МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Могилев 2020

УДК 517.91
ББК 22.161.6
В 50

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» февраля 2020 г., протокол № 6

Составитель Т. Ю. Орлова

Рецензент И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Дифференциальные уравнения», достаточное количество примеров с подробными решениями и упражнения для самостоятельной работы, домашние задания.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилёв.

Содержание

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные (или дифференциалы).

ДУ называется ***обыкновенным***, если неизвестная функция, входящая в уравнение, зависит только от одной независимой переменной.

Порядком ДУ называется порядок входящей в уравнение старшей производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Обыкновенное ДУ первого порядка (ДУ-1) имеет вид $F(x;y;y')=0$.

Уравнение $F(x;y;y')=0$, разрешенное относительно производной, называют ДУ в ***нормальной форме***. Оно имеет вид $y'=f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ задана в некоторой области D плоскости xOy.

Решением уравнения (частным решением) $F(x;y;y')=0$ называется функция $y=\varphi(x)$, определенная на некотором промежутке σ действительной оси и дифференцируемая на этом промежутке, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Решение ДУ, заданное неявно соотношением $\Phi(x,y)=0$, называется ***интегралом*** этого уравнения.

График решения ДУ называется ***интегральной кривой ДУ.***

Решение $y=\varphi(x)$ ($\Phi(x,y)=0$) дифференциального уравнения $F(x;y;y')=0$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, называется ***частным решением*** (или ***частным интегралом***) ДУ, удовлетворяющим начальному условию.

Функция $y=\varphi(x,C)$, зависящая от x и постоянной C, называется ***общим решением*** уравнения $F(x;y;y')=0$, если она является решением этого уравнения при любом фиксированном значении C; каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$, можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Равенство $\Phi(x,y,C)=0$, неявно задающее общее решение, называется ***общим интегралом*** уравнения $F(x;y;y')=0$ в области σ.

Решение ДУ, которое не может быть получено из общего ни при каком значении $C \in \mathbb{R}$, называют его ***особым решением***.

Процесс нахождения решения ДУ $F(x;y;y')=0$ называется ***интегрированием*** этого уравнения.

Основная задача интегрирования ДУ состоит в нахождении всех решений ДУ и изучении их свойств.

Задача отыскания решения $y=\varphi(x)$ ДУ $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется ***задачей Коши***.

Теорема Коши: если $f(x,y)$ и $f'_y(x;y)$ непрерывны в окрестности точки $(x_0,y_0)\in D$, то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Пример 1 – Показать, что соотношение $x^2-xy+y^2=C^2$ является общим интегралом ДУ $(x-2y)y'=2x-y$.

Решение

Продифференцируем данное соотношение: $2x-y-xy'+2yy'=0$. Откуда $2x-y=(x-2y)y'$. Получаем данное дифференциальное уравнение. Следовательно, $x^2-xy+y^2=C^2$ является общим интегралом ДУ $(x-2y)y'=2x-y$.

1.2 Уравнения с разделенными, разделяющимися переменными и сводящиеся к ним

ДУ 1-го порядка с ***разделенными переменными*** – это уравнение вида $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$, где при dx стоит функция, зависящая только от x, а при dy – функция, зависящая только от $y=y(x)$.

Общий интеграл ДУ $f(x)dx+\varphi(y)dy=0$ имеет вид: $\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy=C$, где C – произвольная постоянная.

ДУ 1-го порядка с ***разделяющимися переменными*** – уравнение вида $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$.

Если $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$, то, разделив обе части уравнения $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$ на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$, получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\dfrac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$.

Следовательно, общий интеграл последнего уравнения, а значит, и уравнения $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$, имеет вид $\int\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\dfrac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C$.

Если же $f_2(x)=0$ при некотором $x=\alpha$ или $\varphi_1(y)=0$ при некотором $y=\beta$, то уравнение $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$, наряду с общим интегралом, имеет также решения $x=\alpha$ или $y=\beta$. Если эти решения не могут быть получены из $\int\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\dfrac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C$ при каком-то значении C, то они будут называться ***особыми решениями***.

Пример 2 – Найти общий и частный интегралы ДУ, удовлетворяющие начальному условию, если $\left(1+e^x\right)yy'=e^x, \quad y(0)=1$.

Решение

Разделяя переменные, получим $\quad ydy=\dfrac{e^x}{1+e^x}dx$.

Проинтегрировав, найдем общий интеграл $\dfrac{y^2}{2}=\ln\left(1+e^x\right)+C$. Так как $1+e^x\neq 0 \quad \forall x$, то особых решений уравнение не имеет. Полагая в общем интеграле $x=0, \; y=1$, находим $C=\dfrac{1}{2}-\ln 2=\ln\dfrac{\sqrt{e}}{2}$. Подставляя найденное значение C в общий интеграл, получим для ДУ частный интеграл $\dfrac{y^2}{2}=\ln\left(1+e^x\right)+\ln\dfrac{\sqrt{e}}{2}$, удовлетворяющий начальному условию $y(0)=1$.

Пример 3 – Решить дифференциальное уравнение $\left(xy^2+y^2\right)dx+\left(x^2-x^2y\right)dy=0$.

Решение

$y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0$; $\qquad \dfrac{x+1}{x^2}dx+\dfrac{1-y}{y^2}dy=0$; $\qquad \displaystyle\int\frac{x+1}{x^2}dx=$ $=-\displaystyle\int\frac{1-y}{y^2}dy+C$; $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy+C$; $\ln|x|-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+\ln|y|+C$ – общий интеграл данного ДУ.

Разделяя переменные, делим на $x^2y^2\neq 0$. Если же $x^2y^2=0$, то имеем $x=0, \; y=0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=0$ и $y=0$ являются решениями данного ДУ. Но они не получаются из общего интеграла ни при каком значении C. Следовательно, $x=0$ и $y=0$ – особые решения данного уравнения.

Пример 4 – Найти общий интеграл ДУ $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}dy=0$ и частный интеграл, удовлетворяющий начальному условию $y\left(\sqrt{8}\right)=1$.

Решение

Делим обе части уравнения на $y\cdot\sqrt{1+x^2}$. Получим $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\dfrac{1+y^2}{y}dy=0$;

$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{1+y^2}{y}dy=C$, $\sqrt{1+x^2}+\dfrac{y^2}{2}+\quad+\ln|y|=C$ – общий интеграл ДУ.

Полагая в общем интеграле $x=\sqrt{8},\ y=1$, находим C: $\sqrt{9}+\frac{1}{2}+\ln 1=C,\quad C=3{,}5$. Подставляя значение $C=3{,}5$ в общий интеграл, получаем частный интеграл ДУ $\sqrt{1+x^2}+\frac{y^2}{2}+\ln|y|=3{,}5.$

1.2.1 ДУ, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными.

ДУ вида $y'=f\left(ax+by+c\right),\ a,b,c\in\mathbb{R},\ b\neq 0$ сводится к ДУ с разделяющимися переменными при помощи замены $z=ax+by,$ где $z=z\left(x\right)-$новая искомая функция.

Пример 5 – Найти общий интеграл ДУ $\left(2x+3y-1\right)dx+\left(4x+6y-5\right)dy=0$.

Решение

Запишем уравнение в виде $y'=-\dfrac{2x+3y-1}{2\left(2x+3y\right)-5}$.

Введем замену $z=2x+3y$, откуда $y=\dfrac{z-2x}{3};y'=\dfrac{1}{3}z'-\dfrac{2}{3}.$

Тогда $\dfrac{1}{3}z'-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{z-1}{2z-5};\quad z'=2-\dfrac{3z-3}{2z-5};\quad z'=\dfrac{z-7}{2z-5};\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z-7}{2z-5};$
$\dfrac{2z-5}{z-7}dz=dx;\quad \displaystyle\int\frac{2\left(z-7\right)+9}{z-7}dz=\int dx+C;\quad \int\left(2+\frac{9}{z-7}\right)dz=x+C;$
$2z+\ 9\ln|z-7|\ =x+C$.

Так как $z=2x+3y$, получаем $4x+6y+9\ln|2x+3y-7|=x+C-$ общий интеграл данного ДУ.

1.3 Упражнения

1 Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

1) $\left(1+x^2\right)dy-2x\left(y+3\right)dx=0$. *Ответ*: $y=C\left(x^2+1\right)-3$;

2) $y\cdot y'+x=1$. *Ответ*: $y^2=2x-x^2+C$;

3) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0,\ y\left(\sqrt{3}\right)=0.$ *Ответ:* $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3$;

4) $y'\sin x-y\cos x=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. *Ответ*: $y=\sin x$;

5) $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1+x^2}}=0$. *Ответ*: $\arcsin y=C-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$;

6) $\left(1+2y\right)xdx-\left(1+x^2\right)dy=0$. *Ответ*: $1+x^2=C\left(2y+1\right)$;

7) $\left(y^2+xy^2\right)y'+x^2-yx^2=0$. *Ответ*: $\dfrac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$;

8) $3e^x \operatorname{tg} y dx + \dfrac{1-e^x}{\cos^2 y} dy = 0$. *Ответ*: $\left(e^x - 1\right)^3 = C \cdot \operatorname{tg} y$;

9) $\left(1+y^2\right)\left(e^{2x} dx - e^y dy\right) - \left(1+y\right) dy = 0$.

