МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2020

УДК 519 (075.8)
ББК 22.176
Д48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» января 2020 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент В. М. Ковальчук

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по курсу «Дискретная математика», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Множества, отношения, функции

В математике понятие «множество» является исходным и не подлежит точному определению. Поэтому набор или совокупность каких-либо объектов, обладающих общими свойствами, называют множеством. Например, в математике такими множествами являются множество целых чисел Z, множество вещественных чисел R и др. «Нематематические» объекты также формируют множества: множество клавиш клавиатуры персонального компьютера – А, множество команд операционной системы компьютера – B и др.

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок { }, между которыми перечисляют все элементы множества или указывают свойства, которыми должны обладать элементы формируемого множества. Для обозначения множества в тексте используют прописные буквы латинского алфавита A, B, C, ..., X, Y, Z, иногда эти же буквы, но с нижними индексами из множества натуральных чисел (например, A_1, ... , X_{12} и т. д.). Для обозначения элементов множества в тексте используют строчные буквы латинского алфавита a, b, c, ..., x, y, z, иногда эти же буквы, но с нижними индексами из множества целых положительных чисел (например, a_1, ... , x_{12} и т. д.).

Для обозначения принадлежности элемента x множеству X используют знак $\in$ – знак принадлежности, т. е. $x \in X$. Если элемент x не принадлежит множеству X, то используют знак $\notin$, т. е. $x \notin X$.

Например, $0 \in Z$, $12{,}5 \in R$. Множество, каждый элемент которого может приобрести индекс из множества натуральных чисел $N = \{1, 2, ..., n\}$, называют счетным. Если n конечно, то множество называют конечным.

Число элементов счетного конечного множества X называют его мощностью и обозначают так: $|X| = n$.

Если всякий элемент множества X является также элементом другого множества Y, то множество X называют подмножеством множества Y. Для обозначения этого в тексте используют знак $\subseteq$ – знак включения, т. е. $X \subseteq Y$. Если множество X не включено в множество Y, т. е. не все его элементы принадлежат Y, то используют знак $\not\subset$ – знак невключения, т. е. $X \not\subset Y$.

Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то множество X называют собственным подмножеством множества Y. Для указания в тексте этого факта используют знак строгого включения $\subset$, т. е. $X \subset Y$.

Например, $A_1 \subset A$ или $B_1 \subset B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают знаком $\varnothing$, т. е. $\varnothing = \{\ \}$. Пустое множество может быть подмножеством любого множества.

Множество, содержащее все элементы всех подмножеств, принимающих участие в решении какой-либо задачи, называют основным или универсальным множеством и обозначают символом U, т. е. если в решении какой-либо задачи принимают участие множества $A = \{a\}$ и $B = \{b, c\}$, то $U = \{a, b, c\}$.

Максимально возможное число подмножеств универсального множества называют семейством подмножеств универсального множества. Это семейство включает пустое подмножество, само универсальное множество и множества, сформированные по одному, два, три и т. д. элементов универсального множества. Формирование выборок по одному, два, три и т. д. элементов реализуется процедурой комбинаторики – сочетанием. Семейство подмножеств универсального множества обозначают символом $B(U)$ и называют булеаном множества U.

Например, если $U = \{a, b, c\}$, $B(U) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Число элементов булеана $B(U)$ зависит от числа элементов универсального множества U и вычисляется по формуле

$$|B(U)| = 2^{|U|}.$$

Например, если $|U| = 3$, то имеем $|B(U)| = 2^3 = 8$.

Число элементов булеана $B(U)$ есть его мощность $|\mathrm{B}(U)|$.

Задание множества может быть выполнено перечислением элементов внутри фигурных скобок либо описанием его характеристических свойств.

При задании множества описанием его характеристических свойств между фигурными скобками после указания текущего значения элемента множества X, т. е. $x \in X$, ставится знак «$\mid$», вслед за которым указывают характеристическое свойство элементов множества, т. е. $P(x)$. При подстановке конкретного значения $x = a$ выражение $P(a)$ принимает значение «истина» или «ложь», т. е. $P(x)$ есть логическая функция, которую иначе называют «предикат».

Например:

а) если $Z = \{n \mid P(n)$ – «быть целым положительным числом»$\}$, то $Z = \{1; 2; 3;...; n\}$;

б) если $A = \{a \mid P(a)$ – «быть клавишей клавиатуры компьютера»$\}$, то $A = \{\mathrm{esc}; f_1; f_2; ...; \mathrm{inc}; \mathrm{del}; \mathrm{enter}\}$.

Если даны два множества X и Y, то множество всех упорядоченных пар $(x; y)$, где $x \in X$ и $y \in Y$, называют прямым произведением множеств X и Y и обозначают $(X \times Y)$, т. е. $(X\times Y)=\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Аналогично прямым произведением нескольких множеств X_1, X_2, ..., X_n называется множество всех упорядоченных последовательностей $(x_1; x_2; ...; x_n)$, таких, что $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ..., $x_n \in X_n$. Прямое произведение X_1, X_2, ..., X_n принято обозначать $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)$, т. е. $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}$.

Если одно из множеств произведения пусто, то пусто и все прямое произведение, т. е. если $X_i = \varnothing$, то $X_1 \times X_2 \times ... \times X_i \times ... \times X_n = \varnothing$.

Если $X_1 = X_2 = ... = X_n$, то прямое произведение обозначают X^n.

Операции над множествами. *Пересечением* двух множеств A и B называют множество, которое состоит из элементов, принадлежащих множеству A и множеству B.

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ и } (x \in B)\}.$$

Объединением двух множеств A и B называется множество, которое состоит из элементов, принадлежащих либо множеству A, либо множеству B.

