МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Могилев 2020

УДК 51
ББК 22.1
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» апреля 2020 г., протокол № 8

Составитель ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат теоретические сведения, тестовые задания, образцы решения задач и упражнения для самостоятельной работы по аналитической геометрии.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение

Система упражнений по аналитической геометрии состоит из четырех разделов.

Раздел 1 – основные теоретические положения.

Раздел 2 – образцы решения задач по аналитической геометрии.

Раздел 3 – задачи, предназначенные для решения их студентами на практических занятиях под руководством преподавателя, а также для самостоятельного решения. Все задачи данного раздела разбиты на два уровня: первый уровень – базовый (задачи для обязательного усвоения), второй – повышенный (более сложные задачи, в том числе нестандартные, номера задач отмечены символом «*»).

Раздел 4 – варианты контрольных заданий.

1Теоретическая часть

1.1 Прямая на плоскости

1.1.1 Уравнения прямой на плоскости.

Положение прямой l на плоскости вполне определено, если известны точка $M_0 = (x_0; y_0)$, через которую она проходит, и ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B)$, перпендикулярный к этой прямой (рисунок 1).

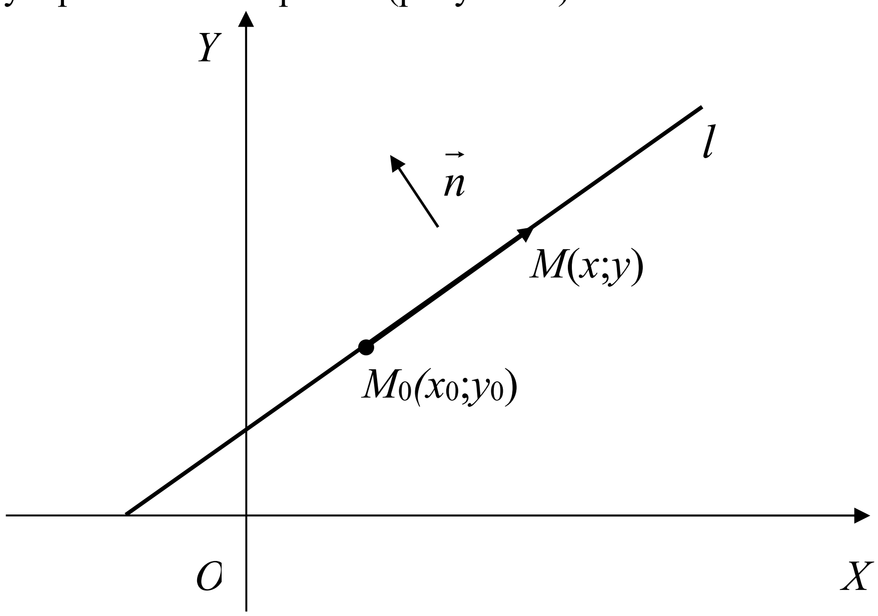

Рисунок 1

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ называется *нормальным вектором* прямой.

Пусть *M(x;y)* – произвольная точка прямой *l*. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ перпендикулярен к вектору $\vec{n} = (A; B)$, т. е. $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\,. \qquad (1)$$

Соотношению (1) удовлетворяют координаты тех и только тех точек плоскости *XOY*, которые принадлежат прямой *l*. Следовательно, оно и является искомым уравнением этой прямой и называется *уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n} = (A; B)$ и проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$. Раскрыв скобки в уравнении (1), получим

$$Ax + By + C = 0\,, \text{ где } C = -Ax_0 - By_0\,. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *общим уравнением прямой.*

Уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

называют *уравнением прямой «в отрезках».* Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

Уравнение

$$y = kx + b \qquad (4)$$

называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (5)$$

Положение прямой l на плоскости XOY однозначно определено, если известны точка $M_0(x_0;y_0)$, принадлежащая прямой l, и вектор $\vec{s} = (m;n)$, параллельный l (рисунок 2).

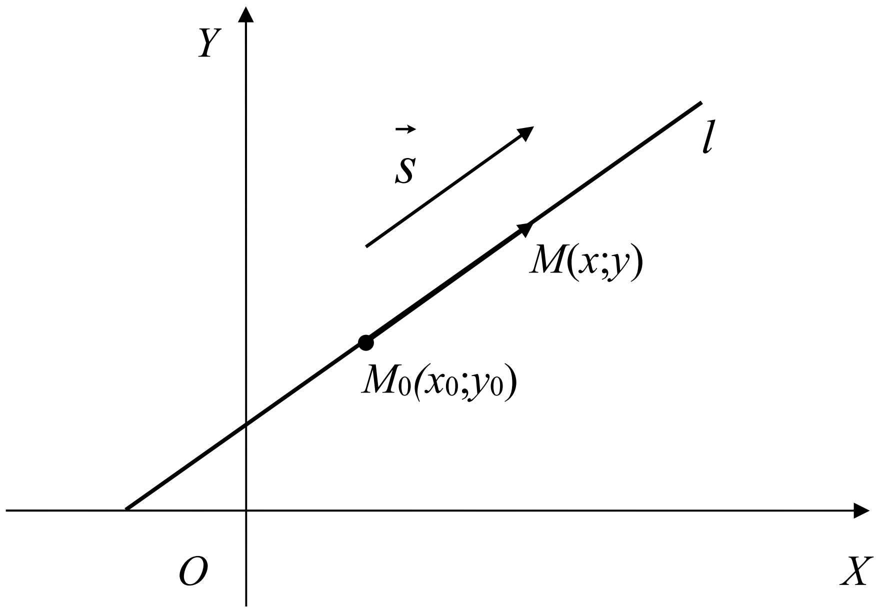

Рисунок 2

Вектор $\vec{s} = (m;n)$ называется *направляющим вектором прямой.* По этим данным составим искомое уравнение прямой.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, лежащий на этой прямой, коллинеарен вектору $\vec{s}$. Используя условие коллинеарности векторов, получаем соотношение

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{6}$$

Равенство (6) называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.*

В силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ существует $t\in R$ такое, что $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$ или $(x-x_0;y-y_0)=t(m;n)$. Откуда $x-x_0=tm$, , $y-y_0=tn$, т. е.

$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt,\ t\in R. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнения (7) называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, с направляющим вектором $\vec{s}=(m;n)$.

Равенство

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \tag{8}$$

называется *уравнением прямой, проходящей через данные две точки* $M_0(x_0;y_0)$ *и* $M_1(x_1;y_1)$.

Нормальным уравнением прямой называется уравнение вида

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой;

p – расстояние от начала координат до прямой.

1.1.2 Условия параллельности двух прямых.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } \qquad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Если $l_1\|l_2$, то нормальные векторы $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2)$ этих прямых коллинеарны. Тогда условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями, имеет вид:

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \| \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Для прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями с угловым коэффициентом:

$$l_1 : y = k_1 x + b_1 \text{ и } l_2 : y = k_2 x + b_2 ,$$

где $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$; $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$,
условия параллельности имеют вид:

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha_1 = \mathrm{tg}\alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 .$$

Если прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \qquad \text{и} \qquad l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} ,$$

где $\overrightarrow{s_1} = (m_1 ; n_1)$; $\overrightarrow{s_2} = (m_2 ; n_2)$ – направляющие векторы этих прямых соответственно,
то условия параллельности в этом случае имеют вид:

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \| \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

1.1.3 Условия перпендикулярности двух прямых.

Для прямых l_1 и l_2, заданных общими уравнениями, имеем

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 .$$

Пусть теперь прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами. Тогда

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} .$$

Если прямые $l_1 \perp l_2$ заданы каноническими уравнениями, то

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right) = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 .$$

1.1.4 Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Под углом φ между двумя прямыми l_1 и l_2 будем понимать наименьший угол, на который надо повернуть одну прямую, чтобы она стала параллельна другой прямой или совпала с ней.

Пусть прямые заданы общими уравнениями.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Для прямых, заданных каноническими уравнениями,

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{\left|m_1m_2 + n_1n_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Расстояние d от данной точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, на плоскости определяется формулой

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

1.2 Плоскость и прямая в пространстве

1.2.1 Уравнения плоскости в пространстве.

Пусть плоскость задана тремя точками: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ и $C(x_3;y_3;z_3)$. Тогда ее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{11}$$

Уравнение плоскости, *проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и *перпендикулярно* к вектору $\overrightarrow{N} = (A; B; C)$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{12}$$

Вектор $\overrightarrow{N} = (A; B; C)$ называется *нормальным вектором* плоскости. Уравнение плоскости в *отрезках на осях* имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{13}$$

где a, b, c – длины отрезков, отсекаемых на координатных осях, взятые с соответствующими знаками.

Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы перпендикуляра, проведенного из начала координат к данной плоскости;

p – его длина.

1.2.2 Угол между плоскостями. Условия перпендикулярности и параллельности плоскостей. Расстояние от точки до прямой.

Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right)}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{14}$$

Условием *параллельности плоскостей* является $\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2}$, $\overrightarrow{N_1} = \lambda\overrightarrow{N_2}$ или в координатной форме

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda. \tag{15}$$

Условием *перпендикулярности двух плоскостей* будет $\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$, т. е. $\left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right) = 0$, или в координатной форме

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0\,. \tag{16}$$

Расстояние d от данной точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{17}$$

1.2.3 Прямая в пространстве.

Прямую в пространстве можно представить как пересечение двух плоскостей, поэтому аналитически ее можно задать системой двух линейных уравнений вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) определяет прямую только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, и называется *общими уравнениями прямой.*

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{19}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, который называется *направляющим вектором прямой*.

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt; \end{cases} \quad t \in R\,. \tag{20}$$

1.2.4 Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Угол между прямыми l_1 и l_2, заданными каноническими уравнениями

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}\right)}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (21)$$

Условие параллельности двух прямых l_1 и l_2 записывают в виде

$$\overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (22)$$

Условие перпендикулярности двух прямых l_1 и l_2 записывают в виде

$$\overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2}, \ \text{т. е.} \ \left(\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}\right)=0, \ m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (23)$$

Прямые называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости. Необходимое и достаточное условие компланарности двух прямых, заданных каноническими уравнениями, записывают в виде

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (24)$$

Если условие (24) не выполняется, то прямые скрещиваются.

1.2.5 Взаимное расположение прямой и плоскости.

Возможны следующие случаи расположения прямой и плоскости.

1 Прямая параллельна плоскости.

Условие параллельности прямой $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскости $P: \ Ax+By+Cz+D=0$ (рисунок 3) означает, что $\vec{N} \perp \vec{s}$, т. е. $(\vec{N},\vec{s})=0$ или $Am+Bn+Cp=0$. При этом $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$.

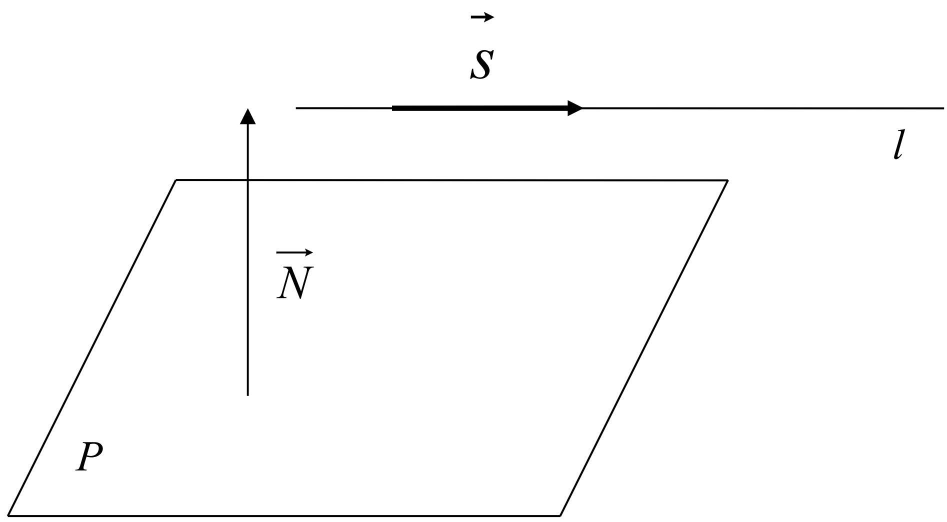

Рисунок 3

2 Прямая лежит в плоскости.

Условие того, что прямая l лежит в плоскости P, означает, что точка $M_0 \in P$ и $\vec{N} \perp \vec{s}$ (рисунок 4), откуда имеем

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases}$$

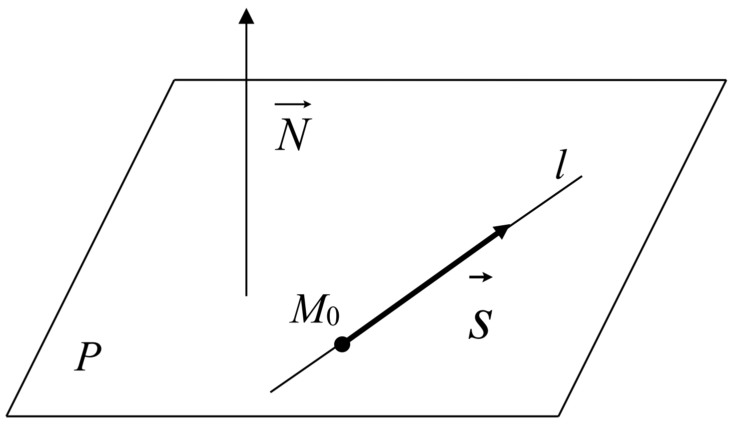

Рисунок 4

3 Прямая пересекает плоскость, если $Am + Bn + Cp \neq 0$.

Для определения точки пересечения прямой $l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ с плоскостью $P: Ax + By + Cz + D = 0$ надо совместно решить их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой. В этом случае из уравнения $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$

находим значение параметра t, соответствующее точке пересечения. Подставляя значение t в параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt; \end{cases}$ $t \in R$, получаем координаты точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ пересечения прямой и плоскости.

Частным случаем пересечения прямой и плоскости является их перпендикулярность.

Условие перпендикулярности прямой l и плоскости P означает, что $\overrightarrow{N} \parallel \vec{s}$, т. е. $\overrightarrow{N} = \lambda \vec{s}$ или $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} = \lambda, \quad \lambda \in R$.

Угол между прямой $l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $P: \quad Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\overrightarrow{N}, \vec{s}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{N}\right|\left|\vec{s}\right|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

где $\overrightarrow{N} = (A; B; C)$; $\vec{s} = (m; n; p)$.

1.3 Кривые второго порядка

Прямая линия описывается общим уравнением $Ax + By + C = 0$, в которое текущие координаты x и y входят с первой степенью. Такие уравнения называются *линейными* или *уравнениями первого порядка.* Уравнения кривых (линий) на плоскости, содержащие, кроме первых степеней координат x и y, квадраты этих координат или их произведение xy, относятся к *уравнениям кривых второго порядка.*

1.3.1 Окружность.

Если R – радиус окружности, а точка $M(x_0; y_0)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

1.3.2 Эллипс.

Эллипсом (рисунок 5) называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами эллипса*, есть заданная постоянная величина, равная $2a$, $a > 0$, большая, чем расстояние между фокусами.

Расстояние между фокусами обозначают $2c$. Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox в середине отрезка F_1F_2, то простейшее (каноническое) уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a – *большая полуось* эллипса;
b – *малая полуось.*
Причем $c^2=a^2-b^2$.

При изучении эллипса большую роль играют две прямые: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, которые называют *директрисами эллипса*. Директриса $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ называется левой, а $x=\frac{a}{\varepsilon}$ – правой.

Директрисы эллипса обладают следующим свойством: *отношение расстояния r от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию d от нее до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса,* т. е. $\frac{r}{d}=\varepsilon$.

Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ называется *эксцентриситетом эллипса.*

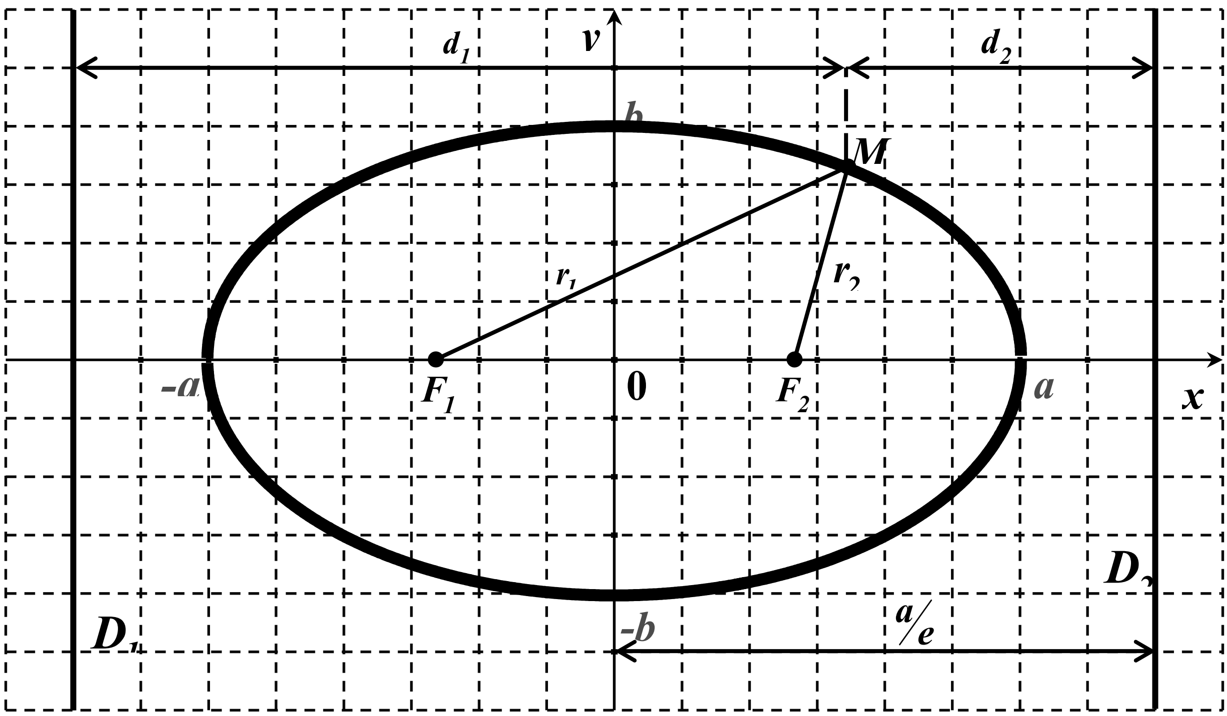

Рисунок 5

Замечание – Если центр эллипса с полуосями a и b смещен в точку $M(x_0; y_0)$, то его каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

1.3.3 Гипербола.

Гиперболой (рисунок 6) называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 той же плоскости, называемых *фокусами гиперболы*, есть заданная постоянная величина $2a$, $a > 0$, меньшая, чем расстояние между фокусами. Расстояние между фокусами обозначим $2c$.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox в середине отрезка F_1F_2, то каноническое (простейшее) уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $c^2=a^2+b^2$, *a – действительная полуось*; *b – мнимая полуось гиперболы.*

Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Прямые $y=\pm\left(\frac{b}{a}\right)x$ – её *асимптоты*. Гипербола, у которой $a = b$, называется *равносторонней.* Точки (a; 0) и (–a; 0) – *вершины гиперболы.*

Прямые, заданные уравнениями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы*. Как и для эллипса, *отношение расстояния r_i от любой точки гиперболы до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы D_i равно эксцентриситету гиперболы*, *т. е.* $\frac{r_i}{d_i}=\varepsilon$, $i=1,2$.

Замечания.

1 Кривая $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ также является гиперболой. Для нее Oy – действительная ось, Ox – мнимая. Вершины гиперболы расположены на оси Oy.

2 Если центр гиперболы смещен в точку $M(x_0; y_0)$, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1.$$

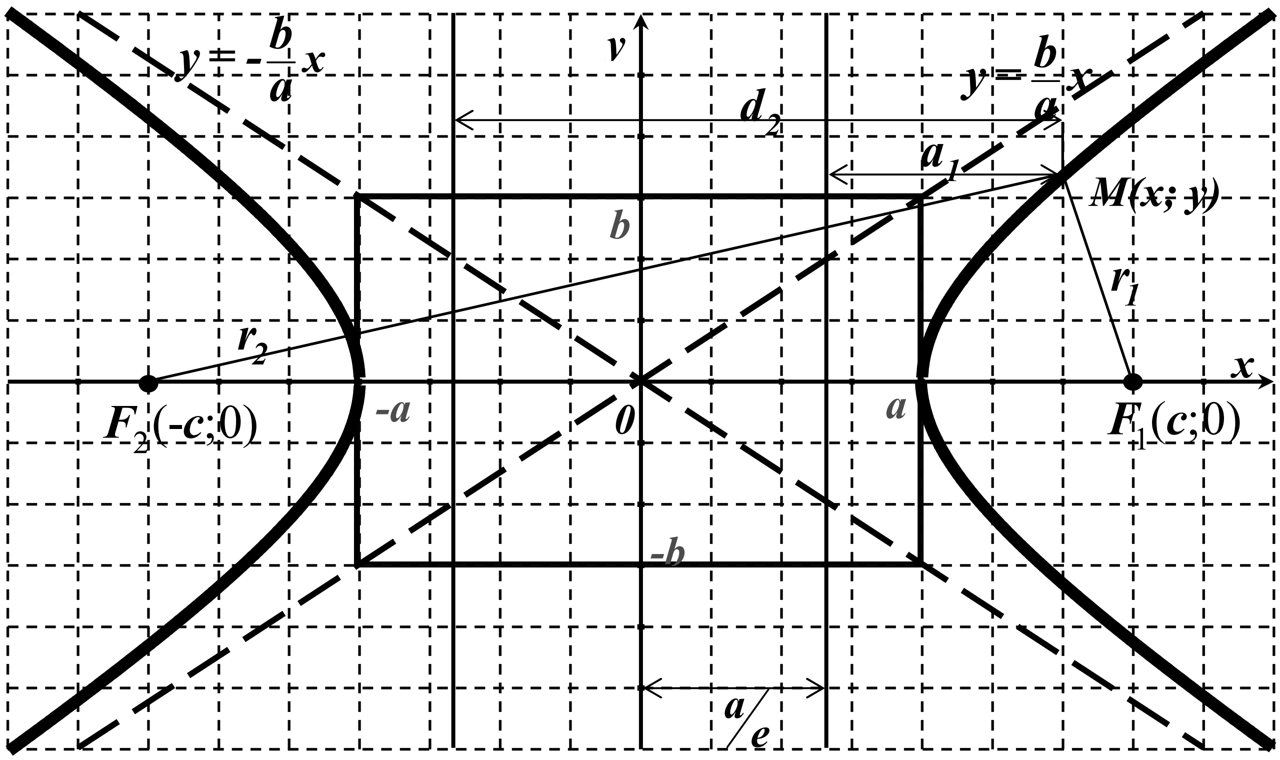

Рисунок 6

1.3.4 Парабола.

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой.*

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси *Ox* и проходящей через начало координат, имеет вид:

$$y^2 = 2px,$$

где p – расстояние от фокуса параболы $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ до ее директрисы $x = -\frac{p}{2}$ (рисунок 7).

Точка (0; 0) пересечения параболы с осью *Ox* называется *вершиной параболы*. Если $p > 0\ (p < 0)$, то парабола расположена правее (левее) оси *Oy*. Ось *Ox* симметрии параболы называется *осью параболы*.