Ответ: $\dfrac{1}{2} e^{2x} = e^y + \operatorname{arctg} y + \dfrac{1}{2} \ln\left|1+y^2\right| + C$;

10) $xy' - y = y^3$. *Ответ*: $\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx$;

11) $\left(1+e^x\right) yy' = e^y$, $y(0) = 0$. *Ответ*: $e^{-y}\left(y+1\right) + x - \ln\left(e^x + 1\right) = 1 - \ln 2$.

2 Проинтегрировать уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными:

1) $y' = \cos\left(x+y\right)$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2} = x + C$;

2) $y' = \left(4x + y + 1\right)^2$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{4x+y+1}{2} = x + C$;

3) $y' = \dfrac{1}{2x+y}$. *Ответ*: $4x + 2y + 1 = C \cdot e^{2y}$;

4) $\left(x - 2y - 1\right) dx + \left(3x - 6y + 2\right) dy = 0$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}\left(x - 2y\right) + \dfrac{2}{5} \ln\left|x - 2y\right| = x + C$;

5) $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$. *Ответ*: $x + \dfrac{x+y}{2} + \ln\left|1 - x - y\right| = C$.

1.4 Домашнее задание

Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

1) $y dx + \operatorname{ctg} x dy = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$. *Ответ*: $y = -2\cos x$;

2) $y^2 + y' \cdot x^2 = 0$, $\quad y(-1) = 1$. *Ответ*: $y = -x$;

3) $\sin x \cdot \sin y dx + \cos x \cdot \cos y dy = 0$. *Ответ*: $\cos x = C \cdot \sin y$;

4) $\left(1 - x^2\right) y' + xy = 2x$. *Ответ*: $y = C \cdot \sqrt{x^2 - 1} + 2$;

5) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy\left(1+x^2\right)}$. *Ответ*: $y^2 + 1 = \dfrac{Cx^2}{x^2+1}$;

6) $y' \sin x = y \ln y$, если $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. *Ответ*: $y = 1$;

7) $\left(x + y + 1\right) dx + \left(2x + 2y - 1\right) dy = 0$. *Ответ*: $x + 2y + 3\ln\left|x + y - 2\right| = C$.

2 Однородные уравнения и сводящиеся к ним

2.1 Теоретическая часть

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной n-го измерения*** $(n \in \mathbb{N})$ относительно своих аргументов x и y, если для любого значения t, кроме, может быть, $t=0$, имеет место тождество $f(tx,ty)=t^n \cdot f(x,y)$.

Например, $f(x,y)=x^3+3x^2y$ – однородная функция 3-го измерения относительно аргументов, т. к. $f(tx,ty)=(tx)^3+3(tx)^2\cdot(ty)= \quad t^3\left(x^3+3x^2y\right)=$ $= t^3\cdot f(x,y)$.

ДУ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется ***однородным*** относительно переменных x и y, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

Однородное ДУ $y'=f(x,y)$ преобразуется к виду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. С помощью подстановки $\frac{y}{x}=u$ (откуда $y=ux,\ y'=u'x+u$) получим уравнение $u'x+u=\varphi(u)$ с разделяющимися переменными.

Пример 1 – Найти общее решение ДУ $(x-y)ydx-x^2dy=0$.

Решение

Имеем $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$ – ДУ вида $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Полагаем $\frac{y}{x}=u$. Тогда $y=ux$, $y'=u'x+u$. Следовательно, $u'x+u==u-u^2$; $u'x=-u^2$; $\frac{du}{dx}x=-u^2$; $-\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$; $-\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}+C$ или $\frac{x}{y}=\ln|x|+C$ – общий интеграл исходного ДУ.

Пример 2 – Найти общее решение ДУ $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$, а также частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2)=1$.

Решение

Это уравнение однородное (убедиться самостоятельно). Приводим его к виду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$: $\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$ или $y'=\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}$.

Применяем подстановку $\frac{y}{x}=u$. Тогда $y=ux$, $y'=u'x+u$. Имеем $u'x+u=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2u}$; $x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-1}{2u}$; $\frac{2udu}{u^2-1}=\frac{dx}{x}$; $\int\frac{2udu}{u^2-1}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|$, $C\neq 0$, $\ln\left|u^2-1\right|=\ln|x|+\ln|C|$; $u^2-1=Cx$; $\frac{y^2}{x^2}=Cx+1$ или $y^2=x^2\left(Cx+1\right)$ – общий интеграл ДУ.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(2\right)=1$. Подставив $x=2$, $y=1$ в общий интеграл, находим C: $1=4\left(2C+1\right)$, $C=-\frac{3}{8}$. Тогда $y=\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{8}x\right)}$ – частное решение ДУ при условии $y\left(2\right)=1$.

2.1.1 ДУ первого порядка, сводящиеся к однородному уравнению.

ДУ вида $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, где $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, приводится к однородному уравнению с помощью подстановки $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, где u, v – новые переменные; α, β – постоянные, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0,\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0.\end{cases}$$

Пример 3 – Найти общий интеграл ДУ $\left(x-2y+3\right)dy+\left(2x+y-1\right)dx=0$.

Решение

Запишем уравнение в виде $y'=-\frac{2x+y-1}{x-2y+3}$. Будем применять подстановку $\begin{cases} x=u+\alpha,\\ y=v+\beta.\end{cases}$ α и β найдем из системы $\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0,\\ \alpha-2\beta+3=0.\end{cases}$

Решив систему, получим $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\beta=\frac{7}{5}$.

Следовательно, $\begin{cases} x=u-\frac{1}{5},\\ y=v+\frac{7}{5},\end{cases}$ откуда $\begin{cases} dx=du,\\ dy=dv.\end{cases}$

$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}$ или $\frac{dv}{du}=\frac{2+\frac{v}{u}}{2\frac{v}{u}-1}$. Вводим замену $z=\frac{v}{u}$. Тогда $\frac{dv}{du}=z'u+z$.

$$z'u+z=\frac{2+z}{2z-1},\qquad z'u=\frac{2+z}{2z-1}-z,\qquad \frac{dz}{du}u=\frac{-2z^2+2z+2}{2z-1},\qquad \frac{2z-1}{z^2-z-1}dz=-\frac{2du}{u},$$

$$\int\frac{d\left(z^2-z-1\right)}{z^2-z-1}=-2\int\frac{du}{u}+C_0,\qquad \ln\left|z^2-z-1\right|=-2\ln|u|+\ln|C_1|,\qquad z^2-z-1=\frac{C_1}{u^2},$$

$$\frac{v^2}{u^2}-\frac{v}{u}-1=\frac{C_1}{u^2},\ v^2-vu-u^2=C_1.$$

Так как $u=x+\frac{1}{5}$, $v=y-\frac{7}{5}$, то, подставив эти выражения в последнее уравнение и упростив, получаем $y^2-x^2-xy-3y+x=C_1-\frac{11}{5}$ или $y^2-x^2-xy-3y+x=C$ – общий интеграл ДУ.

2.2 Упражнения

1 Найти общие и частные (где это требуется) решения или интегралы однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$, $y(1)=1$. *Ответ*: $y^2=2x^2\ln|x|+x^2$;

2) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$. *Ответ*: $e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$;

3) $\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy$. *Ответ*: $\frac{x^2}{x^2-y^2}=Cx$;

4) $(x-y)ydx-x^2dy=0$, $y(1)=\frac{1}{3}$. *Ответ*: $y=\frac{x}{3+\ln|x|}$;

5) $y'=-\frac{x+y}{x}$, $y(2)=0$. *Ответ*: $y=\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$;

6) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$. *Ответ*: $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$;

7) $y'=\frac{x+y}{x-y}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=C$;

8) $yy'=2y-x$. *Ответ*: $\ln|y-x|+\frac{x}{y-x}=C$;

9) $xy'=y\ln\frac{x}{y}$. *Ответ*: $1+\ln\frac{y}{x}=\frac{C}{x}$;

10) $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x$, $y(1)=0$. *Ответ*: $\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{y^2+x^2}$;

11) $(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$. *Ответ*: $y^2-3xy+2x^2=C$;

12) $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0$, $y(1)=2$. *Ответ*: $x=y\sqrt{1-\frac{3}{8}y}$.

2 Решить уравнения, сводящиеся к однородным уравнениям:

1) $(x+2y+1)dx+(3-2x)dy=0$. *Ответ*: $\dfrac{4y+5}{2x-3}=\ln\left|x-\dfrac{3}{2}\right|+C$;

2) $(y+2)dx-(2x+y-4)dy=0$. *Ответ*: $(y+2)^2=C(x+y-1)$;

3) $(6x+y-1)dx+(4x+y-2)dy=0$.

Ответ: $(2x+y-3)^2=C(6x+2y-5)$;

4) $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$. *Ответ*: $2\operatorname{arctg}\dfrac{y+2}{x-3}+\ln|y+2|=C$;

5) $(3x-7y-3)y'+(7x-3y-7)=0$.

Ответ: $(y-x+1)^2\cdot(y+x-1)^5=C$.

2.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения или интегралы однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}$, $y(-1)=1$. *Ответ*: $y=\dfrac{1-3x^2}{2x}$;

2) $xdy+\left(x\sqrt{\dfrac{y}{x}-1}-y\right)dx=0$, $y(1)=1$. *Ответ*: $2\sqrt{\dfrac{y}{x}-1}=\ln|x|$;

3) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$. *Ответ*: $\dfrac{y}{y-x}=Cx$;

4) $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x$. *Ответ*: $\sin\dfrac{y}{x}=C-\ln|x|$;

5) $(x-2)dx+(y-2x+1)dy=0$. *Ответ*: $\ln|y-x-1|+\dfrac{x-2}{y-x-1}=C$.

