сечения, имеющие, например, форму двутавра или швеллера, а не прямоугольные (рис. 7.26).

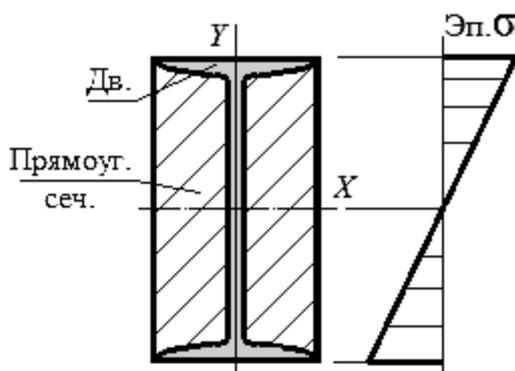


Рис. 7.26. К сравнению прямоугольной и двутавровой форм сечения

Докажем это утверждение на примере 1. Сравним две формы сечения. Задачу сформулируем следующим образом.

Для стальной балки, нагруженной в соответствии с рис. 7.27, а, определить размеры прямоугольного поперечного сечения (рис. 7.27, б), если  $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$ . Сравнить площади прямоугольного и двутаврового поперечных сечений, имеющих близкие значения осевого момента сопротивления.

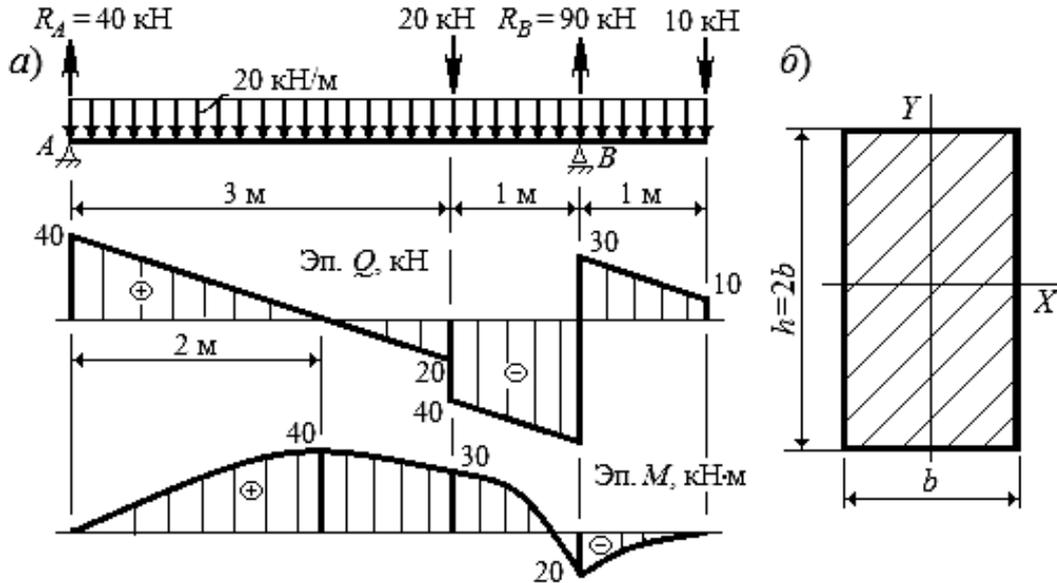


Рис. 7.27. К примеру 1

Определение опорных реакций и построение эпюр подробно не рассматриваем.

Из условия прочности по нормальным напряжениям для максимального изгибающего момента определяем расчетную величину осевого момента сопротивления, при которой будет обеспечена прочность сечения:

$$W_X^{\text{расч}} = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 200 \text{ см}^3.$$

Осей момент сопротивления прямоугольного сечения выразим через искомую ширину  $b$ , его величина не должна быть меньше расчетного значения:

$$W_X^{\text{прямоуг}} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b \geq W_X^{\text{расч}} = 200 \text{ см}^3.$$

Тогда ширина сечения

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{2}} = 0,067 \text{ м}.$$

Высота  $h = 2b = 0,134$  м. Тогда площадь поперечного сечения прямоугольника  $A_{\text{прямоуг}} = 0,067 \cdot 0,134 = 0,00898 \text{ м}^3 = 89,8 \text{ см}^3$ .

По таблице сортамента выбираем двутавр № 20а, для которого осевой момент сопротивления  $W_X = 203 \text{ см}^3$ , а площадь поперечного сечения  $A = 28,9 \text{ см}^2$ .

Таким образом, площадь прямоугольного сечения более чем в 3 раза больше площади двутаврового сечения:

$$\frac{A_{\text{прямоуг}}}{A_{\text{дв}}} = \frac{89,8}{28,9} = 3,12.$$

С увеличением осевого момента инерции сечения жесткость сечения повышается.

Чем большим будет отношение осевого момента инерции к площади сечения, тем прогиб балки будет меньше.

**Пример 2.** Чем меньше площадь поперечного сечения и больше осевые моменты сопротивления и инерции, тем более рациональны размеры этого сечения. Например, прямоугольное сечение рациональнее квадратного при равных площадях (рис. 7.28).

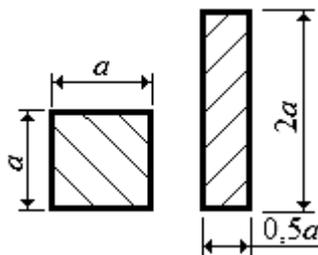


Рис. 7.28. Квадратное и прямоугольное сечения с одинаковой площадью сечения

Площадь обоих сечений одинакова:  $A = a^2$ . Осевые моменты сопротивления отличаются в 2 раза:

$$W_X = \frac{bh^2}{6}; \quad W_X^{\text{квадр}} = \frac{a^3}{6}; \quad W_X^{\text{прямоуг}} = \frac{0,5a(2a)^2}{6} = \frac{a^3}{3}; \quad W_X^{\text{прямоуг}} = 2W_X^{\text{квадр}}.$$

Поэтому и максимальные напряжения при данном значении изгибающего момента  $M_X$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_X}{W_X}; \quad \sigma_{\text{max}}^{\text{квадр}} = \frac{6M_X}{a^3}; \quad \sigma_{\text{max}}^{\text{прямоуг}} = \frac{3M_X}{a^3}; \quad \sigma_{\text{max}}^{\text{квадр}} = 2\sigma_{\text{max}}^{\text{прямоуг}}.$$

Таким образом, при равенстве площадей, а следовательно, и материалоемкости прямоугольное сечение намного выгоднее квадратного, т. к. максимальные напряжения в нем в два раза меньше, чем в квадратном.

С позиций выбора размеров сечений наиболее рациональным является «копирование» эпюры изгибающих моментов. Получаем балку равного сопротивления. Но плавные очертания сложны в изготовлении, поэтому выполняют брус со ступенчатой формой сечений, близкой к очертанию эпюры (рис. 7.29).

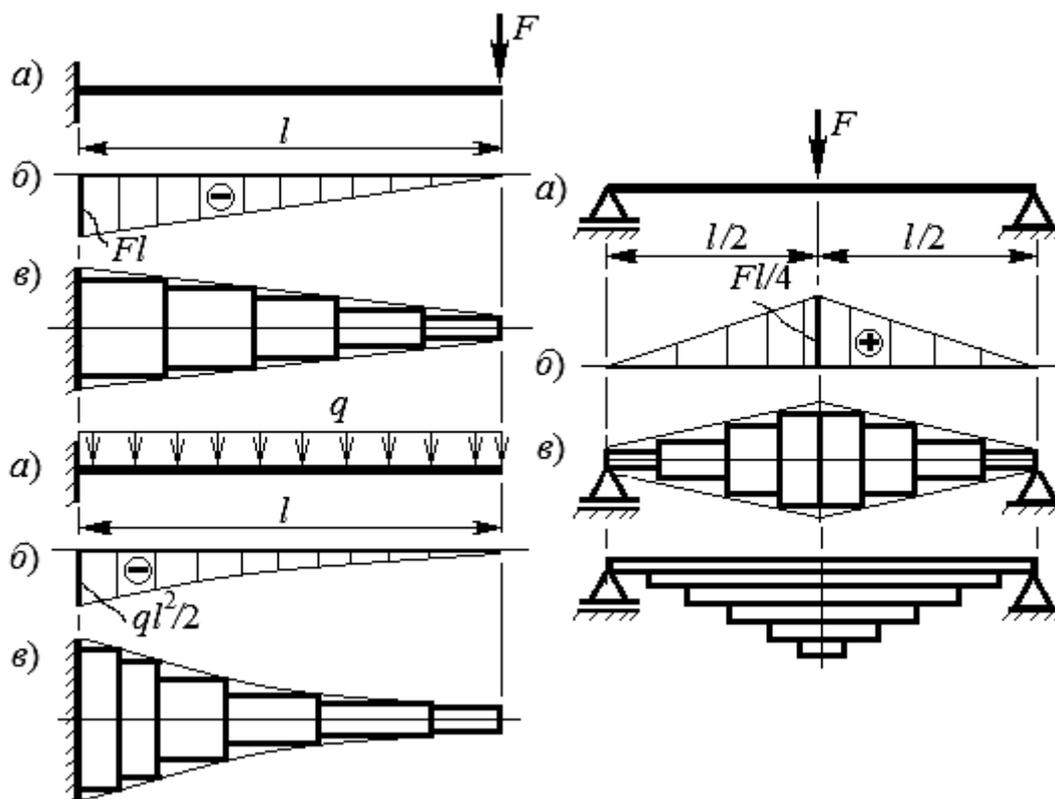


Рис. 7.29. Балки, близкие по форме к балкам равного сопротивления: *a* – схема нагружения; *б* – эпюра изгибающего момента; *в* – ступенчатая форма сечения балки равного сопротивления; *г* – брус равного сопротивления в виде рессоры

**Пример 3.** *Ориентация сечения относительно силовой плоскости с точки зрения рациональности связана со свойствами материала бруса. Если балка изготовлена из пластичного материала, то нейтральная ось (она же ось симметрии) должна совпадать с главной центральной осью, для которой  $I = I_{\max}$ .*

*Если материал балки хрупкий, то необходимо стремиться к тому, чтобы нейтральная ось сечения была сдвинута в сторону растянутой зоны, т. е. сечение ориентируется так по отношению к нейтральной оси, чтобы большая часть его площади была сжата. Рассмотрим пример (рис. 7.30).*

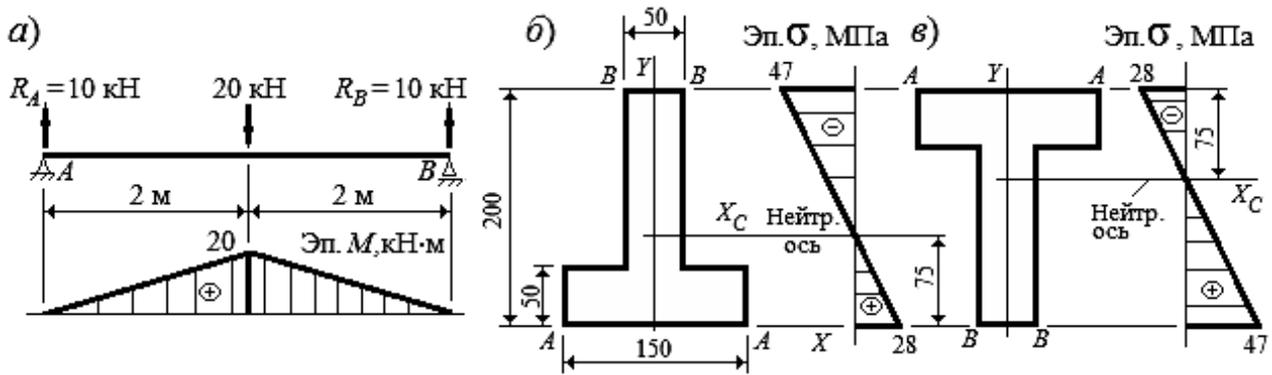


Рис. 7.30. Распределение нормальных напряжений в зависимости от ориентации сечения по отношению к силовой плоскости

Балка из хрупкого материала нагружена в соответствии со схемой (см. рис. 7.30, а). Значения допускаемых нормальных напряжений: при растяжении  $[\sigma]_p = 30$  МПа, при сжатии  $[\sigma]_{сж} = 60$  МПа. Поперечное сечение балки – тавровое (см. рис. 7.30, б). Проверить прочность указанного сечения. Определить экстремальные напряжения сечения, повернутого на  $180^\circ$  (см. рис. 7.30, в).

Определяем опорные реакции, строим эпюру изгибающих моментов. Из эпюры: максимальный момент равен 20 кН·м. Сжаты верхние волокна.

В случае сложного сечения необходимо определить положение главных центральных осей инерции сечения.

По известным формулам (приложение А, «Геометрические характеристики плоских сечений») определяем положение центра тяжести таврового сечения (см. рис. 7.30, б) относительно осей  $X$  и  $Y$ . Сечение симметрично относительно оси  $Y$ , поэтому центр тяжести лежит на этой оси ( $x_C = 0$ ). Координата  $y_C$ :

$$y_C = \frac{\sum S_{X_i}}{\sum A_i} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 5 \cdot 12,5}{15 \cdot 5 + 15 \cdot 5} = 7,5 \text{ см.}$$

Оси  $X_C$  и  $Y$  – главные центральные оси сечения. Ось  $X_C$  (нейтральной оси сечения) не симметрична по высоте сечения.

Осей момент инерции сечения относительно оси  $X_C$  (нейтральной оси сечения)

$$I_{X_C} = \sum (I_{X_i} + a_i^2 A_i) = \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 = 5313 \text{ см}^4.$$

## Осевые моменты сопротивления сечения

$$W_{A-A} = \frac{I_{Xc}}{|y_{A-A}|} = \frac{5313}{7,5} = 710 \text{ см}^3;$$

$$W_{B-B} = \frac{I_{Xc}}{|y_{B-B}|} = \frac{5313}{12,5} = 430 \text{ см}^3.$$

Таким образом, максимальные напряжения в слоях  $A-A$  и  $B-B$  сечения (см. рис. 7.30, б)

$$\sigma_{A-A} = \frac{M_{\max}}{W_{A-A}} = \frac{20 \cdot 10^3}{710 \cdot 10^{-6}} = 0,028 \cdot 10^9 \text{ Па} = 28 \text{ МПа} < [\sigma]_p = 30 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B-B} = \frac{M_{\max}}{W_{B-B}} = \frac{20 \cdot 10^3}{430 \cdot 10^{-6}} = 0,047 \cdot 10^9 \text{ Па} = 47 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}} = 60 \text{ МПа}.$$

Видно, что при повороте сечения на  $180^\circ$  максимальные по модулю напряжения сжатия, равные 28 МПа, будут меньше  $[\sigma]_{\text{сж}} = 60$  МПа, а величина максимальных растягивающих напряжений (47 МПа) значительно превысит  $[\sigma]_p = 30$  МПа.

Поперечное сечение необходимо располагать так, чтобы силовая плоскость (плоскость действия изгибающего момента) была перпендикулярна оси *максимума* – главной центральной оси. Жесткость балки в этом случае будет наибольшей.

**Пример 4.** *Опорные устройства размещаются по длине балки так, чтобы максимальные изгибающие моменты в опасных сечениях были близкими по величине.* Опоры сближают, вводят две консоли, а также дополнительные опоры. Наивыгоднейшее размещение опор и оптимальная длина консолей успешно определяются методами строительной механики. При этом удается снизить максимальный изгибающий момент в 4...6 раз, а наибольший прогиб – в 10...15 раз.

Достаточно подробно вопросы рациональности рассмотрены П. А. Степным в его классическом учебнике по сопротивлению материалов [12].

Разработаны критерии, с помощью которых анализируется рациональность балки по прочности и жесткости. Для оценки рациональности задаются эталоном – наиболее рациональной формой сечения. С эталоном сравнивают значения критериев, вычисляемых по формулам, приведенным в табл. 7.2.

Например, для балок из пластичного материала эталон – двутавровое сечение, а из хрупких – тавровое. Геометрические характеристики сечений – эталонов должны удовлетворять условиям прочности и жесткости.

Табл. 7.2. Критерии рациональности сечений при изгибе

Критерий	Формула	Единица измерения
Осевой удельный момент сопротивления	$w = \frac{W}{\sqrt{A^3}}$	$\frac{M^3}{\sqrt{(M^2)^3}}$ (безразмерный)
Осевой удельный момент инерции	$n = \frac{I}{A^2}$	$\frac{M^4}{(M^2)^2}$ (безразмерный)
Приведенная прочность	$t = \frac{W}{A}$	$\frac{M^3}{M^2} = M$
Приведенная жесткость	$k = \frac{I}{A}$	$\frac{M^4}{M^2} = M^2$
Удельная прочность	$\frac{\sigma_{0,2}}{\gamma}; \frac{\sigma_B}{\gamma}$	$\frac{H \cdot M^3}{M^2 \cdot H} = M$
Удельная жесткость	$\frac{E}{\gamma}$	$\frac{H \cdot M^3}{M^2 \cdot H} = M$
Обобщенный прочностно-жесткостный	$\frac{\sigma_{0,2} E}{\gamma}$	$\frac{H \cdot H \cdot M^3}{M^2 \cdot M^2 \cdot H} = H/M$

**Примечание.** А – площадь поперечного сечения;  $\gamma$  – удельный вес материала.

Количественная оценка рациональности формы сечения (по затратам материала) может быть выполнена по осевому удельному моменту сопротивления  $w$  (табл. 7.3), величина которого зависит только от формы сечения, или по удельному моменту инерции  $n$ .

Табл. 7.3 Значения удельного момента сопротивления для некоторых сечений

Форма сечения	$w$
Круг	0,14
Квадрат	0,167
Швеллер	0,57...1,35
Двутавр	1,02...1,51

Зададимся вопросом: насколько рационально прямоугольное сечение по сравнению с эталоном – двутавровым сечением; сечения имеют одинаковые значения осевого момента сопротивления?

Эталон – двутавр № 20:

$$A^{дв} = 26,8 \text{ см}^2; W^{дв} = 184 \text{ см}^3; w^{дв} = \frac{184}{\sqrt{26,8^3}} = 1,33.$$

Прямоугольник со сторонами  $b = 2h$ :  $W^{дв} = W^{пр} = 184 \text{ см}^3$ ;

$$W^{пр} = \frac{bh^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3} = 184 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 184}{2}} = 8,53 \text{ см}^3 \cong 9 \text{ см}^3; \quad h = 2b = 18 \text{ см}^3.$$

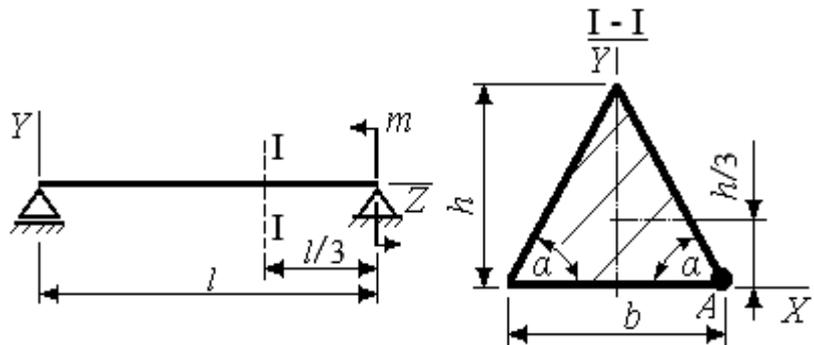
$$A^{пр} = 9 \cdot 18 = 162 \text{ см}^2; \quad w^{пр} = \frac{184}{\sqrt{162^3}} = 0,09.$$

Видим, что *прямоугольное сечение далеко от показателя рациональности.*

Отношение площадей сечений:  $162 : 26,8 = 6,05$ . Вес материала пропорционален площади сечения. Следовательно, *расход материала на изготовление балки прямоугольного сечения более чем в 6 раз превышает расход его на изготовление такой же балки двутаврового сечения.*

### Контрольные вопросы

1. Укажите, под каким номером приведена правильная расчетная формула для определения нормального напряжения в точке  $A$  поперечного сечения I-I:



1)  $\sigma_A = \frac{(m/3)(h/3)}{bh^3/36}$ ;

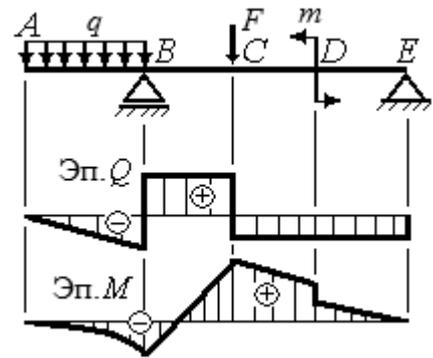
3)  $\sigma_A = -\frac{(m/3)(h/3)}{bh^3/36}$ ;

2)  $\sigma_A = \frac{(2m/3)(h/3)}{bh^3/36}$ ;

4)  $\sigma_A = -\frac{(2m/3)(h/3)}{bh^3/12}$ .

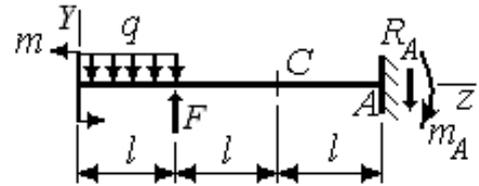


7. Заданы схема нагружения балки и эпюры. Укажите, в каком ответе приведено сечение балки, в котором необходимо брать значения  $Q$  и  $M$ , чтобы проверить прочность балки по теориям прочности:



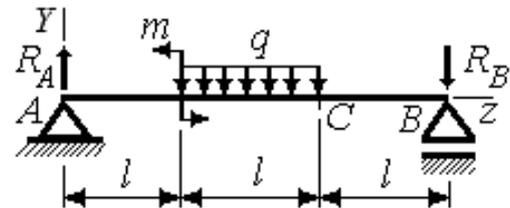
- 1)  $Q_C; M_B$ ;                      3)  $Q_D; M_D$ ;  
 2)  $Q_B; M_C$ ;                      4)  $Q_C; M_C$ .

8. Укажите, в каком ответе записано правильное выражение для определения угла поворота балки в сечении C:



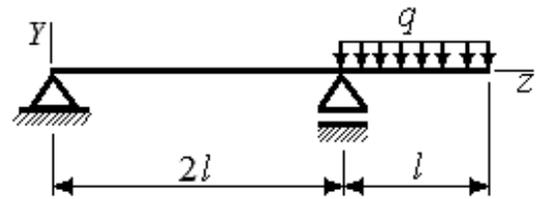
- 1)  $EI\theta_C = EI\theta_0 - m2l - \frac{q(2l)^3}{6} + \frac{ql^3}{6} + \frac{Fl^2}{2}$ ;  
 2)  $EI\theta_C = EI\theta_0 2l - m_A l - \frac{R_A l^2}{2}$ ;  
 3)  $EI\theta_C = EI\theta_0 l - m_A l - \frac{R_A l^2}{2}$ ;  
 4)  $EI\theta_C = EI\theta_0 - m2l - \frac{q(2l)^3}{6} + \frac{Fl^2}{2}$ .

