

УДК 621.83.06

М. Е. Лустенков, канд. техн. наук, доц.

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФРИКЦИОННОЙ МОДЕЛИ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ С ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Рассмотрены вопросы создания пространственной фрикционной модели планетарной шариковой передачи. Модель разработана на основе метода кинестатики, с ее помощью можно определить значения сил, действующих в зацеплении. Созданная модель также позволяет определить КПД передачи и снизить потери мощности путем оптимизации ее геометрических параметров.

Планетарные шариковые передачи (ПШП) представляют собой отдельный класс трехзвенных механизмов, в которых передача нагрузки осуществляется посредством тел качения, выполняющих

функции сателлитов по аналогии с зубчатыми колесами – сателлитами в обычных планетарных механизмах. Основные звенья ПШП, разрабатываемых на кафедре ОПМ, представлены на рис. 1.

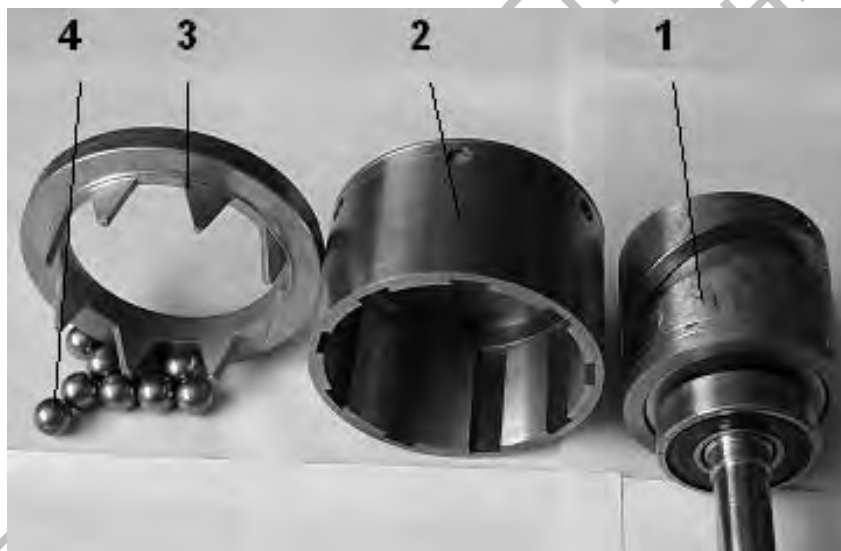


Рис. 1. Основные звенья многопериодной ПШП: 1 – внутренний составной кулачок; 2 – вал с пазами; 3 – многопериодный наружный кулачок; 4 – шарики

Нами разработана плоская фрикционная модель, позволяющая легко оценить КПД передачи на стадии проектирования [1]. При разработке пространственной модели очевидно приближение к реальному процессу по сравнению с плоской моделью, т. к. мы избавляемся от некоторых допущений, упрощавших действительную картину зацепления. Анализ фрикционной модели позволяет получить значения усилий на основных звеньях, что необходимо

для расчета их прочности. Варьируя геометрией передачи, можно снизить потери мощности и увеличить ее КПД. Вопросы пространственной фрикционной модели зацепления применительно к однопериодной ЭШП рассмотрены в [2]. В данной работе анализируется многопериодное зацепление, где Z_1 – число периодов внутреннего кулачка ($Z_1 = 1$), Z_3 – число периодов (выступов) рабочей поверхности наружного кулачка.

Выберем единую систему координат для всех рассматриваемых тел так, чтобы ось Z совпадала с осью редуктора, за нулевое положение примем положение одного шарика в точке с максимальным значением углов подъема беговых дорожек. Анализируем первую кинематическую схему передачи (звено 1 – ведущее, звено 2 – ведомое, звено 3 остановлено), силовой расчет ведем методом кинетостатики.

Расчет начинаем с рассмотрения равновесия ведомого звена – вала с пазами, схема которого изображена на рис. 2. На вал с пазами действуют: момент полезной нагрузки \vec{M}_2 , момент трения \vec{M}_{TP2} в подшипниках. Силы инерции для тела, вращающегося вокруг оси, проходящей

через центр масс, приводятся к моменту $\vec{M}_2^\Phi = -I_{z2}\vec{\varepsilon}_2$, где I_{z2} – момент инерции вала 2. На вал с пазами также действуют реакции от тел качения \vec{N}_2 , которые разлагаются на горизонтальные \vec{N}_{2x} и вертикальные \vec{N}_{2y} составляющие и реакции \vec{S}_4 (\vec{S}_{4x} и \vec{S}_{4y}). При этом мы предполагаем двухточечный контакт шарика и паза: сила N_2 преодолевает сопротивление момента M_2 , а сила S_4 компенсирует центробежные силы шарика. Силы трения \vec{F}_{TP2} уравниваются равнодействующей осевой реакцией \vec{S}_{2z} .