3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

3.1 Теоретическая часть

ДУ называется ***линейным***, если оно линейно (т. е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной $\dfrac{dy}{dx}$.

Общий вид линейного ДУ первого порядка имеет вид:

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{3.1}$$

Если правая часть уравнения (3.1) $Q(x)\equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным***, в противном случае – ***неоднородным.***

Линейное однородное ДУ имеет вид:

$$y' + P(x)y = 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим два способа решения линейного ДУ: способ Бернулли и способ Лагранжа.

Способ Бернулли (подстановки). Произведём в уравнении (3.1) замену переменной, положив $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение (3.1) примет вид: $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ или

$$u'v + u\left(v' + P(x) \cdot v\right) = Q(x). \quad (3.3)$$

Одну из функций $u(x)$ или $v(x)$ можно взять произвольной, другая определяется на основании уравнения (3.3). В качестве функции $v(x)$ выбираем частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Тогда $v = e^{-\int P(x)dx}$. Подставив выражение v в уравнение (3.3), найдём $u = u(x, C)$. Затем находим общее решение уравнения (3.1): $y = u(x, C) \cdot v(x)$.

Способ Лагранжа (способ вариации произвольной постоянной). Сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (3.2), т. е. соотношение $y = Ce^{-\int P(x)dx}$. Затем, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищем общее решение неоднородного уравнения (3.1) в виде $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$.

$C(x)$ находим из уравнения (3.1), подставив в него $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ и $y' = \left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right)' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x)$.

Пример 1 – Проинтегрировать уравнение $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Решение

Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид $u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$, $u'v + u\left(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x\right) = \sin x$.

Имеем $\begin{cases} v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0, \\ u'v = \sin x. \end{cases}$

Находим одно из решений уравнения $v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0$: $\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x$, $\frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx$, $\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx$, откуда $\ln|v| = \ln|\sin x|$ или $v = \sin x$.

Находим $u(x)$ как общий интеграл уравнения $u'v=\sin x$, подставив $v=\sin x$: $u'\sin x=\sin x$, $du=dx$, $u=x+C$.

Следовательно, $y=uv=(x+C)\sin x$ – общее решение исходного ДУ.

Пример 2 – Найти частное решение ДУ $y'-y=2e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение

Применим метод вариации произвольной постоянной. Однородное ДУ $y'-y=0$, соответствующее данному уравнению, имеет общее решение $y=Ce^x$, где C – произвольная постоянная. Будем искать общее решение исходного уравнения в виде $y=C(x)e^x$, где $C(x)$ – неизвестная функция от x. Так как $y'=C'(x)e^x+C(x)e^x$, то, подставляя выражения для y и y' в неоднородное уравнение, получим $C'(x)e^x+C(x)e^x-C(x)e^x=2e^x$. Откуда $C'(x)=2$, $C(x)=2x+C_1$, C_1 – произвольная постоянная.

Общее решение данного уравнения имеет вид $y=(2x+C_1)e^x$.

Полагая $y=1,\ x=0$, из этого уравнения находим C_1: $C_1=1$.

Тогда частное решение исходного ДУ имеет вид $y=(2x+1)e^x$.

Уравнение Бернулли имеет вид $y'+P(x)y=Q(x)y^\alpha$, где $\alpha\in\mathbb{R}\ (\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1)$. Оно сводится к линейному при помощи подстановки $u=y^{1-\alpha}$. Уравнение Бернулли можно решать теми же способами, что и линейное уравнение, не производя замену $u=y^{1-\alpha}$.

Пример 3 – Проинтегрировать уравнение $xy'+y=y^2\ln x$.

Решение

Имеем уравнение Бернулли $y'+\dfrac{y}{x}=y^2\cdot\dfrac{\ln x}{x}$. Полагаем $y=u\cdot v$. Тогда $y'=u'v+uv'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид: $u'v+uv'+\dfrac{uv}{x}=u^2v^2\dfrac{\ln x}{x}$, $u'v+u\left(v'+\dfrac{v}{x}\right)=u^2v^2\dfrac{\ln x}{x}$.

Имеем $\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=u^2v^2\dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$

Находим одно из решений уравнения $v'+\dfrac{v}{x}=0$: $v=\dfrac{1}{x}$.

Тогда $u'v=u^2v^2\dfrac{\ln x}{x}$; $\dfrac{du}{u^2}=\dfrac{\ln x}{x^2}dx$; $\int\dfrac{du}{u^2}=\int\dfrac{\ln x}{x^2}dx-C$;

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{bmatrix} u_1=\ln x; du_1=\dfrac{dx}{x} \\ dv_1=\dfrac{dx}{x^2}; v_1=-\dfrac{1}{x}\end{bmatrix}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{\ln x+1}{x};$$

$$-\frac{1}{u}=-\frac{\ln x+1}{x}-C;\ \frac{1}{u}=\frac{\ln x+1+C\cdot x}{x};\ u=\frac{x}{\ln x+1+C\cdot x}.$$

$y=uv=\dfrac{x}{\ln x+1+C\cdot x}\cdot\dfrac{1}{x}$; $y=\dfrac{1}{\ln x+1+C\cdot x}$ – общее решение исходного ДУ.

3.2 Упражнения

1 Решить линейные дифференциальные уравнения методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа):

1) $y'-\dfrac{y}{x}=x$. *Ответ*: $y=x(x+C)$;

2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2y}{x}+x^2$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^5}{5}+C\right)$.

2 Решить линейные дифференциальные уравнения методом подстановки (методом Бернулли):

1) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^4}{4}+C\right)$;

2) $xy'-y=x^2\cos x$. *Ответ*: $y=x(\sin x+C)$.

3 Решить линейные дифференциальные уравнения:

1) $(x^2+1)y'+4xy=3$. *Ответ*: $y=\dfrac{x^3+3x+C}{(x^2+1)^2}$;

2) $x'+x\cos y=\cos y$, $x(0)=1$. *Ответ*: $x=1$;

3) $y'-2xy=2xe^{x^2}$. *Ответ*: $y=e^{x^2}(x^2+C)$;

4) $y'-\dfrac{1+2x}{x+x^2}y=\dfrac{1+2x}{x+x^2}$. *Ответ*: $y=1-C\cdot(x^2+x)$;

5) $y^2dx-(2xy+3)dy=0$. *Ответ*: $x=Cy^2-\dfrac{1}{y}$;

6) $(1+y^2)dx=\left(\sqrt{1+y^2}\cdot\sin y-xy\right)dy$. *Ответ*: $x=\dfrac{C-\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$;

7) $y'\cos x+y=1-\sin x$. *Ответ*: $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}(x+C)$;

8) $x(x-1)y'+y=x^2+2x-1$, $\quad y(2)=4$.

Ответ: $y=\dfrac{x}{x-1}\left(x+2\ln|x|+\dfrac{1}{x}-2\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$.

4 Решить уравнения Бернулли:

1) $y'x+y=-xy^2$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x(\ln|x|+C)}$;

2) $x^2y^2y'+xy^3=1$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{2}+C}$;

3) $2xyy'-y^2+x=0$. *Ответ*: $y^2=x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$;

4) $ydx+\left(x-\dfrac{1}{2}x^3y\right)dy=0$. *Ответ*: $x^2=\dfrac{C}{y(C+y)}$;

5) $3xdy=y\left(1+x\sin x-3y^3\sin x\right)dx$. *Ответ*: $y^3\left(3+Ce^{\cos x}\right)=x$.

3.3 Домашнее задание

1 Решить линейные дифференциальные уравнения:

1) $x^2+xy'=y$, $\quad y(1)=0$. *Ответ*: $y=x(1-x)$;

2) $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$. *Ответ*: $y=e^{-x}\left(C-\ln|1-x|\right)$;

3) $e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy=0$. *Ответ*: $x=e^{y}(-y+C)$;

4) $2xy'-y=3x^2$. *Ответ*: $y=x^2+C\sqrt{x}$.

2 Решить уравнения Бернулли:

1) $y'+\dfrac{y}{x}=-xy^2$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x^2+Cx}$;

2) $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$, $\quad y(0)=-1$. *Ответ*: $y^2=\dfrac{e^{x^2}}{2x+1}$.

4 Уравнения в полных дифференциалах

4.1 Теоретическая часть

Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т. е. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$.

Общий интеграл уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ определяется формулой $u(x,y) = C$.

Поскольку $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Необходимое и достаточное условие того, что уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, выражается равенством $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Если левая часть уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не является полным дифференциалом, но становится таким при умножении на некоторую функцию $\mu = \mu(x,y)$, то $\mu = \mu(x,y)$ называется ***интегрирующим множителем***. Интегрирующий множитель зависит только от x, т. е. $\mu = \mu(x)$, если $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$, и зависит только от y, если $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi(y)$.

Пример 1 – Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$ выбрать ту, которая проходит через начало координат.

Решение

Для данного в условии уравнения имеем $P(x,y) = 2x\cos^2 y$, $Q(x,y) = 2y - x^2 \sin 2y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cdot 2\cos y \cdot (-\sin y) = -2x\sin 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \cdot \sin 2y$.

Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y. \end{cases}$$

Интегрируем второе из этих уравнений (x при этом считается постоянной). Найдём следующее: $u(x,y)=\int\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy+f(x)$, $u(x,y)=$ $=y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+f(x)$, где $f(x)-$ функция, подлежащая определению.