9. Укажите, в каком ответе записано правильное выражение для определения прогиба балки в сечении C:



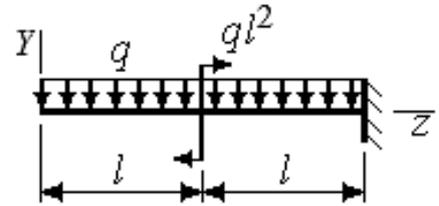
- 1)  $EI y_C = EI\theta_0 - \frac{ml^2}{2} - \frac{ql^4}{24}$ ;  
 2)  $EI y_C = EI\theta_0 2l - \frac{R_B l^3}{6}$ ;  
 3)  $EI y_C = EI\theta_0 2l + \frac{R_A (2l)^3}{6} - \frac{ml^2}{2} - \frac{ql^4}{24}$ ;  
 4)  $EI y_C = EI\theta_0 2l - \frac{ml^2}{2} - \frac{ql^4}{24}$ .

10. Укажите, в каком ответе записано правильное выражение для определения начального параметра  $\theta_0$  балки постоянной жесткости:



- 1)  $\theta_0 = \frac{ql^3}{6EI}$ ;      3)  $\theta_0 = -\frac{ql^3}{3EI}$ ;  
 2)  $\theta_0 = -\frac{5ql^3}{6EI}$ ;      4)  $\theta_0 = \frac{2ql^3}{3EI}$ .

11. Укажите, в каком ответе записано правильное выражение для определения начального параметра  $y_0$  балки постоянной жесткости:



- 1)  $y_0 = -\frac{3ql^4}{2EI}$ ;      3)  $y_0 = \frac{4ql^4}{3EI}$ ;  
 2)  $y_0 = -\frac{2Pl^3}{3EI}$ ;      4)  $y_0 = -\frac{ql^4}{2EI}$ .

## 8. СДВИГ. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

### 8.1. Понятие о чистом сдвиге

При расчете ряда элементов конструкций встречается *частный случай плоского напряженного состояния*, называемый чистым сдвигом (рис. 8.1).

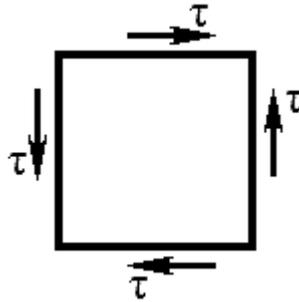


Рис. 8.1. Плоское напряженное состояние – чистый сдвиг

*Чистый сдвиг* – плоское напряженное состояние, при котором по всем четырем граням прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения. Эти грани носят название «*площадки чистого сдвига*». На практике чистый сдвиг не встречается. Это *идеальный вид напряженного состояния*. Но теоретическое рассмотрение чистого сдвига позволит получить ряд важных зависимостей.

*Экспериментально чистый сдвиг можно получить при закручивании тонкостенной трубки* внешним скручивающим моментом  $m$  (рис. 8.2), условно закрепив, например, ее нижнее сечение.

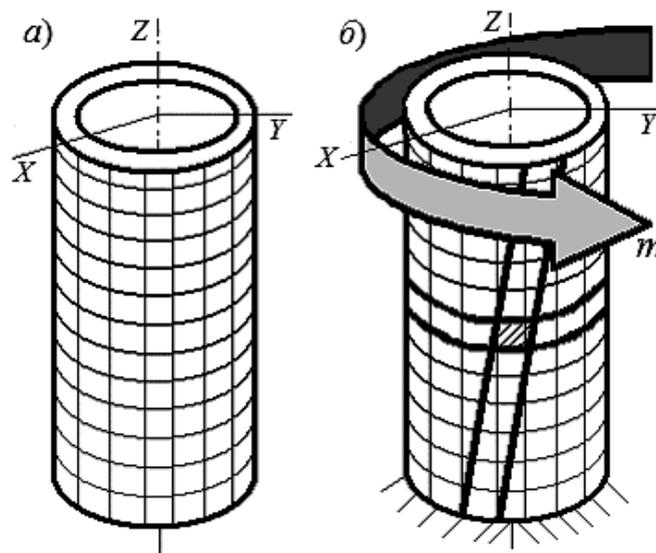


Рис. 8.2. Кручение тонкостенной трубки

Если на боковой поверхности такой трубки *до нагружения* провести окружности и линии, параллельные оси (см. рис. 8.2, а), то после нагружения последние повернутся на некоторый угол, не искривляясь. При этом между этими линиями и окружностями, проведенными на поверхности трубки, можно увидеть элемент, представляющий собой *плоскую фигуру – ромб* (см. рис. 8.2, б). На рисунке для наглядности жирными линиями выделены только соседние, произвольные, пары упомянутых линий (ромб заштрихован). Как покажем далее, такую форму примет квадрат после приложения к его граням касательных напряжений.

## 8.2. Исследование плоского напряженного состояния при чистом сдвиге

### 8.2.1. Главные напряжения

Для анализа чистого сдвига используем уравнения, полученные в теории напряженного состояния (НС) для случая *плоского НС* (рис. 8.3).

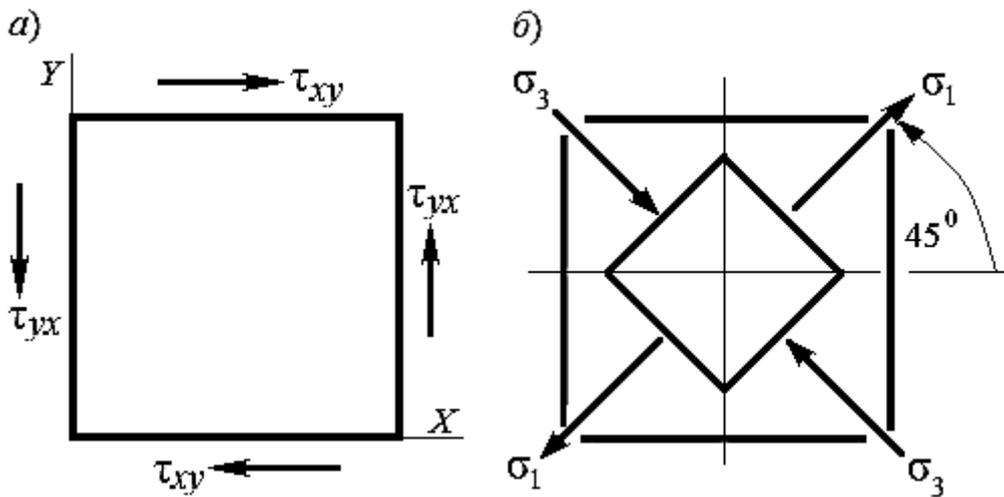


Рис. 8.3. К анализу плоского напряженного состояния – чистого сдвига

Поскольку в данном случае (см. рис. 8.3, а)

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (\tau_{xy} = +\tau, \quad \tau_{yx} = -\tau),$$

то, используя зависимость (см. формулу (6.20))

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

получим

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \tau; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = -\tau; \quad \sigma_2 = 0. \quad (8.1)$$

Положение главных площадок определим по известной формуле (6.19):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau}{0} = +\infty. \quad (8.2)$$

Направление касательного напряжения может меняться, поэтому, в общем случае, для искомого угла имеем знак «±». Таким образом, угол наклона главных площадок к площадкам чистого сдвига (см. рис. 8.3, б)  $2\alpha_0 = \pm 90^\circ$ ,  $\alpha_0 = \pm 45^\circ$ .

*Главные напряжения равны по величине касательным и действуют по площадкам (помним, что они называются главными площадками), наклоненным к площадкам чистого сдвига под углом  $45^\circ$ .*

*Чистый сдвиг представляет собой единственный случай напряженного состояния, при котором экстремальные значения нормальных и касательных напряжений по абсолютной величине равны между собой.*

### 8.2.2. Относительное изменение объема

В соответствии с теорией напряженного состояния относительное изменение объема определяется по формуле (6.33):

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

При чистом сдвиге, с учетом соотношений (8.1), получим

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\tau + 0 - \tau) = 0. \quad (8.3)$$

*Чистый сдвиг является единственным напряженным состоянием, при котором объем тела при его нагружении не изменяется.*

### 8.2.3. Условие прочности при чистом сдвиге

При чистом сдвиге по граням элемента действуют только касательные напряжения, поэтому логично проверку прочности вести по касательным напряжениям.

Для проверки прочности при чистом сдвиге необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (8.4)$$

Поскольку напряженное состояние сложное, для решения задачи используем теории прочности (см. подразд. 6.3).

В соответствии с III теорией прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

С учетом значений главных напряжений (8.1)

$$\tau - (-\tau) \leq [\sigma]; \quad 2\tau \leq [\sigma]; \quad \tau \leq 0,5[\sigma].$$

Таким образом,

$$[\tau]^{\text{III}} = 0,5[\sigma]. \quad (8.5)$$

В соответствии с IV теорией прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

С учетом (8.1) имеем  $\sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma]$ .

Тогда

$$[\tau]^{\text{IV}} = 0,6[\sigma]. \quad (8.6)$$

*Материал бруса сопротивляется сдвигу значительно хуже, чем растяжению.*

### 8.2.4. Удельная потенциальная энергия деформации

Потенциальная энергия, которая накапливается в единице объема при деформации сдвига, может быть определена по формуле (6.37), полученной при рассмотрении теории напряженного состояния:

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right].$$

С учетом соотношений (8.1) имеем

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \tau^2 + 0 + \tau^2 - 2\mu(-\tau^2) \right] = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}. \quad (8.7)$$

## 8.3. Закон Гука при чистом сдвиге

### 8.3.1. Деформация граней элемента

Рассмотрим плоский элемент  $ABCD$  (рис. 8.4). Грань  $AD$  считаем закрепленной. Для упрощения примем, что элемент квадратный – со стороной, равной  $a$ . Под действием касательных напряжений произойдет его деформация. После деформации элемент примет вид  $AB_1C_1D$ . Верхняя грань  $BC$  сместится относительно нижней на величину  $CC_1 = BB_1$ .

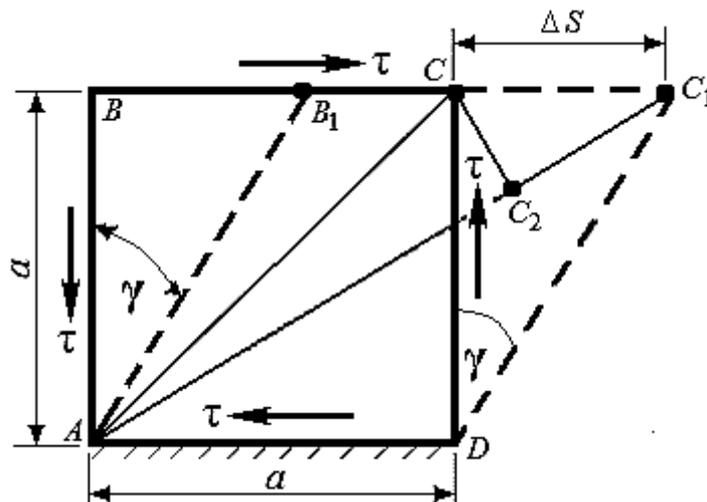


Рис. 8.4. К выводу соотношений линейных и угловых деформаций при чистом сдвиге

Величина абсолютного линейного смещения этой грани обозначается  $\Delta S$  и называется *абсолютным сдвигом*.

Вследствие смещения прямые углы граней квадрата искажутся на величину  $\gamma$ . Как видно из чертежа (см. рис. 8.4),

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (8.8)$$

Так как *действительные деформации весьма малы*, то можно принять, что

$$\operatorname{tg}\gamma = \gamma.$$

Тогда

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (8.9)$$

Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов.

Малый угол  $\gamma$ , на который изменяется первоначально прямой угол, называется *углом сдвига или относительным сдвигом*.

### 8.3.2. Зависимость между напряжениями и деформациями

Для получения зависимости, известной как *закон Гука*, найдем относительное изменение длины диагонали  $AC$  (см. рис. 8.4).

Из чертежа видно, что исходная длина этой диагонали

$$l_{AC} = a\sqrt{2}; \quad AC = \frac{a}{\sin 45^\circ}.$$

Абсолютное линейное удлинение диагонали  $AC$ , согласно чертежу, равно  $C_1C_2$ . В соответствии с принятыми для абсолютных линейных деформаций обозначениями  $C_1C_2 = \Delta l$ .

В силу малости деформаций по сравнению с начальными размерами элемента, треугольник  $CC_2C_1$  можно считать равнобедренным, следовательно,

$$C_1C_2 = CC_1 \cos 45^\circ \quad \text{и} \quad \Delta l = \Delta S \cos 45^\circ.$$

Тогда относительное линейное удлинение диагонали  $AC$ , с учетом того, что

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}{a} = \frac{\Delta S}{2a}.$$

В соответствии с (8.9)  $\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ , следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2}. \quad (8.10)$$

Рассматривая рис. 8.3, б совместно с рис. 8.4, видим, что главное напряжение  $\sigma_1$  действует в направлении диагонали  $AC$ . Поэтому относительное удлинение  $\varepsilon$  этой диагонали есть не что иное, как главное удлинение  $\varepsilon_1$  при плоском напряженном состоянии.

Для вычисления относительной линейной деформации воспользуемся обобщенным законом Гука (см. формулы (6.29)). В данном случае

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Подставив значения напряжений по (8.1), имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{E} (\tau - \mu(-\tau)),$$

или

$$\varepsilon = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (8.11)$$

Приравняв полученные в (8.10) и (8.11) соотношения для относительной деформации, имеем зависимость

$$\tau = \gamma \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.12)$$

Множитель в виде дроби есть постоянная величина, которая называется *модулем упругости II рода (модулем сдвига)* и обозначается  $G$ . Таким образом, произведя замену в формуле (8.12):

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (8.13)$$

получим *формулу закона Гука при чистом сдвиге*

$$\tau = G\gamma. \quad (8.14)$$

#### 8.4. Зависимость между упругими постоянными $G$ , $E$ , $\mu$

Для изотропных материалов между модулем упругости  $G$  при сдвиге и модулем упругости  $E$  при растяжении была получена зависимость (8.13). Эта формула выражает *связь между тремя упругими постоянными* материала.

Например, для малоуглеродистой стали значение модуля сдвига будет

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

#### 8.5. Расчеты на прочность и жесткость при сдвиге

##### 8.5.1. Определение напряжений

С *видом нагружения или с деформацией сдвига* (иногда называют – *среза*) встречаемся, когда из шести компонентов главного вектора внутренних сил  $\bar{R}$  и главного вектора внутреннего момента  $\bar{M}$  *отличны от нуля только поперечные силы*  $Q_X$  или  $Q_Y$ .

С достаточной степенью приближения сдвиг практически может быть получен в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон *на весьма близком расстоянии друг от друга* действуют две равные силы, перпендикулярные оси бруса и направленные навстречу друг другу (рис. 8.5, а). При этом участок бруса между точками приложения силы сдвигается (рис. 8.5, б). Приняв сечение  $ab$  неподвижным, получим смещение сечения  $cd$  в положение  $c_1d_1$ . Если расстояние между сечениями будет близким к нулю, эти сечения будут скользить друг по другу.

Примером такого действия сил на брус может быть *резка ножницами прутьев, полосы* и т. д. при условии, что *сечения, в которых прикладываются силы, расположены очень близко друг к другу*. Если это условие не выполняется, то в сечениях появится изгибающий момент, определяемый силой, умноженной на плечо (расстояние между точками приложения сил).

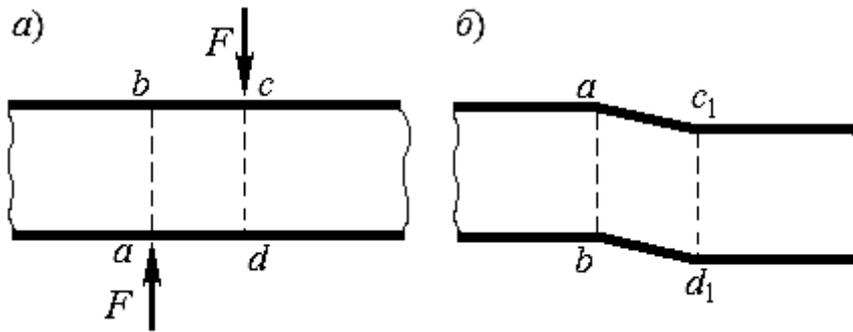


Рис. 8.5. Сдвиг участка бруса между точками приложения сил

На практике сдвиг «в чистом виде» получить трудно, т. к. обычно сдвиг сопровождается другими видами нагружения и чаще всего изгибом (получим смятие).

Если, например, брус заделать одним концом в стену, а к другому приложить силу  $F$  (рис. 8.6, а), то этот брус будет испытывать одновременное действие изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$  – см. поперечный изгиб балки. Однако для очень короткого бруса влияние изгиба будет незначительно и поэтому им можно пренебречь. Таким образом, получим действие только поперечной силы, т. е. сдвиг.

Мысленно рассечем брус сечением I–I и отбросим его левую часть (рис. 8.6, б). Очевидно, что действие отброшенной части на оставшуюся часть бруса будет выражаться через внутреннюю силу  $Q = F$ , приложенную в плоскости сечения. Эта сила, в свою очередь, может быть определена по одному из уравнений (см. уравнения (2.5)) – в данном случае  $Q_y = \int \tau_y dA$ .

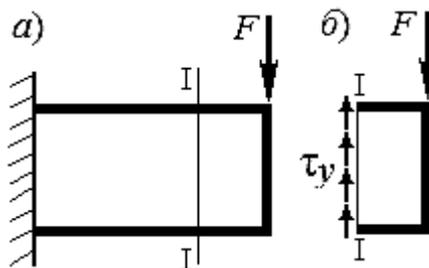


Рис. 8.6. Напряжения при поперечном изгибе короткого консольного бруса (касательные напряжения при сдвиге)

Таким образом, при сдвиге в произвольных сечениях действуют только касательные напряжения, равнодействующей которых и является поперечная сила.

Распределение этих напряжений по площади сечения не будет равномерным, но для упрощения решения практических задач предполагается,

что касательные напряжения при сдвиге распределяются по сечению равномерно. Поэтому величину касательных напряжений при сдвиге можно определить по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (8.15)$$

Формула (8.15) дает не истинное, а среднее значение касательных напряжений.

Допущение о равномерном распределении касательных напряжений по сечению во многих случаях себя оправдывает и поэтому в инженерной практике им широко пользуются при расчете болтов, заклепочных соединений, шпонок, сварных соединений и других деталей.

Условие прочности при сдвиге запишем как

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (8.16)$$

### 8.5.2. Определение деформаций

В формуле закона Гука (8.14) заменим  $\gamma$  – в соответствии с (8.9) и  $\tau$  – в соответствии с (8.15) и получим формулу для определения абсолютного сдвига

$$\Delta S = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Q a}{GA}. \quad (8.17)$$

Формула (8.17) есть так же, как и (8.14), закон Гука при сдвиге и используется для расчета деформаций.

Произведение  $GA$  называется жесткостью поперечного сечения при сдвиге.

По максимальному значению абсолютного сдвига можно проводить проверку жесткости:

$$\Delta S_{\max} = \frac{Q_{\max} a}{GA} \leq [\Delta S], \quad (8.18)$$

где  $[\Delta S]$  – допускаемое значение абсолютного сдвига, мкм, мм, см.

### 8.5.3. Потенциальная энергия при сдвиге

Потенциальная энергия деформации рассматриваемого элемента будет равна работе силы  $Q$ , действующей по грани  $BC$  при чистом сдвиге (см. рис. 8.4):

$$U = \frac{\Delta SQ}{2} = \frac{Q^2 a}{2GA}. \quad (8.19)$$

Удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GAaA} = \frac{Q^2}{2A^2 G} = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Эта же зависимость может быть получена по-другому, если в выражение (8.7) подставить значение модуля сдвига из (8.13):

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (8.20)$$

### 8.5.4. Практические расчеты некоторых простейших соединений, работающих на сдвиг

В некоторых конструкциях по отдельным сечениям действуют *значительные по величине касательные напряжения*. В этих же сечениях действуют, как правило, и нормальные напряжения, однако их величина несравнимо меньше.

В приближенных расчетах учитываются *лишь касательные напряжения*, а указанные сечения при этом рассматриваются как *площадки чистого сдвига*. Такие расчеты называются расчетами на сдвиг (или на срез, на смятие, на скалывание).

#### 8.5.4.1. Заклепочные соединения.

Выясним, как работает заклепка в соединении (рис. 8.7, *a*).

На каждую заклепку передаются от соединяемых листов по две равные и противоположно направленные силы.

Действие отброшенной нижней части заклепочного соединения передается на сечение заклепки в плоскости  $ab$  за счет возникающей в ней поперечной

силы  $Q_Y$  (см. рис. 8.7, б). Усилие, приходящееся на одну заклепку,  $F_i$  точно определить затруднительно.

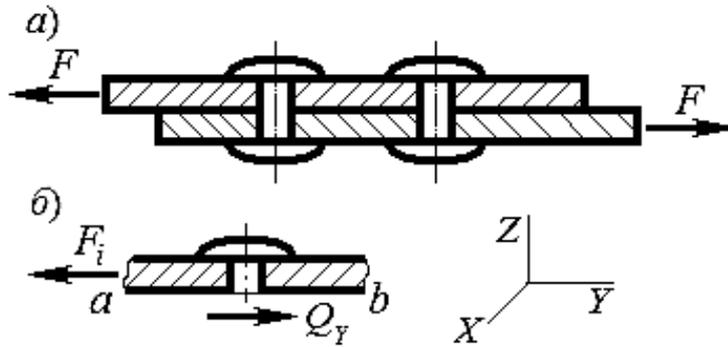


Рис. 8.7. К расчету заклепочного соединения

Опыты показывают, что заклепки в ряду, параллельном линии действия силы, работают неодинаково: одни из них испытывают большее усилие, чем другие, но к моменту разрушения усилия, передающиеся на все заклепки, практически выравниваются за счет пластических деформаций, и поэтому считают, что все заклепки напряжены равномерно.

Следовательно, при  $n$  заклепках в соединении на каждую из них будут приходиться равные и противоположные силы  $F_i = \frac{F}{n}$ , которые стремятся перерезать заклепку по плоскости  $ab$  (см. рис. 8.7, б). В данном случае получаем две плоскости среза. Если используется только одна заклепка, то соединение называют *односрезным*.

Из условия равновесия верхней части соединения (см. рис. 8.7, б) определим величину касательных напряжений, действующих по плоскости среза:

$$\tau = \frac{Q_Y}{A} = \frac{F_i}{A} = \frac{F_i}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{F}{n \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (8.21)$$

где  $d$  – диаметр заклепки;  $n$  – число заклепок в соединении.

Таким образом, условие прочности заклепочного соединения на срез

$$\tau_{\max} = \frac{F}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]. \quad (8.22)$$

Условие прочности (8.22) позволяет, например, определить требуемое количество односрезных заклепок при заданном их диаметре и, наоборот, необходимый диаметр заклепки при заданном их количестве:

$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]}; \quad d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n [\tau]}}. \quad (8.23)$$

Расчет на прочность «многосрезных» заклепок производится по условию прочности

$$\tau = \frac{F}{m n \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau, \quad (8.24)$$

где  $m$  – число плоскостей среза.