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ или } (x \in B)\}.$$

Разностью двух множеств A и B называют множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B.

$$A \,/\, B = \{x \mid (x \in A) \text{ и } (x \notin B)\}.$$

Отношения, функции. Если элементы двух множеств X и Y различной природы сопоставить между собой по какому-либо правилу, т. е. для каждого $x \in X$ указать один или несколько элементов множества Y, то может быть сформировано множество пар $(x;\ y)$, являющееся подмножеством прямого произведения множеств X и Y, т. е.

$$\{(x; y) \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq (X \times Y).$$

Множество X чаще всего называют областью отправления, а множество Y – областью прибытия. Значение $y \in Y$ называют образом для конкретного значения $x_i \in X$, а значение $x \in X$ – прообразом для конкретного значения $y_j \in Y$.

Соответствие, когда каждому прообразу найдется единственный образ, но не наоборот, называют отображением. То есть отличительной особенностью отображения является условие $|\{y\}_{xi}| = 1$.

Форма записи отображения не отличается от записи соответствия. Однако множество пар отображения обозначают другим символом. Например,

$$H = \{(x; y) \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq (X \times Y).$$

Правило отображения также удобно представлять в операторной форме:

$$h : X \to Y,$$

где h – оператор отображения.

Проекция на первую компоненту $\text{Пр}_1\{(x;\ y)\}$ формирует область определения X^0, где $X^0 \subseteq X$, а на вторую компоненту $\text{Пр}_2\{(x;\ y)\}$ – область значений Y^0, где $Y^0 \subseteq Y$.

Для отображения, область определения которого задана прямым произведением X^n, множество пар отображения и оператор отображения имеют следующий вид:

$$H = \{(x_1; x_2; ...; x_n; y) \mid x_i \in X; y \in Y\} \subseteq (X^n \times Y),\ h : X^n \to Y.$$

Каждому отображению h может быть найдено обратное отображение h^{-1}.

$$H^{-1}=\{(y; x) \mid x \in X; y \in Y\} \subseteq (Y \times X);$$

$$H^{-1} = \{(y; x_1; x_2; ...; x_n) \mid x_i \in X_i; y \in Y\} \subseteq (Y \times X^n).$$

Для двух отображений $h_1 : X \to Y$ и $h_2 : Y \to Z$ можно найти их композицию, т. е. сформировать новое отображение $h = (h_1 \circ h_2) : X \to Z$ при условии, что элементы области значений первого отображения есть элементы области определения второго отображения:

$$\{(x; z) \mid x \in X; z \in Z; \text{Пр}_2\{(x; y) \mid x \in X; y \in Y\} = \text{Пр}_1\{(y; z) \mid y \in Y; z \in Z\}\}.$$

В математике часто отображение называют функцией и обозначают символом f. В этом случае оператор функции есть $f : X \to Y$ или $f : X^n \to Y$.

Часто вместо такой записи используют запись: $y = f(x)$, где $x \in X$, $y \in Y$ или $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$, где $(x_1; x_2; ...; x_n) \in X^n$, $y \in Y$, для которых элементы x или $(x_1; x_2; ...; x_n)$ называют аргументами функции или ее независимыми переменными, y – значением функции.

При этом если для каждого значения $x \in X$ или $(x_1; x_2; ...; x_n) \in X^n$ имеется один элемент $y \in Y$, то функция называется всюду определенной, в противном случае – частично определенной.

Если представить два множества X и Y в прямоугольной системе координат, то узлы прямоугольной решетки есть элементы прямого произведения $(x; y) = (X \times Y)$.

Функцию называют операцией, если ее аргументы и значения принадлежат одному множеству, т. е. $f : X^n \to X$. Аргументы операции называют операндами. Количество операндов определяет местность или арность операции. Например, есть одноместные (или унарные) операции – $f(x)$, двухместные (или бинарные) операции – $f(x_1; x_2)$, трехместные (или тернарные) операции – $f(x_1; x_2; x_3)$ и т. д. Однако наибольшее значение и применение имеют унарные и бинарные операции.

Отображение называется *инъективным*, если разным прообразам соответствуют разные образы.

Отображение называется *сюръективным*, каждый образ имеет хотя бы один прообраз.

Отображение называется *биективным,* если каждый образ имеет только один прообраз (инъективное и сюръективное одновременно).

Отображение, заданное между двумя или несколькими элементами одного множества X, называют отношением. Например, между объектами математической природы такими отношениями могут быть «быть равным», «быть большим», «быть неравным» и т. п. Все множество отношений между числами может быть $\{=; \neq; <; \leq\}$, а между объектами «нематематической» природы такими отношениями могут быть «быть родственником», «быть соседом», «находиться рядом с», «быть частью» и т. п.

Формальная запись отношения не отличается от записи для отображений, если принять вместо Y множество X. Множество пар отношений обозначают символом R. Например,

$$R = \{(x_1; x_2) \mid x_{1,2} \in X\} \subseteq X^2;$$

$$R = \{(x_1; x_2;...; x_{n+1}) \mid x_\text{i} \in X\} \subseteq X^n \times X = X^{n+1}.$$

Правила отношений также удобно представить в операторной форме:

$$r : X \rightarrow X \text{ или } r : X^n \rightarrow X.$$

Упорядоченные последовательности $(x_1;\ x_2;\ ...;\ x_{n+1})$ также называют кортежами, а его элементы – компонентами.

Если $(n + 1) = 1$, то отношение называют унарным или одноместным. Такое отношение выделяет во множестве подмножество, удовлетворяющее заданному свойству.

Задание отношения $r(x)$ равносильно заданию предиката $P^1(x)$ на области определения. Например, на множестве целых чисел можно задать предикат $P^1(x)$ – «быть четным числом». В результате будет сформировано множество $R(x) =\{2; 4; 6; 8; ...\}$, где $x \in Z$.