Чтобы найти функцию $f(x)$, продифференцируем по x функцию $u=u(x,y)$: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\cos 2y+f'(x)$ и, принимая во внимание равенство $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos^2 y$, получаем $x\cos 2y+f'(x)=2x\cos^2 y$, $x\cos 2y+f'(x)=$ $=x(1+\cos 2y)$, $x\cos 2y+f'(x)=x+x\cos 2y$, $f'(x)=x$, $f(x)=\frac{x^2}{2}+C_1$.

Итак, $u(x,y)=y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}+C_1$.

В соответствии с формулой $u(x,y)=C$ получаем $y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}+C_1=C_2$; $y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}=C$, где $C=C_2-C_1$.

Имеем $y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}=C-$ общий интеграл данного уравнения семейства интегральных кривых.

Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Подставим в уравнение семейства интегральных кривых начальные данные $x=0$ и $y=0$. Получим $C=0$. Итак, $y^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2y+\frac{x^2}{2}=0$.

4.2 Упражнения

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

1) $(10xy-8y+1)dx+\left(5x^2-8x+3\right)dy=0$.

Ответ: $5x^2y-8xy+x+3y=C$;

2) $3x^2e^y+\left(x^3e^y-1\right)y'=0,\ \ y(0)=1$. *Ответ*: $x^3e^y-y=-1$;

3) $\left(x^3-3xy^2+2\right)dx-\left(3x^2y-y^2\right)dy=0$.

Ответ: $\frac{y^3}{3}-\frac{3x^2y^2}{2}+\frac{x^4}{4}+2x=C$;

4) $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. *Ответ*: $x^2+y^2+2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C$;

5) $\frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$. *Ответ*: $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$;

6) $\left(\ln y-2x\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-2y\right)dy=0$, $y(3)=1$.

Ответ: $x\ln y-y^2-x^2=-10$;

7) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0,\ \ y(0)=2$.

Ответ: $x^2+y^2+\dfrac{2\sin^2 x}{y}=4$.

4.3 Домашнее задание

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

1) $\left(12x+5y-9\right)dx+\left(5x+2y-4\right)dy=0$.

Ответ: $6x^2+5xy+y^2-9x-4y=C$;

2) $\left(3xy^2-x^2\right)dx+\left(3x^2y-6y^2-1\right)dy=0,\quad y(0)=-2$.

Ответ: $\dfrac{3x^2y^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-2y^3-y=18$;

3) $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$. *Ответ*: $x^2+ye^{\frac{x}{y}}=C$.

5 Дополнительные задачи по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

5.1 Упражнения

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y'=\dfrac{y}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$. *Ответ*: $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$;

2) $y'-\dfrac{y}{x}=x^2$. *Ответ*: $y=x\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$;

3) $\left(y-x^2y\right)xdy+dx=0$. *Ответ*: $y^2=\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2}\right|+C$;

4) $\dfrac{dy}{dx}-y\cdot\operatorname{ctg}x=2x\cdot\sin x$. *Ответ*: $y=\sin x\left(x^2+C\right)$;

5) $\left(xy+1\right)ydx=xdy$. *Ответ*: $y=-\dfrac{2x}{x^2+C}$;

6) $\operatorname{tg}ydx+\operatorname{tg}xdy=0$. *Ответ*: $\sin x=\dfrac{C}{\sin y}$;

7) $(x+y)-(y-x)y'=0$. *Ответ*: $x^2+2xy-y^2=C$;

8) $\left(\ln y+4x^3y+\dfrac{3}{y}\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+x^4-\dfrac{3x}{y^2}\right)dy=0$.

Ответ: $x\ln y+x^4y+\dfrac{3x}{y}=C$;

9) $y'=e^{x+y}$. *Ответ*: $e^x+e^{-y}=C$;

10) $y'=(x+y)^2$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$;

11) $\dfrac{dx}{dy}+3x=e^{2y}$. *Ответ*: $x=e^{-3y}\left(\dfrac{1}{5}e^{5y}+C\right)$;

12) $\dfrac{dx}{x}=\operatorname{tg} y dy$. *Ответ*: $x\cos y=C$;

13) $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$. *Ответ*: $y=C\left(\ln\dfrac{y}{x}+1\right)$;

14) $y'\cos x+y\sin x=1$. *Ответ*: $y=\cos x(\operatorname{tg} x+C)$;

15) $ydx-xdy=xydx$. *Ответ*: $x+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=C$;

16) $y'-2y=e^x-x$. *Ответ*: $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}+C\cdot e^{2x}-e^x$;

17) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. *Ответ*: $y=\dfrac{\left(x\cdot\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C\right)^2}{x^2}$;

18) $(x+xy^2)-(y+yx^2)y'=0$. *Ответ*: $x^2+1=C(y^2+1)$;

19) $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$. *Ответ*: $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=Cx$;

20) $(\cos x\cdot\cos y-3x^2y^2+2xy+5)dy-(\sin x\cdot\sin y+2xy^3-y^2+4)dx=0$.

Ответ: $\cos x\cdot\sin y-x^2y^3+xy^2+5y-4x=C$.

6 Дифференциальные уравнения высших порядков

6.1 Теоретическая часть

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)=0$, где x – независимая переменная; y – искомая функция переменной x; $y', ..., y^{(n)}$ – её производные.

При этом функция F может явно не зависеть от $x, y, y', ..., y^{n-1}$, но обязательно должна зависеть от $y^{(n)}$.

Уравнение $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)=0$, разрешенное относительно $y^{(n)}$, т. е. записанное в виде $y^{(n)}=f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, называется ***ДУ в нормальной форме***.

Функция $y=\varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется ***общим решением уравнения*** $y^{(n)}=f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, если она является решением этого уравнения для любых значений $C_1, C_2, ..., C_n$; каковы бы ни были начальные условия $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}$, существуют единственные значения постоянных $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, такие, что функция $y=\varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ удовлетворяет начальным условиям.

Неявно заданное общее или частное решение ДУ называется соответственно ***общим или частным интегралом ДУ***.

Задача Коши и теорема Коши для ДУ высшего порядка формулируются аналогично их формулировкам для ДУ первого порядка.

6.1.1 Уравнения, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим ДУ $y^{(n)}=f(x)$, $F\left(x, y', y''\right)=0$, $F\left(y, y', y''\right)=0$.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается n-кратным интегрированием ДУ.

Пример 1 **–** Найти общее решение ДУ $y'''=\dfrac{1}{x^3}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=2$, $y'(1)=\dfrac{1}{2}$, $y''(1)=\dfrac{3}{2}$.

Решение

Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем

$$y''=\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C_1, \qquad y'=\int\left(-\frac{1}{2x^2}+C_1\right)dx=\frac{1}{2x}+C_1x+C_2,$$

$y=\int\left(\dfrac{1}{2x}+C_1x+C_2\right)dx$; $y=\dfrac{1}{2}\ln|x|+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$ – общее решение ДУ.

Подставляя $x=1,\ y=2,\quad y'=1/2,\ y''=3/2$ в равенства $y''=-\dfrac{1}{2x^2}+C_1$, $y'=\dfrac{1}{2x}+C_1x+C_2$, $y=\dfrac{1}{2}\ln|x|+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$, найдём значения C_1,C_2,C_3. Имеем $\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}+C_1$, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+C_1+C_2$, $2=\dfrac{1}{2}\ln 1+C_1\cdot\dfrac{1}{2}+C_2+C_3$.

Откуда $C_1=2,\ C_2=-2,\ C_3=3$. Искомое частное решение получаем из общего решения, подставляя найденные значения произвольных постоянных: $y=\dfrac{1}{2}\ln|x|+x^2-2x+3.$

Уравнение вида $F\left(x,y',y''\right)=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p\left(x\right)$, откуда $y''=\dfrac{dp}{dx}$.

Пример 2 **–** Проинтегрировать уравнение $y''=2\left(y'-1\right)\operatorname{ctg}x$.

Решение

Имеем уравнение вида $F\left(x,y',y''\right)=0$. Полагаем $y'=p,\ p=p\left(x\right)$. Тогда $y''=\dfrac{dp}{dx}$. После подстановки получаем ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными $\dfrac{dp}{dx}=2\left(p-1\right)\operatorname{ctg}x$.

Разделяя переменные и интегрируя, находим $p\left(x\right)$.

$\dfrac{dp}{p-1}=2\operatorname{ctg}x\,dx$, $\displaystyle\int\frac{dp}{p-1}=2\int\operatorname{ctg}x\,dx$, $\ln|p-1|=2\ln|\sin x|+\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, $p-1=C_1\sin^2 x$, $p=1+C_1\sin^2 x$.

Заменяя переменную p на $\dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение $\dfrac{dy}{dx}=1+C_1\sin^2 x$, откуда $dy=\left(1+C_1\sin^2 x\right)dx$.

Интегрируя, найдём общее решение: $\displaystyle y=\int\left(1+C_1\sin^2 x\right)dx=$ $\displaystyle =x+\frac{C_1}{2}\int\left(1-\cos 2x\right)dx$, $y=x+\dfrac{C_1}{2}x-\dfrac{C_1}{4}\sin 2x+C_2$ – общее решение ДУ.

Уравнение вида $F\left(y,y',y''\right)=0$, не содержащее явно аргумента x, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p\left(y\right)$, откуда $y''=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot p$.

Пример 3 – Найти частное решение уравнения $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1,\ y'(1) = 2$.