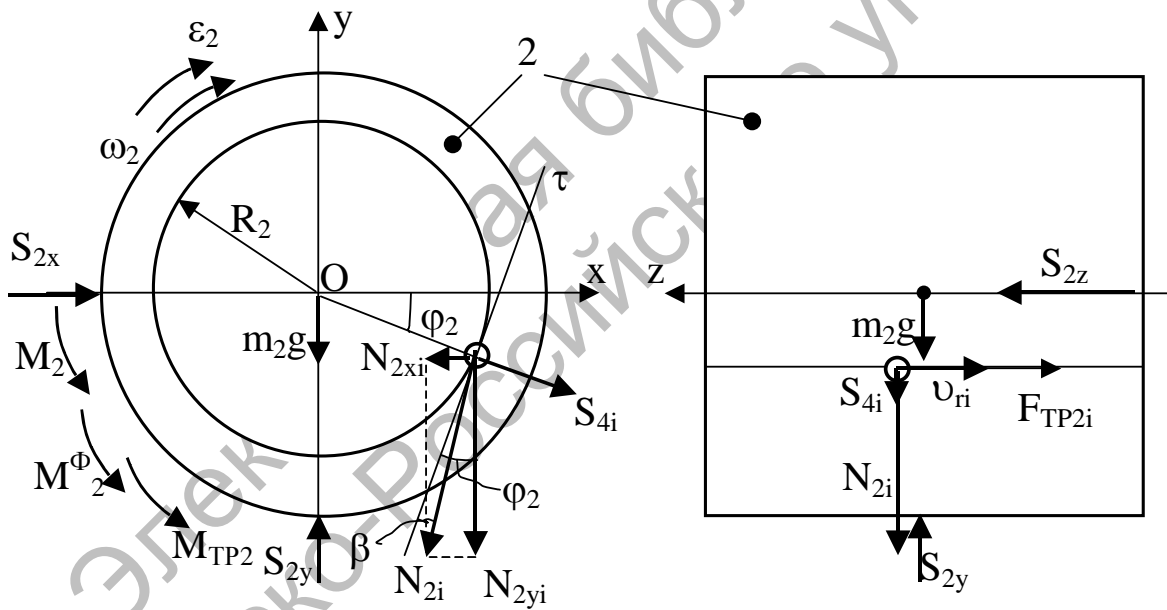


Рис. 2. Силы, действующие на вал с пазами

При составлении модели учтем также вес $m_2\vec{g}$, предполагая, что ось передачи располагается горизонтально. Силы \vec{S}_{2x} и \vec{S}_{2y} представляют собой суммарные реакции пары подшипников, несущих вал 2.

Запишем уравнения кинетостатического равновесия для вала 2:

$$\sum F_{xi} = -\sum_{i=1}^t N_{2xi} + \sum_{i=1}^t S_{4xi} + S_{2x} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{yi} = -\sum_{i=1}^t N_{2yi} - \sum_{i=1}^t S_{4yi} + S_{2y} - m_2g = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{zi} = -\sum_{i=1}^t \text{sign}(v_{ri})F_{TPi} + S_{2z} = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_{zi} = M_2 + M_2^\Phi + M_{TP2} - N_2 R_2 t \cos \beta = 0, \quad (4)$$

где R_2 – диаметр цилиндрической поверхности, на которой располагаются точки контакта тела качения и вала с пазами; t – число шариков в секции; β – угол профиля продольного паза вала.