Если $(n + 1) = 2$, то отношение называют бинарным или двухместным. Такое отношение позволяет сравнить или упорядочить попарно элементы заданного множества. Для математических объектов это могут быть отношения: $r_1(x_1;\ x_2)$ – «x_1 больше x_2», $r_2(x_1;\ x_2)$ – «x_1 равен x_2», $r_3(x_1;\ x_2)$ – «x_1 меньше x_2», $r_4(x_1; x_2)$ – «имеют общий делитель» и др.

Правило $r_\text{j}(x_1; x_2)$ позволяет формировать подмножества $R_\text{j}(x_1; x_2)$, опираясь на вычисление предиката: $P_1^2(x_1; x_2)$ – «x_1 больше x_2», $P_2^2(x_1; x_2)$ – «x_1 равен x_2», $P_3^2(x_1; x_2)$ – «x_1 меньше x_2», $P_4^2(x_1; x_2)$ – «имеют общий делитель».

Например, на множестве целых чисел Z эти отношения сформируют следующие подмножества:

$$R_1(x_1; x_2) = \{(10; 6); (8; 5); (3; 1); ...\} \subseteq Z \times Z;$$

$$R_2(x_1; x_2) = \{(10; 10); (8; 8); (5; 5); (3; 3); ...\} \subseteq Z \times Z;$$

$$R_3(x_1; x_2) = \{(6; 10); (5; 8); (3; 6); (1; 3); ...\} \subseteq Z \times Z;$$

$$R_4(x_1; x_2) = \{(10; 2); (10; 5); (8; 4); (6; 3); ...\} \subseteq Z \times Z.$$

Если $(n + 1) = 3$, то отношение называют тернарным или трехместным, если равно 4, то четырехместным и т. д. Наибольшее распространение имеют бинарные отношения в связи с удобством их описания.

Каждому отношению r может быть найдено обратное отношение r^{-1}, когда для данного $r(x_i; x_j)$ существует $r^{-1}(x_j; x_i)$.

Для двух отношений r_1: $X \to X$ и r_2: $X \to X$, заданных на одном и том же множестве X, всегда можно найти их композицию, т. е. $r = (r_1 \circ r_2) : X \to X$, при условии, что существуют такие элементы $x_k \in X$, которые принадлежат отношению $R_1(x_j; x_k)$ и отношению $R_2(x_k; x_j)$ и формируют отношение $R(x_i; x_j)$.

Отношение можно задавать перечислением всех элементов, т. е. формированием списков, или с помощью матриц. При матричном описании бинарного отношения удобно воспользоваться квадратной матрицей ($X \times X$), строки и столбцы которой есть элементы множества X, а на пересечении i-й строки и j-го столбца ставят знак «1», если предикат $P^2(x_i; x_j)$ = «истина» и знак «0», если предикат $P^2(x_i; x_j)$ = «ложь».

Свойства отношений. Анализ различных бинарных отношений позволяет выделить наиболее характерные свойства, что необходимо для классификации всего множества отношений. Такими свойствами являются рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Бинарное отношение *рефлексивно*, если для любого x_i имеем $r(x_i; x_i) = 1$, т. е. отношение имеет значение «истины» при применении к одному элементу x_i; такими отношениями являются «быть равным», «быть похожим», «быть изоморфным», «быть эквивалентным» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только «1», а при графическом представлении – петли при каждой вершине графа.

Бинарное отношение *антирефлексивно*, если для любого x_i имеем $r(x_i; x_i) = 0$, т. е. отношение имеет значение «ложь» применительно к одному элементу x_i; такими отношениями являются «быть больше», «быть меньше», «быть родителем» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только «0», а при графическом представлении – отсутствие петель при каждой вершине графа.

Бинарное отношение *симметрично*, если для любой пары $(x_i; x_j)$ имеем $r(x_i; x_j) = r(x_j\, x_i) = 1$; это могут быть такие отношения как: «быть похожим», «быть эквивалентным», «быть родственником» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает симметричное расположение «1» относительно главной диагонали, при графическом представлении – отсутствие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j, или их наличие, но в обе стороны.

Бинарное отношение *антисимметрично*, если для любой пары $(x_i; x_j)$ при $i \neq j$ имеем $r(x_i; x_j) \neq r(x_j; x_i)$, а при $i = j$ $r(x_i; x_i) = 1$; такими отношениями являются «быть больше или равным», «быть меньше или равным» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает несимметричное расположение «1» относительно главной диагонали, но наличие их на главной диагонали, при графическом представлении – наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j, и наличие петель у вершин графа.

Бинарное отношение *асимметрично*, если для любой пары $(x_i; x_j)$ имеем $r(x_i; x_j) \neq r(x_j; x_i)$; такими отношениями являются «быть больше», «быть меньше», «быть родителем» и т. п.; при матричном задании такого отношения это означает только несимметричное расположение «1» относительно главной диагонали и наличие только «0» на ней, а при графическом представлении – наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j и отсутствие петель у вершин графа.

Бинарное отношение *транзитивно*, если для любых трех элементов x_i, x_j, x_k имеем $r(x_i; x_j) = 1$ только при условии $r(x_i; x_k) =1$ и $r(x_k; x_j) = 1$; такими отношениями являются «быть больше», «быть меньше», «быть родственником» и т. п.; при матричном представлении это означает, что если $r(x_i; x_k) = 1$ и $r(x_k; x_j) = 1$, то это же отношение можно установить между вершинами x_i и x_j через промежуточную вершину x_k, т. е. найти $r(x_i; x_j) = 1$; при графическом представлении – наличие пути из вершины x_i в вершину x_j через промежуточную вершину x_k, используя ребра $(x_i; x_k)$ и $(x_k; x_j)$.