Решение

Имеем уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$. Полагаем $y' = p,\ p = p(y)$. Тогда $y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$. Имеем $y \cdot p \cdot \dfrac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \cdot p$ или $p\left(y\dfrac{dp}{dy} - p - y^2\right) = 0$.

Приравнивая первый множитель к нулю, получаем простейшее уравнение $p = 0$, т. е. $y' = 0$. Его решение $y = C$.

Приравнивая второй множитель к нулю, получаем линейное ДУ относительно $p(y)$ $yp' - p - y^2 = 0$ или $p' - \dfrac{1}{y}p = y$.

Его решение ищем в виде $p = uv$. Тогда $p' = u'v + uv'$, $u'v + uv' - \dfrac{uv}{y} = y$,

$u'v + u\left(v' - \dfrac{v}{y}\right) = y$, $v' - \dfrac{v}{y} = 0$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{dy}{y}$, $v = y$.

Так как $v = y$, то $u'v = y$ или $\dfrac{du}{dy}y = y$, откуда $\dfrac{du}{dy} = 1$ или $u = y + C_1$. Тогда $p = y(y + C_1), y' = y(y + C_1)$.

Из начальных условий найдем C_1. Так как $y(1) = 1,\ y'(1) = 2$, то $2 = 1(1 + C_1)$, откуда $C_1 = 1$. Следовательно, $y' = y(y+1)$ или $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$. Откуда $\dfrac{dy}{y^2 + y} = dx$. Интегрируя, получаем $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int dx + C_2$, $\displaystyle\int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = x + C_2$,

$\dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln\left|\dfrac{y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right| = x + C_2$, $\ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = x + C_2$.

Найдем C_2: $\ln\dfrac{1}{2} = 1 + C_2$, $\quad C_2 = -1 - \ln 2$.

Итак, $\ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = x - 1 - \ln 2$ – частное решение данного ДУ.

6.2 Упражнения

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

1) $y''' = \cos 2x$. *Ответ*: $y = -\dfrac{1}{8}\sin 2x + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$;

2) $y'' = 3x^2$, $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \dfrac{x^4}{4} + x + 2$;

3) $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -\dfrac{5}{8}$.

Ответ: $y = -\dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{4}$;

4) $\left(1+x^2\right)y'' - 2xy' = 0$. *Ответ*: $y = C_1\left(\dfrac{x^3}{3} + x\right) + C_2$;

5) $x\left(y''+1\right) + y' = 0$. *Ответ*: $y = -\dfrac{x^2}{4} + C_1\ln|x| + C_2$;

6) $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right),\ y(1) = \dfrac{1}{2},\ y'(1) = 1$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{2}x^2$;

7) $y^{IV} = \dfrac{y'''}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 0,\ y'''(1) = 1$.

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{7}{3}x - \dfrac{9}{8}$;

8) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2} + C_1\left(x\ln x - x\right) + C_2x + C_3$;

9) $1 + \left(y'\right)^2 = 2yy''$. *Ответ*: $\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1y - 1} = \pm x + C_2$;

10) $2\left(y'\right)^2 = \left(y-1\right)y'',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Ответ: $y = 1 - \dfrac{1}{C_1x + C_2},\ y = \dfrac{x}{x+1}$;

11) $yy'' - \left(y'\right)^2 = y^3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$. *Ответ*: $\sqrt{\dfrac{2}{y}} = 1 - x$.

6.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

1) $y''' = 8e^{-2x} + 3x^2$. *Ответ*: $y = -e^{-2x} + \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$;

2) $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$. *Ответ*: $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$;

3) $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2$;

4) $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = x^3$. *Ответ*: $y = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{4} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$;

5) $y'' - 2yy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{1-x}$;

6) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{C_1y - 4}}{2} = \pm x + C_2$.

7 Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

7.1 Теоретическая часть

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0$, где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ – непрерывные на некотором интервале $(a;b)$ функции, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением*** **(*ЛОДУ*)** ***n-го порядка.***

Система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется ***линейно независимой*** на интервале $(a;b)$, если равенство $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ny_n = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, выполняется тогда, и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Всякая система из n линейно независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ЛОДУ n-го порядка называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения.

Структура общего решения ЛОДУ n-го порядка**:** если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений ЛОДУ n-го порядка, то общее решение (y_{oo}) этого уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Уравнение вида $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ – некоторые числа, называется ***линейным однородным ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.***

Уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** ЛОДУ $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0$.

Уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ по основной теореме алгебры имеет n корней: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Каждому из этих корней соответствует частное решение y_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ ЛОДУ по правилу (таблица 7.1).

Таблица 7.1 – Частные решения ЛОДУ в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$	Частное решение ЛОДУ
$k \in \mathbb{R} -$ однократный корень	e^{kx}
$k \in \mathbb{R} - r$ -кратный корень	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ – однократные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} -$ r -кратные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Общее решение ЛОДУ, согласно структуре общего решения ЛОДУ, имеет вид $y_{oo} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Частным случаем ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами является ЛОДУ второго порядка $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, где $p, q \in \mathbb{R}$.

Характеристическое уравнение ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ имеет вид $k^2 + pk + q = 0$. Общее решение ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ в зависимости от корней характеристического уравнения можно представить в следующем виде (таблица 7.2).

Таблица 7.2 – Частные решения ЛОДУ второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Фундаментальная система решений ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$	Общее решение ДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$
$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{k_1x}; y_2 = e^{k_2x}$	$y_{oo} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{kx}; y_2 = xe^{kx}$	$y_{oo} = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right)$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x; y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Пример 1 **–** Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 12y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ДУ $k^2 - k - 12 = 0$. Его корни $k_1 = 4,\ k_2 = -3$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$.

Пример 2 **–** Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ДУ $k^2 - 4k + 4 = 0$. Его корни $k_{1,2} = 2$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Пример 3 **–** Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение ДУ $k^2 + 4k + 20 = 0$. Его корни $k_{1,2} = -2 \pm 4i$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Пример 4 **–** Проинтегрировать уравнение $y'' - 5y' - 6y = 0$ и найти частное решение при начальных условиях $y(0) = 3,\ y'(0) = 4$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^2 - 5k - 6 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$ и $k_2 = 6$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$.

Тогда $y'_{oo} = -C_1 e^{-x} + 6C_2 e^{6x}$. Используя начальные условия, получим систему двух линейных уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 4 = -C_1 + 6C_2. \end{cases}$$

Решая систему, получим $C_1 = 2,\ C_2 = 1$. Следовательно, $y_ч = 2e^{-x} + e^{6x}$ искомое частное решение.

Пример 5 **–** Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - 8y' = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - 8k = 0$. Его корни $k_1 = 0,\ \ k_2 = -2,\ \ k_3 = 4$ – действительные и различные числа. Соответствующие частные решения $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = e^{4x}$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{4x}$.

Пример 6 **–** Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^5 + 2k^4 + 2k^3 = 0$. Его корни $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_{4,5} = -1 \pm i$. Соответствующие частные решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^{-x}\cos x$, $y_5 = e^{-x}\sin x$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-x}\left(C_4 \cos x + C_5 \sin x\right)$.

7.2 Упражнения

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$;

2) $y'' + 8y' + 16y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$;

3) $y'' - 6y' + 34y = 0$. *Ответ*: $y = e^{3x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right)$;

4) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$. *Ответ*: $y = 2e^{3x} + 4e^x$;

5) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. *Ответ*: $y = \sin 2x$;

6) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$. *Ответ*: $y = 3e^{2x} - 7xe^{2x}$;

7) $y''' - 10y'' + 25y' = 0$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 x e^{5x}$;

8) $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 13y^{(4)} = 0$.
Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{3x}\cos 2x + C_6 e^{3x}\sin 2x$;

9) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{3x}$;

10) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$.
Ответ: $y = -2e^x + \cos 2x + \sin 2x$.

7.3 Домашнее задание

Найти общие решения уравнений и частные решения при заданных начальных условиях (где это требуется):

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$;

2) $4y'' - 8y' + 5y = 0$. *Ответ*: $y = e^x\left(C_1 \cos\dfrac{x}{2} + C_2 \sin\dfrac{x}{2}\right)$;

3) $y'' - 2y' - 15y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}$;

4) $y^{IV}+4y''+3y=0$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x$;

5) $y^{IV}+2y'''+y''=0$. *Ответ*: $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$;

6) $3y''+7y'+4y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2/3$. *Ответ*: $y=2e^{-x}-e^{-\frac{4}{3}x}$;

7) $4y''+4y'+y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$. *Ответ*: $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

8 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

8.1 Теоретическая часть

Уравнение вида $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x)$, где $a_1, a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ – некоторые числа, $f(x)$ – непрерывная на некотором интервале $(a;b)$ функция, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением* (*ЛНДУ*) *n-го порядка с постоянными коэффициентами.*** Действительные числа $a_1, a_2,\ldots,a_n$ – коэффициенты, $f(x)$ – правая часть ЛНДУ.

Уравнение $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0$ ***называется однородным уравнением, соответствующим*** ЛНДУ $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x)$.

Структура общего решения ЛНДУ n-го порядка. Общее решение $y_{он}$ ЛНДУ есть сумма его произвольного частного решения $y_{чн}$ и общего решения $y_{оо}$ соответствующего, т. е. $y_{он}=y_{чн}+y_{оо}$.