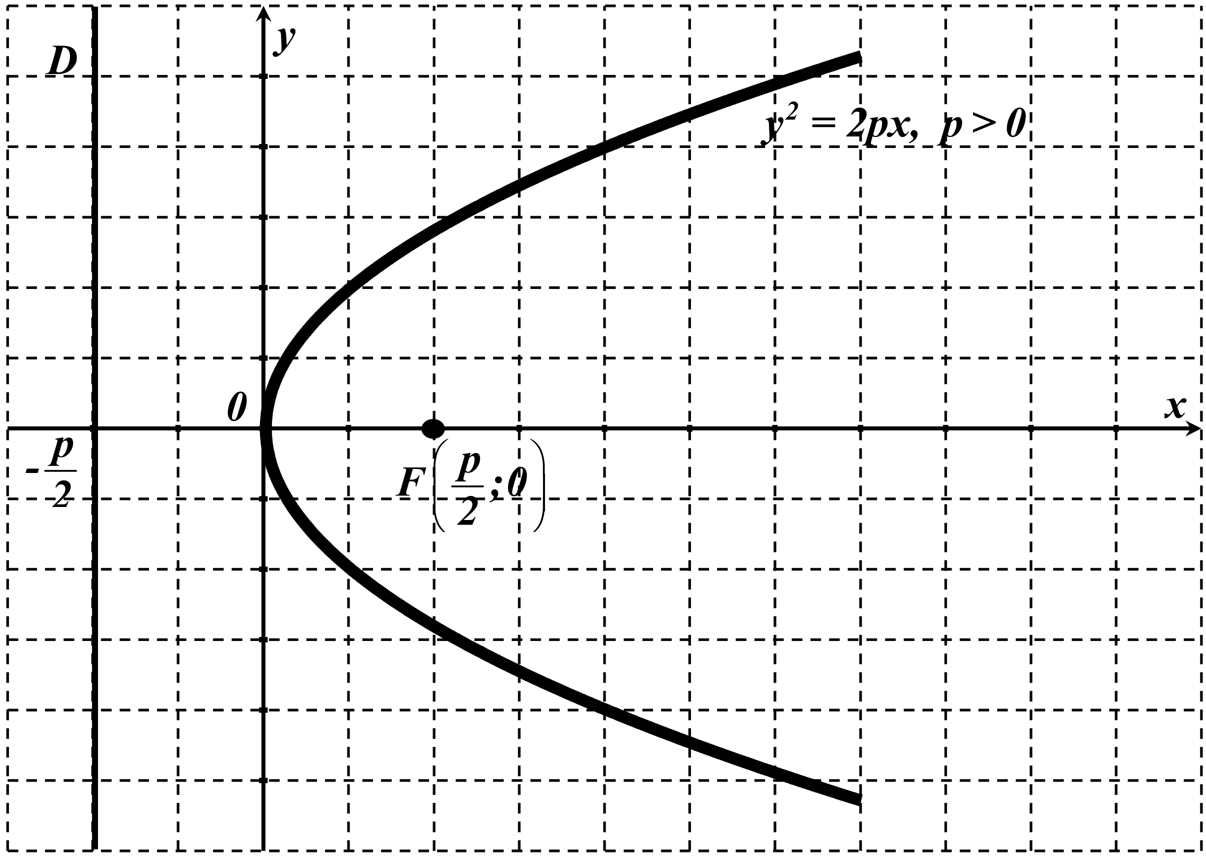

Рисунок 7

Когда вершина параболы находится в начале координат и парабола симметрична относительно оси Oy, каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$x^2 = 2py.$$

В этом случае $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ – фокус; $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

Замечания.

1 Если вершина параболы $y^2 = 2px$ или $x^2 = 2py$ смещена в точку $(x_0; y_0)$, то ее уравнение имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

2 Для параболы $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ ($p > 0$) осью симметрии служит прямая $y = y_0$, а фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2} + x_0, y_0\right)$, директриса D описывается уравнением $x = x_0 - \frac{p}{2}$.

3 Аналогично для параболы $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ $(p>0)$ осью симметрии является прямая $x = x_0$. фокус $F = \left(x_0; \frac{p}{2} + y_0\right)$, директриса D описывается уравнением $y = y_0 - \frac{p}{2}$.

2 Примеры решения задач

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P\left(\frac{12}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 6 кв. ед.

Решение

Проиллюстрируем условие задачи графически (рисунок 8).

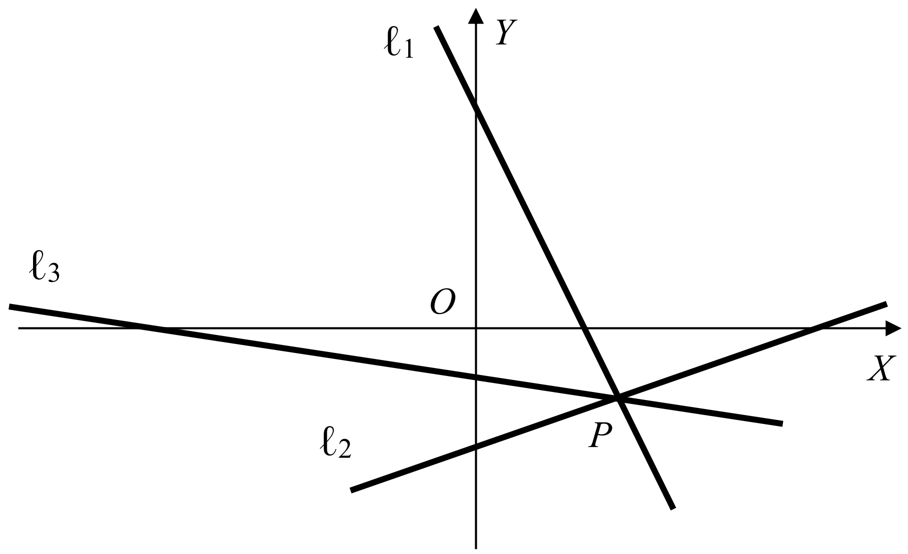

Рисунок 8

Если принять $a>0$ и $b>0$ за длину отрезков, отсекаемых прямой на осях координат, то возможны три прямые, удовлетворяющие условию задачи:

$$l_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad l_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1; \quad l_3 : \frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} = 1.$$

Учитывая, что $ab = 12$, $a > 0$, $b > 0$ и прямые проходят через точку $P\left(\frac{12}{5}; -\frac{6}{5}\right)$, будем иметь три системы:

$$\begin{cases} \frac{12}{5a} - \frac{6}{5b} = 1; \\ ab = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{12}{5a} + \frac{6}{5b} = 1; \\ ab = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{12}{5a} + \frac{6}{5b} = 1; \\ ab = 12. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим уравнение искомой прямой

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \text{ или } 3x + y - 6 = 0.$$

При решении второй системы получим две прямые:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1 \text{ или } x - 3y - 6 = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1 \text{ или } 3x - 4y - 12 = 0.$$

При решении третьей системы получим уравнение искомой прямой

$$\frac{x}{-12} + \frac{y}{-1} = 1 \text{ или } x + 12y + 12 = 0.$$

Задача 2. Даны середины сторон треугольника: $P(2;3)$, $Q(4;-1)$, $R(-3;5)$. Составить уравнения его сторон.

Решение

Воспользовавшись свойством средней линии треугольника, составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противолежащей стороне, т. е. как прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}(m;n)$.

Уравнение стороны треугольника ABC, проходящей через точку $P(2;3)$, получим, подставив координаты этой точки и вектора $\overline{QR} = (-7;6)$ в уравнение прямой следующего вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{25}$$

Имеем $\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y-3}{6}$ или $6x+7y-33=0$.

Подставив в уравнение (25) координаты точки $Q(4;-1)$ и вектора $\overrightarrow{PR}(-5;2)$, получим уравнение второй стороны треугольника

$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y+1}{2} \text{ или } 2x+5y-3=0.$$

Наконец, подставив в уравнение (25) координаты точки $R(-3;5)$ и вектора $\overrightarrow{PQ}=(2;-4)$, получим уравнение третьей стороны треугольника

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-4} \text{ или } 2x+y+1=0.$$

Заметим, что для этой задачи можно было бы по координатам середин сторон треугольника определить координаты его вершин *A*, *B*, *C* и воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две известные точки.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, параллельной оси *Ox* и проходящей через точки $P(4;0;-2)$ и $Q(5;1;7)$.

Решение

Искомая плоскость параллельна оси *Ox*, следовательно, проекция вектора нормали плоскости на эту ось равна нулю, т. е. $\vec{n}=(0;B;C)$.Так как плоскость проходит через точки *P* и *Q*, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{PQ}=(1;1;9)$.

Воспользовавшись условием ортогональности векторов, заданных своими координатами, будем иметь $B+9C=0$, откуда $B=9$, $C=-1$.

Итак, получили нормальный вектор искомой плоскости $\vec{n}=(0;9;-1)$. Следовательно, согласно уравнению плоскости, заданной точкой и нормальным вектором, будем иметь

$$9(y-0)-1(z+2)=0 \text{ или } 9y-z-2=0.$$

Задача 4. Составить уравнение сторон параллелограмма *ABCD* и найти расстояние между параллельными сторонами, если его диагонали пересекаются в точке $M(1;6)$, а стороны *AB, BC, CD, DA* проходят соответственно через точки $P(3;0)$, $Q(6;6)$, $R(5;9)$, $S(-5;4)$.

Решение

Проиллюстрируем условие задачи графически (рисунок 9).

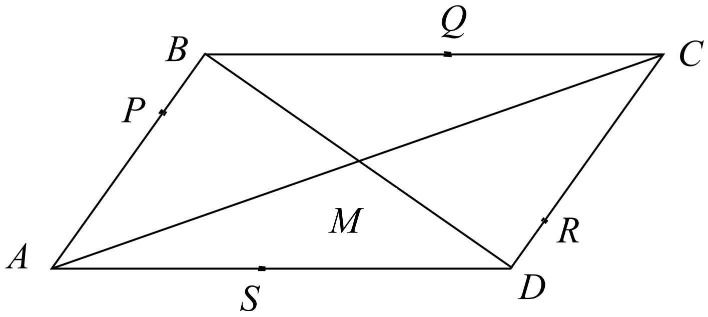

Рисунок 9

Используя уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, т. е. уравнение (5) и условие параллельности прямых, составим уравнения сторон AB и DC:

$$y = k(x-3); \quad y-9 = k(x-5). \tag{26}$$

Определим теперь угловой коэффициент k так, чтобы диагональ AC параллелограмма в точке $M(1;6)$ делилась пополам.