Типы отношений. Свойства отношений позволяют классифицировать множество отношений на типы. Наиболее изученными являются отношения эквиваленции и отношения порядка. Отношение эквиваленции позволяет разбить заданное множество элементов на непересекающиеся подмножества, а отношение порядка – установить порядок между элементами заданного множества.

Отношение эквиваленции. Бинарное отношение $R \subseteq (X \times X)$, удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности, называют отношением эквиваленции. Такими отношениями могут быть «быть равным», «быть похожим», «быть одинаковым», «быть родственником» и т. п. Отношение эквиваленции принято обозначать знаком $r_{\sim}(x_i; x_j)$ или $\sim(x_i; x_j)$. Используя отношение эквиваленции, можно формировать классы эквиваленции $K(x_\alpha)$ по заданному образцу x_α в виде подмножеств X_α множества X, т. е. $K(x_\alpha) = X_\alpha = \{x_i \mid r_{\sim}(x_i; x_\alpha) = 1, x_i, x_\alpha \in X\} \subseteq X$.

Отношение порядка. Бинарные отношения $R \subseteq (X \times X)$, удовлетворяющие условиям рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называют отношением порядка. Такими отношениями являются «быть не больше», «быть не меньше», «быть не старше» и т. п. Отношение порядка принято обозначать для элементов множества $r_{\leq}(x_i; x_j)$ или $\leq(x_i; x_j)$, а для множеств – $r_{\subseteq}(x_i; x_j)$ или $\subseteq(x_i; x_j)$. Использование отношения порядка на одном множестве X позволяет упорядочить элементы этого множества, т. е., рассматривая отношение на каждой паре элементов множества, устанавливать частичный порядок на всем множестве X. Примерами частично упорядоченных множеств являются множество целых чисел с заданным отношением порядка, т. е. $\{1; 2; 3; ...\}$, множество действительных чисел, в том числе положительных и отрицательных, счетные множества нематематических объектов, упорядоченные по значениям индексов, т. е. X_1, X_2, ..., счетные множества букв и символов, упорядоченные алфавитом, множество подмножеств универсального множества с отношением включения $\subseteq (x_i, x_j)$ и т. п.

Отношение строгого порядка. Бинарное отношение $R_{\subseteq}(X \otimes X)$, удовлетворяющее условиям антирефлексивности, асимметричности и транзитивности, называют отношением строгого порядка. Такими отношениями могут быть:

«быть больше», «быть меньше», «быть частью», «быть подчиненным» и т. п. Использование отношения строгого порядка формирует линейную упорядоченность элементов множества X. Для обозначения отношения строгого порядка приняты символы между элементами множества $r_{<}(x_i;\ x_j)$ или $<(x_i;\ x_j)$, между множествами – $r_{\subset}(x_i;\ x_j)$ или $\subset(x_i;\ x_j)$.

Примеры для самостоятельного решения

1 Найти множества $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,$ если:

а) $A = \{-1;\ 0;\ 3;\ 4\},\ B = \{0;\ 4;\ 6\};$

б) $A = [0;\ 2],\ B = [1;\ 5];$

в) $A = [0;\ 2],\ B = \{0;\ 4;\ 6\} \cup (1;\ 3];$

г) $A = [1;\ 3) \cup (5;\ 7],\ B = [2;\ 6].$

2 Приняв отрезок $T = [0;1]$ за универсальное множество, найти и изобразить на числовой оси дополнения множеств $A = \{0;1\}$, $B = \left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$, $C = \left(0;\dfrac{1}{2}\right]$, $D = \left\{\dfrac{1}{4}\right\} \cup \left[\dfrac{3}{4};1\right).$

3 Пусть $A-$ множество решений уравнения $f(x)=0,$ $B-$ множество решений уравнения $g(x)=0$. Выразить через множества A, B множество решений уравнений

$$f(x)\cdot g(x)=0;\ \ \frac{f(x)}{g(x)}=0;\ \ \begin{cases} f(x)=0; \\ g(x)=0. \end{cases}$$

4 Каким образом можно выразить множество действительных корней уравнения $f(x)=0,$ если известны множества

$$X = \{x \in R\ /\ f(x) > 0\} \text{ и } Y = \{x \in R\ /\ f(x) < 0\}?$$

5 Какими должны быть множества $A, B,$ чтобы имели место равенства:

а) $A \cap B = A \cup B;$

б) $(A \cup B) \setminus B = A;$

в) $(A \setminus B) \cup B = A.$

6 Пусть $A-$множество всех точек плоскости, образующих стороны некоторого треугольника, вписанного в данную окружность. Описать (словесно) объединение и пересечение всех таких множеств, если:

а) треугольники произвольные;

б) треугольники правильные;

в) треугольники прямоугольные.

7 Доказать, что для множеств A, B, C любой природы имеют место равенства:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

б) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

в) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

8 Найти $A \times B, B \times A$, если:

а) $A = \{1; 2\}, B = \{1; 3; 4\}$;

б) $A = \{3\}, B = \{1; 2; 3; 4\}$.

9 Показать на декартовой плоскости множества $X \times Y, Y \times X$, если:

а) $X = [0; 1], Y = [2; 3]$;

б) $X = [0; 1], Y = (-\infty; 3)$;

в) $X = [0; +\infty), Y = \{2; 3\}$;

г) $X = (0; 1] \cup \{2\}, Y = [-1; 2) \cup \{3\}$;

д) $X = [1; 3) \cup (5; 7], Y = [2; 6] \cup \{1; 7\}$.

10 Доказать равенство $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

11 Доказать, что если $X \subset Y$, то $X \times Z \subset Y \times Z$.

12 Доказать, что если $X \cup Y \subset Z$, то $X \times Y = (X \times Z) \cap (Z \times Y)$.