Рассмотрим ***метод Лагранжа*** (вариации произвольных постоянных). Для решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка методом Лагранжа рекомендуется:

– найти фундаментальную систему решений $y_1, y_2,\ldots,y_n$ соответствующего однородного уравнения;

– записать вид общего решения ЛОДУ: $y_{оо}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, где $C_1, C_2,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные;

– записать общее решение ЛНДУ, считая $C_1, C_2,\ldots,C_n$ функциями от x: $y_{он}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n$;

– для определения $C_1'(x), C_2'(x),..., C_n'(x)$ составить систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + ... + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x){y_n}' = 0, \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x); \end{cases}$$

– найти функции $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ и подставить их в формулу $y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n$.

Метод Лагранжа для ЛНДУ второго порядка $y'' + p\cdot y' + q\cdot y = f(x)$:

– для соответствующего ЛОДУ $y'' + p\cdot y' + q\cdot y = 0$ записываем общее решение $y_{оо} = C_1y_1 + C_2y_2$;

– общее решение ЛНДУ будем искать в виде $y_{он} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$;

– для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составляем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Пример 1 **–** Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение

Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{оо} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{он} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Система уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$: $C_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 2x}{2\cos 2x}$, $C_2'(x) = \dfrac{\sin 2x}{2}$.

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos 2x-\frac{1}{\cos 2x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1,\qquad C_2(x)=\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2.$$

Общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y_{он}=\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2\right)\sin 2x$$

или

$$y_{он}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

8.2 Упражнения

Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$. *Ответ*: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$;

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$. *Ответ*: $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{3}{4}x^2\right)$;

3) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$. *Ответ*: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\ln\left(e^x+1\right)$;

4) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$. *Ответ*: $y=e^x\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\dfrac{x}{2}\right)$;

5) $y''+y=\sin^2 x$. *Ответ*: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+\dfrac{1}{3}\sin^4 x$;

6) $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Ответ: $y=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x\right)$;

7) $y''+6y'+9y=\dfrac{1}{xe^{3x}}$. *Ответ*: $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+xe^{-3x}\ln|x|$;

8) $y'''+y'=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos x}$.

Ответ: $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+\dfrac{1}{\cos x}+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x-\operatorname{tg}x\sin x$.

8.3 Домашнее задание

Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|+\dfrac{1}{2}x\sin x$;

2) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$. *Ответ*: $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2x}\right)$;

3) $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$. *Ответ*: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2\cos x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$;

4) $y''-y'=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Ответ*: $y=C_1+C_2e^x+\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\arcsin e^x$;

5) $y''+y+\mathrm{ctg}^2 x=0$. *Ответ*: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right|+2$.

9 Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

9.1 Теоретическая часть

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x)$, где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – действительные числа, а правая часть $f(x)$ имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)-$ многочлены n-й и m-й степеней соответственно. Правая часть такого вида называется специальной правой частью.

Общее решение $y_{он}$ линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $y_{чн}$ линейного неоднородного уравнения: $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Частное решение $y_{чн}$ для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью ищется в виде $y_{чн}=x^re^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x+N_l(x)\sin\beta x\right)$, где $r-$ кратность корня $\alpha+i\beta$ характеристического уравнения; $M_l(x)$ и $N_l(x)-$ многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, $l=\max(n,m)$.

Приведем сводную таблицу видов частных решений для различных видов правых частей линейного неоднородного уравнения со специальной правой частью (таблица 9.1).

Таблица 9.1 – Вид частного решения ЛНДУ в зависимости от вида правой части

Правая часть ДУ	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$	Число $\alpha+i\beta$ являетсякорнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн}=x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x+$ $+N_l(x)\sin\beta x),\ l=\max(n,m)$
$P_n(x)$	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн}=x^r Q_n(x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн}=x^r P_n(x)e^{\alpha x}$
$a\cos\beta x+b\sin\beta x$	Число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$y_{чн}=x^r\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right)$

Замечание – Многочлены с неопределенными коэффициентами имеют вид:

$P_0(x)=A-$многочлен нулевой степени;

$P_1(x)=Ax+B-$ многочлен первой степени;

$P_2(x)=Ax^2+Bx+C-$ многочлен второй степени;

$P_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D-$ многочлен третьей степени и т. д.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов надо выражение $y_{чн}$ подставить в данное ДУ и после сокращения на $e^{\alpha x}$ приравнять коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x или при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Из полученной при этом системы уравнений определяются коэффициенты.

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезной следующая теорема.

Теорема (***о наложении решений***)**.** Если правая часть ЛНДУ представляет собой сумму двух функций: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а $y_{чн1}$ и $y_{чн2}$ – частные решения уравнений $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f_1(x)$ и $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f_2(x)$ соответственно, то функция $y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}$ является решением данного уравнения.

Пример 1 **–** Указать вид частного решения $y''-5y'+4y=(3x+2)e^x$.

Решение

Решим характеристическое уравнение $k^2-5k+4=0$, $k_1=1$, $k_2=4$. Функции $(3x+2)e^x$ соответствует $\alpha=1,\beta=0$; $\alpha=1$ является корнем характеристического уравнения кратности $r=1$; множитель при e^x равен $(3x+5)$ – многочлен первой степени. Следовательно, получаем ответ: частное решение имеет вид $y_{чн} = x\left(Ax + B\right)e^x$.

Пример 2 **–** Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = e^x$.

Решение

Решим однородное уравнение $y'' + 4y = 0$: $k^2 + 4 = 0$, $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$, $y_{оо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Функции e^x в правой части уравнения соответствует $\alpha = 1, \beta = 0$; $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения (кратность $r = 0$, коэффициент при e^x равен 1 (многочлен нулевой степени)). Следовательно, частное решение ищем в виде $y_{чн} = Ax^0 e^x = Ae^x$.

Находим A, подставляя $y_{чн}$ в данное неоднородное уравнение: $y'_{чн} = Ae^x$, $y''_{чн} = Ae^x$, $Ae^x + 4Ae^x = e^x$, $e^x \neq 0$, $A = 0{,}2$.

Итак, $y_{он} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0{,}2e^x$.

Пример 3 **–** Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 8y = 85\cos x$.

Решение

Решим однородное уравнение $y'' - 2y' - 8y = 0$: $k^2 - 2k - 8 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 4$, $y_{оо} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$.

Функции $\cos x$ соответствует $\alpha = 0, \beta = 1$. Число i не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, $y_{чн} = A\cos x + B\sin x$. Тогда $y'_{чн} = -A\sin x + B\cos x$, $y''_{чн} = -A\cos x - B\sin x$. Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x - 8A\cos x - 8B\sin x = 85\cos x,$$

$$\cos x\left(-A - 2B - 8A\right) + \sin x\left(-B + 2A - 8B\right) = 85\cos x.$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$ слева и справа от знака равенства. Получим систему

$$\begin{cases} -9A - 2B = 85, \\ 2A - 9B = 0. \end{cases}$$

Откуда $A = -9$, $B = -2$. Тогда $y_{чн} = -9\cos x - 2\sin x$.

Итак, $y_{он} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - 9\cos x - 2\sin x$.

Пример 4 – Указать вид частного решения уравнения $y''+2y'+2y=e^{-x}\left(\cos x+x\right)$.

Решение

Решим характеристическое уравнение $k^2+2k+2=0$: $k_1=-1+i$, $k_2=1-i$. Для первого слагаемого правой части уравнения $e^{-x}\cos x$ имеем $\alpha=-1$, $\beta=1$. Число $\alpha+\beta i=-1+i$ является корнем характеристического уравнения кратности $r=1$. Для второго слагаемого xe^{-x} имеем $\alpha=-1$, $\beta=0$. Число $\alpha=-1$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, получаем ответ: $y_{чн}=x\left(A\cos x+B\sin x\right)e^{-x}+\left(Cx+D\right)e^{-x}$.

9.2 Упражнения

1 Для данных ЛНДУ написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами:

1) $y''-8y'+16y=\left(1-x\right)e^{4x}$. *Ответ*: $y_{чн}=\left(Ax^3+Bx^2\right)e^{4x}$;

2) $y''+16y=\sin 4x$. *Ответ*: $y_{чн}=x\left(A\cos 4x+B\sin 4x\right)$;

3) $y''-7y'=\left(x-1\right)^2$. *Ответ*: $y_{чн}=Ax^3+Bx^2+Cx$;

4) $y''+2y'+5y=e^x\left(\left(x+1\right)\cos 2x+3\sin 2x\right)$.

Ответ: $y_{чн}=e^x\left(\left(Ax+B\right)\cos 2x+\left(Cx+D\right)\sin 2x\right)$;

5) $y''+4y=\cos\left(2x+3\right)$. *Ответ*: $y_{чн}=x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$;

6) $y''-4y'=2\cos^2 4x$. *Ответ*: $y_{чн}=Ax+B\cos 8x+C\sin 8x$.

2 Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y''+2y'+y=e^{2x}$. *Ответ*: $y_{он}=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+\dfrac{1}{9}e^{2x}$;

2) $y''-8y'+7y=14$. *Ответ*: $y_{он}=C_1e^{7x}+C_2e^x+2$;

3) $y''+y'-2y=8\sin 2x$.

Ответ: $y_{он}=C_1e^{-2x}+C_2e^x-0,4\cos 2x-1,2\sin 2x$;

4) $y''-4y'+4y=x^2$. *Ответ*: $y_{он}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{8}$;

5) $y''-5y'+6y=\left(12x-7\right)e^{-x}$, $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$.

Ответ: $y_{чн}=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$;

6) $y''-y=x^2-x+1, y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$.