#### 8.5.4.2. Сварные соединения.

В настоящее время соединение элементов конструкций производится различными методами сварки. Поэтому типы и виды сварных швов достаточно многообразны. Но наиболее распространены методы сварки плавлением, в частности электродуговой.

*Рассмотрим три основных вида сварных соединений.*

1. *Соединение встык* производят путем заполнения зазора между торцами свариваемых элементов наплавленным металлом.

В зависимости от толщины  $\delta$  свариваемых элементов (рис. 8.8) швы выполняются без зазора или с зазором между свариваемыми листами; без разделки (см. рис. 8.8, а) или с различного вида разделкой кромок, например, U-образной (см. рис. 8.8, б) или X-образной (см. рис. 8.8, в).

*Прочность сварного соединения* для любого вида стыковых швов проверяется по условию прочности на растяжение или сжатие по формуле

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{F}{l_{\text{ш}} \delta} \leq [\sigma]_{\text{ш}}, \quad (8.25)$$

где  $l_{\text{ш}} \delta = A_{\text{ш}}$  – условная рабочая площадь сечения шва, здесь  $l_{\text{ш}} = b$  – расчетная длина сварного шва;  $\delta$  – толщина свариваемых элементов или высота шва (*катет шва*);  $[\sigma]_{\text{ш}}$  – допускаемое напряжение материала сварного соединения.

2. *Соединение внахлестку.* Детали соединяют лобовыми швами или встык при помощи накладок (рис. 8.9).

При этом способе создания сварных соединений швы получаются в виде валиков – так называемые *угловые и тавровые швы*.

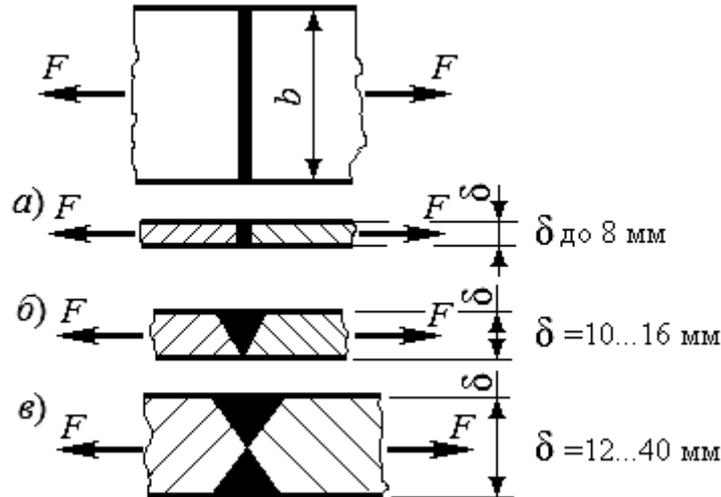


Рис. 8.8. Виды стыковых швов

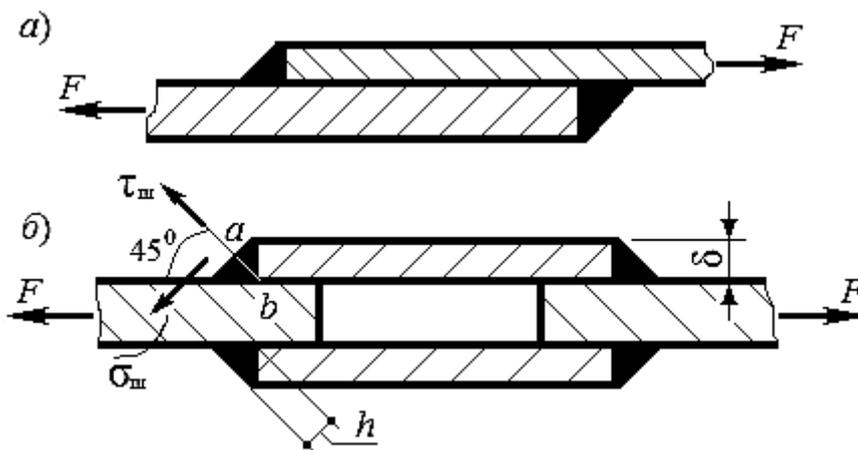


Рис. 8.9. Сварные соединения внахлестку

Опытами установлено, что такие швы в большинстве своём разрушаются по самому слабому сечению  $ab$ . Полное напряжение в этом случае можно разложить на нормальное  $\sigma_{ш}$  и касательное  $\tau_{ш}$ . Так как *сопротивление стали сдвигу меньше*, чем растяжению, расчет лобовых швов *производят на срез* при условии, что касательные напряжения распределяются равномерно по площади сечения  $ab$ .

Касательное напряжение в опасном сечении ( $ab$ ), учитывая восприятие силы  $F$  нижним швом, будет

$$\tau_{\text{ш}} = \frac{F}{2A_{\text{ш}}}, \quad (8.26)$$

где  $A_{\text{ш}} = hl = \delta \cos 45^\circ l = 0,7\delta l$ ;  $l = b$ .

Тогда условие прочности для сварного соединения внахлестку с учетом, что таких шва два,

$$\tau_{\text{ш}} = \frac{F}{2 \cdot 0,7\delta l} \leq [\tau]_{\text{ш}}. \quad (8.27)$$

3. *Соединение фланговыми (фланковыми) швами*, как частный случай соединения внахлестку, отличается тем, что швы расположены параллельно линии действия сил (рис. 8.10).

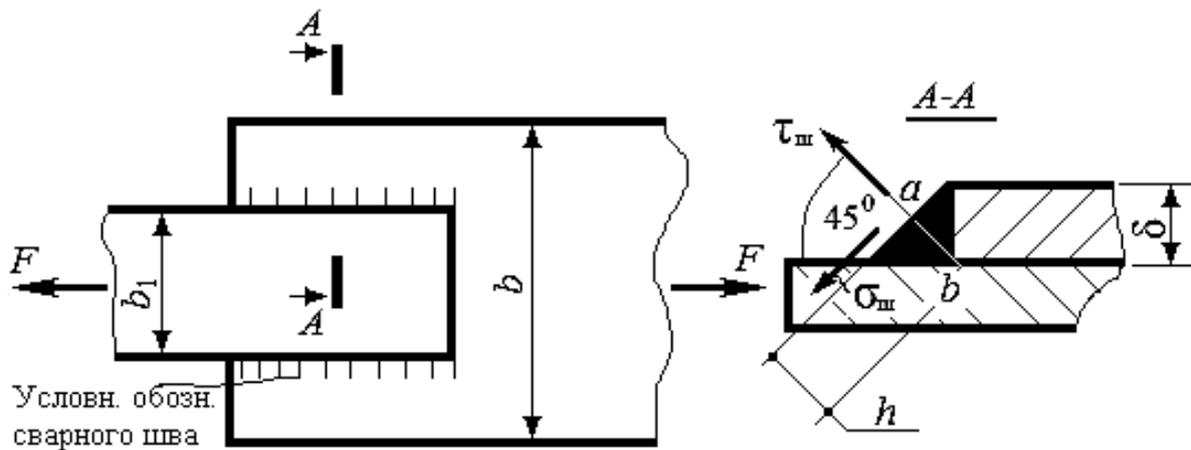


Рис. 8.10. Сварные соединения фланговыми швами

Такие швы разрушаются на большом их протяжении из-за среза наплавленного металла параллельно шву по плоскости  $ab$ .

Условие прочности сварного шва данного вида соединений аналогично (8.27):

$$\tau_{\text{ш}} = \frac{F}{2 \cdot 0,7\delta l} \leq [\tau]_{\text{ш}}. \quad (8.28)$$

## 8.6. Кручение прямого бруса круглого поперечного сечения

Кручением называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_{кр}$  (иногда обозначают  $T$ ). С деформациями кручения приходится встречаться при расчете валов, винтовых пружин и других элементов конструкций.

### 8.6.1. Напряжения в поперечном сечении

Рассмотрим прямой брус круглого сечения, левый конец которого жестко заделан, а к правому концу приложен внешний скручивающий момент (рис. 8.11).

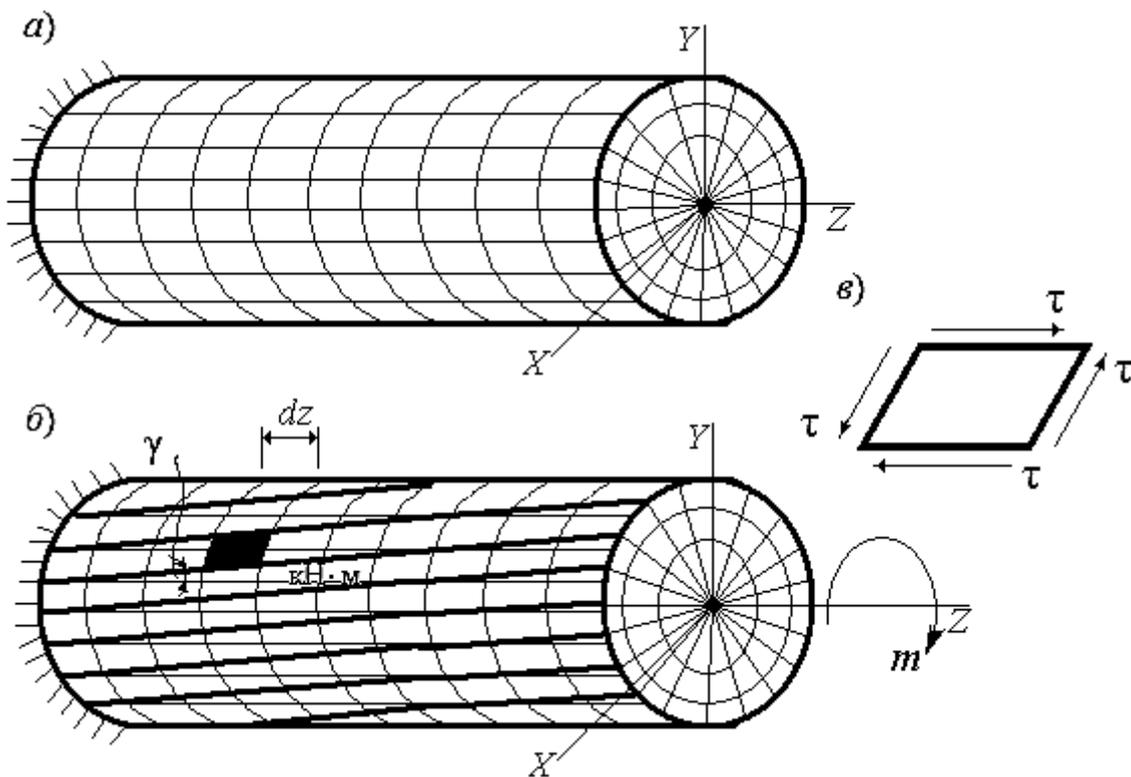


Рис. 8.11. Деформация круглого бруса под действием скручивающего момента

Проведем непосредственный эксперимент в пределах пропорциональности напряжений и деформаций (в пределах действия закона Гука), для чего (см. рис. 8.11, а):

– нанесем на поверхность бруса прямоугольную сетку из линий, параллельных оси, и линий, перпендикулярных оси (окружностей). Такая сетка линий позволяет получить наглядное представление о характере деформаций, вызванных внешним – скручивающим моментом;

- на свободном торце бруса проведем концентрические окружности и радиусы;
- нагрузим свободный торец бруса скручивающим моментом  $m$ .

Результаты эксперимента следующие (см. рис. 8.11, б).

1. *Прямоугольная сетка*, выполненная на поверхности бруса, превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях бруса, а по закону парности равных им по величине касательных напряжений – и в продольных сечениях бруса.

Круговые сечения бруса при кручении поворачиваются вокруг своей оси как жесткое целое.

2. *Расстояние между любыми двумя соседними поперечными сечениями останется без изменения*. Поэтому не изменится и длина стержня.

Расстояния между поперечными круговыми сечениями остаются постоянными.

Это свидетельствует об отсутствии нормальных напряжений в поперечных и продольных сечениях.

3. *Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину*. Следовательно, не изменится диаметр бруса.

4. *Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней после деформации (гипотеза плоских сечений)*, они лишь поворачиваются вокруг этой оси.

Таким образом, при кручении в поперечных и продольных сечениях бруса действуют только касательные напряжения, т. е. напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой чистый сдвиг (см. рис. 8.11, в).

Формулы, выведенные на основе этих положений, совпадают с формулами, полученными точными методами теории упругости, и подтверждаются экспериментально.

Для установления закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению скручиваемого бруса рассмотрим более детально его деформации.

Двумя поперечными сечениями выделим из бруса (см. рис. 8.11, а) цилиндр элементарной длины  $dz$  (рис. 8.12).

Радиус этого цилиндра  $\rho$ . Правое сечение цилиндра  $m-m$  мысленно закрепим, а левое сечение  $n-n$  повернем на элементарно малый угол  $d\varphi$ , приложив к нему скручивающий момент  $m$ .

Образующая цилиндра  $ab$  при этом повернется и займет положение  $ab'$ , образовав угол  $\gamma$ .

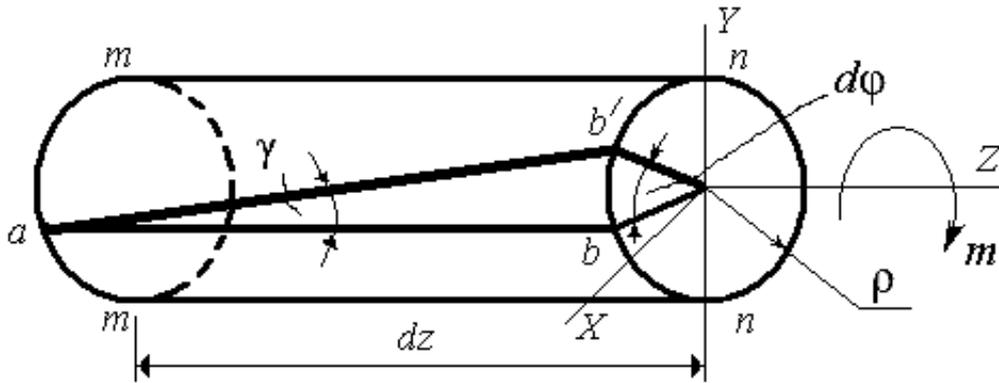


Рис. 8.12. Закручивание участка бруса длиной  $dz$  и радиусом  $\rho$

Угол  $\varphi$ , рад, называется *абсолютным углом закручивания* одного сечения относительно другого.

Угол  $\gamma$  называется *относительным сдвигом* (углом сдвига). Является *безразмерной величиной*. Определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma = \frac{bb'}{ab}. \quad (8.29)$$

С учетом того, что  $ab = dz$ , а  $bb' = \rho d\varphi$ , формулу (8.29) можно записать как

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (8.30)$$

Отношение  $\frac{d\varphi}{dz}$  обозначается  $\theta$ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (8.31)$$

Угол  $\theta$ , рад/м, называется *относительным углом закручивания*.

Введя в формулу (8.30) значение  $\theta$  из (8.31), получаем зависимость

$$\gamma = \theta \rho. \quad (8.32)$$

В соответствии с законом Гука при сдвиге ( $\tau = G\gamma$ ) выражение для касательного напряжения  $\tau$  в любой точке поперечного сечения круглого бруса на расстоянии  $\rho$  от центра примет вид:

$$\tau = G \theta \rho. \quad (8.33)$$

В соответствии с законом парности касательных напряжений в продольных плоскостях также должны возникнуть касательные напряжения (в плоскостях, параллельных оси бруса). Поясним на примере.

Рассмотрим поперечное сечение круглого бруса радиусом  $r$  в цилиндрической системе координат (рис. 8.13, *a*), вырезав на радиусе  $\rho$  элемент длиной  $dz$  с толщиной  $d\rho$  (рис. 8.13, *б*).

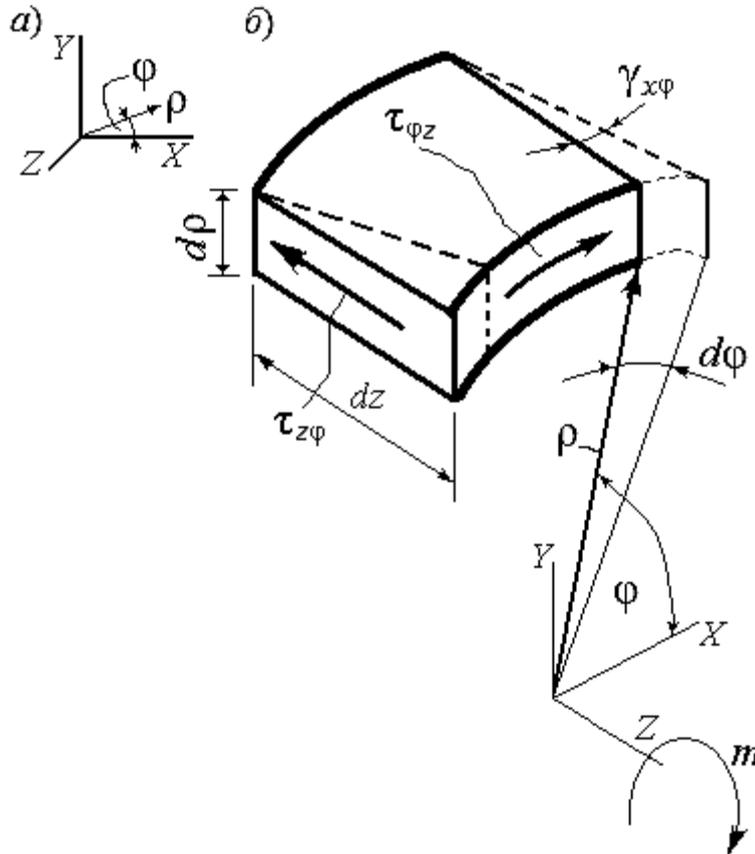


Рис. 8.13. Деформации и напряжения в элементарном слое сечения бруса

После нагружения скручивающим моментом  $m$  элемент деформируется, причем

$$\gamma_{x\varphi} \neq 0; \quad \gamma_{x\rho} = \gamma_{\rho\varphi} = 0; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_\rho = \varepsilon_\varphi = 0.$$

В выделенном элементарном слое  $d\rho$  возникнут касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} \neq 0; \quad \tau_{x\varphi} = \tau_{\rho\varphi} = 0; \quad \sigma_z = \sigma_\rho = \sigma_\varphi = 0.$$

Рассмотрим поперечное сечение бруса диаметром  $D$  (рис. 8.14, а).

Элементарные силы  $\tau dA$  приводятся к крутящему моменту  $M_{кр}$  (рис. 8.14, б):

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA. \quad (8.34)$$

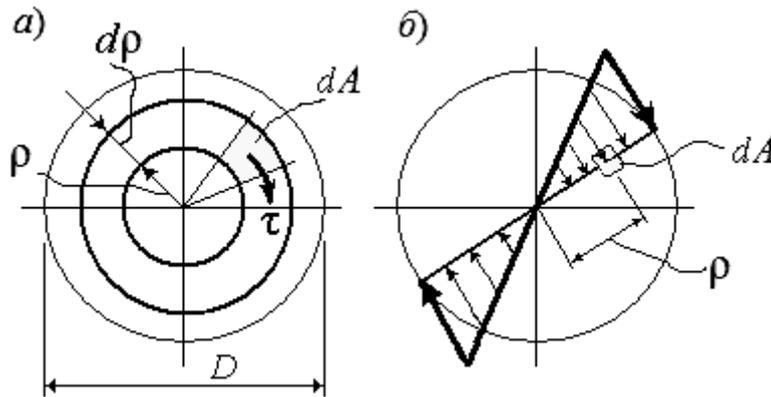


Рис. 8.14. Касательные напряжения (а) и эпюра их распределения (б)

Подставляя в функцию под интегралом формулу для касательных напряжений (8.33), получим выражение для крутящего момента в поперечном сечении

$$M_{кр} = G\theta \int_A \rho^2 dA.$$

В этой формуле  $I_\rho = \int_A \rho^2 dA$  – геометрическая характеристика сечения (полярный момент инерции). Получаем выражение

$$M_{кр} = G\theta I_\rho.$$

Таким образом, *относительный угол закручивания*

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_\rho}, \quad (8.35)$$

где  $GI_\rho$  – *жесткость бруса при кручении*.

Через относительный угол закручивания  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$  определяется величина взаимного угла поворота сечений – *абсолютный угол закручивания*  $\varphi$ :

$$d\varphi = \theta dz = \frac{M_{\text{кр}} dz}{GI_{\rho}},$$

откуда получаем зависимость

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\text{кр}} dz}{GI_{\rho}}. \quad (8.36)$$

Для вала постоянного поперечного сечения при постоянном по длине  $l$  крутящем моменте его абсолютный угол закручивания определяется формулой

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_{\rho}}. \quad (8.37)$$

Данная формула описывает закон Гука при кручении.

Отношение  $\frac{GI_{\rho}}{l}$  называют *крутильной жесткостью* бруса.

Если в формуле (8.33) заменить  $\theta$ , подставив выражение (8.35), то получим формулу для определения касательных напряжений при кручении

$$\tau = G\theta\rho = G \frac{M_{\text{кр}} \rho}{GI_{\rho}},$$

или окончательно

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{I_{\rho}}. \quad (8.38)$$

### 8.6.2. Эпюра касательных напряжений

Используя вышеполученную формулу, строят эпюру напряжений (см. рис. 8.14, б).

*Касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении распределяются вдоль радиуса по линейному закону и имеют наибольшие значения в точках, наиболее удаленных от оси бруса.*

### Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \rho_{\max}}{I_{\rho}}, \quad (8.39)$$

где  $\frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления сечения.

Таким образом, окончательно получаем формулу для определения максимальных касательных напряжений круглого бруса постоянного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_{\rho}}. \quad (8.40)$$

### 8.6.3. Условие прочности

Исходя из формулы для определения максимального касательного напряжения при кручении (8.40), условие прочности при кручении записывается как

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau]. \quad (8.41)$$

**Замечания.** Для бруса постоянного сечения берется максимальное значение крутящего момента ( $M_{\text{кр max}}$ ).

Если брус *ступенчатый* (имеет участки разного диаметра), то определяется *опасное сечение* – то сечение, где отношение крутящего момента к полярному моменту сопротивления имеет наибольшее значение (по модулю). В таком случае удобно определять это сечение **по эпюре распределения касательных напряжений по длине бруса**.

Как было показано ранее (см. формулы (8.5) и (8.6)), допускаемое касательное напряжение равно  $\approx(0,5...0,6)$  от значения допускаемого нормального напряжения.

*Из условия прочности при кручении решаются три типа задач.*

1. **Проверка прочности** (проверочный расчет).

В этом случае из эпюры известно опасное сечение (значение  $M_{\text{кр max}}$  или  $\tau_{\max}$ ) и заданы размеры сечения (диаметр) вала.

Определяются максимальные напряжения (по формуле (8.41)), которые сравниваются с допускаемыми напряжениями. При этом величина макси-

мальных касательных напряжений может быть больше, чем допускаемые напряжения, но не должна превышать 5 %.