По формулам деления отрезка пополам находим связь между координатами точек A и C:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = 1; \quad \frac{y_A + y_C}{2} = 6, \text{ т. е. } \begin{cases} x_A + x_C = 2; \\ y_A + y_C = 12. \end{cases} \tag{27}$$

Складывая уравнения (26) и используя условия (27), получаем

$$y_A + y_C - 9 = k(x_A + x_C) - 8k; \quad 3 = 2k - 8k; \quad k = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, подставляя значение $k = -1/2$ в уравнения (26), имеем $y = -\dfrac{x-3}{2}$ или $x + 2y - 3 = 0$ (уравнение стороны AB) и $y - 9 = -\dfrac{1}{2}(x-5)$ или $x + 2y - 23 = 0$ (уравнение стороны DC).

Рассуждая аналогично, получаем $2x - y - 6 = 0$ (уравнение стороны BC) и $2x - y + 14 = 0$ (уравнение стороны AD).

Из полученных уравнений следует, что стороны AB и DC перпендикулярны к BC и AD. Это значит, что $ABCD$ – прямоугольник.

Для определения расстояний между параллельными сторонами воспользуемся формулой (9).

Расстояние между параллельными прямыми AB и DC равно расстоянию от точки P до прямой DC: $d_1 = \dfrac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 23|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$

Расстояние между прямыми BC и AD равно расстоянию от точки Q до прямой AD: $d_2 = \dfrac{|2 \cdot 6 - 1 \cdot 6 + 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$

Так как расстояния между противоположными сторонами прямоугольника равны между собой, то он является квадратом.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;5;4)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -6$, а на оси аппликат отрезок $c = 3$.

Решение

Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках. По условию $b = -6$, $c = 3$, поэтому

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1.$$

Точка M_0 лежит на плоскости, т. е. её координаты удовлетворяют уравнению плоскости $\dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{-6} + \dfrac{4}{3} = 1$, откуда $a = 4$. Следовательно, уравнение искомой плоскости $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-6} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Задача 6. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0; \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases} \qquad (28)$$

Решение

Определим координаты какой-либо точки прямой. Для этого, полагая, например, что $z = 0$, из уравнений (28) получим систему

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0; \\ 3x + 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем $x = -4$, $y = 5$. Таким образом, одна из точек, принадлежащих прямой (28), имеет координаты –4; 5; 0.

Теперь найдем направляющий вектор $\vec{s}$. Имеем $\overrightarrow{n_1} = (2;1;-5)$, $\overrightarrow{n_1} = (2;1;-5)$. Полагаем, что

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Отсюда канонические уравнения прямой запишутся в виде

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z}{1}.$$

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-2;4)$ перпендикулярно к плоскостям $2x + 3y - 5z + 6 = 0$ и $3x + 4y - 3z - 5 = 0$.

Решение

Так как искомая плоскость проходит через точку M_0, то запишем её уравнение в виде

$$A(x-1) + B(y+2) + C(z-4) = 0.$$

Для определения коэффициентов *A, B, C* используем условие перпендикулярности искомой плоскости к данным плоскостям, согласно которому за нормальный вектор $\vec{n} = (A;B;C)$ можно принять результирующий вектор векторного произведения нормальных векторов $\overrightarrow{n_1} = (2;3;-5)$ и $\overrightarrow{n_1} = (3;4;-3)$ данных плоскостей:

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 9\vec{j} - \vec{k}.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости

$$11(x-1)-9(y+2)-(z-4)=0 \text{ или } 11x-9y-z-25=0.$$

Задача 8. Найти угол между прямыми $\begin{cases}2x-3y+z-2=0;\\3x-4y-z+1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y-z-3=0;\\2x+3y+2z+4=0.\end{cases}$

Решение

Найдем направляющие векторы данных прямых:

$$\overrightarrow{s_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -4 & -1\end{vmatrix}=7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}; \qquad \overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}.$$

Найдем косинус угла между данными прямыми по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}\right)}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}=\frac{7\cdot 7+5(-4)+1(-1)}{\sqrt{49+25+1}\sqrt{49+16+1}}\approx 0{,}31.$$

Этому значению $\cos\varphi$ соответствует угол $\varphi\approx 71°48'$.

Задача 9. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости XOY и проходящей через точку $M_0(2;3;0)$ перпендикулярно к прямой

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{-1}.$$

Решение

Пусть $\vec{s}=(m;n;p)$ – направляющий вектор искомой прямой. Прямая лежит в плоскости XOY, поэтому проекция вектора $\vec{s}$ на ось Oz равна нулю, т. е. $p=0$. На основании условия перпендикулярности прямых для определения проекций m и n вектора $\vec{s}$ получим следующее равенство: $5m+2n=0$.

Так как направляющий вектор $\vec{s}$ определяется с точностью до множителя, одну из его координат можно выбрать произвольно. Например, положив, что $n = -5$, получим $m = 2$, следовательно, $\vec{s} = (2; -5; 0)$. Искомая прямая, кроме того, проходит через точку $M_0(2;3;0)$, поэтому её канонические уравнения

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{0}.$$

Задача 10. Найти проекцию B точки $A(3;-2;4)$ на плоскость α: $2x + y + 3z + 12 = 0$.

Решение

Точка B есть пересечение плоскости α с перпендикуляром, проведенным через точку A к этой плоскости. Поэтому на основании перпендикулярности прямой и плоскости составим канонические уравнения перпендикуляра (прямой AB): $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$.

Теперь приведем уравнения прямой к параметрическому виду, приравняв к t каждое из трех данных отношений: $x = 3 + 2t;\ y = -2 + t;\ z = 4 + 3t.$ Подставим эти значения x, y, z в уравнение данной плоскости

$$2(3 + 2t) + (-2 + t) + 3(4 + 3t) + 12 = 0,$$

откуда получим $t = -2$ – значение параметра, отвечающее точке B как точке пересечения прямой AB с данной плоскостью. Следовательно, $x_B = 3 + 2(-2) = -1$; $y_B = -2 - 2 = -4$; $z_B = 4 + 3(-2) = -2$, т. е. $B(-1, -4, -2)$.

Задача 11. Доказать, что прямые $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-7}{4}$; $\dfrac{x-9}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$ скрещиваются, и найти кратчайшее расстояние между ними.

Решение

Точка $M_1(1;-4;7)$ лежит на первой прямой, а точка $M_2(9;-3;4)$ – на второй. Найдем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = (8;1;-3)$, $\overrightarrow{s_1} = (5;-3;4)$, $\overrightarrow{s_2} = (2;-1;2)$:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right) = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8(-2) - 1\cdot 2 - 3\cdot 1 = -21.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то данные прямые скрещиваются.

Найдем векторное произведение: $\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$,

поэтому $\left|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$.

Следовательно, искомое расстояние $d = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right]\right|} = \dfrac{|-21|}{3} = 7$.

Задача 12. Показать, что прямые $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$; $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-6}{1}$ пересекаются, и найти точку их пересечения.

Решение

Направляющие векторы прямых $\overrightarrow{s_1} = (2;3;2)$, $\overrightarrow{s_2} = (3;2;1)$. Точка $M_1(2;-1;3)$ лежит на первой прямой, точка $M_2(7;4;6)$ – на второй. Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (5;5;3)$. Тогда смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = (5;5;3)$, $\overrightarrow{s_1} = (2;3;2)$, $\overrightarrow{s_2} = (3;2;1)$ имеет вид:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5(-1) - 5(-4) + 3(-5) = 0.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{s_1}$ и $\overrightarrow{s_2}$ неколлинеарны (их координаты непропорциональны) и смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ равно нулю, то данные прямые пересекаются.

Точку пересечения прямых можно найти, например, так: привести уравнение одной из прямых к параметрическому виду и из уравнений второй прямой найти значение параметра *t*, соответствующее точке пересечения.

В данном примере параметрические уравнения второй прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 7 + 3t; \\ y = 4 + 2t; \\ z = 6 + t. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x, y, z в уравнения первой прямой, получим

$$\frac{5+3t}{2} = \frac{5+2t}{3} = \frac{3+t}{2},$$

откуда $t = -1$. Следовательно, точка пересечения прямых имеет координаты $x = 7 + 3(-1) = 4;\ \ y = 4 + 2(-1) = 2;\ \ z = 6 - 1 = 5$.

Задача 13. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр симметрии его находится в точке $(5;0)$. Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

Решение

Выполним чертеж (рисунок 10).