Составляющие реакций \vec{N}_2 и \vec{S}_4 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{2xi} &= N_2 \sin(\varphi_{2i} - \beta), \\ S_{4xi} &= S_4 \cos \varphi_{2i}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} N_{2yi} &= N_2 \cos(\varphi_{2i} - \beta), \\ S_{4yi} &= S_4 \sin \varphi_{2i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Угол β указан на рис. 2, где τ – касательная к поверхности вала с пазами. Также известна зависимость $F_{TP2} = f(N_2 + S_4)$. С учетом вышесказанного, система уравнений (1)–(4) может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned} S_{2x} &= N_2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\sin \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} - \beta \right) \right) - \\ &- S_4 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\cos \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} \right) \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} S_{2y} &= N_2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\cos \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} - \beta \right) \right) + \\ &+ S_4 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\sin \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} \right) \right) + m_2 g; \end{aligned} \quad (8)$$

$$S_{2z} = f \sum_{i=0}^{t-1} \text{sign}(v_{ri+1})(N_2 + S_4); \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{M_2 + I_{z2} \varepsilon_2 + M_{TP2}}{R_2 t \cos \beta}. \quad (10)$$

$S_{2x} = S_{2y} = 0$, так как равны нулю суммы синусов и косинусов в выражениях

(7) и (8). Это означает, что многоперiodная ПШП уравновешена в радиальном направлении. При четном числе тел качения $S_{2z} = 0$, что свидетельствует об уравновешенности передачи в осевом направлении.

Рассмотрим равновесие неподвижного наружного кулачка 3 на рис. 3.

На него действуют: реактивный момент \vec{M}_3 , вес $m_3 \vec{g}$, реакции от тела качения \vec{N}_3 , которые разлагаются на составляющие \vec{N}_{3y} и \vec{N}_{3z} , а также реакции от взаимодействия тела 3 с другими деталями ПШП (в том числе и с корпусом) \vec{S}_{3x} , \vec{S}_{3y} и \vec{S}_{3z} . Уравнения кинестатического равновесия тела 3:

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} &= -S_{3x} + \sum_{i=1}^t N_{3xi} - \\ &- \sum_{i=1}^t F_{TP3i} \cos \alpha_{3i} \sin \varphi_{2i} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{yi} &= \sum_{i=1}^t N_{3yi} - \sum_{i=1}^t F_{TP3i} \cos \alpha_{3i} \cos \varphi_{2i} - \\ &- S_{3y} - m_3 g = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{zi} &= -\sum_{i=1}^t N_{3zi} + S_{3z} - \\ &- \sum_{i=1}^t F_{TP3i} \sin \alpha_{3i} = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{zi} &= -M_3 + \sum_{i=1}^t N_3 R_3 \sin \alpha_{3i} - \\ &- \sum_{i=1}^t F_{TP3i} R_3 \cos \alpha_{3i} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где R_3 – диаметр цилиндрической поверхности, на которой располагаются точки контакта тела качения и наружного кулачка.