13 Равны ли между собой множества A, B, если:

а) $A = \{1; \{2; 5\}; 6\}, B = \{1; 2; 5; 6\}$;

б) $A = \{1; \{2; 5\}; 6\}, B = \{1; \{5; 2\}; 6\}$;

в) $A = \{1; \{2; 5\}; 6\}, B = \{1; \{2; 5\}; \{6\}\}$.

14 Определить вид отображений:

а) $f : R \to R; \quad x \mapsto \sin x$;

б) $f : R \to R; \quad x \mapsto 2^x$;

в) $f : R \to R; \quad x \mapsto \lg x$;

г) $f : R \to R; \ x \mapsto x^2 + 1$;

д) $f : R \to R; x \mapsto x^3 - 1$;

е) $f : R \to R; \quad x \mapsto 2x$;

ж) $g : Z \to Z; \quad x \mapsto 2x$.

15 Определить, какими свойствами обладают отношения:

а) $x \| y$, если $x, y \in X$, $X = \{$множество прямых на плоскости$\}$;

б) $x \perp y$, если $x, y \in X$, $X = \{$множество прямых на плоскости$\}$;

в) $x \geq y$, $x, y \in R$;

г) x моложе y, если $x, y \in X$, $X = \{$множество людей$\}$;

д) x состоит в браке с y, если $x, y \in X$, $X = \{$множество людей$\}$;

16 Построить бинарное отношение, которое является:

а) рефлексивным, симметричным, но нетранзитивным;

б) рефлексивным, антисимметричным, но нетранзитивным;

в) рефлексивным, транзитивным, но несимметричным;

г) антисимметричным, транзитивным, но нерефлексивным.

2 Булевы функции

Булевой переменной x называется такая переменная, которая может принимать только два значения: ноль (0) или единица (1), т. е. $x \in \{0; 1\}$.

Функцию *f*, принимающую одно из двух значений, 0 или 1, от *n* переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений, 0 или 1, будем называть *булевой функцией* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(\tilde{x}^n\right)$ от *n* переменных.

Способы задания булевой функции.

Табличный. Для булевой функции составляется таблица, которая имеет 2^n строк, *n* – количество переменных, и *n*+1 столбцов (таблица 1).

Количество булевых функций от *n* переменных определяется формулой 2^{2n}.

Таблица 1 – Пример булевой функции

Номер	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Графический. Булевы функции изображаются с помощью гиперкуба, который изображается с помощью графов (т. е. с помощью точек и линий на плоскости).

Две булевы функции f_1 и f_2 называются *равными*, если они принимают одинаковые значения при всех наборах своих переменных.

Функция $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ называется *существенно* зависящей от переменной x_i, если имеет место следующее равенство для какого-либо набора значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Если $f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$ для любого набора значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, \; x_{i+1}, \ldots, x_n$, то x_i – *фиктивная переменная.*

Переменная x_i называется существенной, если при ее удалении изменяется значение функции, и несущественной, если значение функции не меняется.

Рассмотрим основные элементарные булевы функции (таблица 2).

Таблица 2 – Основные элементарные булевы функции

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_0 = const 0 – константа нуля;

$f_1 = xy$ – конъюнкция;

$f_2 = x\bar{y}$ – запрет y;

$f_3 = x$ – повтор x;

$f_4 = \bar{x}y$ – запрет x;

$f_5 = y$ – повтор y;

$f_6 = x \oplus y$ – сложение по модулю 2;

$f_7 = x \vee y$ – дизъюнкция;

$f_8 = x \downarrow y$ – стрелка Пирса;

$f_9 = x \leftrightarrow y$ – эквивалентность;

$f_{10} = \bar{y}$ – отрицание y;

$f_{11} = x \leftarrow y$ – обратная импликация;

$\mathrm{f}_{12} = \bar{x}$ – отрицание x;

$f_{13} = x \to y$ – прямая импликация;

$f_{14} = x | y$ – штрих Шеффера;

f_{15} = const 1 – константа единицы.

Примеры для самостоятельного решения

1 Задать функцию $f\left(\tilde{x}^4\right) = x_1x_2 \downarrow x_3\left(x_4 \oplus x_1\right) \vee \left(x_2 \sim x_3\right)$ с помощью таблицы, области истинности, набором значений переменных.

2 Выявить фиктивные и существенные переменные функций:

а) $f\left(\tilde{x}^3\right) = (11110000)$;

б) $f\left(\tilde{x}^3\right) = (00111100)$;

в) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (1011100111001010)$;

г) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (0011110011000011)$;

д) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (0111011101110111)$;

е) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (0101111100001010)$;

ж) $f\left(\tilde{x}^4\right) = (1111000000110101)$;

з) $f\left(\tilde{x}^3\right) = \left(x_1 \to \left(x_1 \vee x_2\right)\right) \to x_3$;

и) $f\left(\tilde{x}^2\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \to x_2$;

к) $f\left(\tilde{x}^4\right) = \left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\right)x_4$;

л) $f\left(\tilde{x}^2\right) = \left(x_1 \oplus x_2\right)\left(x_1 \downarrow x_2\right)$;

м) $f\left(\tilde{x}^3\right) = \left(\left(x_1 \vee \left(x_3 \to x_2\right)\right)\left(x_2 \to x_1\right)\bar{x}_1x_3\right) \oplus x_3$;

н) $f\left(\tilde{x}^3\right) = \left(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right)$;

о) $f\left(\tilde{x}^3\right) = \left(\left(x_1 \vee \bar{x}_3\right)\left(x_1 \vee x_2\right) \to \left(\bar{x}_1 \to x_2\bar{x}_3\right)\right)x_2$.

3 Найти ДНФ функций:

а) $f\left(\tilde{x}^3\right) = \left(\overline{x_1 \vee x_3}\right)\left(x_1 \to x_2\right)$;

б) $f\left(\tilde{x}^4\right) = \left(x_1 \sim x_2\right)\left(\overline{x_3 \to x_4}\right)$.