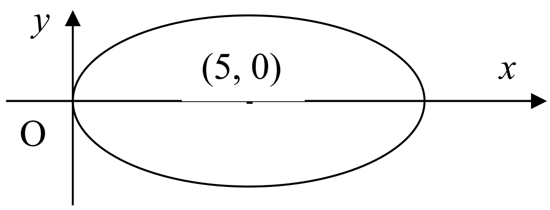

Рисунок 10

Каноническое уравнение такого эллипса

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

В данном случае

$$\frac{(x - 5)^2}{25} + \frac{(y - 0)^2}{b^2} = 1.$$

Известно, что $b^2 = a^2 - c^2$. Следовательно, для нахождения b надо знать c. Найдём c из формулы эксцентриситета $\varepsilon = c / a$, $0{,}6 = c/5$, откуда $c = 3$. Значит, $b^2 = 25 - 9 = 16$, $b = 4$.

Итак, уравнение искомого эллипса

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Задача 14. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 2$. Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точку $M_0(2;3)$.

Решение

Для данной гиперболы $a^2 = b^2 = 2$. Следовательно, из соотношения $b^2 = c^2 - a^2$ получаем $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, откуда $c = 2$. Значит, фокусы гиперболы $F_1(-2;0)$ и $F_2(2;0)$. В этих точках находятся фокусы эллипса.

Обозначим через a_1 и b_1 соответственно большую и малую полуоси эллипса. Тогда при условии, что $c = 2$, будем иметь $4 = a_1^2 - b_1^2$. Для определения a_1 и b_1 используем еще одно условие: точка $M_0(2;3)$ лежит на эллипсе, т. е. ее координаты должны удовлетворять уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{29}$$

Это значит, что $\frac{4}{a_1^2} + \frac{9}{b_1^2} = 1$. Таким образом, для определения a_1^2 и b_1^2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = 4; \\ \dfrac{4}{a_1^2} + \dfrac{9}{b_1^2} = 1, \end{cases}$$

решив которую, получим $a_1^2 = 16$, $b_1^2 = 12$. Подставив эти значения в уравнение (29), найдем

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

Задача 15. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $3x \pm 4y = 0$, а фокусы лежат на оси *Oy* и расстояние между ними равно 20. Написать каноническое уравнение гиперболы и начертить ее.

Решение

Так как фокусы гиперболы лежат на оси *Oy*, то ее каноническое уравнение имеет вид (рисунок 11):

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

Разрешив уравнение асимптот относительно *x*, получим $x=\pm\frac{4}{3}y$, откуда $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$. Кроме того, $F_1F_2=2c=20$, т. е. $c=10$. Так как для гиперболы $c^2=a^2+b^2$, то для нахождения *a* и *b* получим систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3};\\ a^2+b^2=100,\end{cases}$$

решив которую, будем иметь $a=6,\ b=8$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=-1.$$

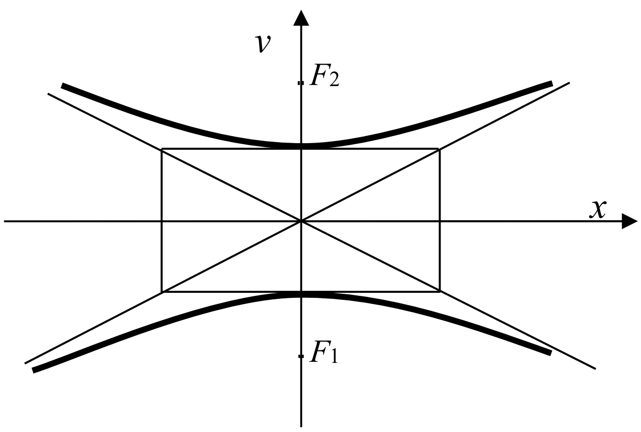

Рисунок 11

Задача 16. Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси *Oy*.

Решение

Найдем точки пересечения заданных линий, решив совместно их уравнения:

$$\begin{cases} x+y=0; \\ x^2+y^2-4x=0. \end{cases}$$

В результате получим $(x_1=0;\ y_1=0)$, $(x_2=2;\ y_2=-2)$. Точки пересечения $O(0;0)$ и $A(2;-2)$. Так как парабола проходит через точку $O(0;0)$ и симметрична относительно оси *Oy*, то в этой точке будет находиться вершина параболы. Поэтому уравнение параболы имеет вид: $x^2=2py$. Так как парабола проходит через точку $A(2;-2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы $2^2=2p(-2)$, $-2p=2$, $p=-1$.

Итак, уравнение параболы будет $x^2=-2y$, уравнение директрисы $y=-\dfrac{p}{2}$ или $y=\dfrac{1}{2}$, откуда $2y-1=0$.

Задача 17. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2+2y^2-3z^2+2x+8y+18z-54=0 \quad ?$$

Решение

Чтобы привести данное уравнение к каноническому виду, выделим полные квадраты переменных x, y, z:

$$\left(x^2+2x+1\right)+2\left(y^2+4y+4\right)-3\left(z^2-6z+9\right)-36=0;$$

$$(x+1)^2+2(y+2)^2-3(z-3)^2=36.$$

Отсюда

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{18}-\frac{(z-3)^2}{12}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с табличными, видим, что это уравнение однополостного гиперболоида, центр которого смещен в точку $(-1;-2;3)$. Путем параллельного переноса прямоугольной системы координат по формулам

$$\begin{cases} x = X - 1; \\ y = Y - 2; \\ x = Z + 3 \end{cases}$$

приведем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{18} - \frac{Z^2}{12} = 1.$$

3 Задачи и упражнения для решения

3.1 Прямая на плоскости

1 Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n} = (A;\ B)$, если:

а) $M_0(1;2)$, $\vec{n} = (3;–4)$; б) $M_0(1;-1)$, $\vec{n} = (2;–3)$.

2 Записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$ и направляющим вектором $\vec{s} = (l;m)$, если:

а) $M_0(-2;2)$, $\vec{s} = (–1;1)$; б) $M_0(-1;4)$, $\vec{s} = (2;1)$.

3 Записать уравнение прямой, заданной двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, если:

а) $M_1(3;-1)$ и $M_2(2;5)$; б) $M_1(4;0)$ и $M_2(-1;2)$.

4 Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$:

а) параллельно данной прямой;
б) перпендикулярно к данной прямой;
в) под углом 45° к данной прямой.

5 Вычислить угол между данными прямыми:

а) $x+5y-3=0$, $2x-3y+4=0$;
б) $x+2y-3=0$, $2x+4y+5=0$;
в) $3x+5y+1=0$, $5x-3y-2=0$.

6 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-4y+5=0$, $4x+3y-7=0$ и одна из его вершин $A(-2;1)$. Записать уравнения двух других сторон прямоугольника.

7 Найти расстояние d от точки до прямой:

а) $A(2;-1)$, $4x+3y+10=0$;

б) $A(0;-3)$, $5x-12y-23=0$.

8 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ и одна из его вершин $A(-2;1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

9 Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

10 Найти проекцию точки $A(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $M_1(2;-3)$ и $M_2(-5;1)$.

11* Даны две вершины треугольника $A_1(-6;2)$, $A_2(2;-2)$ и точка $N(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины A_3 и уравнение высоты A_3N.

12 Известны вершины треугольника: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;4)$. Требуется:

а) записать уравнения сторон треугольника;

б) записать уравнение высоты AD;

в) записать уравнение медианы CF;

г) записать уравнение биссектрисы угла B;

д) построить в декартовой системе координат треугольник ABC, высоту AD, медиану CF, биссектрису BK.

13 Составить уравнения биссектрис углов между указанными прямыми:

а) $3x-4y+2=0$, $5x+12y-3=0$;

б) $3x-y+5=0$, $3x+y-4=0$.

14 Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(4;4)$, $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$. Требуется записать уравнения биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C и медианы, проведенной из этой вершины.

15 Составить уравнение сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3;-4)$ и уравнения двух его высот $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$.

16 Доказать, что точки $(-2;3)$, $(1;7)$, $(2;3)$, $(-4;-5)$ являются вершинами трапеции. Найти уравнение средней линии трапеции и угол, заключенный между диагоналями.

17 Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $11x+3y-7=0$ и $12x+y-19=0$ и равноудаленной от точек $A(3;-2)$ и $B(-1;6)$.

18* Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x-2y+1=0$ относительно точки $M(5;1)$.

19* Составить уравнения сторон квадрата, если в прямоугольной системе координат даны одна из его вершин $A(2;-4)$ и точка пересечения его диагоналей $K(5;2)$.

20* Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $7x-y-9=0$, $x+y-5=0$ и точка $M(3;-8)$, лежащая на его основании. Записать уравнение основания треугольника.