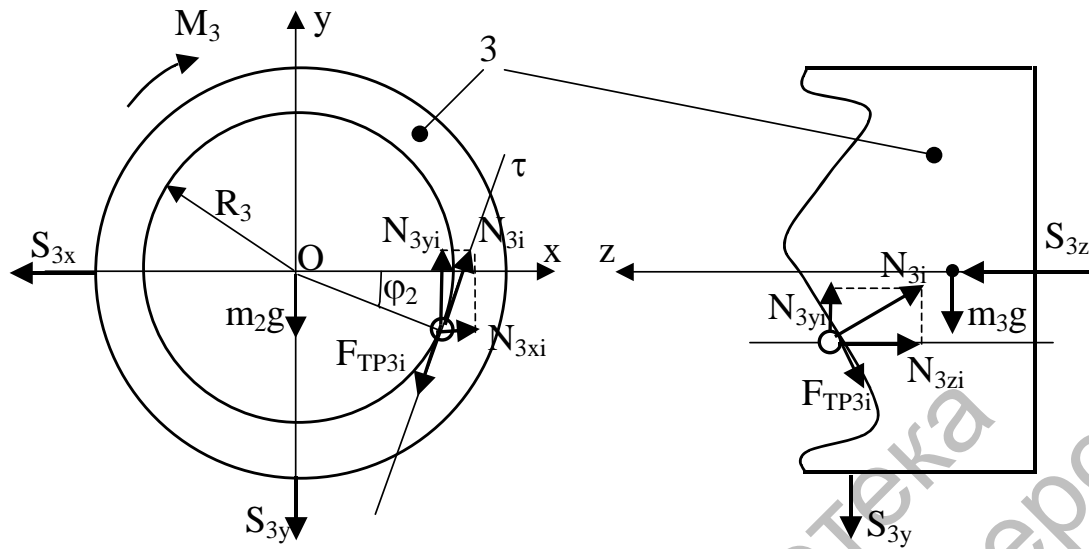


Рис. 3. Силы, действующие на наружный кулачок

Определим модули N_{3x} , N_{3y} и N_{3z} : делялся согласно выражению

$$N_{3x} = N_3 \sin \alpha_{3i} \sin \varphi_{2i}; \quad (15)$$

$$N_{3yi} = N_3 \sin \alpha_{3i} \cos \varphi_{2i}; \quad (16)$$

$$N_{3zi} = N_3 \cos \alpha_{3i}. \quad (17)$$

Систему уравнений (11)–(14) представим в следующем виде:

$$S_{3x} = N_3 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin \alpha_{3i} - f \cos \alpha_{3i}) \times \sin \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} \right); \quad (18)$$

$$S_{3y} = N_3 \sum_{i=0}^{t-1} ((\sin \alpha_{3i} - f \cos \alpha_{3i}) \times \cos \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} \right)) - m_3 g; \quad (19)$$

$$S_{3z} = N_3 \sum_{i=0}^{t-1} (\cos \alpha_{3i} + f \sin \alpha_{3i}); \quad (20)$$

$$M_3 = N_3 R_3 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin \alpha_{3i} - f \cos \alpha_{3i}). \quad (21)$$

В формулах (18)–(21) угол α_{3i} опре-

$$\alpha_{3i} = \arctg \left(\frac{AZ_3}{R} \cos \left(Z_3 \left(\varphi_2 + \frac{2\pi i}{t} \right) \right) \right). \quad (22)$$

Рассмотрим равновесие внутреннего кулачка на рис. 4. На него действуют: крутящий момент от двигателя \vec{M}_1 и момент сил трения \vec{M}_{TP1} . Силы инерции, действующие на ведущий вал, приводятся к главному моменту \vec{M}_1^ϕ . Реакции на тело качения \vec{N}_1 раскладываются на составляющие \vec{N}_{1x} , \vec{N}_{1y} и \vec{N}_{1z} . Со стороны других деталей ЭШП на вал 1 действуют реакции \vec{S}_{1x} , \vec{S}_{1y} и \vec{S}_{1z} .

Уравнения равновесия вала 1:

$$\sum F_{xi} = \sum_{i=1}^t N_{1xi} + \sum_{i=1}^t F_{TP1i} \cos \alpha_{1i} \times \sin \varphi_{2i} - S_{1x} = 0; \quad (23)$$

$$\sum F_{1y} = -m_1 g + \sum_{i=1}^t N_{1yi} - S_{1y} + \sum_{i=1}^t F_{TP1i} \cos \alpha_{1i} \cos \varphi_{2i} = 0; \quad (24)$$

$$\sum F_{zi} = \sum_{i=1}^t N_{1zi} - S_{1z} + \sum_{i=1}^t F_{TP1i} \sin \alpha_{1i} = 0; \quad (25)$$

$$\sum M_{zi} = -M_1 + M_1^\phi + M_{TP1} + \sum_{i=1}^t N_1 R_1 \times \sin |\alpha_{1i}| + \sum_{i=1}^t F_{TP1i} R_1 \cos \alpha_{1i} = 0, \quad (26)$$

где R_1 – диаметр цилиндрической поверхности, на которой располагаются точки контакта тела качения и внутреннего кулачка.