Ответ: $y_{чн}=e^x+2e^{-x}-x^2+x-3$;

7) $y'' + 4y = 4\left(\sin 2x + \cos 2x\right),\ y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.

Ответ: $y_{чн} = 3\pi\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x\left(\sin 2x - \cos 2x\right)$;

8) $y'' + y' = 5x + 2e^{x}$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^{x}$;

9) $y'' + y' = \sin^2 x$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$;

10) $y'' + y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Ответ: $y_{он} = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{30}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 2x$.

9.3 Домашнее задание

Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 5y' + 6y = e^{x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. *Ответ*: $y_{чн} = \frac{1}{2}e^{3x} - e^{2x} + \frac{1}{2}e^{x}$;

2) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$;

3) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$. *Ответ*: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{25}x$;

4) $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1$.

Ответ: $y_{чн} = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$;

5) $y'' + 4y = x\sin 2x$.

Ответ: $y_{он} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x$;

6) $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

Ответ: $y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

10 Дополнительные задачи по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков»

10.1 Упражнения

Найти общие и частные решения (там, где заданы начальные условия) для следующих дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Ответ: $y_{он} = C_1e^x + C_2xe^x - \ln\sqrt{x^2+1} + x\operatorname{arctg} x$;

2) $y'' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{2}(\operatorname{tg} x - x + 1)$;

3) $(1-x^2)y'' - xy = 2$. *Ответ*: $y = \arcsin^2 x + C_1\arcsin x + C_2$;

4) $y'' - 5y' + 4y = \sin x - 7\cos x$.

Ответ: $y_{он} = C_1e^x + C_2xe^{4x} + \dfrac{19}{17}\sin x - \dfrac{8}{17}\cos x$;

5) $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$. *Ответ*: $y = -x - C_1\cos x + C_2$;

6) $xy'' - y' = 2x^2e^x$. *Ответ*: $y = 2xe^x - 2e^x + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2$;

7) $y'' + 4y' = \cos 2x$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{10}\sin 2x - \dfrac{1}{20}\cos 2x - \dfrac{C_1e^{-4x}}{4} + C_2$;

8) $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = \sqrt{2x+1}$;

9) $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. *Ответ*: $\arcsin\dfrac{y-2}{2} = x$;

10) $y'' + 4y' + 20y = 0$. *Ответ*: $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$;

11) $y'' - 3y' - 10y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x}$;

12) $9y'' + 6y' + y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{-\frac{x}{3}} + C_2xe^{-\frac{x}{3}}$;

13) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 133$.

Ответ: $y = 10 - 11e^x + e^{12x}$;

14) $y'' + y' = 2x - 1$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2e^{2x} + x^2 - 3x$;

15) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. *Ответ*: $y = C_1e^{6x} + C_2xe^{6x} + 7x^2e^{6x}$;

16) $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 6\cos x + \sin x$;

17) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$. *Ответ*: $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^{2x}$;

18) $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.

Ответ: $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 3\cos 4x - \sin 4x$;

19) $y''+6y=e^x\left(\cos 4x-8\sin 4x\right),\ y(0)=0,\ y'(0)=5$.

Ответ: $y=\sin 4x-\cos 4x+e^x\cos 4x$;

20) $y''-y'=e^{2x}\sin e^x$. *Ответ*: $y=C_1+C_2e^x-\sin e^x$;

21) $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$.

Ответ: $y=C_1e^{-x}++C_2e^x+e^x\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x}\right|-e^{-x}\ln\left|e^x-1\right|-1$.

11 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

11.1 Теоретическая часть

Нормальной системой ДУ называется система вида

$$\begin{cases} y_1'=\varphi_1\left(x,y_1,\ldots,y_n\right), \\ \ldots \\ y_n'=\varphi_n\left(x,y_1,\ldots,y_n\right). \end{cases} \tag{11.1}$$

Теорема Коши. Если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ в системе (11.1) и их частные производные по $y_1,\ldots,y_n$ определены и непрерывны в некоторой области D пространства переменных $\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$, то какова бы ни была внутренняя точка $\left(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0}\right)$ области D, в некоторой её окрестности существует единственное решение системы (11.1), удовлетворяющее начальным условиям $y_1\left(x_0\right)=y_{10},...y_n\left(x_0\right)=y_{n0}$.

Нормальная система называется ***линейной*** (ЛСДУ), если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ являются линейными относительно $y_1,\ldots,y_n$.

В противном случае система нелинейна.

ЛСДУ имеет вид:

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+...+a_{1n}(x)y_n+f_1(x), \\ y_2'=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+...+a_{2n}(x)y_n+f_2(x), \\ \ldots \\ y_n'=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+...+a_{nn}(x)y_n+f_n(x), \end{cases}$$

или кратко

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+f_i(x),\quad i=\overline{1,n}. \tag{11.2}$$

Систему (11.2) можно записать в матричной форме:

$$Y' = AY + F\,, \qquad (11.3)$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},\quad Y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Система (11.3) называется ***линейной однородной*** (ЛОСДУ), если $F \equiv 0$, иначе система ***неоднородная***.

11.2 Методы решения нормальных систем

Метод исключения заключается в следующем: дифференцированием одного из уравнений системы (11.1) и исключением неизвестных функций удается свести систему к одному уравнению n-го порядка относительно одной функции.

Пример 1 – Решить методом исключения СДУ $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы. Получим

$$\begin{cases} y_1'' = 4y_1' - 3y_2', \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2, \\ y_2 = \dfrac{1}{3}(4y_1 - y_1'). \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение второе и третье уравнения системы, исключив переменную y_2 и ее производную y_2'. Имеем уравнение $y_1'' - 8y_1' + 25y_1 = 0$, решив которое, получим $y_1 = e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$.

Найдем y_2 из третьего уравнения системы:

$$y_1' = 4e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{4x}\left(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x\right) =$$

$$= e^{4x}\left(\left(4C_1 + 3C_2\right)\cos 3x + \left(4C_2 - 3C_1\right)\sin 3x\right);$$

$$y_2 = \frac{1}{3}\Big(4e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) - e^{4x}\big(\left(4C_1+3C_2\right)\cos 3x + \left(4C_2-3C_1\right)\sin 3x\big)\Big) =$$

$$= e^{4x}\left(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x\right).$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right), \\ y_2 = e^{4x}\left(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x\right). \end{cases}$

Метод интегрируемых комбинаций заключается в следующем: путем алгебраических преобразований уравнений системы (11.1) удается в некоторых случаях получить легко интегрируемые комбинации, после чего нетрудно решить систему.

Пример 2 **–** Решить методом интегрируемых комбинаций СДУ

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{yz}, \\ z' = \dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$$

Решение

$y' = \dfrac{dy}{dx}$; $z' = \dfrac{dz}{dx}$. Разделим первое уравнение системы на второе, получим $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{y}{z} \Rightarrow y = C_1 z$. Подставим полученную функцию во второе уравнение системы: $z' = \dfrac{x}{C_1^2 z^2}$. Имеем $C_1^2 z^2 dz = xdx \Rightarrow \dfrac{C_1^2 z^3}{3} = \dfrac{x^2}{2} + C_2$.

Ответ: $\begin{cases} y = C_1 z, \\ \dfrac{C_1^2 z^3}{3} = \dfrac{x^2}{2} + C_2. \end{cases}$

11.2 ЛОСДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (метод характеристического уравнения)

Рассмотрим ЛОСДУ

$$Y' = AY, \tag{11.4}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$.

Общее решение ЛОСДУ (11.4) имеет вид $Y = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$, где Y_i – фундаментальная система решений (11.4).

Y_i ищем в виде (предложил Эйлер) $Y_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \\ \dots \\ \alpha_n e^{kx} \end{pmatrix} = e^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Требуется подобрать α_i так, чтобы Y_i удовлетворяло системе (11.4).

$$Y_i' = ke^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow ke^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \cdot e^{kx} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{kx} \cdot (A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$(A - kE) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$ – однородная СЛАУ относительно α_i. Она имеет ненулевое решение, если $\det(A - kE) = 0$. Получаем характеристическое уравнение

$$\det(A - kE) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{11.5}$$

Частные решения системы (11.4) в зависимости от корней характеристического уравнения (11.5) представлены в таблице 11.1.

Таблица 11.1 – Частные решения системы в зависимости от корней характеристического уравнения

Корни характеристического уравнения (11.5)	Частные решения системы (11.4)
$k_i \in \mathbb{R}$, кратность $r=1$	$Y_i = e^{k_i x}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, кратность $r=1$	$Y_i^1 = \operatorname{Re} Y^*, \quad Y_i^2 = \operatorname{Im} Y^*, \quad Y^* = e^{(\alpha+\beta i)x}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$
$k_i \in \mathbb{R}$, кратность $r \geq 2$	$Y_i = e^{k_i x}\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}x+\ldots+\alpha_{1r}x^{r-1}\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}x+\ldots+\alpha_{2r}x^{r-1}\\ \ldots\\ \alpha_{n1}+\alpha_{n2}x+\ldots+\alpha_{nr}x^{r-1}\end{pmatrix}$, где $\alpha_{ij}\,(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,r})$ определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в результате подстановки Y_i в исходную систему (11.5)

Пример 3 **–** Решить методом Эйлера систему $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 4; k_2 = 1.$

Имеем $Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; Y_2 = e^{x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$

Общее решение ищем в виде $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$.

$$k_1 = 4: \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$k_1=1:\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\beta_1+2\beta_2=0\Rightarrow\beta_1=-2\beta_2\Rightarrow\begin{cases}\beta_2=1,\\\beta_1=-2\end{cases}\Rightarrow Y_2=e^x\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $Y=C_1e^{4x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^x\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ или $\begin{cases}y_1=C_1e^{4x}-2C_2e^x,\\y_2=C_1e^{4x}+C_2e^x.\end{cases}$

Пример 4 **–** Решить методом Эйлера систему $\begin{cases}y_1'=4y_1-3y_2,\\y_2'=3y_1+4y_2.\end{cases}$

Решение

$$A=\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4-k&-3\\3&4-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix}4-k&-3\\3&4-k\end{vmatrix}=0\Rightarrow(4-k)^2=-9\Rightarrow k_{1,2}=4\pm3i$. Имеем $Y_1=\operatorname{Re}Y^*;\ Y_2=\operatorname{Im}Y^*$.