## 2. Подбор сечения (проектировочный расчет).

По известному значению  $M_{кр \max}$  (из эпюры) и заданному значению  $[\tau]$  определяют требуемое значение диаметра вала.

Неравенство (8.41) решается относительно полярного момента сопротивления

$$W_p \geq \frac{M_{кр \max}}{[\tau]}. \quad (8.42)$$

Диаметр вала сплошного сечения  $d$  определяется исходя из зависимости

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

откуда, с учетом (8.42),

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр \max}}{\pi[\tau]}}.$$

Для вала, имеющего сечение в виде кольца (внешний диаметр  $D$ , а внутренний –  $d$ ),

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4),$$

$$\alpha = \frac{D}{d}.$$

## 3. Определение максимальной грузоподъемности (допускаемого значения скручивающего момента $[m]$ ).

Эпюра крутящих моментов строится в долях скручивающего момента, определяются опасное сечение и полярный момент сопротивления.

Неравенство (8.41) решается относительно максимального крутящего момента

$$M_{кр \max} \leq [\tau] W_p. \quad (8.43)$$

С учетом значения его в опасном сечении определяется допустимое значение внешнего момента  $[m]$ .

Важно отметить, что исходя из соотношений

$$m = \frac{N}{\omega} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (8.44)$$

где  $N$  – мощность, передаваемая валом, кВт;  $\omega$  – частота вращения вала, рад/с;  $n$  – число оборотов вала, об/мин.

После простых преобразований неравенства (8.43) можно определить допустимую мощность на валу, частоту вращения его или число оборотов.

#### **8.6.4. Жесткость поперечного сечения при кручении**

Соблюдение условия прочности при проектировании валов является необходимым, но не всегда достаточным. Поэтому часто к валу предъявляют требование, чтобы он обладал достаточной жесткостью. Иначе говоря, необходима проверка жесткости бруса.

Для выполнения расчетов на жесткость *рассматриваются перемещения сечений вала*. В п. 8.6.1 были даны понятия *углов закручивания – относительного* (формула (8.35)), *абсолютного* (формула (8.36)), а также *жесткости* вала.

Эпюру перемещений чаще всего строят для абсолютного угла закручивания – угла, на который одно сечение поворачивается относительно другого.

#### **8.6.5. Условие жесткости**

Условие жесткости выражает условие о том, что максимальный относительный угол закручивания не должен превосходить его наперед заданной (допускаемой) величины:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{G I_p} \leq [\theta]. \quad (8.45)$$

Здесь также *необходимо учитывать замечания, изложенные в п. 8.6.3*.

Допустимое значение относительного угла закручивания определяется требованиями к жесткости и особенностями эксплуатации вала:

- для валов, работающих в обычных условиях,  $[\theta] = 0,3$  град/м;
- для валов, работающих при ударных нагрузках,  $[\theta] = 0,15$  град/м;

– для валов, работающих при повторно-переменных нагрузках,  $[\theta] = 0,25$  град/м;

– для карданных валов двигателей  $[\theta] =$  до 2,5 град/м.

Заметим, что  $0,1$  град/м  $\approx 1,75 \cdot 10^{-3}$  рад/м.

*Из условия жесткости при кручении решаются три типа задач.*

1. Проверка жесткости (проверочный расчет).

Из эпюры определяют опасное сечение и  $M_{кр \max}$ , по заданному диаметру – полярный момент инерции  $I_p$ .

В соответствии с неравенством (8.45) проверяют жесткость вала.

2. Подбор сечения вала (проектировочный расчет).

Неравенство (8.45) решается относительно  $I_p$ :

$$I_p \geq \frac{M_{кр \max}}{G[\theta]}. \quad (8.46)$$

Для опасного сечения определяют  $M_{кр \max}$ , а затем, с учетом зависимости  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , – диаметр вала как

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр \max}}{\pi G[\theta]}}.$$

3. Определение максимальной грузоподъемности (допускаемого значения скручивающего момента  $[m]$ ).

Эпюра крутящих моментов строится в долях скручивающего момента, определяются опасное сечение и полярный момент инерции.

Неравенство (8.45) решается относительно максимального крутящего момента

$$M_{кр \max} = G I_p [\theta]. \quad (8.47)$$

Здесь также справедливы комментарии в отношении определения  $N$ ,  $\omega$  и  $n$  по зависимостям (8.44).

*Результаты расчетов, проводимых по условиям прочности и жесткости, чаще всего не совпадают.*

**Пример 1.** Вал скручивается моментом  $m = 3$  кН·м. Допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 45$  МПа. Допускаемый угол закручивания  $[\theta] = 0,005$  рад/м. Модуль упругости материала вала  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Определить диаметр вала  $d$ .

Из условия прочности находим

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 0,07 \text{ м} = 7 \text{ см.}$$

Из условия жесткости находим

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{кр}}}{G \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,005}} = 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 9,35 \text{ см.}$$

Из двух полученных диаметров, в соответствии с неравенствами (8.41) и (8.45), выбираем *большее по величине* значение.

Округляя, принимаем  $d = 9,4 \text{ см}$ .

**Пример 2.** На стальной вал насажены четыре шкива (рис. 8.15, а). Частота вращения вала  $\omega = 20 \text{ рад/с}$ . Шкив 2 передает мощность  $N_2 = 75 \text{ кВт}$ . Шкивы 1, 3, 4 соответственно передают рабочим органам мощности  $N_1 = 20 \text{ кВт}$ ,  $N_3 = 30 \text{ кВт}$ ,  $N_4 = 25 \text{ кВт}$ . Направления передачи мощности на шкивах (по стрелке А): № 2 – *против* хода часовой стрелки, № 1, 3, 4 – *по* ходу часовой стрелки.

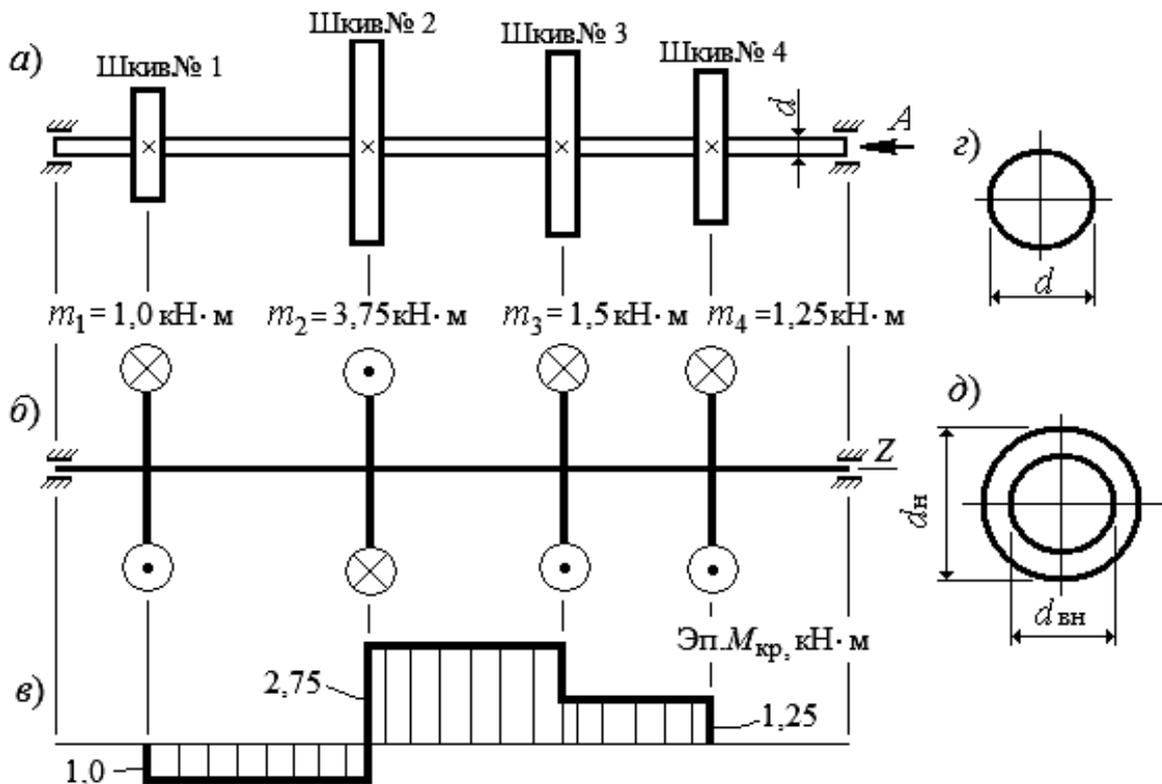


Рис. 8.15. К решению примера 2

Модуль упругости II рода материала вала  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа; допускаемые значения: касательных напряжений  $[\tau] = 40$  МПа, допускаемого относительного угла закручивания  $[\theta] = 9 \cdot 10^{-3}$  рад/м.

Определить из расчетов на прочность и жесткость требуемое значение:

– диаметр  $d$  сплошного вала (рис. 8.15, з);

– наружный диаметр  $d_n$  (рис. 8.15, д) полого вала при отношении наружного и внутреннего диаметров  $\alpha = \frac{d_{\text{вн}}}{d_n} = 0,7$ .

*Решение.*

Исходя из формулировки условия задачи, требуется выполнить проектировочный расчет.

1. Построение эпюры крутящих моментов.

Определяем величины крутящих моментов по формуле

$$m_i = \frac{N_i}{\omega},$$

где  $i$  – номер шкива.

$$m_1 = \frac{20}{20} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad m_2 = \frac{75}{20} = 3,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$m_3 = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad m_4 = \frac{25}{20} = 1,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схемы вала с приложенными соответствующими скручивающими моментами  $m_i$  (рис. 8.15, б) определяем крутящие моменты  $M_{\text{кр}}$  в сечениях, где приложены моменты  $m$ , и строим эпюру крутящих моментов (рис. 8.15, в).

2. Определение диаметра сплошного  $d$  и полого  $d_n$  валов из условия прочности при кручении.

2.1. Определяем требуемое значение диаметра сплошного круглого сечения в соответствии с формулой

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр max}}}{\pi[\tau]}}.$$

Максимальное значение крутящего момента определяем из эпюры. Тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,75 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 7,05 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,05 \text{ см}.$$

Округляем значение диаметра до ближайшего большего в соответствии с таблицей ГОСТа. Принимаем  $d = 7,1$  см.

2.2. Определяем требуемое значение наружного диаметра полого вала. В этом случае полярный момент сопротивления определяется по формуле

$$W_p = \frac{\pi d_n^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Откуда

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр\max}}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,75 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^6 (1-0,7^4)}} = 7,71 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,71 \text{ см.}$$

Округляем значение диаметра до ближайшего большего в соответствии с таблицей ГОСТа. Принимаем  $d_n = 7,8$  см. Значение  $d_{вн} = \alpha d_n = 0,7 \cdot 7,8 = 5,5$  см.

Сравниваем площади сечений сплошного и полого валов, что характеризует расход стали (вес пропорционален площади):

$$\frac{A_{\text{спл}}}{A_{\text{полого}}} = \frac{\pi d^2}{4\pi(d_n^2 - d_{вн}^2)} = \frac{7,1^2}{7,8^2 - 5,5^2} = 1,65.$$

Таким образом, вес (металлоемкость) сплошного вала на 65 % больше, чем вес полого вала.

3. *Определение диаметра сплошного  $d$  и полого  $d_n$  валов из условия жесткости при кручении.*

3.1. Определяем требуемое значение диаметра сплошного круглого сечения в соответствии с формулой

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр\max}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,75 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}} = 7,9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,9 \text{ см.}$$

Округляем до  $d = 8,0$  см.

3.2. Определяем требуемое значение наружного диаметра полого вала. В этом случае полярный момент инерции определяется по формуле

$$I_p = \frac{\pi d_n^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

Откуда

$$d_n = \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр\max}}{\pi G [\theta] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,75 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-3} (1 - 0,7^4)}} = 8,43 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8,43 \text{ см.}$$

Округляя, принимаем  $d_n = 8,5$  см. Значение  $d_{вн} = \alpha d_n = 0,7 \cdot 8,5 = 5,95$  см, округляем до 6 см.

Отношение площадей сечений

$$\frac{A_{спл}}{A_{полого}} = \frac{8^2}{8,5^2 - 6^2} = 1,76.$$

При расчете по условию жесткости вес (металлоемкость) сплошного вала на 76 % больше, чем вес полого вала.

*Необходимо обеспечить как прочность, так и жесткость вала. Поэтому, сравнивая значения диаметров, полученные при расчете, окончательно принимаем их бóльшие значения:*

$$d = 8,0 \text{ см}; \quad d_n = 8,5 \text{ см}; \quad d_{вн} = 5,95 \text{ см.}$$

### 8.6.6. Потенциальная энергия упругой деформации

Изобразим зависимость между крутящим моментом и углом закручивания бруса при *статическом нагружении* (рис. 8.16). В пределах действия закона Гука эта зависимость изображается прямой линией  $OA$ .

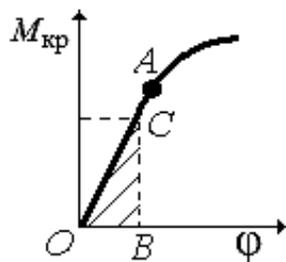


Рис. 8.16. Типичная диаграмма при испытаниях круглого бруса на кручение

Диаграмма не имеет явно выраженной площадки текучести. Поэтому определяют *условный предел текучести* при кручении как значение касательного напряжения при величине остаточной угловой деформации, равной 0,3 % (0,003 рад), и обозначают  $\tau_{0,3}$ .

*Работа внешних сил* (работа скручивающих моментов) до предела упругости (пропорциональности) выражается площадью под диаграммой (см. рис. 8.16), т. е. площадью треугольника  $BOC$ :

$$A_{\text{упр}} = \frac{M_{\text{кр}} \varphi}{2}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии потенциальная энергия, накопленная при упругой деформации, численно равна работе внешних сил или внутренних сил:  $U = A_{\text{упр}}$ . С учетом (8.37) получим

$$U = \frac{M_{\text{кр}}^2 l}{2GI_p}. \quad (8.48)$$

## 8.7. Статически неопределимые задачи при кручении

При кручении, так же как и при других видах нагружения, встречаются задачи, когда уравнений равновесия недостаточно для определения действующих внутренних силовых факторов – в данном случае крутящих моментов.

Такие задачи, как известно, называются статически неопределимыми.

Методика раскрытия статической неопределимости рассмотрена была ранее. Решение статически неопределимой задачи при кручении покажем на примере.

Брус круглого поперечного сечения (рис. 8.17, *а*) жестко закреплен обоими концами и на расстоянии  $a$  от левой опоры нагружен моментом  $m$ .

Составим уравнение равновесия статики (*можем составить только одно уравнение*):

$$\sum m_Z = 0; \quad m_A + m_B - m = 0, \quad (8.49)$$

где  $m_A$  и  $m_B$  – опорные моменты.

Составляем уравнение совместности деформаций на основе сравнения деформаций (абсолютного угла закручивания), например, на опоре  $A$ . Отбросим эту опору (рис. 8.17, *б*).

По условию закрепления угол поворота данного сечения должен быть равен нулю:

$$\varphi_A = 0.$$

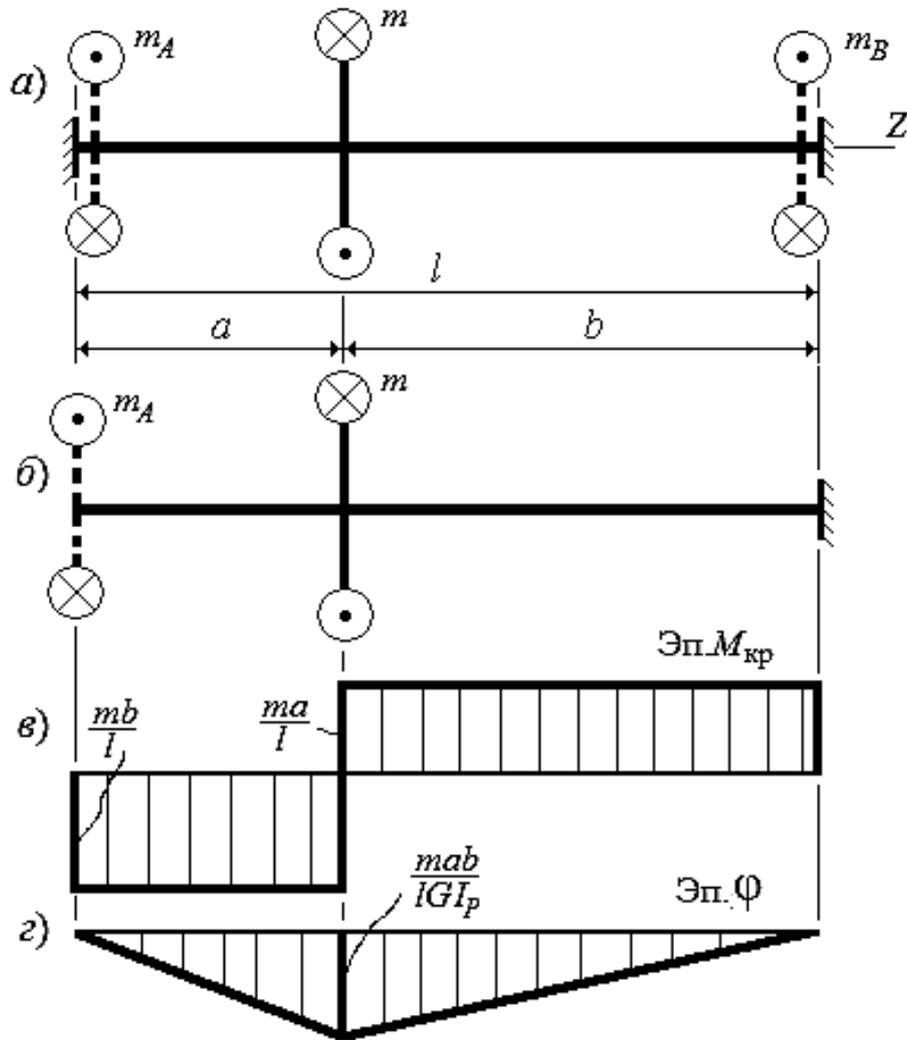


Рис. 8.17. К расчету статически неопределимого бруса

Этот угол, согласно принципу суперпозиции, можно представить как сумму абсолютных углов закручивания от действия моментов  $m$  и  $m_A$ :

$$\varphi_A = \varphi_m + \varphi_{m_A} = 0. \quad (8.50)$$

В соответствии с (8.37)

$$\varphi_m = -\frac{mb}{GI_p}; \quad \varphi_{m_A} = \frac{m_A l}{GI_p} = 0,$$

а с учетом уравнения (8.50)

$$\varphi_A = -\frac{mb}{GI_p} + \frac{m_A l}{GI_p} = 0 \text{ и, следовательно, } m_A = \frac{mb}{l}.$$

Подставляя полученное значение опорного момента в уравнение (8.49), имеем

$$\frac{mb}{l} + m_B - m = 0,$$

откуда

$$m_B = m \frac{(l-b)}{l} = m \frac{a}{l}.$$

Определив опорные моменты, строим эпюры крутящих моментов (рис. 8.17, в).

Угол поворота в сечении  $C$ , где приложен внешний момент  $m$ , определяется абсолютным углом закручивания сечения  $C$  по отношению к сечению  $A$ :

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_{AC} = 0 + \frac{m_A a}{GI_P} = \frac{m \frac{ba}{l}}{GI_P}.$$

Строим эпюру углов поворота – абсолютных углов закручивания (рис. 8.17, г).

## 8.8. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением

Задача определения напряженного состояния и, соответственно, расчета бруса *некруглого* поперечного сечения является значительно более сложной по сравнению с вышерассмотренной задачей. Причина в том, что некоторые допущения, принятые для круглого бруса, при кручении бруса некруглого поперечного сечения не выполняются. В частности, нарушается гипотеза плоских сечений, которая позволяла упростить расчеты. Поэтому формулы сопротивления материалов, полученные ранее (см. подразд. 8.6 и 8.7), для рассматриваемого случая неприменимы.

Рассмотрим брус прямоугольного поперечного сечения, который закручивается внешними моментами  $m$  (рис. 8.18).

Если на поверхность этого бруса предварительно нанести сетку, то после нагружения поперечные линии сетки заметно искривляются (следовательно, и поперечные сечения будут искривляться). Отдельные точки сечения перемещаются вдоль оси стержня, и сечение в целом перестает быть плоским.

Наблюдается так называемая *депланация сечения*.

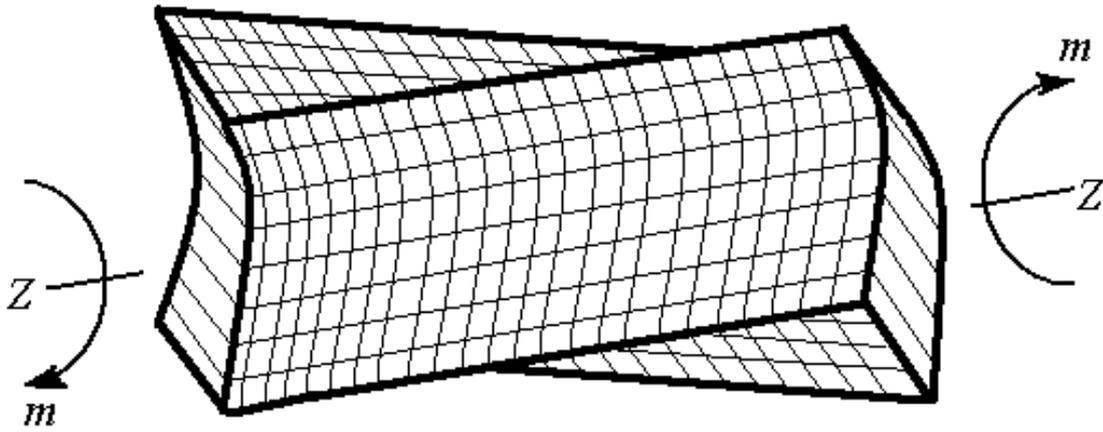


Рис. 8.18. Депланация бруса прямоугольного сечения при кручении

Задача усложняется еще и потому, что осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения, в отличие от круглого, не равны по величине.

*Решение поставленной задачи возможно только с использованием методов теории упругости по формулам, приведенным далее, или на ЭВМ с применением МКЭ.*

Приведем формулы, полученные в теории упругости при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения.

На рис. 8.19 изображены эпюры распределения касательных напряжений в рассматриваемом сечении.