$$N_{1xi} = N_1 \sin |\alpha_{1i}| \sin \varphi_{2i}; \quad (27)$$

$$N_{1yi} = N_1 \sin |\alpha_{1i}| \sin \varphi_{2i}; \quad (28)$$

$$N_{1zi} = (-\text{sign}(\alpha_{1i})) N_1 \cos \alpha_{1i}. \quad (29)$$

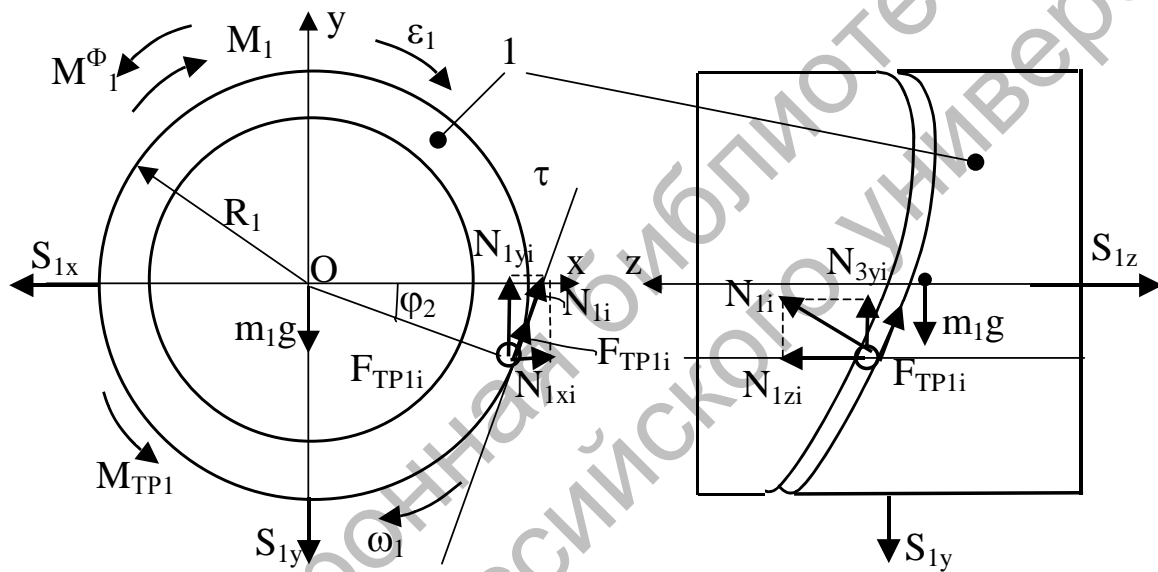


Рис. 4. Силы, действующие на внутренний кулачок

В соотношениях (27) и (28) подставляется модуль угла α_{1i} , так как при взаимодействии нисходящих ветвей беговых дорожек наружного кулачка и восходящих дорожек внутреннего кулачка, когда $\alpha_{1i} < 0$, составляющие реакции N_1 не меняют знак, а начинает работать другая сторона беговой дорожки ведущего (внутреннего) кулачка.

После подстановки формул (27)–(29) в соотношения (23)–(26) и их преобразований, получим следующие выражения:

$$S_{1x} = N_1 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin |\alpha_{1i}| + f \cos \alpha_{1i}) \sin \varphi_{2i}; \quad (30)$$

$$S_{1y} = N_1 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin |\alpha_{1i}| + f \cos \alpha_{1i}) \times \cos \varphi + m_1 g; \quad (31)$$

$$S_{1z} = N_1 \sum_{i=0}^{t-1} (((-\text{sign}(\alpha_{1i})) \times \cos \alpha_{1i} + f \sin \alpha_{1i})); \quad (32)$$

$$M_1 = N_1 R_1 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin |\alpha_{1i}| + f \cos \alpha_{1i}) + I_{z1} \varepsilon_1 + M_{TP1}, \quad (33)$$

где I_{z1} – осевой момент инерции ведущего вала 1.

В формулах (23)–(33) угол α_{1i} определяется по формуле

$$\alpha_{1i} = \arctg\left(\frac{A}{R} \cos\left(\varphi_{1i}\left(\frac{1}{u}-1\right) + \frac{2\pi i}{t} + \pi\right)\right). \quad (34)$$

Рассмотрим силовые факторы, действующие на тела качения (рис. 5).

Условия кинестатического равновесия, записанные в традиционном виде в проекциях на три оси координат, приводят к тождеству $0 \equiv 0$. Силы, действующие на один шарик, разложим на нормальную, касательную и бинормальную составляющие. Сложение сил будем производить, развернув цилиндрическую поверхность с радиусом R на плоскость.