3.2 Плоскость

1 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;-7)$ параллельно плоскости $2x-6y-3z+5=0$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $2x+y-2z+1=0$ и $x+y+z-5=0$.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4;-3;2)$ и прямую $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-1}$.

4 Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;3;-1)$ и $M_2(1;5;3)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+3z+15=0$.

5 Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;2;-3)$ параллельно прямым $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-7}{3}$ и $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{-1}$.

6 Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$.

7 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;5;-7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

8 Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;4)$ и отсекающей на оси *Oz* отрезок, вдвое больший, чем на осях *Ox* и *Oy*.

9 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;5;1)$, $B(7;7;8)$ и отсекающей на осях *Ox* и *Oy* равные отрезки.

10 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой пересечения плоскости $x-2y+4z-3=0$ с плоскостью *Oxz*.

11 Определить двугранный угол, образованный данными плоскостями: $6x+3y-2z=0$ и $x+2y+6z-12=0$.

12 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:

а) $M_1(2;3;1)$,$M_2(3;1;4)$,$M_3(2;1;5)$;

б) $M_1(2;0;-1)$,$M_2(-2;4;1)$,$M_3(0;2;-1)$.

13 Определить расстояния от точек $A(3;5;1)$, $B(7;-1;2)$, $C(2;0;4)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$ /

14 Найти расстояние *d* от точки $M(-1;1;-2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

15 Составить уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки *A(2;0;4)* на плоскости $x-7y+2z=0$ и $5x+3y-z=0$.

16 Найти косинусы углов между двумя плоскостями:

а) $2x-y+3z=0$, $\quad x+4y-6z=0$;

б) $x+3y-4z+5=0$, $\quad 2x+2y+2z-7=0$.

17* Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M_1(1;-1;1)$, одна из которых содержит ось Ox , а другая – ось Oz .

18* Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $(1;3;5)$ на прямую, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

19* Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y+6z-18=0$.

20* Вычислить косинусы внутренних двугранных углов тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью $2x+3y+6z-12=0$.

21* Даны уравнения трех граней параллелепипеда $2x+3y+4z-12=0$, $x+3y-6=0$, $z+5=0$ и одна из его вершин $(6;-5;1)$. Составить уравнения трех других граней параллелепипеда.

3.3 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

1 Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

а) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0; \\ 2x+y-4z-8=0; \end{cases}$ $\qquad$ б) $\begin{cases} 2x-y-9z-2=0; \\ x+y-3z-1=0. \end{cases}$

2 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;3;-5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0; \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

3 Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;0;3)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z-4}{-2}$ и расположенной в плоскости xOz.

4 Доказать параллельность прямых $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+7}{1}$ и $\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0; \\ x + 3y + z + 2 = 0. \end{cases}$

5 Доказать перпендикулярность прямых $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-6}$ и $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0; \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

6 Доказать, что прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ и $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$ пересекаются. Найти их точку пересечения.

7 Доказать, что прямые $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0; \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x \quad - 3z = 0; \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ скрещиваются.

8 Показать, что прямая $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ лежит в плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

9 Найти проекцию точки $M(1;2;1)$ на прямую $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

10 Доказать, что прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости.

11 Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M\left(3;-2;0\right)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ и расположенной в плоскости xOy.

12 Найти угол между указанными прямыми:

а) $l_1 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$, $\qquad l_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

б) $l_1: \begin{cases} 3x-4y-2z=0; \\ 2x+y-2z+1=0, \end{cases}$ $\quad l_2: \begin{cases} 4x+y-6z-2=0; \\ y-3z-2=0. \end{cases}$

13 Вычислить синус угла между прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x-3y+2z=0$.

14* Из всех прямых, пересекающих прямые $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$, найти ту, которая была бы параллельна прямой $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$.

15* Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(3;-2;4)$ на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

16 Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, если:

а) $M(5;3;1)$, l : $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$;

б) $O(0;0;0)$, $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

17* Найти уравнение плоскости, проектирующей прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ на плоскость $x+4y-3z+7=0$.

18 Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

а) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $\quad \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$;

б) $\begin{cases} 4x+2y+3z+1=0; \\ 9x+5y+2z+9=0, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x+y+7z-2=0; \\ x+y-4z+3=0. \end{cases}$

19* Найти канонические уравнения проекции прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

20* Записать уравнения проекции прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$ на плоскость Oyz .

3.4 Кривые второго порядка

1 Записать уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров имеют координаты (3;9) и (7;3).

2 Записать уравнение окружности, проходящей через три данные точки:

а) $M_1(9;3)$, $M_2(-3;3)$, $M_3(11;1)$;

б) $M_1(4;5)$, $M_2(-4;-1)$, $M_3(0;1)$.

3* Составить уравнение окружности, касающейся прямой $x-7y+10=0$ в точке $N(4;2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $2x+y=0$.

4 Привести к каноническому виду уравнение окружности:

а) $x^2+y^2-2x+4y=0$;

б) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$.

5 Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) большая ось равна 10, расстояние между фокусами равно 8;

б) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен 0,8;

в) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 0,6;

г) сумма полуосей равна 10, расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

6 Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что:

а) расстояние между его фокусами равно расстоянию между вершинами большой и малой полуосей;

б) большая ось втрое больше малой.

7 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если:

а) большая ось равна 10, расстояние между фокусами равно 8;

б) малая ось равна 16, эксцентриситет равен 0,6.

8 Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки $M_1(2;2)$, $M_2(3;1)$. Составить уравнение эллипса.

9 Эллипс касается оси абсцисс в точке (8;0) и оси ординат в точке (0;–5). Записать уравнение эллипса, если известно, что его оси параллельны осям координат.

10 Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

11 Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

а) расстояние между фокусами равно 14, действительная ось равна 12;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/2;

в) расстояние между фокусами равно 20, уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{4x}{3}$;

г)* расстояние между директрисами равно 32/5 и мнимая ось равна 6.

12 Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) действительная ось равна 48, эксцентриситет равен 13/12;

б) гипербола проходит через точку $M(10;-3\sqrt{3})$, асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\frac{3x}{5}$;

в) даны точки $M_1(-8;2\sqrt{2})$ и $M_2(6;-1)$ гиперболы.

13* Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

14 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(-2;4)$;

б) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $B(3;-9)$.

15 На параболе $y^2=16x$ найти точки, фокальный радиус-вектор которых равен 13.

16 Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота равна 6 м.

17* Определить общие касательные к параболе $y^2=4x$ и к эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

18 Привести к каноническому виду уравнение линии, определить ее тип. Выполнить чертеж:

а) $y=4x^2-8x+7$;

б) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

в) $x^2-4y^2+8x-24y=24$;

г) $x-2y^2+12y-14=0$;

д) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

е) $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$.

19* Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки $A(2;0)$ и от прямой $y=5x+8$ относятся как $5:4$.

20* Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси Oy.

3.5 Цилиндрические поверхности, поверхности вращения, поверхности второго порядка

1 Определить, какую поверхность определяет уравнение:

а) $x^2 + y^2 = 2ax$; г) $y^2 = 4z$; ж) $x^2 = 2az$;

б) $y^2 + z^2 = 4$; д) $xz = 4$; з) $x^2 + y^2 = 2ay$.

в) $y^2 = ax$; е) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$;

Построить данные поверхности.

2 Линия задана уравнением $\begin{cases} z = x^2; \\ y = 0. \end{cases}$ Написать уравнения поверхности, полученной в результате вращения вокруг оси:

а) Ox ; б) Oz .

3* Линия задана уравнением:

а) $\begin{cases} z = e^{-x^2}; \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} z = \dfrac{4}{x^2}; \\ y = 0. \end{cases}$

Написать уравнения поверхностей вращения, полученных в результате вращения указанных кривых вокруг оси Oz .

4 Назвать и построить поверхность:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 22 = 0$.

5 Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$ и $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{4}$;

б) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} = -1$ и $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{3}$;

в) $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ и $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$.

6*. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$ в точке $M(7;-1;5)$.

7* Исследовать методом сечений и построить данные поверхности:

а) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1$; г) $-x^2 + y^2 + z^2 = -9$;

б) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; д) $y^2 = x^2 + z^2$;

в) $2z = x^2 + \dfrac{y^2}{2}$; е) $z = 2 + x^2 + y^2$.

8[*] Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (z \ge 0)$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

4 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

1 Написать уравнение линии центров окружностей $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ и $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$. Выполнить чертеж.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;-5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = (3;1;-1)$ и $\vec{a}_2 = (1;-2;1)$.

3 Доказать, что прямые $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $\begin{cases} x + y - z + 4 = 0; \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$ пересекаются.