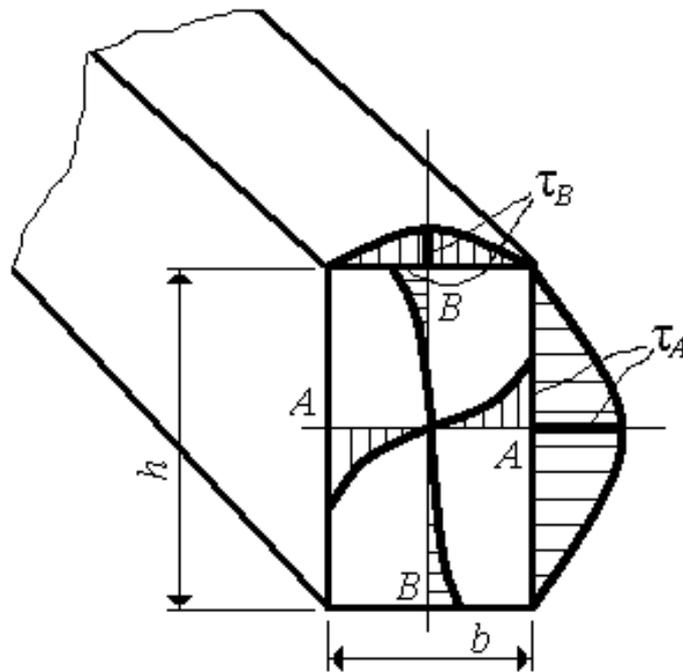


Рис. 8.19. Распределение касательных напряжений по прямоугольному сечению бруса

## Значения касательных напряжений

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_K}; \quad \tau_B = \gamma \tau_A. \quad (8.51)$$

Абсолютный угол закручивания бруса длиной  $l$

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{G I_K}. \quad (8.52)$$

В вышеприведенных формулах:

$I_K = \beta hb^3$ ;  $W_K = \alpha hb^2$  – осевой момент инерции и момент сопротивления сечения при кручении соответственно;

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – коэффициенты, зависящие от соотношения размеров сторон прямоугольника. Их значения приводятся в таблицах, например см. табл. 8.1.

Табл. 8.1. Значения коэффициентов уравнений (8.51) и (8.52) для прямоугольного сечения

$h/b$	Коэффициент		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	0,208	0,140	1
1,5	0,231	0,196	0,859
2,0	0,246	0,229	0,795
3,0	0,267	0,263	0,753
10	0,313	0,313	0,743

Проанализируем особенности распределения касательных напряжений (рис. 8.20).

1. В поперечном сечении скручиваемого бруса касательное напряжение в каждой точке  $A$ , расположенной в непосредственной близости от боковой поверхности бруса, всегда направлено параллельно касательной к контуру сечения (см. рис. 8.20, а). Поясним этот вывод.

По закону парности касательных напряжений  $\tau_n = \tau_{n_1}$ , но боковая (внешняя) поверхность бруса не нагружена, поэтому  $\tau_n = \tau_{n_1} = 0$ , а  $\tau$  совпадает по направлению с  $\tau_t$ , т. е. направлено по касательной к контуру сечения. Иначе говоря, в общем случае касательное напряжение направлено вдоль контура сечения (см. рис. 8.20, б).

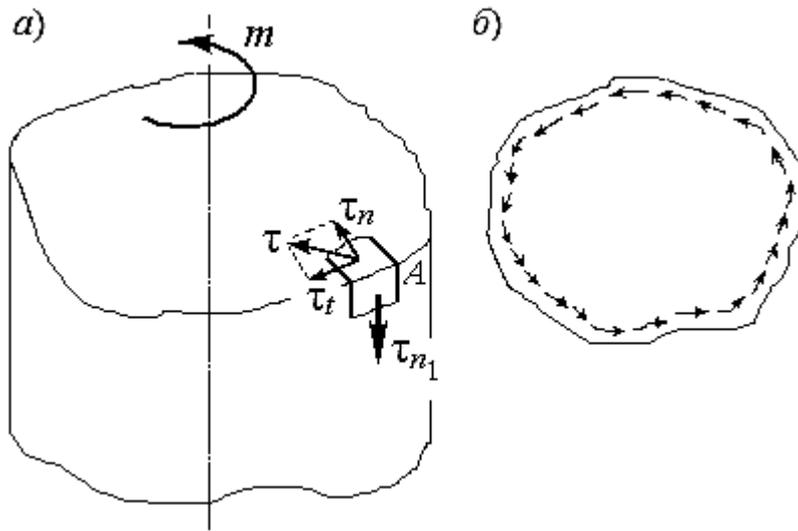


Рис. 8.20. Особенности распределения касательных напряжений в сечении бруса произвольной формы

2. Если сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения обращаются в нуль (рис. 8.21).

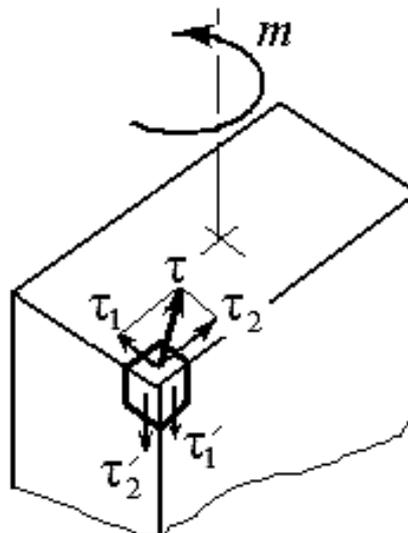


Рис. 8.21. Касательные напряжения во внешнем углу прямоугольного сечения:  $\tau$  – касательное напряжение вблизи угла плоскости сечения по произвольному направлению;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – касательные напряжения, направленные по нормали к сторонам угла;  $\tau'_1$  и  $\tau'_2$  – парные касательные напряжения, действующие по перпендикулярным граням – по боковой поверхности бруса

Ранее был сделан вывод, что касательные напряжения на боковой поверхности  $\tau_n = \tau_{n_1} = 0$  (равны нулю). Поэтому  $\tau'_1 = \tau'_2 = 0$ . Следовательно, и  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ .

Как было указано ранее, решение таких задач возможно с применением метода конечных элементов (МКЭ), например, в программном комплексе ANSYS. На рис. 8.22 показан вид стержней некруглого сечения при кручении.

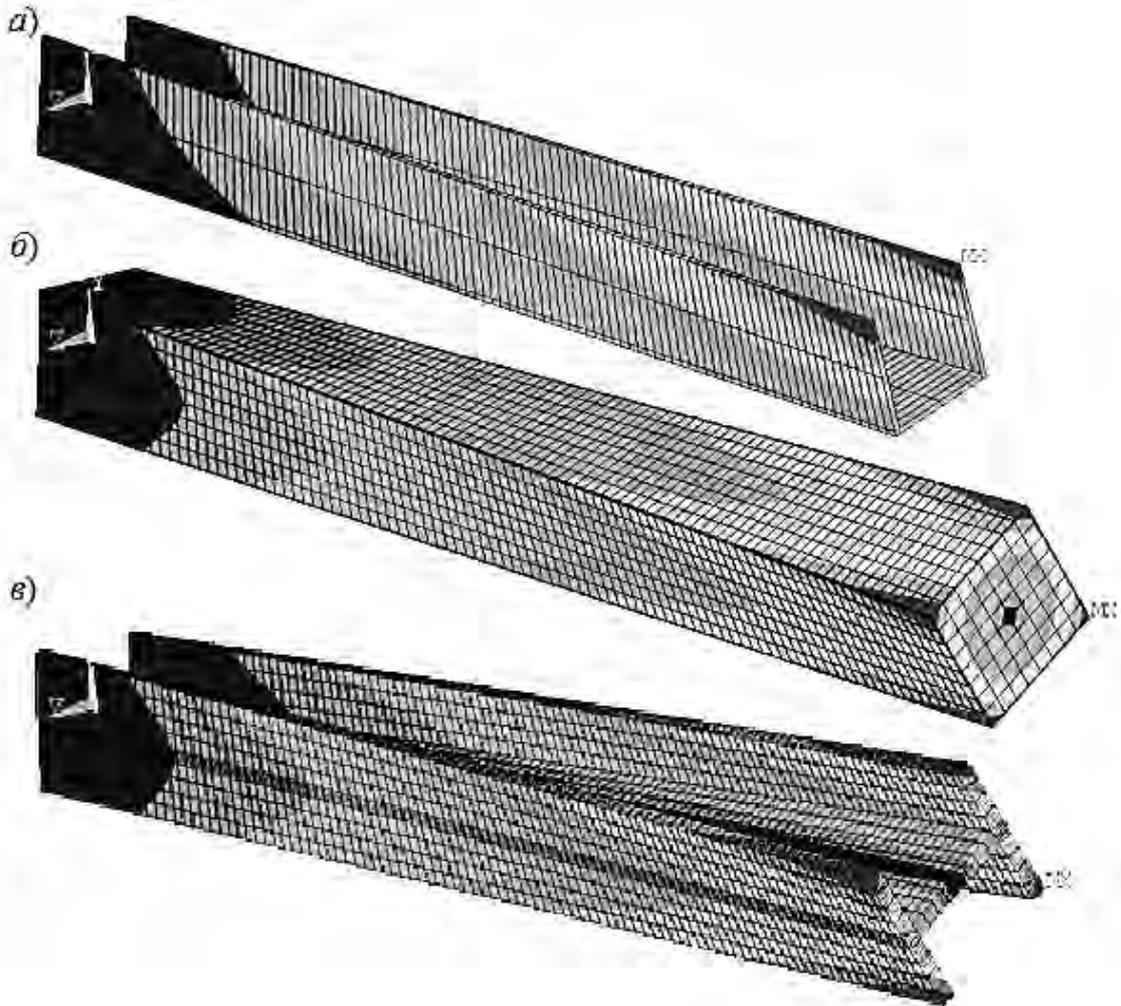
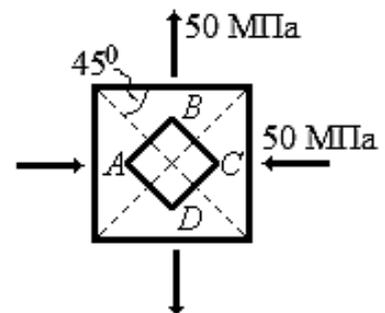


Рис. 8.22. Вид стержней некруглого сечения при кручении, полученный с применением МКЭ в программном комплексе ANSYS: *a* – коробчатое сечение; *б* – квадратное сечение; *в* – двутавр

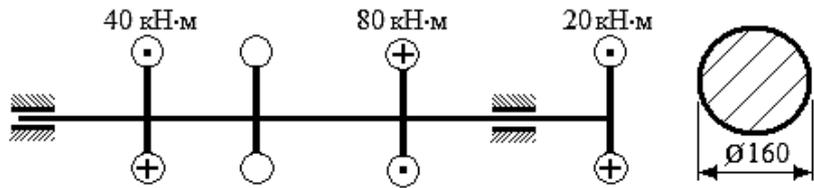
### Контрольные вопросы

1. Укажите, какие по величине напряжения действуют на гранях *ABCD*:

- 1)  $\sigma = 50 \text{ МПа}$ ;  $\tau = 0$ ;
- 2)  $\sigma = 50 \text{ МПа}$ ;  $\tau = 50 \text{ МПа}$ ;
- 3)  $\sigma = 25 \text{ МПа}$ ;  $\tau = 25 \text{ МПа}$ ;
- 4)  $\sigma = 0$ ;  $\tau = 50 \text{ МПа}$ .

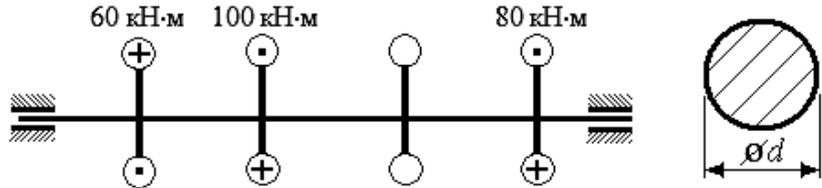


2. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение максимального касательного напряжения:



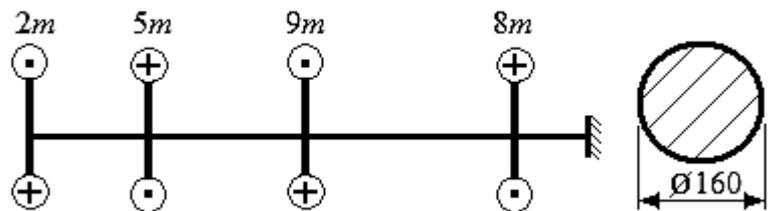
- 1) 99,5 МПа;                      3) 149,3 МПа;  
2) 74,7 МПа;                      4) 199,1 МПа.

3. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение диаметра вала  $d$ , если  $[\tau] = 80$  МПа:



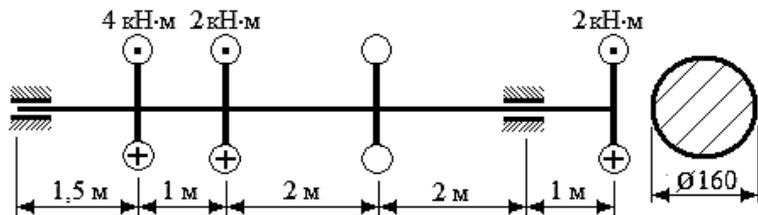
- 1) 216,81 мм;                      3) 172,08 мм;  
2) 196,98 мм;                      4) 136,58 мм.

4. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение допускаемого момента  $[m]$ , если  $[\tau] = 80$  МПа:



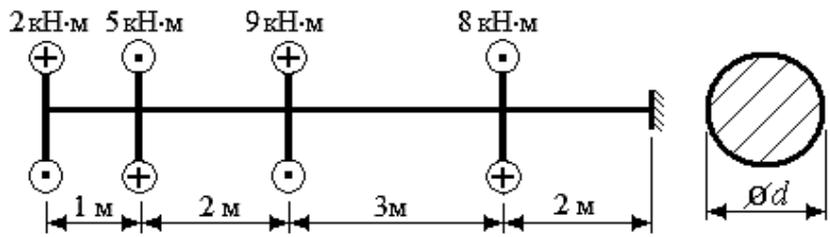
- 1) 12,86 кН·м;                      3) 8,04 кН·м;  
2) 7,15 кН·м;                      4) 10,72 кН·м.

5. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение  $\theta_{\max} \cdot 10^{-3}$  рад/м, если модуль упругости материала вала  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа:



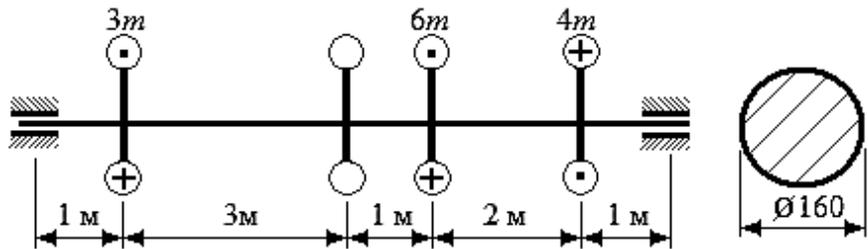
- 1) 0,09;                                3) 1,17;  
2) 1,56;                                4) 2,33.

6. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение диаметра вала  $d$  при  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа, если  $[\theta] = 5 \cdot 10^{-3}$  рад/м:



- 1) 119,5 мм;                      3) 123,1 мм;  
2) 111,0 мм;                      4) 146,3 мм.

7. Укажите, в каком ответе приведено правильное значение допускаемого момента  $[m]$  при  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа, если  $[\theta] = 5 \cdot 10^{-3}$  рад/м:



- 1) 2,14 кН·м;                      3) 3,22 кН·м;  
2) 4,29 кН·м;                      4) 6,43 кН·м.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Биргер, И. А.** Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – Москва: Наука, 1986. – 560 с.
2. **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – 9-е изд. – Москва: Наука, 1986. – 512 с.
3. Сопротивление материалов: учебник / Под ред. Г. С. Писаренко. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.
4. **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – Москва: Высшая школа, 1989. – 624 с.
5. **Заяц, В. Н.** Сопротивление материалов: учебник / В. Н. Заяц, М. К. Балыкин, И. А. Голубев; под ред. В. Н. Зайца. – Минск: Вышэйшая школа, 1998. – 367 с.
6. **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск: Дизайн ПРО, 1998. – 592 с.
7. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Под ред. Н. А. Костенко. – Москва: Высшая школа, 2000. – 430 с.
8. **Сиренко, Р. Н.** Сопротивление материалов: учебное пособие / Р. Н. Сиренко. – Москва: РИОР, 2007. – 157 с.
9. **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
10. **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебное пособие / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 7-е изд. – Москва: Высшая школа, 2009. – 560 с.
11. **Михайлов, А. М.** Сопротивление материалов / А. М. Михайлов. – Москва: Academia, 2009. – 448 с.
12. **Степин, П. А.** Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 320 с.
13. **Жуков, В. Г.** Механика. Сопротивление материалов: учебник для вузов / В. Г. Жуков. – Москва: Лань, 2012. – 416 с.
14. Сопротивление материалов / А. Г. Схиртладзе [и др.]. – Москва: Academia, 2012. – 416 с.
15. **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов. Практикум по решению задач: учебное пособие для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2009. – 688 с.
16. **Буланов, Э. А.** Решение задач по сопротивлению материалов / Э. А. Буланов. – Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 216 с.
17. Сборник задач по сопротивлению материалов / П. В. Грес [и др.]. – Москва: Абрис, 2012. – 104 с.

18. Сопротивление материалов. Практические занятия / В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко, И. А. Петров; под ред. В. Б. Логвинова. – Москва: Феникс, 2012. – 288 с.
19. **Кудрявцев, С. Г.** Сопротивление материалов. Интернет-тестирование базовых знаний: учебник для вузов / С. Г. Кудрявцев, В. Н. Сердюков. – Москва: Лань, 2013. – 176 с.
20. **Афанасьев, А. М.** Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / А. М. Афанасьев, В. А. Марьин. – Москва Физматгиз, 1975. – 287 с.
21. **Цурпал, И. А.** Сопротивление материалов: лабораторные работы / И. А. Цурпал, Н. П. Барабан, В. М. Швайко. – Киев: Вища школа, 1988. – 245 с.
22. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Минск: Наука и техника, 1988 – 464 с.
23. Сопротивление материалов: лабораторный практикум / Под ред. Ю. П. Подлеснова. – Брянск: БГТУ, 2010. – 119 с.
24. **Шкелев, Л. Т.** Сопротивление материалов и основы строительной механики / Л. Т. Шкелев. – Киев: Вища школа, 1989. – 248 с.
25. **Копнов, В. А.** Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчётно-графических работ / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. – Москва: Высшая школа, 2003. – 351 с.
26. **Варданян, Г. С.** Сопротивление материалов с основами строительной механики: учебник / Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков; под ред. Г. С. Варданяна. – Москва: ИНФРА-М, 2013. – 505 с.
27. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
28. **Жолобов, А. А.** Прогнозирование поведения технологических систем на стадии их проектирования / А. А. Жолобов, В. А. Попковский, Д. В. Попковский. – Могилев: МГТУ, 2000. – 150 с.
29. Упрочнение деталей, контактирующих с расплавами металлов / А. В. Вечер, И. М. Кузменко, А. Г. Лупачев; под общ. ред. С. К. Павлюка и И. М. Кузменко. – Минск: Навука і тэхніка, 1993. – 207 с.
30. **Кузменко, И. М.** Механика разрушения: учебное пособие / И. М. Кузменко. – Могилев: МГТУ, 2001. – 172 с.
31. **Тимошенко, С. П.** Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – Санкт-Петербург: Лань, 2002. – 672 с.
32. ГОСТ 8509–86. Уголки стальные горячекатаные равнополочные. – Москва: Изд-во стандартов. – 10 с.
33. ГОСТ 8510–86. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Москва: Изд-во стандартов. – 5 с.

34. ГОСТ 8239–89. Двутавры стальные горячекатаные. – Москва: Изд-во стандартов. – 7 с.

35. ГОСТ 8240–89. Швеллеры стальные горячекатаные. – Москва: Изд-во стандартов. – 5 с.

36. **Кузменко, И. М.** Перспективы развития строительных конструкций инженерных сооружений: монография / И. М. Кузменко, В. М. Фридкин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – 171 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А (справочное)

### Геометрические характеристики плоских сечений

При изучении различных видов нагружения будет замечено, что *сопротивление материала бруса действию внешних сил зависит от ряда геометрических характеристик поперечного сечения.*

Рассмотрим, например, *перемещения точек поперечного сечения консольной балки (рис. А.1) при постоянстве площади поперечного сечения и значения силы, если это сечение повернуть по отношению к линии действия силы на  $90^\circ$ .*

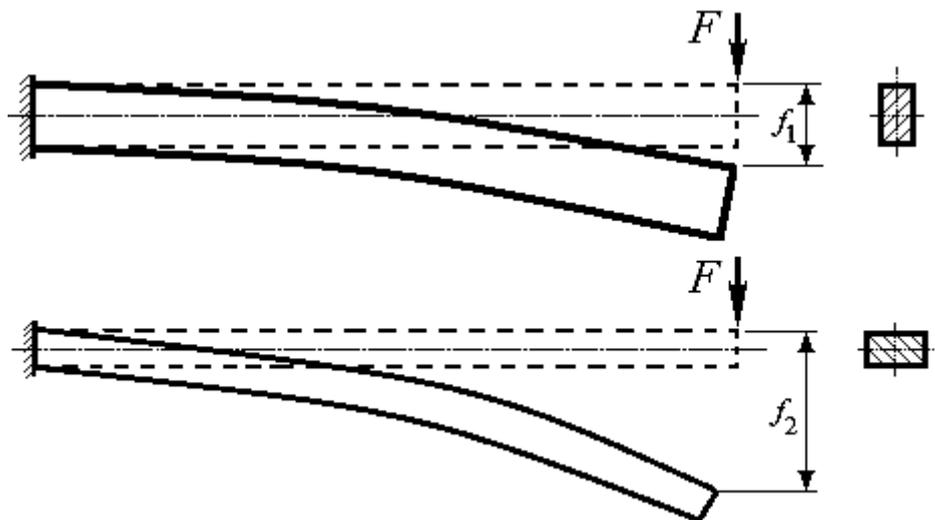


Рис. А.1. Влияние положения сечения по отношению к нагрузке на величину перемещений точек сечения

Из рисунка видим, что *перемещения точки приложения силы в первом и втором вариантах положения прямоугольного сечения в значительной степени отличаются.*

Таким образом, площадь поперечного сечения не может в полной мере характеризовать сопротивление бруса действию внешних сил. Для анализа особенностей работы бруса при различных видах нагружения необходимо привлекать и другие геометрические характеристики сечений.

## А.1. Статические моменты сечения

Рассмотрим поперечное сечение (плоскую фигуру) произвольной формы, имеющее площадь  $A$  (рис. А.2), которое разместим в произвольной системе координат  $XOY$ .