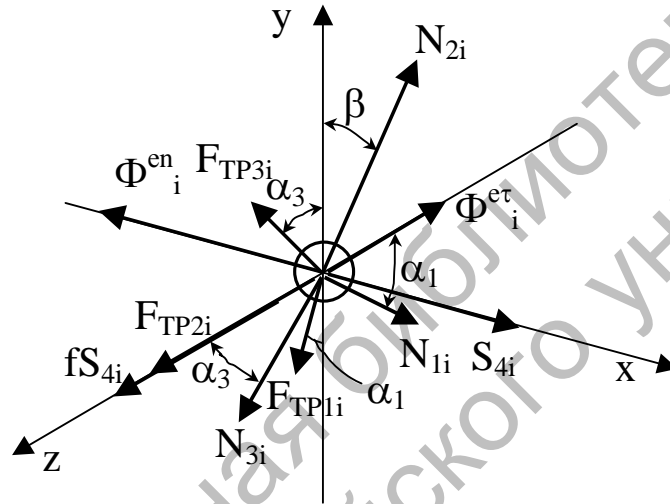


Рис. 5. Силы, действующие на тело качения

Уравнения равновесия будут иметь следующий вид:

$$\sum F_{xi} = \sum_{i=1}^t N_{2xi} + \sum_{i=1}^t \Phi_{4i}^{en} \cos \varphi_{2i} - \sum_{i=1}^t S_{4xi} = 0; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{yi} &= \sum_{i=1}^t N_{2yi} - \sum_{i=1}^t N_{3yi} - \sum_{i=1}^t N_{1yi} - m_4 g - \sum_{i=1}^t \Phi_{4i}^{en} \times \\ &\times \sin \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^t F_{TP3i} \cos \alpha_{3i} - \sum_{i=1}^t F_{TP1i} \cos \alpha_{1i} = 0; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{zi} &= \sum_{i=1}^t N_{3zi} - \sum_{i=1}^t N_{1zi} + \sum_{i=1}^t F_{TP1i} \sin \alpha_{1i} + \sum_{i=1}^t \text{sign}(v_{ir}) \times \\ &\times F_{TP2i} + \sum_{i=1}^t F_{TP3i} \sin \alpha_{3i} + \sum_{i=1}^t F_{TP4i} - \sum_{i=1}^t \Phi_{4i}^r = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где F_{TP4i} – сила трения скольжения между телом и поверхностью паза; Φ_{4i}^{en} – переносная центростремительная сила инерции тела качения; Φ_{4i}^{er} – переносная вращательная сила инерции тела качения; Φ_{4i}^r – относительная сила инерции тела качения.

$$\Phi_4^{en} = m_4 \omega_2^2 R; \quad \Phi_4^{e\tau} = m_4 \varepsilon_2 R;$$

$$\Phi_4^r = m_4 a_r = m_4 \frac{AZ_3^2}{u^2} \omega_1^2 \sin \varphi_2. \quad (38)$$

После подстановок и математических преобразований система уравнений (35)–(37) приводится к следующему виду:

$$S_4 t = -N_2 t \sin \beta + m_4 R t \omega_2^2; \quad (39)$$

$$N_1 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin |\alpha_{1i}| + f \cos \alpha_{1i}) +$$

$$+ N_3 \sum_{i=0}^{t-1} (\sin |\alpha_{3i}| - f \cdot \text{sign}(\alpha_{3i}) \times$$

$$\times \cos \alpha_{3i}) = t N_2 \cos(\beta); \quad (40)$$

$$N_1 \sum_{i=0}^{t-1} (f \sin |\alpha_{1i}| - \cos \alpha_{1i}) +$$

$$+ N_3 \sum_{i=0}^{t-1} (\cos \alpha_{3i} + f \sin \alpha_{3i}) +$$

$$+ S_4 f t = -N_2 f t + m_4 \sum_{i=0}^{t-1} \frac{AZ_3^2}{u^2} \times$$

$$\times \omega_1^2 \sin \left(\varphi_{2i} + \frac{2\pi i}{t} \right). \quad (41)$$

Рассмотрим алгоритм проведения силового анализа передачи. Заданными считаются: момент полезных сопротивлений на выходном валу M_2 , геометрические параметры передачи и коэффициент трения скольжения f . Известными считаются также угловые скорости и ускорения звеньев, а также зависимости между угловыми скоростями и углами поворота после проведенного кинематического анализа ЭШП.

1. По формуле (10) определяем значение реакции N_2 .

2. Решая совместно систему уравнений (39)–(41), находим значение реакций N_1 , N_3 и S_4 . Находить значения этих реакций удобно в матричной форме, представив зависимости (39)–(41) в следующем

виде:

$$a_{11} N_1 + a_{12} N_3 + a_{13} S_4 = b_1;$$

$$a_{21} N_1 + a_{22} N_3 + a_{23} S_4 = b_2;$$

$$a_{31} N_1 + a_{32} N_3 + a_{33} S_4 = b_3.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_1 \\ N_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

где a_{11}, \dots, a_{33} – коэффициенты при реакциях N_1 , N_3 и S_4 в системе уравнений (39)–(41); b_1, b_2, b_3 – зависимости, стоящие в правых частях уравнений (39)–(41).