Общее решение ищем в виде $Y=C_1Y_1+C_2Y_2$.

$$k_1=4+3i:\begin{pmatrix}-3i&-3\\3&-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow3\alpha_1-3i\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_1=i\alpha_2\Rightarrow\begin{cases}\alpha_2=1,\\\alpha_1=i\end{cases}\Rightarrow$$

$$Y^*=e^{(4+3i)x}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=e^{4x}(\cos3x+i\sin3x)\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=e^{4x}\begin{pmatrix}i\cos3x-\sin3x\\\cos3x+i\sin3x\end{pmatrix}=e^{4x}\begin{pmatrix}-\sin3x\\\cos3x\end{pmatrix}+$$

$$+ie^{4x}\begin{pmatrix}\cos3x\\\sin3x\end{pmatrix}.\ \text{Имеем}\ Y_1=e^{4x}\begin{pmatrix}-\sin3x\\\cos3x\end{pmatrix};\ Y_2=e^{4x}\begin{pmatrix}\cos3x\\\sin3x\end{pmatrix}.$$

Ответ: $Y=C_1e^{4x}\begin{pmatrix}-\sin3x\\\cos3x\end{pmatrix}+C_2e^{4x}\begin{pmatrix}\cos3x\\\sin3x\end{pmatrix}$ или $\begin{cases}y_1=e^{4x}(-C_1\sin3x+C_2\cos3x),\\y_2=e^{4x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x).\end{cases}$

Пример 5 **–** Решить методом Эйлера систему $\begin{cases}y_1'=2y_1-y_2,\\y_2'=4y_1+6y_2.\end{cases}$

Решение

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\4&6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2-k&-1\\4&6-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow k_{1;2} = 4$. Имеем $Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$; $Y_2 = xe^{x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

Общее решение ищем в виде $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$.

1) $Y' = AY \Rightarrow 4e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} e^{4x}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \\ 4\alpha_2 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\alpha_2 = -2\alpha_1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow Y_1 = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$

2) $Y' = AY \Rightarrow 4xe^{4x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + e^{4x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} xe^{4x}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta_2 = -2\beta_1 \Rightarrow$

$\begin{cases} 4x\beta_1 + \beta_1 = 2x\beta_1 - x\beta_2, \\ 4x\beta_2 + \beta_2 = 4x\beta_1 + 6x\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow Y_2 = xe^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Ответ: $Y = e^{4x}\begin{pmatrix} C_1 + C_2x \\ -2C_1 - 2C_2x \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} y_1 = e^{4x}\left(C_1 + C_2x\right), \\ y_2 = e^{4x}\left(-2C_1 - 2C_2x\right). \end{cases}$

11.4 ЛНСДУ с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНСДУ

$$Y' = AY + F, \quad F \neq 0. \tag{11.6}$$

Общее решение $Y_{он}$ ЛНСДУ (11.6) имеет вид $Y_{он} = Y_{оо} + Y_{чн}$, где $Y_{оо}$ – общее решение ЛОСДУ; $Y_{чн}$ – частное решение ЛНСДУ (11.6).

$Y_{оо} = \sum_{i=1}^{n} C_iY_i$, где Y_i – фундаментальная система решений ЛОСДУ, $i = \overline{1,n}$.

$Y_{чн} = \sum_{i=1}^{n} C_i\left(x\right)Y_i$. Подставляя его в ЛНСДУ (11.6) и учтя, что $Y_i' = AY_i$, получим систему

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'\left(x\right)Y_i = F. \tag{11.7}$$

Из этой системы находим $C_i'\left(x\right)$, затем $C_i\left(x\right)$.

Пример 6 **–** Решить методом вариации произвольных постоянных систему $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x. \end{cases}$

Решение

Рассмотрим однородную систему: $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $(1-k)^2 = 1 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = 2.$ Имеем $Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$

Общее решение ищем в виде $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$.

$$k_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$k_2 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\beta_1 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 1 \Rightarrow Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$Y_{чн} = C_1(x) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$F = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Из системы (11.7) имеем $C_1'(x) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2'(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix};$

$$\begin{cases} -C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{x}{2}, \\ C_2'(x) = \dfrac{xe^{-2x}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \displaystyle\int \frac{x}{2} dx, \\ C_2(x) = \displaystyle\int \frac{xe^{-2x}}{2} dx; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x^2}{4}, \\ C_2(x) = \left(-\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8} \right) e^{-2x}. \end{cases}$$

$$Y_{чн}=\frac{x^2}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{-2x}\cdot e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{x^2}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение исходной неоднородной системы имеет вид $Y_{он}=C_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{x^2}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$

11.5 Упражнения

1 Решить системы дифференциальных уравнений методом исключений или методом интегрируемых комбинаций:

1) $\begin{cases}y'_x=z,\\ z'_x=-y.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y=C_1\cos x+C_2\sin x,\\ z=-C_1\sin x+C_2\cos x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}y'_x=y+5z,\\ z'_x+y+3z=0.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right),\\ z=\dfrac{e^{-x}}{5}\left(\left(C_2-2C_1\right)\cos x-\left(C_1+2C_2\right)\sin x\right);\end{cases}$

3) $\begin{cases}y'_x=-3y-z,\\ z'_x=y-z.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y=e^{-2x}\left(C_2-C_1-C_2x\right),\\ z=e^{-2x}\left(C_1+C_2x\right);\end{cases}$

4) $\begin{cases}y'_x=\dfrac{y^2}{z},\\ z'_x=\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y=\dfrac{2C_1}{\left(C_1x+C_2\right)^2},\\ z=-\dfrac{1}{C_1x+C_2};\end{cases}$

5) $\begin{cases}y'_x=-z,\\ z'_x=\dfrac{z^2}{y}\end{cases}$ при $\begin{cases}y(1)=1,\\ z(1)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ z=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}};\end{cases}$

6) $\begin{cases}y'_x=y+z,\\ z'_x=x+y+z.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases}y=C_1e^{2x}+C_2-\dfrac{x^2+x}{4},\\ z=C_1e^{2x}-C_2+\dfrac{x^2-x-1}{4}.\end{cases}$

2 Решить системы дифференциальных уравнений методом Эйлера:

1) $\begin{cases}x'_t=6x-y,\\ y'_t=3x+2y.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};$

2) $\begin{cases}x'_t=2x+y,\\ y'_t=-6x-3y.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix};$

3) $\begin{cases}x'_t=-7x+y,\\ y'_t=-2x-5y.\end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-6t}\begin{pmatrix}C_1\cos t+C_2\sin t\\ \left(C_1+C_2\right)\cos t+\left(C_2-C_1\right)\sin t\end{pmatrix};$

4) $\begin{cases} x_t' = 2x - y + z, \\ y_t' = x + 2y - z, \\ z_t' = x - y + 2z. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{cases} x_t' = -y + z, \\ y_t' = z, \\ z_t' = -x + z \end{cases}$ при $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = \dfrac{1}{2}, \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t, \\ y = \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t), \\ z = \dfrac{1}{2}(\cos t - \sin t); \end{cases}$

6 $\begin{cases} x_t' = 2x - 5y, \\ y_t' = 5x - 6y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ (4C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + 4C_2)\sin 3t \end{pmatrix}$.

3 Решить системы дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных:

1) $\begin{cases} x_t' = x - y, \\ y_t' = x + y + e^{t}. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x = e^{t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1), \\ y = e^{t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_t' = y + tg^2 t - 1, \\ y_t' = -x + tgt. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2. \end{cases}$

11.6 Домашнее задание

Решить системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} x_t' = 8x - 3y, \\ y_t' = 2x + y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{cases} x_t' = x + y, \\ y_t' = -2x + 3y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{pmatrix}$;

3) $\begin{cases} y_x' + 2y + z = \sin x, \\ z_x' - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y = 2\sin x + C_1 x + C_2, \\ z = -3\sin x - 2\cos x - 2C_1 x - 2C_2 - C_1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_t' = \dfrac{y^2}{x}, \\ y_t' = \dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}), \\ y^2 = \dfrac{1}{2}(C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}); \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_t' = y + z, \\ y_t' = 3x + z, \\ z_t' = 3x + y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{cases} x_t' = 3x - 2y + t, \\ y_t' = 3x - 4y. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t} - \dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{18}, \\ y = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{12}. \end{cases}$

Список литературы

1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, 1985. – Т. 2.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 2.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск: Тетра-Системс, 1998. – Т. 2.

4 Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие для вузов / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 2.

5 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 2.

6 Сборник задач по курсу высшей математики: учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973.

7 Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – Москва: Альянс, 2010. – Ч. 2.