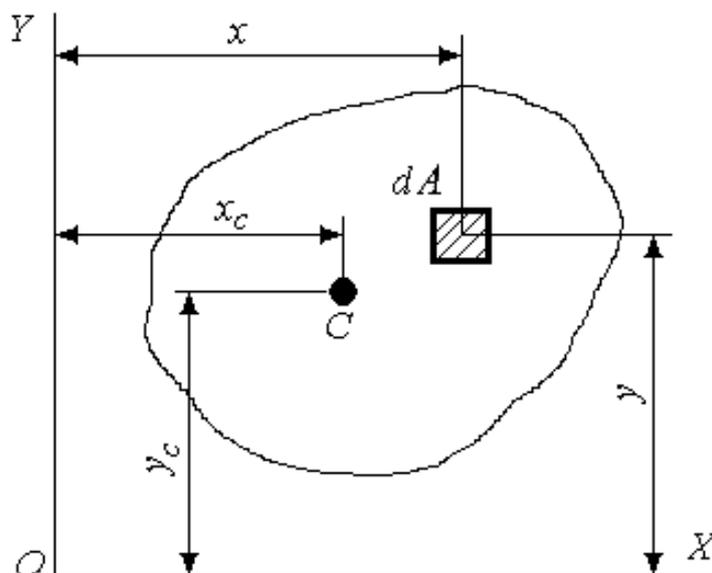


Рис. А.2. К определению статических моментов плоского сечения

Выделим вокруг произвольной точки элементарную площадку  $dA$  с координатами  $x$ ,  $y$ .

Для расчета статических моментов сечения используются определенные интегралы вида

$$S_X = \int_A y dA; \quad S_Y = \int_A x dA. \quad (\text{A.1})$$

В зависимости от знака координат элементарной площадки статические моменты могут быть как положительными, так и отрицательными. Размерность статических моментов сечения – в кубических сантиметрах ( $\text{см}^3$ ).

Если известно положение центра тяжести сечения  $x_c$ ,  $y_c$  площадью  $A$ , то статические моменты сечения могут быть определены по формулам

$$S_X = y_c A; \quad S_Y = x_c A. \quad (\text{A.2})$$

Видим, что при равенстве нулю координат центра тяжести площади сечения статические моменты также равны нулю. Координатные оси, проходящие через центр тяжести сечения, – центральные оси сечения.

Иначе говоря: *если статические моменты сечения относительно пары взаимно перпендикулярных осей равны нулю – эти оси являются центральными осями сечения.*

Если сечение имеет сложную форму, то его разделяют на  $i$  простых сечений и статические моменты определяют как алгебраическую сумму статических моментов этих простых сечений:

$$S_X = \sum_{i=1}^n y_{c_i} A_i; \quad S_Y = \sum_{i=1}^n x_{c_i} A_i, \quad (\text{A.3})$$

где  $A_i$  – площадь  $i$ -го простого сечения;  $x_{c_i}$ ,  $y_{c_i}$  – координаты центров тяжести  $i$ -го сечения;  $n$  – общее число простых сечений.

Чаще всего формулы (A.2) и (A.3) используются для определения положения центра тяжести сечения.

Если сечение имеет сложную форму, то для определения положения центра тяжести такого сечения следует:

- выбрать для сложного сечения *произвольную и удобную* (с точки зрения определения площадей и координат простых сечений) систему координат;
- разделить сложное сечение на  $i$  простых, для которых легко определить собственный центр тяжести и площадь поперечного сечения;
- определить координаты центров тяжести простых сечений в выбранной системе координат;
- используя формулы (A.3), определить координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{Y_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{X_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (\text{A.4})$$

#### **Примечания.**

1. От выбора произвольной системы координат и особенностей деления сложной фигуры на простые положение центра тяжести сечения, естественно, не зависит.

2. Для сечения, состоящего из двух фигур, центр тяжести должен лежать на прямой, соединяющей центры тяжести этих простых фигур.

**Пример 1.** Определить центр тяжести сечения (рис. A.3). Размеры указаны в сантиметрах.

*Решение.*

1. Произвольная система координат  $X$ ,  $Y$  может быть выбрана по-разному, например, как показано на рис. A.3, *a*, *в*.

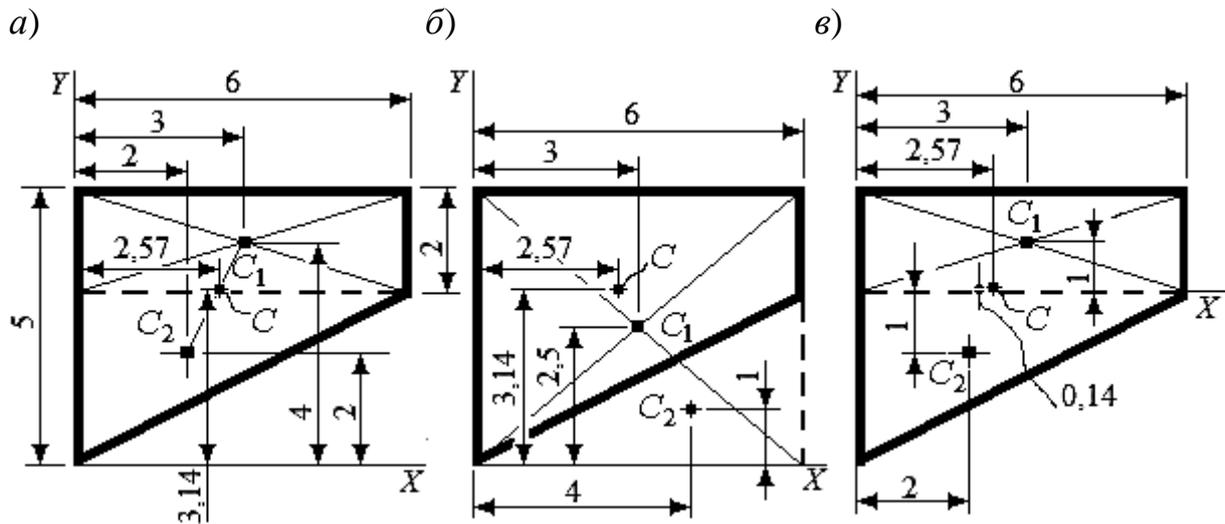


Рис. А.3. Поперечное сечение к примеру 1

2. Разделим заданное сечение на два простых – прямоугольник и треугольник, причем на рис. А.3, а к прямоугольнику достраиваем треугольник, а на рис. А.3, б из прямоугольника удаляем треугольник.

3. Определяем координаты центров тяжести каждой из простых фигур с учетом выбранной системы координат.

Для сечения на рис. А.3, а

$$x_{c_1} = 3 \text{ см}; \quad y_{c_1} = 4 \text{ см}; \quad x_{c_2} = 2 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 2 \text{ см}.$$

Для сечения на рис. А.3, б

$$x_{c_1} = 3 \text{ см}; \quad y_{c_1} = 2,5 \text{ см}; \quad x_{c_2} = 4 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 1 \text{ см}.$$

Для сечения на рис. А.3, в

$$x_{c_1} = 3 \text{ см}; \quad y_{c_1} = 1 \text{ см}; \quad x_{c_2} = 2 \text{ см}; \quad y_{c_2} = -1 \text{ см}.$$

4. По формулам (А.4), с учетом (А.3), определяем положение центра тяжести сечения.

Для сечения на рис. А.3, а

$$x_c = \frac{6 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6} = 2,57 \text{ см}; \quad y_c = \frac{6 \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6} = 3,14 \text{ см}.$$

Для сечения на рис. А.3, б

$$x_c = \frac{6 \cdot 5 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4}{6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6} = 2,57 \text{ см}; \quad y_c = \frac{6 \cdot 5 \cdot 2,5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1}{6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6} = 3,14 \text{ см.}$$

Для сечения на рис. А.3, в

$$x_c = \frac{6 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6} = 2,57 \text{ см}; \quad y_c = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot (-1)}{6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6} = 0,14 \text{ см.}$$

## А.2. Осевые (экваториальные), центробежный и полярный моменты инерции

В поперечном сечении произвольной формы, имеющем площадь  $A$  (рис. А.4), в произвольной системе координат  $XOY$  выделим элементарную площадку  $dA$  с координатами  $x, y$ .

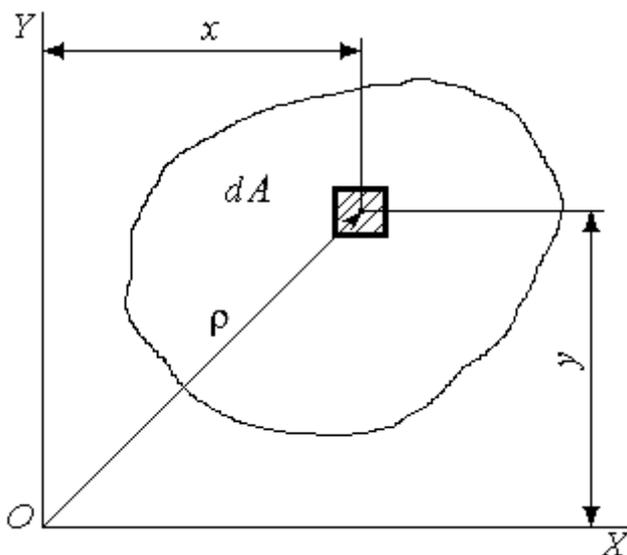


Рис. А.4. К определению осевых, центробежного и полярного моментов инерции сечения

Для расчета осевых моментов сечения используются определенные интегралы вида

$$I_X = \int_A y^2 dA; \quad I_Y = \int_A x^2 dA. \quad (\text{A.5})$$

Видим, что осевые моменты инерции по знаку *всегда положительны*. Нулевого значения осевые моменты инерции никогда не имеют.

Для расчета центробежного момента инерции сечения используется определенный интеграл вида

$$I_{XY} = \int_A xy dA. \quad (\text{A.6})$$

Центробежный момент инерции, в зависимости от знака координат элементарной площадки, может быть как положительным, так и отрицательным.

При равенстве нулю хотя бы одной из координат центробежный момент инерции будет равен нулю.

Для сечения, имеющего ось симметрии (рис. А.5, а) – для рассмотренного сечения это ось  $Y$ , в показанной системе координат  $XY$   $x_1 = -x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Поэтому

$$I_{XY} = \int_A x_1 y_1 dA + \int_A x_2 y_2 dA = \int_A x_1 y_1 dA - \int_A x_1 y_1 dA = 0.$$

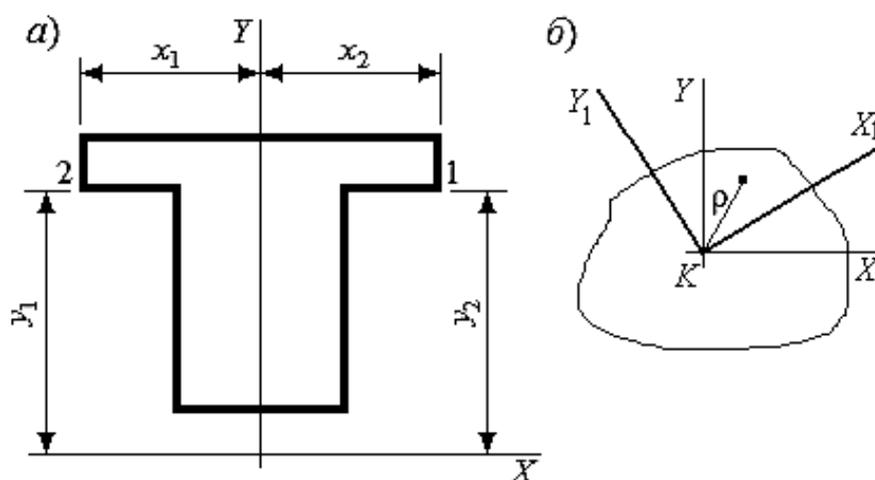


Рис. А.5. К свойствам осевых и центробежного моментов инерции

Следовательно, *центробежный момент инерции равен нулю, если хотя бы одна из координатных осей является осью симметрии*; центробежный момент инерции равен нулю относительно оси симметрии сечения и любой оси, ей перпендикулярной.

Следует вывод: *если центробежный момент инерции относительно какой-то оси равен нулю, то эта ось является осью симметрии сечения*.

Для расчета полярного момента инерции сечения используется определенный интеграл вида

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA. \quad (\text{A.7})$$

В этой формуле  $\rho$  – полярный радиус (см. рис. А.4).

Видим, что полярный момент инерции *по знаку всегда положителен. Нулевого значения полярный момент инерции никогда не имеет.*

Размерность осевых, центробежного и полярного моментов инерции – в сантиметрах в четвертой степени ( $\text{см}^4$ ).

Если через какую-либо точку  $K$  фигуры (рис. А.5, б) провести две системы прямоугольных координат:  $YKX$  и  $Y_1KX_1$  и определить осевые моменты инерции, то в связи с тем, что  $\rho = \text{const}$ , следует  $I_{\rho} = \text{const}$  и поэтому получим равенство  $I_X + I_Y = I_{X_1} + I_{Y_1}$ .

Этот же вывод получим из рис. А.4: полярный радиус определится по теореме Пифагора  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , поэтому

$$I_{\rho} = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_X + I_Y = \text{const}. \quad (\text{A.8})$$

*В заданной системе координат полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.*

*При повороте осей вокруг начала координат полярный момент инерции не изменяется.*

В теории упругости говорят, что полярный момент инерции является *инвариантным параметром* (характеристикой), т. е. *параметром, не зависящим от положения системы координат.*

### **А.3. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей**

Допустим, известно положение центра тяжести плоского сечения произвольной формы и его площадь  $A$ . Через центр тяжести сечения проведем центральные оси  $X_c$  и  $Y_c$  (рис. А.6).

Допустим также, что известны моменты инерции относительно центральных осей (центральные осевые и центробежный моменты инерции).

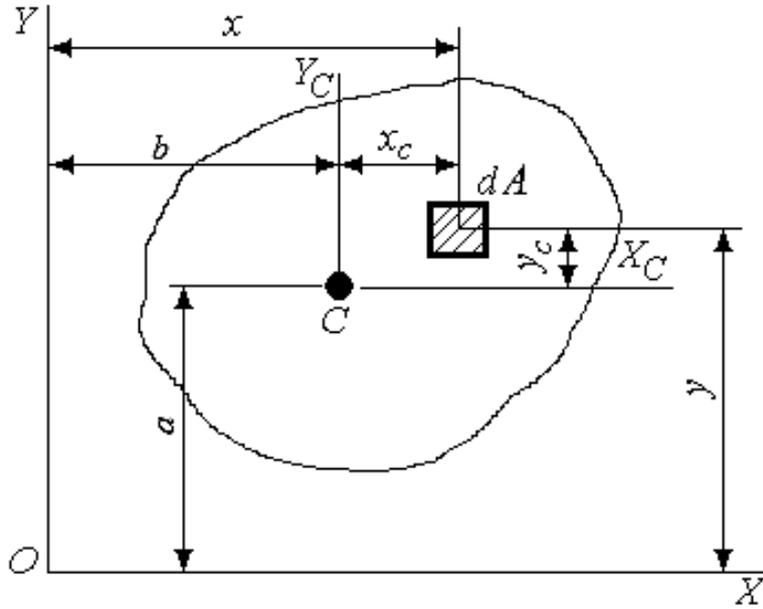


Рис. А.6. К определению моментов инерции при параллельном переносе осей

В соответствии с (А.5)

$$I_{x_c} = \int_A y_c^2 dA; \quad I_{y_c} = \int_A x_c^2 dA; \quad I_{x_c y_c} = \int_A x_c y_c dA.$$

Проведем *новые оси*  $X'Y'$ , параллельные центральным осям. Расстояние между этими осями соответственно  $a$  и  $b$ . Фактически *это координаты центра тяжести сечения в новой системе координат*, координаты же элементарной площадки  $dA$  в новых осях соответственно будут  $x$  и  $y$ . Тогда осевые моменты в новой системе координат

$$I_X = \int_A y^2 dA; \quad I_Y = \int_A x^2 dA.$$

Используя обозначения (см. рис. А.6), проведем некоторые преобразования. Видим, что  $x = x_c + b$ ;  $y = y_c + a$ . Тогда, например,

$$I_X = \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + a)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + \int_A a^2 dA,$$

а с учетом того, что  $S_{x_c} = \int_A y_c dA = 0$  – *статический момент сечения относительно центральной оси равен нулю*, получим простые зависимости

$$I_X = I_{x_c} + a^2 A; \quad I_Y = I_{y_c} + b^2 A. \quad (\text{А.9})$$

Осевой момент инерции относительно оси, параллельной центральной, равен осевому моменту инерции относительно этой центральной оси плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

Чем дальше будет располагаться ось от центральной оси, тем больше будут осевые моменты инерции. Следовательно, осевые моменты инерции относительно центральных осей – *наименьшие по величине*.

Видно, что если исходные оси  $X_1Y_1$  не будут центральными (рис. А.7), то для произвольной пары осей  $XY$  имеем общие формулы

$$I_X = I_{X_1} + 2aS_{X_1} + a^2A; \quad I_Y = I_{Y_1} + 2bS_{Y_1} + b^2A. \quad (\text{A.10})$$

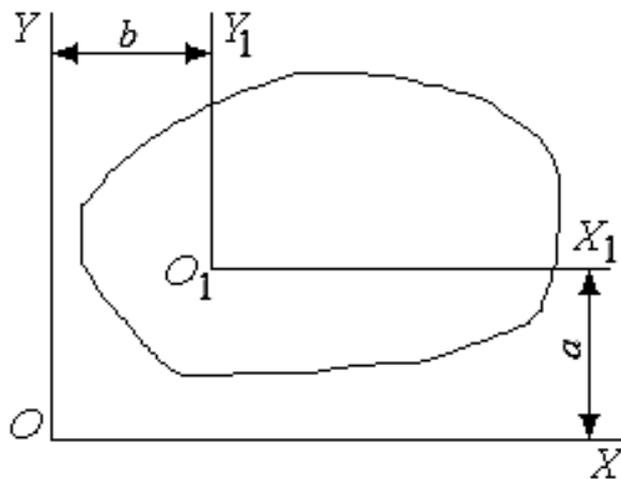


Рис. А.7. Параллельный перенос осей

Аналогичным образом, в соответствии с формулой (А.6), определим центробежный момент инерции:

– если одна пара параллельных осей – центральные оси (см. рис. А.6):

$$I_{XY} = \int_A xy dA = \int_A (x_c + b)(y_c + a) dA = \int_A x_c y_c dA + b \int_A y_c dA + a \int_A x_c dA + ab \int_A dA.$$

Статические моменты относительно центральных осей равны нулю. Тогда

$$I_{XY} = I_{x_c y_c} + abA. \quad (\text{A.11})$$

Центробежный момент инерции относительно осей, параллельных центральным осям, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение расстояний между осями на площадь сечения;

– если параллельные оси не являются центральными (см. рис. А.7):

$$I_{XY} = I_{x_1y_1} + bS_{x_1} + aS_{y_1} + abA. \quad (\text{A.12})$$

В общем случае знак центробежного момента будет зависеть от направления отсчета отрезков  $a$ ,  $b$  (см. рис. А.7).

#### А.4. Зависимость между моментами инерции сечения при повороте осей вокруг начала координат

Пусть для плоской фигуры заданы моменты инерции относительно произвольных осей  $X$ ,  $Y$  и площадь сечения  $A$  (рис. А.8).

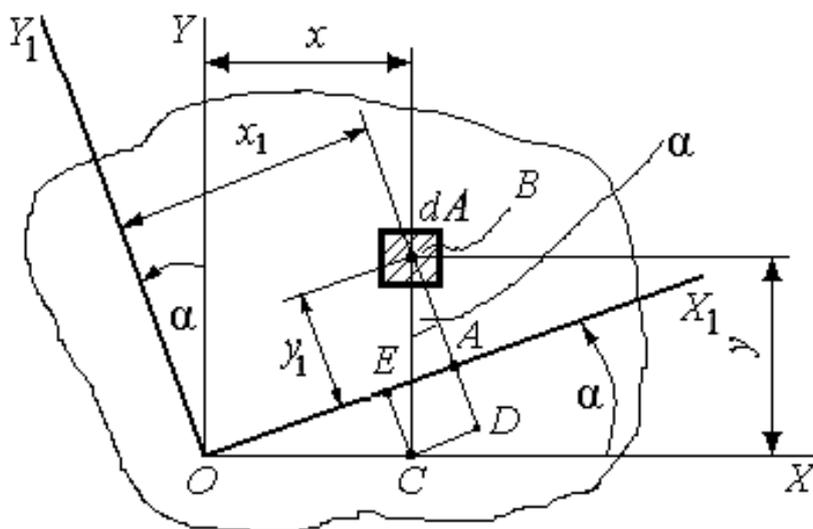


Рис. А.8. К определению моментов инерции при повороте осей

Определим моменты инерции относительно осей  $X_1$ ,  $Y_1$ , повернутых относительно заданных на угол  $\alpha$  против хода часовой стрелки (в положительном направлении). Обе пары осей имеют общее начало координат.

Выделим в окрестностях точки  $B$  с координатами  $x$ ,  $y$  площадку  $dA$ . Осевые и центробежный моменты инерции относительно заданной системы координат определим по полученным формулам (А.5) и (А.6). Аналогично можно определить моменты инерции относительно повернутых осей:

$$I_{X_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{Y_1} = \int_A x_1^2 dA.$$

Выразим координаты элементарной площадки в новой системе координат через координаты в исходной системе, т. е.

$$x_1 = OA = OE + EA = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y_1 = AB = BD - AD = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

$$BD = y \cos \alpha; \quad AD = EC = OC \sin \alpha; \quad OC = x.$$

Учитывая последние зависимости, получим, например для  $I_{X_1}$ ,

$$\begin{aligned} I_{X_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA = \\ &= I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Проведя аналогичные операции для осевого  $I_Y$  и центробежного  $I_{XY}$  моментов инерции, получим остальные формулы. При этом учтем, что

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha; \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Таким образом, при повороте осей моменты инерции

$$I_{X_1} = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha;$$

$$I_{Y_1} = I_X \sin^2 \alpha + I_Y \cos^2 \alpha + I_{XY} \sin 2\alpha; \quad (\text{A.13})$$

$$I_{X_1 Y_1} = \frac{I_X - I_Y}{2} \sin 2\alpha + I_{XY} \cos 2\alpha.$$

При повороте осей  $X_1, Y_1$  на  $90^\circ$ , т. е. на угол  $\alpha_1 = \alpha + 90^\circ$ ,

$$\sin(2\alpha + 180) = -\sin 2\alpha; \quad \cos(2\alpha + 180) = -\cos 2\alpha.$$

Тогда центробежный момент инерции будет определяться по формуле

$$\begin{aligned} I_{X_2 Y_2} &= \frac{I_{X_1} - I_{Y_1}}{2} \sin 2(\alpha + 90) + I_{X_1 Y_1} \cos 2(\alpha + 90) = \\ &= - \left( \frac{I_{X_1} - I_{Y_1}}{2} \sin 2\alpha + I_{X_1 Y_1} \cos 2\alpha \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Таким образом, *при повороте осей на  $90^\circ$  центробежный момент изменяет знак на обратный, следовательно, при каком-то положении осей (обозначим этот угол  $\alpha_0$ ) центробежный момент инерции будет равен нулю.*

### **A.5. Главные оси и главные моменты инерции сечения**

В конце предыдущего параграфа было сделано заключение, что *при каком-то угле  $\alpha_0$  центробежный момент инерции будет равен нулю.*

Естественно также заключить, что *при каком-то угле  $\alpha$  осевые моменты инерции примут экстремальные значения.*

Логично в этом случае провести *исследование функции на экстремум – производную от осевого момента инерции по углу  $\alpha$  приравняем нулю:*

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dI_{x_1}}{d\alpha} &= -2 \sin \alpha \cos \alpha I_X + 2 \sin \alpha \cos \alpha I_Y - 2I_{XY} \cos 2\alpha = \\ &= -(I_X \sin 2\alpha - I_Y \sin 2\alpha + 2I_{XY} \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{d(\cos^2 \alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\sin^2 \alpha)}{d\alpha} = -2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \frac{d(\sin 2\alpha)}{d\alpha} = 2 \cos 2\alpha.$$

Таким образом, *при повороте осей на угол, при котором осевые моменты инерции примут экстремальные значения, центробежный момент инерции*

$$-\left( \frac{I_X - I_Y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{XY} \cos 2\alpha_0 \right) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Сравнивая с формулой (A.14), видим, что это одно и то же выражение, т. е.  $I_{x_1 y_1} = 0$ .