Матричное произведение решается известным методом Гаусса или согласно правилу Крамера.

3. После нахождения значений N_1 , N_3 и S_4 определяются крутящие моменты M_1 и M_3 по формулам (33) и (21) соответственно, а также составляющие внешних реакций $S_{2x}, S_{2y}, S_{2z}, S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}$ и S_{3x}, S_{3y}, S_{3z} согласно выражениям (7)–(9), (30)–(32) и (18)–(20) соответственно. Значения полных реакций, образованных этими составляющими, определяют силы давления передачи на опоры (подшипники).

$$S_1 = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2 + S_{1z}^2};$$

$$S_2 = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2y}^2 + S_{2z}^2};$$

$$S_3 = \sqrt{S_{3x}^2 + S_{3y}^2 + S_{3z}^2}. \quad (43)$$

Составляющие реакций в формулах (43) с индексами «x» и «y» характеризуют радиальные нагрузки, а с индексами «z» – осевые нагрузки на подшипники. Аналогично определяется и результирующая реакция \vec{S}_2 , действующая на вал с пазами 2 со стороны кулачков 1 и 3. По значению этих реакций могут подбираться подшипники качения.

Проанализируем разработанную фрикционную модель передачи. Рассмотрим результаты функционирования разработанной модели на конкретном примере. Имеем передачу с параметрами: $Z_1 = 1$, $Z_3 = 8$, $R = 20$ мм, $A = 10$ мм, $r_{\text{ш}} = 6$ мм (остальные геометрические параметры являются производными от указанных, что будет показано далее). Частота вращения ведущего вала $n_1 = 1000$ об/мин. Режим работы – установившийся. Крутящий момент на выходном валу $M_2 = 200$ Н·м, коэффициент трения $f = 0,05$.

Результаты (средние значения за цикл зацепления): $N_2 = 1,2$ кН, $N_1 = 505$ Н, $N_3 = 1$ кН, $S_{1x} = S_{1y} \approx 0$ Н, $S_{1z} = 574$ Н, $S_2 = 31$ Н, $S_{3x} \approx 0$ кН, $S_{3y} = 5,4$ кН, $S_{3z} = 4$ кН, $S_4 = 594$ Н, $M_1 = 31,3$ Н·м, $M_3 = 1,9$ Н·м, $\eta = 0,71$.

Рассмотрим, как изменяются значения реакций за цикл зацепления (рис. 6). Остальные реакции, не указанные на рис. 6, имеют пренебрежимо малые значения. Наиболее нагруженным оказывается многопериодный кулачок.