4 Найти СДНФ и СКНФ функций:

а) $f\left(\tilde{x}^2\right)=(1001)$;

б) $f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1 \vee x_2\bar{x}_3 \to \left(x_3 \sim x_2\right)$;

в) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1x_2 \to x_3}\right) \vee \left(x_2 \vee x_3\right)x_1$;

г) $f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1\left(x_2 \vee x_3\right) \to x_1x_2 \vee x_3$;

д) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1 \oplus x_2}\right) \vee \left(x_1|\bar{x}_3\right)\left(x_2 \downarrow x_3\right)$.

3 Основные классы булевых функций

Система булевых функций $F=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ называется *полной*, если всякая булева функция является некоторой суперпозицией функций $f_1, f_2, ..., f_n$.

Примерами функционально полных систем могут служить системы $\{\neg, \bullet, \vee\}$, $\{1, \bullet, \oplus\}$, $\{\neg, \bullet\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{/\}$, $\{\downarrow\}$ и др.

Для определения функциональной полноты системы используются так называемые **классы Поста**.

1 Класс функций, сохраняющих нуль P_0. Булева функция называется *сохраняющей нуль*, если

$$f(0, 0, ..., 0) = 0.$$

2 Класс функций, сохраняющих единицу P_1. Булева функция называется *сохраняющей единицу*, если

$$f(1, 1, ..., 1) = 1.$$

3 Класс самодвойственных функций S. Функция $f^*\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ называется *двойственной* к функции $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, если

$$f^*\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right).$$

Булева функция $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ называется *самодвойственной*, если

$$f^*\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

4 Класс монотонных функций M. Булева функция называется *монотонной*, если

$$f\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \le f\left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$$

на всех сравнимых наборах, т. е. таких, что $\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \le \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$.

Причем $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, если при любом i $\alpha_i \leq \beta_i$

5 Класс линейных функций L. Булева функция называется *линейной*, если она представима линейным полиномом Жегалкина.

Теорема. Всякая булева функция представима *полиномом Жегалкина*, т. е. в виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus ... \oplus a_{12...n}x_1x_2...x_n,$$

где $a_i \in \{0,1\}$.

Лемма. В СДНФ при построении полинома Жегалкина можно все «$\vee$» заменить на «$\oplus$».

Полином Жегалкина называется *линейным*, если он не содержит конъюнкций переменных, т. е. все коэффициенты, индексированные более чем одним индексом, равны нулю (и вместе с ними равны нулю все слагаемые, содержащие конъюнкции переменных).

Теорема. Если функция принимает значение «1» на нечетном количестве наборов, то она нелинейна.

Пример – Для функции $f(x, y, z, p)$ = (1000 1101 1111 0100) определить принадлежность классам Поста.

1) $f \notin P_0$, т. к. $f(0000) = 1$;
2) $f \notin P_1$, т. к. $f(1111) = 0$;
3) $f \notin S$, т. к. $f(0001) = f(1110)$;
4) $f \notin M$, т. к. $f(0000) > f(0001)$;
5) $f \notin L$, т. к. функция имеет нечетное количество единиц.

Основные свойства операции сложения по модулю 2 представим в виде таблицы 3.

Таблица 3 – Основные свойства операции сложения по модулю 2

Наименование закона	Эквивалентная формула
Коммутативности	$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
Ассоциативности	$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
Дистрибутивности	$x_1\ (x_2 \oplus x_3) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3$
Свойство «1»	$1 \oplus 1 = 0$; $x \oplus 1 = \overline{x}$
Свойство «0»	$0 \oplus 0 = 0$; $x \oplus 0 = x$
Сложение по модулю 2	$x \oplus x = 0$
Отрицания	$\overline{x} = x \oplus 1$

Лемма. Каждый класс Поста замкнут относительно операций подстановки и суперпозиции, т. е. с помощью этих операций можно получить только функции того же класса Поста.

Теорема Поста (сильная). Система булевых функций тогда, и только тогда является функционально полной, когда для каждого класса $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, **S**, **M**, **L** в ней найдется функция, не принадлежащая этому классу.

Теорема Поста (слабая). Система булевых функций, содержащая const 0 и const 1, является функционально полной тогда, и только тогда, когда она содержит хотя бы одну нелинейную и хотя бы одну немонотонную функцию.

Система функций F называется *независимой*, если никакая функция $f \in F$ непредставима суперпозициями функций из $F \backslash \{f\}$.

Независимая система функций называется *базисом* класса K, если всякая функция из K есть суперпозиция функций из F, или, другими словами, система булевых функций называется *базисом*, если она функционально полная, а удаление любой функции из этой системы делает ее неполной.

Теорема. Каждый базис функционально полной системы содержит не более четырех булевых функций.

Минимизация булевых функций. Представление булевой функции в виде СДНФ или СКНФ является единственным, но громоздким. Поэтому для конкретной задачи булеву функцию целесообразно записать в минимизи рованном виде (МНДФ).

Метод неопределенных коэффициентов. Любую булеву функцию от трех переменных можно представить в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,x_3) = K_1^1 x_1 \vee K_2^1 x_2 \vee K_3^1 x_3 \vee K_1^0 \bar{x}_1 \vee K_2^0 \bar{x}_2 \vee K_3^0 \bar{x}_3 \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1 \bar{x}_2 \vee$$

$$\vee K_{12}^{01} \bar{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1 \bar{x}_3 \vee K_{13}^{01} \bar{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee$$

$$\vee K_{23}^{10} x_2 \bar{x}_3 \vee K_{23}^{01} \bar{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{000} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{001} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{010} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee$$

$$\vee K_{123}^{011} \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{100} x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3,$$

где коэффициенты K принимают значения «0» или «1».