4 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2 + y^2 = 4z$. Выполнить чертеж.

Вариант 2

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-15;1)$ и $M_2(3;1;2)$ перпендикулярно к плоскости $3x - y - 4z = 0$.

2 Найти проекцию B точки $A(4;3;10)$ на прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$.

3 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $-x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$. Выполнить чертеж.

4 Дано уравнение эллипса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, построить его.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$. Выполнить чертеж.

Вариант 3

1 Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-3;5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0; \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

2 Найти проекцию B точки $A(5;2;-1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0.$

3 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $9x^2+4y^2-54x+32y+109=0$. Выполнить чертеж.

4 Определить точки пересечения гиперболы $-\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ и параболы $y^2=3x$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $4x^2+9y^2+36z^2-36=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 4

1 Найти точку A_1 , симметричную точке $A(5;10;4)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x=1+2t; \\ y=2+4t; \\ z=3+5t. \end{cases}$$

2 Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что $A(0;-2)$ и $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2};1\right)$ – точки, лежащие на кривой. Выполнить чертеж.

3 Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что директриса параболы задана уравнением $y=5$. Построить параболу.

4 Через точку $A(2;-5)$ провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $x^2-4y^2=4$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $9x^2-4y^2+36x-8y+z^2-4=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 5

1 Доказать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0; \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$ взаимно перпендикулярны.

2 Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 1,25. Найти уравнения асимптот и директрис гиперболы. Построить гиперболу.

3 Найти точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$.

4 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно плоскостям $2x-z+1=0$ и $y=0$.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $4x^2+y^2-24x-4y-z^2+2z+35=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 6

1 Найти точку, симметричную точке $M(2;7;1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

2 Составить уравнения гиперболы, если даны точка $M_1\left(\frac{9}{2};-1\right)$ гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$. Фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс. Выполнить чертеж.

3 Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями $\begin{cases}2x-3y-3z-9=0;\\ x-2y+z+3=0.\end{cases}$

4 Сфера проходит через точку $M(4;2;2)$ и имеет центр в точке $C(1;-1;-1)$. Составить ее уравнение и выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2+2y^2+3z^2+6x-4y-12z-1=0$. Выполнить чертеж.

Вариант 7

1 Даны вершины треугольника ABC : $A(1;0)$, $B(-1;4)$, $C(9;5)$. Найти уравнение стороны AB , уравнение высоты CH , уравнение медианы AM , точку N пересечения медианы AM и высоты CH , уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB .

2 Определить угол между прямыми $\begin{cases}3x-4y-2z\quad=0;\\ 2x+y-2z+1=0\end{cases}$ и $\begin{cases}4x+y-6z-2=0;\\ y-3z-2=0.\end{cases}$

3 Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, если даны точка $M_1(9;8)$ гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найти эксцентриситет и уравнения директрис. Построить гиперболу.

4 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $y^2+4x+2y-11=0$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $y^2 = x^2 + z^2$. Выполнить чертеж.

Вариант 8

1 Найти высоту пирамиды $SABC$, опущенную из вершины S на грань ABC, если $S(1;4;-2)$, $A(0;-1;1)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-3;-1)$.

2 Доказать, что прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0; \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ взаимно перпендикулярны.

3 Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если дана точка $M_1(2;-2)$ эллипса, а его большая полуось равна 4.

4 С помощью метода выделения полного квадрата привести уравнение линии 2-го порядка к каноническому виду и определить ее тип: $3x^2 - 4y^2 - 12x + 24 = 0$. Выполнить чертеж.

5 Исследовать поверхность методом сечений: $x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0$. Выполнить чертеж.

Ответы

3.1 Прямая на плоскости

1. а) $3x - 4y + 5 = 0$; б) $2x - 3y - 5 = 0$. **2**. а) $x + y = 0$; б) $x - 2y + 9 = 0$. **3.** а) $6x + y - 17 = 0$; б) $2x + 5y - 8 = 0$. **4.** а) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$; в) $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$. **5.** а) 45°; б) 0°; в) 90°. **6.** $3x - 4y + 10 = 0$, $4x + 3y + 5 = 0$. **7.** а) 3, б) 1. **8.** 6. **9.** 49. **10.** $(-12;5)$. **11.** $A_3(2;4)$, $2x - y = 0$. **12.** а) $-3x + 4y - 12 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $4x + 3y + 16 = 0$; б) $3x - 4y + 12 = 0$; в) $7x - y + 3 = 0$; г) $x + 7y + 4 = 0$. **13.** а) $64x + 8y + 11 = 0$, $14x - 112y + 41 = 0$; б) $6x + 1 = 0$, $2y - 9 = 0$. **14.** $7x + y + 18 = 0$, $11x - 2y + 14 = 0$. **15.** $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **16.** $4x - 3y + 9 = 0$, $\cos\varphi = -\frac{5}{13}$. **17.** $7x + y - 9 = 0$, $2x + y + 1 = 0$. **18.** $3x - 2y - 27 = 0$, **19.** $x - 3y + 16 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$, $3x + y - 32 = 0$, $3x + y - 2 = 0$. **20.** $3x + y - 1 = 0$, $x - 3y - 27 = 0$.

3.2 Плоскость

1. $2x - 6y - 3z - 43 = 0$. **2.** $3x - 4y + z - 23 = 0$. **3.** $9x + 8y - 6z = 0$. **4.** $2x + 3y - z - 14 = 0$. **5.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **6.** $4x + 5y - 2z = 0$. **7.** $x + y + z - 1 = 0$. **8.** $2x + 2y + z - 6 = 0$. **9.** $7x + 7y - 6z - 50 = 0$. **10.** $4x - z = 0$. **11.** $\frac{\pi}{2}$.

12. а) $x+2y+z-9=0$, б) $x+y-2=0$. **13.** $\frac{16}{3}$; 2; $\frac{1}{3}$. **14.** 4. **15.** $x+11y+38z-154=0$. **16.** а) $\pm\frac{20}{\sqrt{14}\sqrt{53}}$, б) плоскости взаимно перпендикулярны. **17.** 60°. **18.** $(-2;1;4)$. **19.** 27. **20.** $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{6}{7}$. **21.** $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$.

3.3 Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. а) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$; б) $\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. **2.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$. **3.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{1}$. **6.** $(3,-3,-2)$. **9.** $\left(-\frac{5}{13};-\frac{7}{13};\frac{27}{13}\right)$. **10.** $2x-16y-13z+31=0$. **11.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{0}$. **12.** а) 60°; б) $\cos\varphi=\frac{98}{195}$, $\varphi=59°48'$. **13.** $\sin\varphi=\frac{18}{91}$. **14.** $\frac{x}{8}=\frac{y+8}{7}=\frac{z+9}{1}$. **15.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$. **16.** а) $\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-1}$; б) $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$. **17.** $-11x+17y+19z-10=0$. **18.** а) $\sqrt{\frac{10}{3}}$; б) $\frac{4\sqrt{29}}{9\sqrt{6}}$. **19.** $\frac{x-0{,}8}{7}=\frac{y-4{,}6}{4}=\frac{z+1{,}4}{-1}$. **20.** $y-3z+5=0$, $x=0$.

3.4. Кривые второго порядка

1. $(x-5)^2+(y-6)^2=13$. **2.** а) $(x-3)^2+(y+5)^2=100$; б) $(x+9)^2+(y-14)^2=250$. **3.** $(x-6)^2+(y+12)^2=200$. **4.** а) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$; б) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{41}{36}$. **5.** а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; г) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. **6.** а) $\sqrt{0{,}4}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **7.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **8.** $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$. **9.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$. **10.** $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$. **11.** а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$; б) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; г) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **12.** а) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$; б) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$. **13.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **14.** а) $y^2=-8x$; б) $y=-x^2$. **15.** $(9;12)$, $(9;-12)$. **16.** 12. **17.** $x\pm 2y+4=0$. **18.** а) $(x-1)^2=\frac{1}{4}(y-3)$; б) $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$; в) $\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{1}=1$; г) $(y-3)^2=\frac{1}{2}(x+4)$; д) $-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$; е) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$. **19.** $\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **20.** $y=\frac{1}{2}$.

3.5 Цилиндрические поверхности, поверхности вращения, второго порядка

4. а) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{2}$, сфера; б) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=36$, сфера. **5.** а) $(4,-3,2)$; б) $(4,2,9)$; в) $(3,4,-2)$, $(6,-2,2)$. **6.** $6x+2y+3z-55=0$.

Список литературы

1 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1982. – 272 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление одной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1992. – 384 с.

3 Руководство к решению задач по высшей математике / Под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 350 с.

4 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 1. – 416 с.