*Условие экстремума осевых моментов инерции совпадает с равенством нулю центробежного момента инерции относительно осей, наклоненных под некоторым углом  $\alpha_0$  к исходным осям.*

*Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными осями сечения.*

Соответственно, моменты инерции относительно главных осей – *главные моменты инерции*, а относительно главных центральных осей – *главные центральные моменты инерции сечения*.

*Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями сечения. Обозначения этих осей:  $U$  – ось, относительно которой осевой момент максимальный;  $V$  – ось, относительно которой осевой момент минимальный.*

При этом, т. к. главных осей может быть бесконечно много, то и *главных моментов инерции будет бесконечно много*. Например, *центробежный момент инерции будет равен нулю относительно оси симметрии сечения и любой оси, ей перпендикулярной*.

*Главных центральных осей может быть только одна пара, поэтому и главных центральных моментов инерции может быть только два.*

Преобразуем выражение (А.15) и найдем положение главных центральных осей.

Угол  $\alpha_0$ , на который необходимо повернуть пару произвольных осей  $X$  и  $Y$ , определим по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y}. \quad (\text{A.16})$$

Подставив найденное по (А.16) значение угла  $\alpha_0$  в формулы (А.13), используемые для расчета осевых моментов инерции  $I_{X_1}$  и  $I_{Y_1}$ , можно получить выражения для определения главных центральных моментов инерции сечения.

При этом, для получения более удобной в использовании формулы, проведем некоторые преобразования тригонометрических функций.

По формуле для расчета  $I_{X_1}$  из (А.13) с учетом того, что

$$2\cos^2 \alpha_0 = 1 + \cos 2\alpha_0, \quad 2\sin^2 \alpha_0 = 1 - \cos 2\alpha_0,$$

получим

$$I_{X_1} = \frac{I_X}{2}(1 + \cos 2\alpha_0) + \frac{I_Y}{2}(1 - \cos 2\alpha_0) - I_{XY} \sin 2\alpha_0. \quad (\text{A.17})$$

Из (А.16)

$$I_{XY} = -\frac{I_X - I_Y}{2} \frac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}.$$

Подставим это выражение в (А.17) и после раскрытия скобок и объединения членов с общими множителями получим

$$I_{X_1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2} \cos 2\alpha_0 - \left( -\frac{I_X - I_Y}{2} \frac{\sin^2 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0} \right).$$

Приведем к общему знаменателю второе и третье слагаемые и с учетом, что  $\cos^2 2\alpha_0 + \sin^2 2\alpha_0 = 1$ , имеем

$$I_{X_1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2} \frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \quad (\text{А.18})$$

Заметим, что  $\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}$ .

После замены  $\operatorname{tg}^2 2\alpha_0$ , в соответствии с (А.16), и подстановки в (А.18) получим

$$I_{X_1} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \frac{I_X - I_Y}{2} \sqrt{1 + \frac{4I_{XY}^2}{(I_X - I_Y)^2}}.$$

Окончательно после преобразований имеем формулу для определения значений главных центральных моментов инерции сечения

$$I_{\max/\min} = I_{UV} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2}. \quad (\text{А.19})$$

Значение  $I_{\max} = I_U$  получим, беря между слагаемыми знак «+», а значение  $I_{\min} = I_V$  – беря знак «-».

## А.6. Порядок определения главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей для сложных и составных сечений

*Сложным* будем называть сечение (рис. А.9, а), имеющее в общем случае произвольную форму. Обычно сложное сечение стремятся разделить на простые сечения: прямоугольник, треугольник, круг и т. п.

*Составное* сечение – сечение (рис. А.9, б), которое составлено из отдельных самостоятельных сечений, например из прокатных профилей разных типоразмеров: уголки равнобокие и неравнобокие, швеллеры, двутавры.

Геометрические характеристики для любого сложного или составного сечения определяют, используя полученные в разд. А.2–А.5 формулы, по аналогии с определением статических моментов (см. разд. А.3).

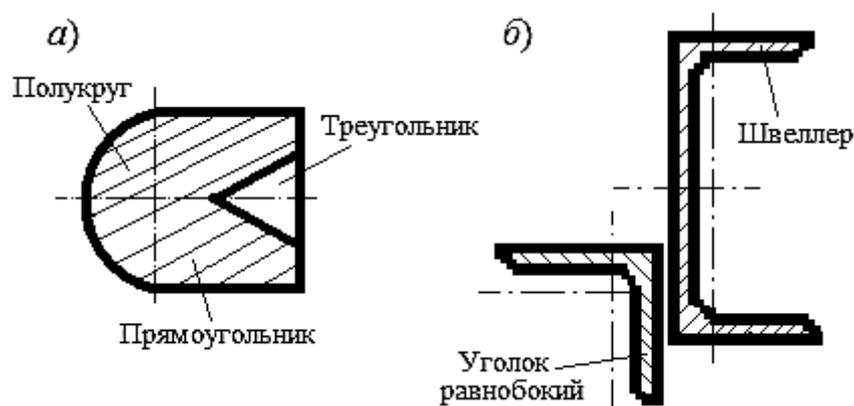


Рис. А.9. Примеры сложного и составного сечений

Перед тем, как начать расчет, нужно выполнить чертеж заданного сечения в удобном масштабе и нанести все необходимые размеры.

*Порядок расчета следующий:*

- 1) *разделить сечение на простейшие элементы;*
- 2) *выбрать удобную произвольную систему координат  $X$ ,  $Y$  (вспомогательные оси);*
- 3) *в выбранной системе координат определить координаты центров тяжести простых фигур  $x_{c_i}$ ,  $y_{c_i}$  и положение центра тяжести всего сечения  $x_c$ ,  $y_c$  (см. разд. А.1). Нанести все координаты на чертеж;*
- 4) *параллельно выбранной в б системе координат провести центральные оси  $X_c$ ,  $Y_c$ ;*
- 5) *по формулам (табл. Б.1) или по таблицам сортамента (табл. Б.2–Б.5) определить для каждой простой фигуры значения осевых и центробежных моментов инерции относительно собственных центральных осей этих фигур;*

б) по формулам при параллельном переносе осей (А.9) и (А.11) *определить осевые и центробежный моменты инерции*  $I_{x_c}$ ,  $I_{y_c}$ ,  $I_{x_c y_c}$  *всего сечения относительно его центральных осей;*

7) по формуле (А.16) *рассчитать угол*  $\alpha_0$  *(и направление), на который необходимо повернуть центральную ось сечения (относительно которой осевой момент больше) и нанести главные центральные оси*  $U$ ,  $V$  *на чертеж с указанием величины угла и направления поворота центральных осей;*

8) по формуле (А.19) *рассчитать величины главных центральных моментов инерции*  $I_U$  *и*  $I_V$ ;

9) с использованием соответствующих формул произвести проверку правильности решения задачи:

– *центробежный момент инерции относительно главных центральных осей (А.13) должен быть равен нулю:*  $I_{UV} = 0$ .

Расчет ведется в соответствии с формулой (А.13):

$$I_{UV} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0;$$

– *сумма осевых моментов инерции есть величина постоянная:*

$$I_U + I_V = I_{x_c} + I_{y_c}.$$

*Для прокатных профилей (уголков, швеллеров, двутавров) все необходимые для расчетов данные приводятся в так называемых* *таблицах сортамента* (от фр. assortiment – подбирать, сортировать; от нем. die Sorte – сорт, тип, марка). Означает сортировку продукции по маркам, профилям, размерам. Применяется в металлургической промышленности и металлопродукции.

В СССР и странах СНГ сортамент – таблицы ГОСТа (в РБ – СТБ) на размеры и геометрические характеристики прокатных (полученных путем прокатки) профилей (определенной формы поперечных сечений изделия). Эти таблицы приводятся в справочниках и в учебниках по сопротивлению материалов. Они приведены также в приложении Б.

При проведении расчетов и пользовании таблицами геометрических характеристик и таблицами сортамента *необходимо следить за соответствием расположения осей в таблицах и в конкретных сечениях.*

## А.7. Пример вычисления моментов инерции

Приведем подробно порядок расчета моментов инерции прямоугольного сечения (рис. А.10, а).

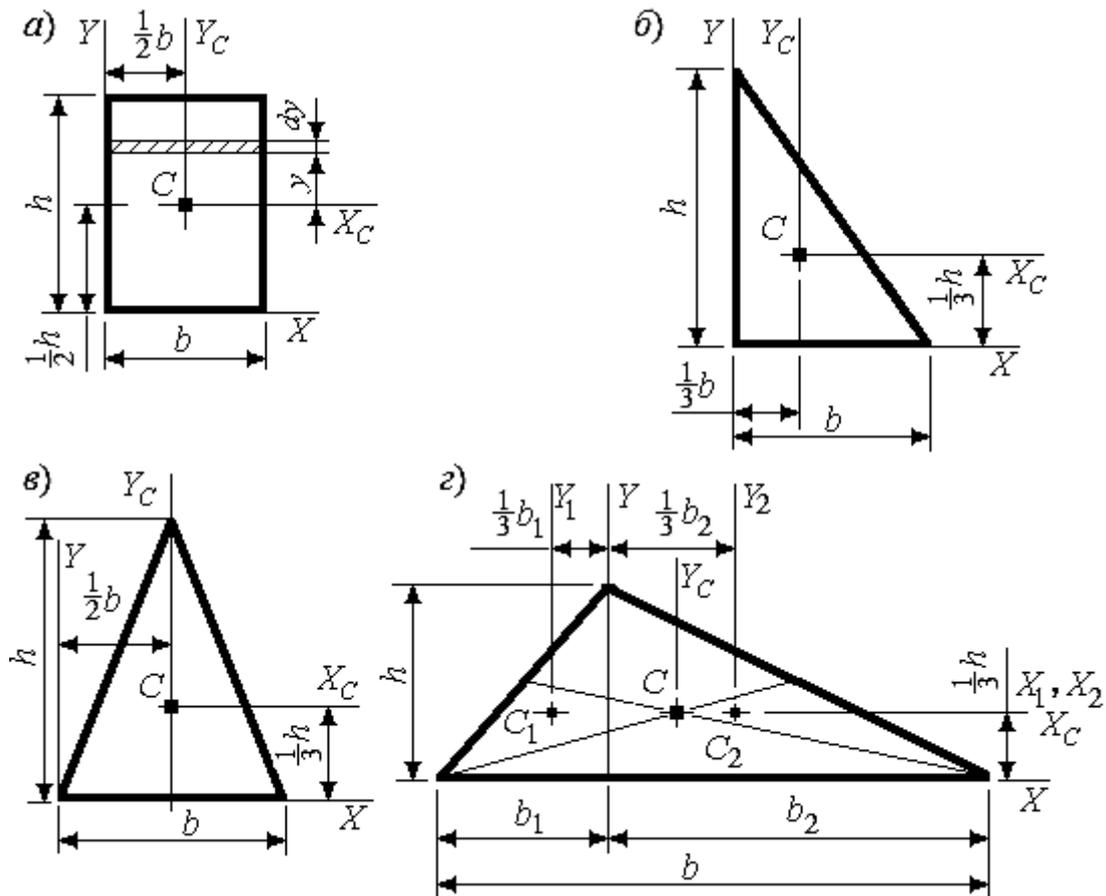


Рис. А.10. К определению моментов инерции простых сечений: а – прямоугольник; б – прямоугольный треугольник; в – равнобедренный треугольник; г – треугольник общего положения

В соответствии с формулами (А.5) осевой момент инерции относительно центральной оси  $X_c$  определяется путем следующих замен в выражении под интегралом:

- элементарная площадка  $dA = dyb$ ;
- пределы интегрирования  $(-h/2) \leq y \leq h/2$ .

Получим

$$I_{X_c} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Проведя аналогичные вычисления, имеем

$$I_{Y_c} = \frac{hb^3}{12}.$$

Осевой момент инерции этого прямоугольника относительно оси  $X$  (см. рис. А.10,  $a$ ) определим, используя формулы (А.9):

$$I_X = I_{X_c} + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогично

$$I_Y = \frac{hb^3}{3}.$$

Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей прямоугольника равен нулю, а относительно осей  $XY$ , в соответствии с (А.11),

$$I_{XY} = I_{X_c Y_c} + abA = 0 + \frac{1}{2}b \frac{1}{2}h bh = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Знак центробежного момента, как известно, зависит от положения системы координат и получается автоматически при выводе формул. Например, если ось  $X$  будет направлена влево, то расстояние между осями  $Y$  и  $Y_c$  необходимо

брать со знаком «минус»:  $\left(-\frac{1}{2}b\right)$ , т. е.

$$I_{XY} = I_{X_c Y_c} + abA = 0 + \left(-\frac{1}{2}b\right) \frac{1}{2}h bh = -\frac{b^2 h^2}{4}.$$

Приведем расчетные формулы для некоторых простых фигур (см. рис. А.10,  $b$ - $z$ ):

– прямоугольный треугольник (см. рис А.10,  $b$ )

$$I_{X_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad I_{Y_c} = \frac{hb^3}{36};$$

$$I_X = \frac{bh^3}{12}; \quad I_Y = \frac{hb^3}{12};$$

$$I_{X_c Y_c} = -\frac{b^2 h^2}{72}; \quad I_{XY} = \frac{h^2 b^2}{24};$$

$$I_p = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2);$$

– равнобедренный треугольник (см. рис. А.10, в)

$$I_{X_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad I_{Y_c} = \frac{hb^3}{48};$$

$$I_X = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{X_c Y_c} = I_{XY} = 0;$$

– треугольник общего положения (см. рис. А.10, г)

$$I_{X_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad I_X = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_Y = \frac{h}{12} (b_1^3 + b_2^3); \quad I_{XY} = -\frac{h^2 (b_1^2 - b_2^2)}{24}.$$

Поясним: для получения последнего ряда формул используем формулы для параллельного переноса (А.9) и (А.11), разбив треугольник общего положения на два прямоугольных треугольника, имеющих свой центр тяжести:  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} I_X &= I_{X_1} + a_1^2 A_1 + I_{X_2} + a_2^2 A_2 = \frac{b_1 h^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b_2 h}{2} = \\ &= \frac{h^3}{36} (b_1 + b_2) + \frac{h^3}{18} (b_1 + b_2) = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}; \end{aligned}$$

$$I_Y = I_{Y_1} + k_1^2 A_1 + I_{Y_2} + k_2^2 A_2 = \frac{hb_1^3}{36} + \left(\frac{b_1}{3}\right)^2 \frac{b_1 h}{2} + \frac{hb_2^3}{36} + \left(\frac{b_2}{3}\right)^2 \frac{b_2 h}{2} =$$

$$= \frac{h}{36}(b_1^3 + b_2^3) + \frac{h}{18}(b_1^3 + b_2^3) = \frac{h(b_1^3 + b_2^3)}{12};$$

$$I_{XY} = I_{x_c y_1} + a_1 k_1 A_1 + I_{x_c y_2} + a_2 k_2 A_2 = \frac{b_1^2 h^2}{72} + \frac{h}{3} \left(-\frac{b_1}{3}\right) \frac{b_1 h}{2} -$$

$$-\frac{b_2^2 h^2}{72} + \frac{h}{3} \frac{b_2}{3} \frac{b_2 h}{2} = \frac{h^2}{72}(b_1^2 - b_2^2) - \frac{h^2}{18}(b_1^2 - b_2^2) = -\frac{h^2(b_1^2 - b_2^2)}{24}.$$

В этих формулах  $a_1$  и  $a_2$ ;  $k_1$  и  $k_2$  – соответствующие расстояния между осями двух прямоугольных треугольников.

Величину центробежного момента инерции для уголков определяют по формуле

$$I_{XY} = \pm \sqrt{(I_X - I_{\min})(I_Y - I_{\min})}.$$

Для сечений в виде треугольника, а также уголков знак центробежного момента можно определять, пользуясь следующей рекомендацией (рис. А.11).

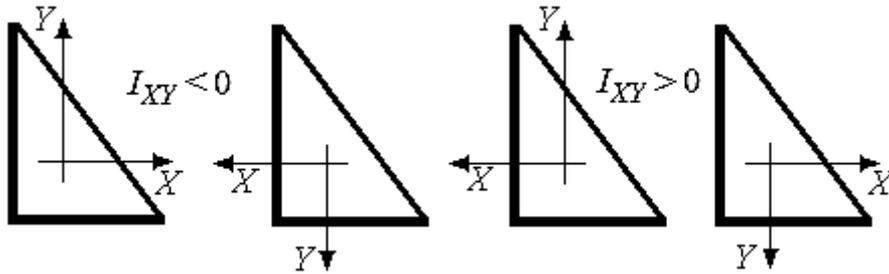


Рис. А.11. Схемы, поясняющие подход к выбору знака центробежного момента

Рассмотрим достаточно распространенные сечения: круглое и кольцевое (рис. А.12).

Полярный момент инерции круглого сечения (см. рис. А.12, а)

$$I_p = \int_F \rho^2 dA = \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Здесь  $dA = 2\pi r dr$ .

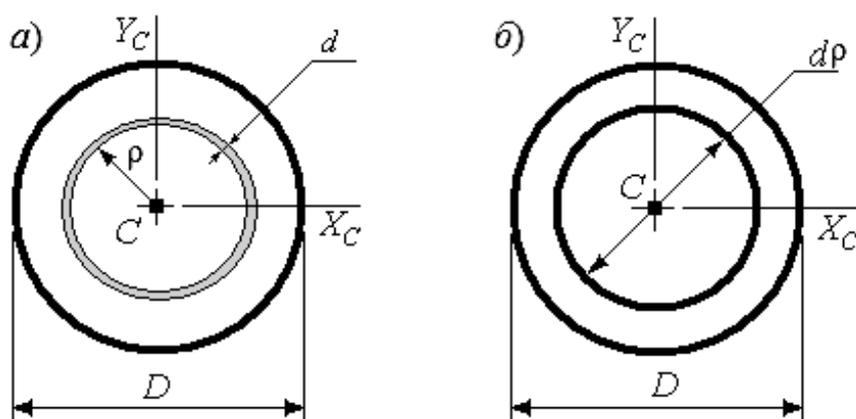


Рис. А.12. Круглое (а) и кольцевое (б) сечения

Поскольку  $I_{\rho} = I_{x_c} + I_{y_c}$  и  $I_{x_c} = I_{y_c}$ , получим

$$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Используем понятие «кольцо – сложное сечение»: из круга большего диаметра вычитается круг меньшего диаметра:

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Примем  $\alpha = \frac{d}{D}$ . Тогда

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4).$$

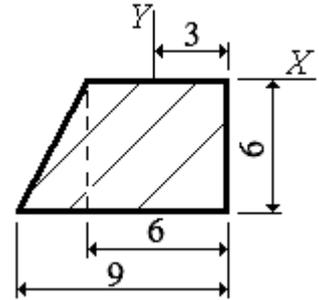
Для определения моментов инерции и других геометрических характеристик более сложных сечений рекомендуется пользоваться справочными данными (см. табл. Б.1). В табл. Б.2 приводятся геометрические характеристики (сортамент) прокатных профилей.

## Контрольные вопросы

Размеры сечений на схемах заданы в сантиметрах.

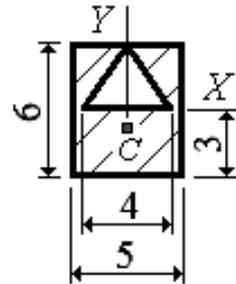
1. Укажите, в каком ответе записано правильное значение статического момента сечения относительно оси  $X$ :

- 1)  $S_X = -144 \text{ см}^3$ ;    3)  $S_X = 144 \text{ см}^3$ ;  
 2)  $S_X = 162 \text{ см}^3$ ;    4)  $S_X = -126 \text{ см}^3$ .



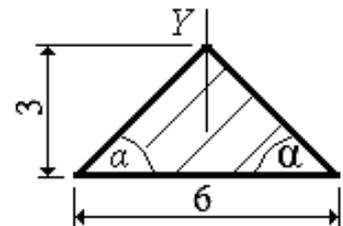
2. Укажите, в каком ответе записано правильное значение координаты  $y$  центра тяжести сечения:

- 1)  $Y_C = 0,15 \text{ см}$ ;    3)  $Y_C = -0,25 \text{ см}$ ;  
 2)  $Y_C = -0,2 \text{ см}$ ;    4)  $Y_C = 0,22 \text{ см}$ .



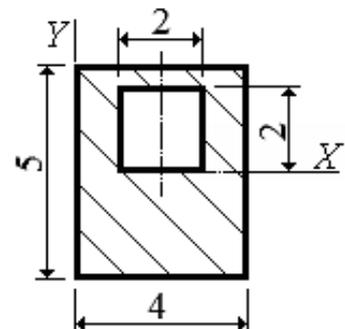
3. Укажите, в каком ответе записано правильное значение осевого момента инерции относительно оси  $Y$ :

- 1)  $I_Y = 9 \text{ см}^4$ ;    3)  $I_Y = 18 \text{ см}^4$ ;  
 2)  $I_Y = 13,5 \text{ см}^4$ ;    4)  $I_Y = 54 \text{ см}^4$ .



4. Укажите, в каком ответе записано правильное значение центробежного момента инерции относительно указанных осей:

- 1)  $I_{XY} = 9 \text{ см}^4$ ;    3)  $I_{XY} = -16 \text{ см}^4$ ;  
 2)  $I_{XY} = -8 \text{ см}^4$ ;    4)  $I_{XY} = -15 \text{ см}^4$ .