Чтобы определить коэффициенты K, решают следующую систему:

$$\begin{cases}
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = f(0,0,0); \\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = f(0,0,1); \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = f(0,1,0); \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = f(0,1,1); \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = f(1,0,0); \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = f(1,0,1); \\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = f(1,1,0); \\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = f(1,1,1).
\end{cases}$$

Систему начинаем решать с тех уравнений, в которых $f(x_1,x_2,x_3)=0$. Все коэффициенты, входящие в эти уравнения, также равны нулю. Найденные нулевые коэффициенты подставляем в оставшиеся уравнения системы. Для получения урезанной системы ищем минимальное решение, которое, вообще говоря, не единственное. Минимальное решение системы при подстановке его в функцию дает МДНФ $f(x_1, x_2, x_3)$.

Метод Квайна–Мак-Клоски. Пусть $f(x_1,...,x_n) \neq 1$ представлена в СДНФ.

1 *Нахождение первичных импликант.* Все элементарные конъюнкции (ЭК) данной СДНФ сравниваются друг с другом попарно. Если ЭК имеют вид $K \wedge x_i$ и $K \wedge \overline{x_i}$, то выписывается ЭК ранга $(n-1)$. Такие ЭК, для которых произошло «склеивание», помечаются «*». После построения всех ЭК ранга $(n-1)$ вновь сравнивают их попарно, выписывая ЭК ранга $(n-2)$, полученные после «склеивания», и помечают «склеенные» ЭК ранга $(n-1)$ и т. д. Этот процесс производится до тех пор, пока некоторые ЭК ранга $l \leq n$ уже не будут «склеиваться» между собой.

Все непомеченные ЭК называются *первичными импликантами.*

2 *Расстановка меток. Построение таблицы Квайна.* После выполнения первого этапа получаем

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_i \lambda_i,$$

где $f(x_1,...,x_n)$ – данная булева функция;

λ_i – первичные импликанты булевой функции.

Строим таблицу, число строк которой равно числу полученных выше первичных импликант $f(x_1,...,x_n)$. Число столбцов совпадает с числом ЭК исходной СДНФ $f(x_1,...,x_n)$. Если в некоторую ЭК входит первичная импликанта, то на пересечении соответствующих столбца и строки ставится метка. Вносим в таблицу все метки.

3 *Нахождение существенных импликант.* Если в каком-то столбце составленной таблицы имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, называется *существенной*. Существенная импликанта не может быть исключена из правой части формулы $f(x_1,...,x_n)$. Поэтому из таблицы Квайна исключаем строки, соответствующие существенным импликантам, и исключаем столбцы тех ЭК, которые «покрываются» этими существенными импликантами. Иначе говоря, исключаем те столбцы, которые имеют метки на пересечении со строкой существенной импликанты.

4 *Вычеркивание лишних столбцов.* Рассмотрим таблицу, полученную после третьего этапа. Если в этой таблице есть два столбца, в которых метки стоят в одинаковых строках, то один из них вычеркиваем.

5 *Вычеркивание лишних первичных импликант.* В таблице, полученной после четвертого этапа, рассматриваем строки. Если есть строки, в которых отсутствуют метки, то эти строки исключаем из таблицы, а соответствующие первичные импликанты не принимаем далее во внимание.

6 *Выбор минимального покрытия первичными импликантами.* Рассмотрим таблицу, полученную после пятого этапа. Из оставшихся в этой таблице первичных импликант выбираем такую их совокупность, которая содержит в своих строках метки для всех оставшихся столбцов этой таблицы. Из всех

возможных вариантов таких совокупностей выбираем тот, для которого общее число переменных в выбранных первичных импликантах наименьшее.

Идея Мак-Клоски. Вместо ЭК ранга $n,\ n-1,\ n-2, \ldots$ используются их двоичные коды. Например, ЭК $x_1 x_2 \overline{x_3}$ имеет код 110. Все коды разбиваются на непересекающиеся группы по количеству единиц в этих кодах. Теперь попарное сравнение можно производить только между соседними по номеру группами. Вместо исключенных переменных в двоичных кодах ставим прочерк. После выполнения этих действий получаем первичные импликанты.

Метод карт Карно *(графическая минимизация булевой функции).* Карта Карно есть не что иное, как форма таблицы для определения булевой функции.

Начнем процесс «склейки». Любые две соседние клетки, содержащие «1», обводятся, и «поглотивший» их прямоугольник представляется словом, содержащим знаки «0», «1» и «×». Причем «×» занимает место той переменной, по которой произведена «склейка». Прямоугольники площадью 2 можно «склеивать» в прямоугольники площадью 4. Причем таблицу мысленно можно «закручивать» в «цилиндр» по обоим направлениям (т. е. «тор») для нахождения соседних элементов.

Примеры для самостоятельного решения

1 Методом неопределенных коэффициентов найти полином Жегалкина для следующих функций:

а) $f\left(\widetilde{x}^3\right)=\left(x_1|x_2\right)\downarrow x_3$; б) $f\left(\widetilde{x}^3\right)=\left(x_1\to x_2\right)\left(x_2\downarrow x_3\right)$.

2 Определить к каким классам Поста принадлежат следующие функции:

а) $f\left(\widetilde{x}^3\right)=\left(x_1\to x_2\right)\left(x_2\downarrow x_3\right)$; б) $f\left(\widetilde{x}^3\right)=\left(\left(x_1\to x_2\right)\vee x_3\right)|x_1$;

3 Проверить полноту заданной системы функций. Для функционально полной системы выделить базис:

а) $F=\{f_1,f_2\};f_1=x_1\to x_2,f_2=x_1\to\overline{x}_2x_3$;

б) $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\};f_1=\overline{x}_1x_2,f_2=x_1\sim x_2x_3,f_3=0,f_4=1$;

в) $F=\{f_1,f_2,f_3\};f_1=(01101001),f_2=(10001101),f_3=(00011100)$;

г) $F=\{f_1,f_2,f_3\};f_1=(01000100),f_2=(11111100),f_3=(10000000)$.