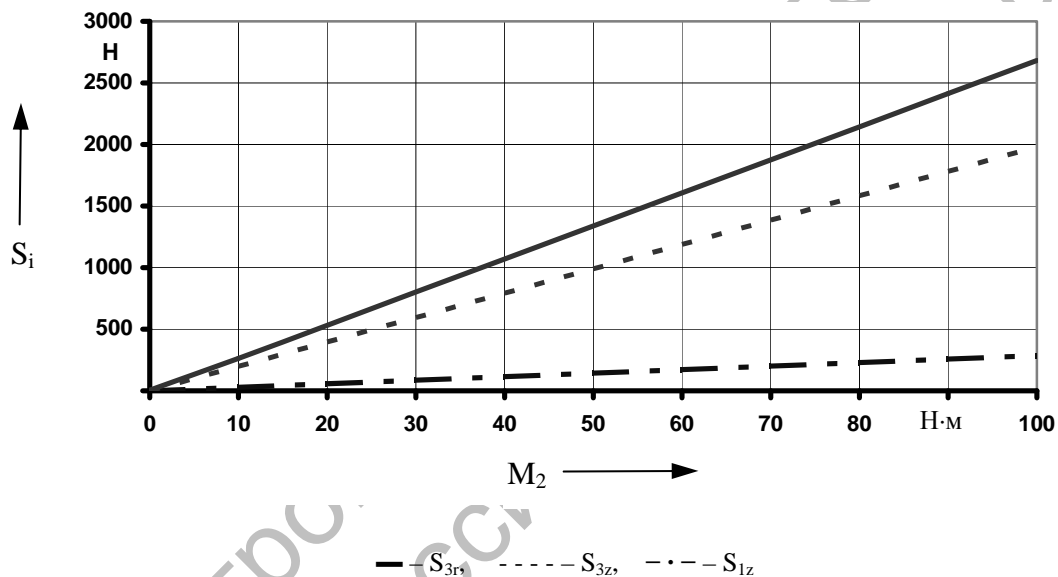


Рис. 6. Изменение реакций звеньев многопериодной ЭШП от передаваемой нагрузки

КПД и остальные параметры имеют колебания за цикл зацепления (поворота ведомого вала на угол 2π). Это связано с непостоянством суммы синусов и косинусов углов α_1 и α_3 . Однако колебания эти незначительны. Например, изменение КПД передачи за оборот ведомого вала (9 оборотов ведущего вала) приведено на рис. 7. Колебания КПД составляют около 0,04, при увеличении Z_3 эти колебания уменьшаются (например, при $Z_3 = 20$ $\Delta\eta = 0,016$). Поэтому в качестве результатов были приняты значения параметров в начальном положении, когда одно из тел качения находится в точке с

максимальными углами подъема ведущего и ведомого валов.

Выводы

1. Планетарная шариковая передача практически уравновешена в радиальном направлении.

2. Реактивное действие передачи проявляется во возникновении реактивного расклинивающего усилия S_{z3} на заторможенном звене, направленного вдоль оси передачи. Это предполагает установку радиально-упорных подшипников на ведущем валу, где также возникает осевое усилие S_{z1} .

3. Суммарные осевые усилия от сил трения будут равняться нулю, если использовать передачу с четным числом тел

качения (при $Z_1 = 1$ число Z_3 должно быть нечетным).

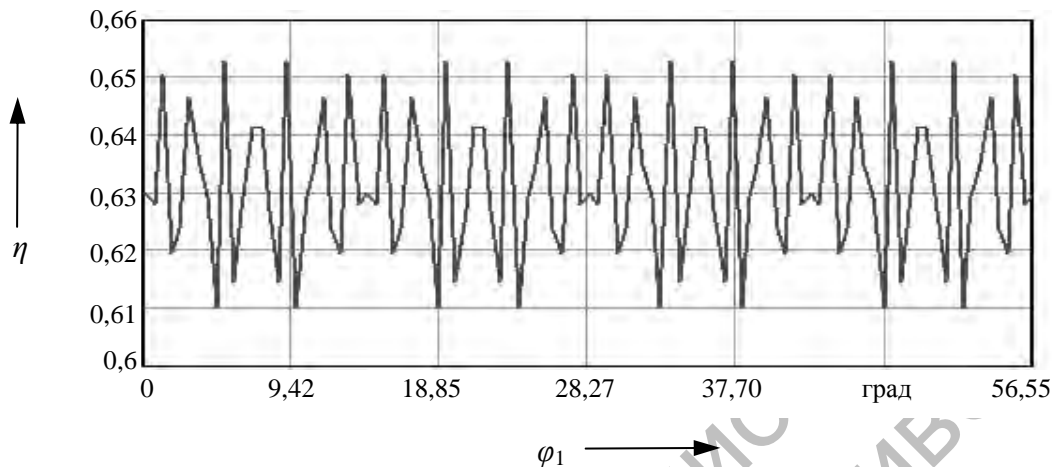


Рис. 7. Изменение КПД ЭШП за один оборот ведомого вала

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лустенков, М. Е.** Планетарные шариковые передачи цилиндрического типа : монография / М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 123 с. : ил.

2. **Лустенков, М. Е.** Исследование пространственной фрикционной модели эллипсного шарикового зацепления / М. Е. Лустенков, С. Д. Макаревич // Теория и практика машиностроения. – 2004. – № 3. – С. 38–41.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 03.05.2007

М. Е. Lustenkov
The analysis of the 3-D friction model of planetary transmission with roller elements
Belarusian-Russian University

In this article the questions of the development 3-D model of planetary transmission with roller elements have been described. This model has been worked out on the D’Alamber method and allows to definite forces acting in gears. The elaborated model also allows to definite the efficiency coefficient and to decrease power loses by optimization of transmission geometry parameters.