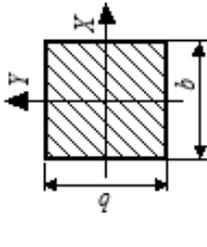
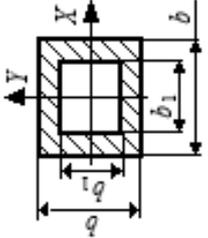
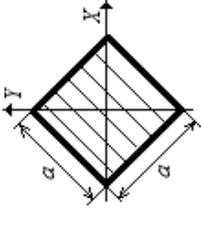




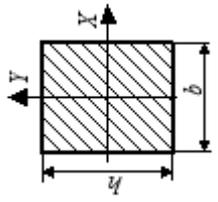
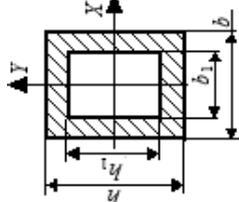
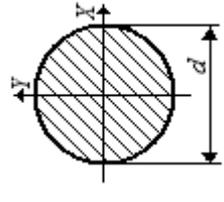
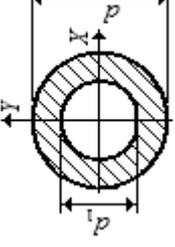
## ПРИЛОЖЕНИЕ Б (справочное)

### Геометрические характеристики сечений

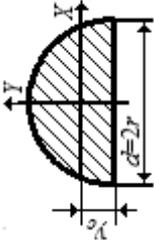
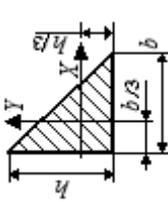
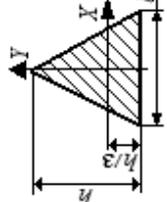
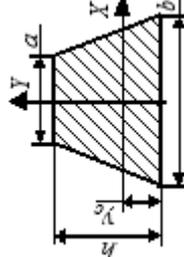
Табл. Б.1. Геометрические характеристики плоских сечений

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции $I_x, I_y$	Момент сопротивления $W_x, W_y$	Радиус инерции $i_x, i_y$
	$b^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6} \approx 0,118b^3$	$i_x = i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0,289b$
	$b^2 - b_1^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{12}}$
	$a^2$	$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}a^3}{12} = 0,118a^3$	$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0,289a$

Продолжение табл. Б.1

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции $I_x, I_y$	Момент сопротивления $W_x, W_y$	Радиус инерции $i_x, i_y$
	$bh$	$I_x = \frac{bh^3}{12};$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6};$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} \approx 0,289h;$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0,289b$
	$bh - b_1h_1$	$I_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12};$ $I_y = \frac{b^3h - b_1^3h_1}{12}$	$W_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h};$ $W_y = \frac{b^3h - b_1^3h_1}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12(bh - b_1h_1)}};$ $i_y = \sqrt{\frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$	$i_x = i_y = \frac{d}{4}$
	$\frac{\pi(d^2 - d_1^2)}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{64};$ $I_p = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32d};$ $W_p = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{16d}$	$i_x = i_y = \frac{\sqrt{d^2 + d_1^2}}{4}$

Окончание табл. Б.1

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции $I_x, I_y$	Момент сопротивления $W_x, W_y$	Радиус инерции $i_x, i_y$
	$\frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$	$I_x = 0,11r^4 = 0,007d^4$ ; $I_y = 0,4r^4 = 0,025d^4$	$W_{XB} = 0,1912r^3 = 0,0239d^3$ ; $W_{XH} = 0,258r^3 = 0,0323d^3$ ; $W_y = 0,4r^3 = 0,05d^3$	$i_x = 0,264r = 0,132d$ ; $i_y = 0,5r = 0,25d$
	$\frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ ; $I_y = \frac{hb^3}{36}$	$W_{XB} = \frac{bh^2}{24}$ ; $W_{XH} = \frac{bh^2}{12}$ ; $W_{yП} = \frac{bh^2}{24}$ ; $W_{yЛ} = \frac{bh^2}{12}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{18}} \approx 0,236h$ ; $i_y = \frac{b}{\sqrt{18}} \approx 0,236b$
	$\frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ ; $I_y = \frac{hb^3}{48}$	$W_{XB} = \frac{bh^2}{24}$ ; $W_{XH} = \frac{bh^2}{12}$ ; $W_y = \frac{bh^2}{24}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{18}} \approx 0,236h$ ; $i_y = \frac{b}{\sqrt{24}} \approx 0,204b$
	$\frac{a+b}{2}h$ $y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$	$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}$ ; $I_y = \frac{h(b^4 - a^4)}{48(b-a)}$	$W_{XB} = \frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{12(a+2b)}$ ; $W_{XH} = \frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{12(2a+b)}$ ; $W_y = \frac{h(b^4 - a^4)}{24(b^2 - ba)}$	$i_x = \sqrt{\frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{18(a+b)^2}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{24}}$

**Примечания.**

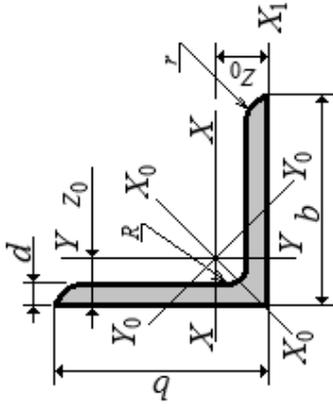
1.  $W_{XB}$ ,  $W_{XH}$ ,  $W_{yП}$ ,  $W_{yЛ}$  – осевые моменты сопротивления крайних верхних, нижних, правых и левых волокон соответственно.
2. Единицы измерений величин: площадь сечения  $A$ ,  $m^2 = 10^4 \text{ см}^2$ ; осевые и полярный моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_p$ ,  $m^4 = 10^8 \text{ см}^4$ ; осевые и полярный моменты сопротивления  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_p$ ,  $m^3 = 10^6 \text{ см}^3$ ; радиусы инерции  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $m = 10^2 \text{ см}$ .

Табл. Б.2. Сталь прокатная угловая равнополочная [32]

Номер уголка	b	d	R	r	Площадь попе- речного сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей									
						X-X			X <sub>0</sub> -X <sub>0</sub>			Y <sub>0</sub> -Y <sub>0</sub>			
						I <sub>X</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>X</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>X</sub> , см	I <sub>X max</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>X<sub>0</sub> max</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>Y<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>Y<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>Y<sub>0</sub> min</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>X<sub>Y</sub></sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4,0	40	4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13
4,5	45	4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26
5,0	50	4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38
6,0	60	8	7,0	2,3	9,04	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78
7,0	70	6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,1	1,94
7,0	70	8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,2	2,02
8,0	80	6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,4	2,19
8,0	80	8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,0	2,27
9,0	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,1	2,43

Обозначения:

b, d – ширина и толщина полки; I, i – момент и радиус инерции; z<sub>0</sub> – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки; R – радиус внутреннего закругления; r – радиус закругления полки.



Окончание табл. Б.2

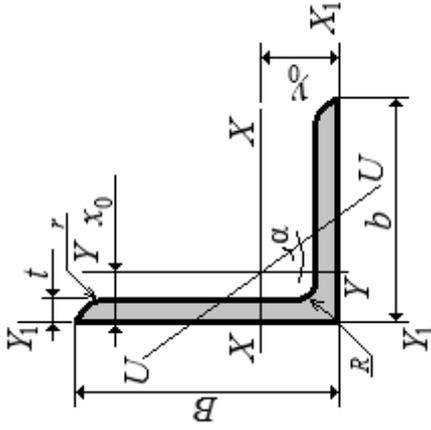
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9,0	90	8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,3	2,51
10	100	8	12,0	4,0	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,3	2,75
10	100	10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110	2,83
10	100	12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122	2,91
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106	2,96
11	110	8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116	3,00
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172	3,36
12,5	125	10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211	3,45
12,5	125	12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248	3,53
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,03	2,79	274	3,78
14	140	10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301	3,82
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455	4,30
16	160	12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78.	60,53	3,17	537	4,39
16	160	16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690	4,55
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716	4,85
18	180	12	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776	4,89
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073	5,37
20	200	14	18,0	6,0	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236	5,46
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655	5,91
22	220	16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1862	6,02
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775	6,75

Табл. Б.3. Сталь прокатная угловая неравнополочная [33]

Номер уголка	В	b	t	Площадь попе- речного сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Угол накло- на оси tgα			
					X-X				Y-Y					x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	I <sub>XУ</sub> , см <sup>4</sup>
					I <sub>X</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>X</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>X</sub> , см	I <sub>Y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>Y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>Y</sub> , см	I <sub>U<sub>max</sub></sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>U<sub>min</sub></sub> , см <sup>4</sup>				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
4/2,5	40	25	4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381
4,5/2,8	45	28	4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379
5/3,2	50	32	4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52/	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
5,6/3,6	56	36	5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404
6,3/4,0	63	40	6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406

Обозначения:

$B, b$  – ширина большей и меньшей полки;  $I, i$  – момент и радиус инерции;  $x_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки.



Окончание табл. Б.3

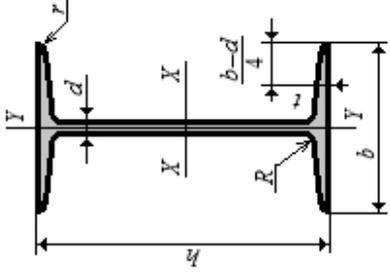
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8/5	80	50	6	7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386
9/5,6	90	56	8	11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380
10/6,3	100	63	6	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393
10/6,3	100	63	8	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391
10/6,3	100	63	10	15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387
11/7	110	70	8	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400
12,5/8	125	80	8	15,98	225,62	30,27	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406
14/9	140	90	8	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	1,98	2,03	4,49	121,00	0,411
14/9	140	90	10	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,56	85,51	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409
16/10	160	100	10	25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390
16/10	160	100	14	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385
18/11	180	110	10	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376
18/11	180	110	12	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374
20/12,5	200	125	12	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392
20/12,5	200	125	14	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390
20/12,5	200	125	16	49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388

Табл. Б.4. Двутавры стальные горячекатаные [34]

Номер двутавра	Размер				Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Справочная величина для оси							
	$h$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$t$ , мм		X-X				Y-Y			
						$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104	115	23,1	2,07	
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	

Обозначения:

$h$  – высота;  $d$  – толщина стенки;  $t$  – средняя толщина полки;  $R$  – радиус внутреннего закругления;  $r$  – радиус закругления полки;  $W$  – момент сопротивления;  $S$  – статический момент полусечения;  $i$  – радиус инерции.



Окончание табл. Б.4

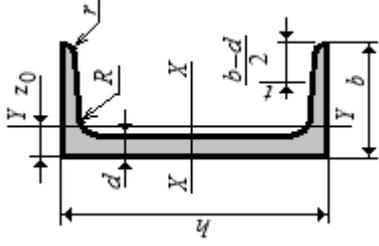
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Табл. Б.5. Швеллеры стальные горячекатаные [35]

Номер швеллера	$h$ , мм	$b$ , мм	$d$ , мм	$t$ , мм	Площадь поперечного сечения, $\text{см}^2$	Справочная величина для оси						$z_0$ , см	
						X-X			Y-Y				
						$I_x$ , $\text{см}^4$	$W_x$ , $\text{см}^3$	$i_x$ , см	$S_x$ , $\text{см}^3$	$I_y$ , $\text{см}^4$	$W_y$ , $\text{см}^3$		$i_y$ , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	23,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00

Обозначения:

$h$  – высота;  $b$  – ширина полки;  $d$  – толщина стенки;  $R$  – радиус внутреннего закругления;  $r$  – радиус закругления полки;  $z_0$  – расстояние от оси Y-Y до наружной грани стенки;  $I$  – момент инерции;  $W$  – момент сопротивления;  $S$  – статический момент площади полусечения;  $i$  – радиус инерции.



Окончание табл. Б.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
18	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,20	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,70	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,60	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,20	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,50	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,40	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,50	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

## ПРИЛОЖЕНИЕ В (справочное)

### Механические характеристики материалов и допускаемые напряжения

Табл. В.1. Физико-механические свойства материалов

Материал	Модуль упругости, МПа		Коэффициент Пуассона $\mu$	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>
	$E \cdot 10^5$	$G \cdot 10^5$		
Сталь углеродистая	1,96...2,06	0,785...0,794	0,24...0,28	78,6
Сталь легированная	2,06...2,16	0,785...0,794	0,25...0,30	78,5
Стальное литье	1,75	–	0,25...0,33	78,5
Чугун серый, белый	1,13...1,57	0,44	0,23...0,27	72
Чугун ковкий	1,52	–	–	72
Латунь	0,9...1,0	0,35...0,37	0,32...0,42	85
Алюминий	0,59...0,69	0,26...0,37	0,32...0,36	27
Сплавы алюминиевые	0,70...0,72	0,27	0,32	–
Дюралюминий	0,71	0,27...0,37	–	28
Гранит	0,49	–	–	25...28
Мрамор	0,56	–	–	25...28
Кирпичная кладка	0,027...0,03	–	–	
Бетон:				
тяжёлый	0,17...0,40	–	0,16...0,18	20
на пористых заполнителях	0,03...0,23	–	0,16...0,18	
ячеистый	0,01...0,10	–	0,16...0,18	
Древесина (сосна, ель):				
вдоль волокон	0,01...0,12	0,055	–	5,5
поперёк волокон	0,005...0,01	–	–	5,5
Стекло	0,56	0,22	0,25	
Каучук	0,00008	–	0,47	9,1
Текстолит	0,06...0,1	–	–	13,5
Оргстекло	0,03...0,04	–	0,35...0,38	11,8
Капрон	0,014...0,02	–	–	11,4
Фторопласт-4	0,0047...0,0085	–	–	21...23
Стеклопласты	0,18...0,35	–	–	14...19

Табл. В.2. Механические характеристики углеродистых конструкционных сталей

Марка стали	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\tau_T$	Относительное удлинение, %, при $l = 10d$	Ударная вязкость, $\text{Нм/м}^2 \cdot 10^5$	$\sigma_{-1}^u$	$\sigma_{-1}^0$	$\tau_{-1}^k$
	МПа					МПа		
20	420	250	160	25	–	170...200	120...160	100...130
30	500	300	170	21	8	200...270	170...210	110...140
45	610	360	220	16	5	250...340	190...250	150...200
	(900)	(600)	250	(19)	(15)			
50 Г	710	420		11	4	–	–	–
	(960)	(700)		(9)				
20 Х	800	650	–	11	6	380	–	170...230
40 Х	850	620	–	10	6	350...380	25	225
	(1000)	(800)	–		(17)			
40ХН	(1000)	(800)	(390)	11	7	(400)	(290)	(240)
38ХМЮА	(1000)	(1000)	–	(9)	(9)	(420...450)	–	–
20ХНЗА	(950)	(750)	–	(12)	(10)	(430...450)	(300...320)	(245...255)
40ХНМА	(1000)	(950)	–	(12)	(10)	(500...700)	–	(270...280)
30ХГСА	1100	850	–	10	5	510...540	500...535	220...245
	(1700)	(1070)		(6)		(750)		(430)

**Примечание.** В скобках – механические характеристики сталей после термообработки.

Табл. В.3. Механические характеристики некоторых цветных металлов и неметаллов

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести и пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Латуни			
Л68 мягкая	$\sigma_p = 320$	$\sigma_{0,1} = 91$	$\sigma_{-1} = 120$
Л68 твердая	$\tau_{ср} = 200$		
	$\sigma_p = 600$	$\sigma_{0,1} = 520$	$\sigma_{-1} = 150$
ЛТц 58-2 мягкая	$\sigma_p = 400$	$\sigma_T = 156$	–
ЛТц 58-2 твердая	$\sigma_p = 700$	–	–
Бронзы			
Бр. 0-10	$\sigma_p = 250$	–	–
Бр.ОЦ 8-4	$\sigma_p = 200$	$\sigma_T = 40...50$	–
Бр. А5	$\sigma_p = 800$	$\sigma_T = 500$	$\sigma_{-1} = 134$
		$\sigma_{пц} = 480$	
Алюминиевые сплавы			
АЛ1	$\sigma_p = 200$ $\tau_{ср} = 170$	$\sigma_T = 170$	$\sigma_{-1} = 56$
Д16, Д 16П	$\sigma_p = 210...300$	$\sigma_T = 380$	$\sigma_{-1} = 140$
Неметаллы			
Стеклопласты	$\sigma_p = 260...400$ $\sigma_c = 100...300$ $\sigma_{и} = 130...150$	$\sigma_{пц} = 122...260$	$\sigma_{-1} / \sigma_B = 0,22...0,25$
Капрон	$\sigma_p = 60$ $\sigma_{и} = 90$	–	–
Гранит	$\sigma_p = 3$ $\sigma_c = 120...260$	–	–
Мрамор	$\sigma_c = 100...180$	–	–
Кладка кирпича	$\sigma_c = 2,5...9$		
Бетон	$\sigma_c = 5...48$		
	$\sigma_p = 9,31...11,55$	$\sigma_{пц} = 61$	
	$\sigma_c = 42,7...46,6$	$\sigma_{пц} = 31$	
	$\sigma_{и} = 73,6...87,7$		
	$\tau_{ср} = 6,2...7,3$		

**Примечание.**  $\sigma_p$ ,  $\sigma_c$  – предел прочности при растяжении и сжатии;  $\sigma_{и}$  – предел прочности при изгибе;  $\sigma_{ср}$  – предел прочности при срезе;  $\sigma_{пц}$  – предел пропорциональности при растяжении;  $\sigma_T$  – предел текучести при растяжении.

Табл. В.4. Допускаемые напряжения и расчетные сопротивления материалов при статическом нагружении

Материал	Допускаемое напряжение				Расчетное сопротивление $R$ , МПа
	при растяжении $[\sigma]_p$ , МПа	при изгибе $[\sigma]_{из}$ , МПа	при кручении $[\sigma]_{кр}$ , МПа	при срезе $[\sigma]_{ср}$ , МПа	
Ст 3	125	150	95	75	210
Ст 5	165	200	125	100	
Сталь 45	200	240	150	125	
	(300)	(360)	(230)	(185)	
Сталь 50Г	210	260	160	130	
	(270)	(330)	(250)	(165)	
Сталь 40Х	200	240	150	120	
	(440)	(530)	(330)	(270)	
Сталь 20Х	190	230	140	115	
	(290)	(350)	(220)	(175)	
Сталь 30ГХСА	200	240	150	120	
	(510)	(690)	(390)	(310)	
Чугун серый	28...80 (растяж.) 120...150 (сжатие)	–	–	–	70 (растяж.) 180 (сжатие)
Латунь	70...140				140
Бронза	60...120				
Дюралюминий	80...150				170
Текстолит	30...40				
Сосна вдоль волокон	7...10 10...12 (сжатие)				8,5...16
Кирпичная кладка	До 0,2 0,6...2,5 (сжатие)				
Бетон	0,1...0,7 (растяж.) 1...9 (сжатие)				2 (растяж.) 10 (сжатие)

**Примечание.** В скобках указаны допускаемые напряжения после термообработки.

Табл. В.5. Расчётные сопротивления проката для стальных конструкций и отливок из серого чугуна

Материал	Расчётное сопротивление, МПа			
	$R_y$	$R_u$	$R_t$	$R_c$
Сталь листовая, прокат, фасонная				
С245	240	360	–	–
С255	240	360	–	–
С285	280	390	–	–
С375	345	480	–	–
Чугун серый				
СЧ15	–	–	55	160
СЧ20	–	–	65	200
СЧ25	–	–	85	230
СЧ39	–	–	100	250

Табл. В.6. Расчётные сопротивления срезу и растяжению стальных болтов

Напряжённое состояние	Расчётное сопротивление, МПа			
	Класс болтов			
	4,6	4,8	5,6	5,8
Срез $R_{bs}$	150	160	190	200
Растяжение $R_{bt}$	175	160	210	200

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>1. Сопротивление материалов – раздел механики деформируемого твердого тела</b> .....	5
1.1 Связь сопротивления материалов с другими дисциплинами .....	5
1.2 Цель преподавания дисциплины и требования к студентам .....	8
1.3 Прочность, жесткость, устойчивость .....	9
1.4 Краткая историческая справка .....	10
Контрольные вопросы .....	11
<b>2. Основные определения, методы и принципы</b> .....	12
2.1. Расчетная схема .....	12
2.2. Схематизация нагрузок .....	16
2.3. Основные гипотезы о деформируемом теле .....	23
2.4. Метод определения внутренних сил – метод сечений .....	27
2.5. Определение понятий «напряжения», «перемещения», «деформации» .....	32
Контрольные вопросы .....	36
<b>3. Построение эпюр внутренних силовых факторов</b> .....	37
3.1. Необходимость построения эпюр. Общие правила и порядок построения .....	37
3.2. Построение и контроль эпюр продольных сил .....	38
3.3. Построение и контроль эпюр крутящих моментов .....	43
3.4. Построение и контроль эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для статически определимых балок .....	46
3.5. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом $M$ , поперечной силой $Q$ и интенсивностью нагрузки $q$ .....	54
3.6. Построение и контроль эпюр ВСФ для статически определимых рам .....	68
Контрольные вопросы .....	75
<b>4. Механические свойства конструкционных материалов</b> .....	77
4.1. Определение механических характеристик .....	77
Контрольные вопросы .....	87
<b>5. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии</b> .....	88
5.1. Напряжения и деформации .....	88
5.2. Методы расчета конструкций .....	93

5.3. Метод расчета по допускаемым напряжениям .....	94
5.4. Расчеты на жесткость .....	98
5.5. Статически определимые и статически неопределимые системы при растяжении-сжатии .....	101
Контрольные вопросы .....	114
<b>6. Критерии (теории) прочности .....</b>	<b>116</b>
6.1. Основы теории напряженного состояния .....	116
6.2. Деформации при сложном напряженном состоянии .....	133
6.3. Теории (гипотезы или критерии) прочности .....	142
Контрольные вопросы .....	150
<b>7. Изгиб прямых брусьев .....</b>	<b>153</b>
7.1. Основные понятия и определения .....	153
7.2. Плоский чистый изгиб .....	154
7.3. Плоский поперечный изгиб .....	166
7.4. Расчет бруса на прочность по эквивалентным напряжениям (проверка прочности по 3 и 4 теориям) .....	176
7.5. Расчет на жесткость .....	181
7.6. Метод начальных параметров .....	190
7.7 Рациональные поперечные сечения балок .....	196
Контрольные вопросы .....	203
<b>8. Сдвиг. Кручение стержня круглого поперечного сечения .....</b>	<b>207</b>
8.1. Понятие о чистом сдвиге .....	207
8.2. Исследование плоского напряженного состояния при чистом сдвиге .....	208
8.3. Закон Гука при чистом сдвиге .....	211
8.4. Зависимость между упругими постоянными $G$ , $E$ , $\mu$ .....	214
8.5. Расчеты на прочность и жесткость при сдвиге .....	214
8.6. Кручение прямого бруса круглого поперечного сечения .....	222
8.7. Статически неопределимые задачи при кручении .....	236
8.8. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением .....	238
Контрольные вопросы .....	242
<b>Список литературы.....</b>	<b>245</b>
<b>Приложение А. Геометрические характеристики плоских сечений .....</b>	<b>248</b>
<b>Приложение Б. Геометрические характеристики сечений .....</b>	<b>271</b>
<b>Приложение В. Механические характеристики материалов и допускаемые напряжения .....</b>	<b>282</b>

Учебное издание

**Кузменко Игорь Михайлович**

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

*Учебное пособие*

**В двух частях**

**Часть 1**

Редакторы *И. В. Голубцова, А. Т. Червинская*

Художественное оформление обложки *А. А. Емельянова*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевничая*

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 16,86. Уч.-изд. л. 18,06. Тираж 50 экз. Заказ № .

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

УПКП «Могилевская областная укрупненная типография  
имени Спиридона Соболя».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 2/24 от 12.12.2013.

Ул. Первомайская, 70, 212030, г. Могилев, Республика Беларусь.