4 Найти МДНФ следующих функций $f\left(\widetilde{x}^3\right)$ методом неопределенных коэффициентов:

а) $N_f=\vee\{0;1;4;5;6\}$; б) $N_f=\vee\{0;5;6;7\}$; в) $N_f=\vee\{1;3;4\}$.

5 Найти МДНФ следующих функций $f\left(\widetilde{x}^4\right)$ методом Квайна–Мак-Клоски:

а) $N_f=\vee\{0;1;8;9;10;11;12;13;14\}$; б) $N_f=\vee\{0;1;3;5;6;7;8;9;10;12;13;14\}$;

в) $N_f=\vee\{0;1;4;5;6\}$; г) $N_f=\vee\{0;1;3;4;6;8;9;12;14;15\}$.

6 Найти МДНФ следующих функций $f\left(\widetilde{x}^4\right)$ методом карт Карно:

а) $N_f=\vee\{0;1;3;4;6;8;9;12;14;15\}$; б) $N_f=\vee\{1;2;3;4;5;10;11;12;13;14\}$;

в) $N_f=\vee\{0;1;2;3;4;6;9;11;12;13\}$; г) $N_f=\vee\{0;2;4;5;6;11;12;13;14;15\}$.

4 Комбинаторика

Введем следующие обозначения:

n-множество – множество из n различных элементов;

(n)-*множество* – множество, содержащее элементы n различных типов (если не оговорено заранее, то предполагается, что число элементов каждого типа достаточно велико);

r-выборка из некоторого множества – совокупность из r (необязательно различных для (n)-множества) элементов этого множества. Число r называют объемом выборки.

В r-выборках в зависимости от условий задачи либо учитывают порядок следования в них элементов (и тогда они называются *r-перестановками*), либо не учитывают (в этом случае их называют *r-сочетаниями*). Например, две выборки из множества $A_n\ (n \geq 5)$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \text{ и } (a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$$

представляют собой равные 5-сочетания и в то же время разные 5-перестановки.

Вообще, две r-перестановки $a = (a_1, a_2, ..., a_r)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_r)$ *равны* $(a = b)$, если $a_i = b_i$, $i = 1, 2, ..., r$.

В r-выборках возможно повторное появление элементов, и в таком случае они называются соответственно *r-сочетаниями с повторениями* и *r-перестановками с повторениями*.

Число упорядоченных r-выборок из n-множества (r-перестановок)

$$P(n,r) = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}; \quad n \geq r \geq 0,$$

откуда следует $P(n,n) = n!$

Для полноты результата примем $P(n,0) = 0! = 1$.

Число r-выборок из n-множества (r-сочетаний)

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Из этой формулы следует, что

1) $\binom{r}{n} = \binom{n-r}{n}$; 2) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$; 3) $\binom{1}{n} = n$.

Число r-выборок из (n)-множества (сочетания с повторениями) $C_{(n)}^r = C_{n+r-1}^r$.

Число упорядоченных r-выборок из (n)-множества $A_{(n)}^r = n^r$.

Пусть имеется перестановка

$$P=(4,3,7,5,6,9,2,8,1,12,11,10),$$

являющаяся нарушением естественного порядка первых 12 чисел натурального ряда. Ее можно записать в виде подстановки (в первой строке – естественный порядок, во второй – нарушенный):

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 9 & 2 & 8 & 1 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Эта запись показывает, что при перестановке P элемент 1 переходит в 4, 2 – в 3, 3 – в 7 и т. д. Перестановка P может быть записана иначе:

$$P=(1,4,5,6,9)(2,3,7)(10,12)(8)(11),$$

где каждая скобка есть перестановка, действующая только на элементы, заключенные в данной скобке, и не затрагивающая элементы, не заключенные в ней (например, перестановка $(2,3,7)$ переводит 2 в 3, 3 – в 7, а 7 – снова в 2).

Представление перестановки называется разложением на циклы. Любая перестановка может быть разложена на циклы. Это разложение единственно с точностью до циклических перестановок элементов внутри циклов.

Пусть некоторая перестановка содержит k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2 и т. д., k_n циклов длины n. Такая перестановка называется $(k_1,k_2,...,k_n)$ – перестановкой или перестановкой вида $1^{k_1}2^{k_2}...n^{k_n}$. Очевидно, $\sum_{i=1}^{n} ik_i = n$.

Число таких перестановок

$$P_1(k_1,k_2,...k_n)=\frac{n!}{1^{k_1}2^{k_2}...n^{k_n}k_1!k_2!...k_n!}.$$

Число подстановок (k)-множества, содержащего n_1 элементов первого типа, n_2 – второго и т. д., $n_k - k$ -го типа $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$,

$$P(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

(в частности, $P(r,n-r)=C_n^r$).

Операция разбиения множеств лежит в основе бесчисленного количества практических задач. Рассмотрим подход, позволяющий получить данные о характере самих разбиений и о возможности осуществлять разбиение заданного заранее типа.

Пусть имеется n-множество S, элементы которого должны быть размещены по двум ящикам. Каким должно быть число n, чтобы обеспечить попадание либо в первый ящик q_1 элементов, либо во второй ящик q_2 элементов? Ответ почти очевиден: $n \geq q_1 + q_2 - 1$. Таким образом, минимальное число элементов, обеспечивающих решение задачи, $N(q_1, q_2; 1) = q_1 + q_2 - 1$.

Если ставится задача о распределении не в два, а более (скажем, t) ящиков, причем соответственные числа, характеризующие требуемое заполнение ящиков, суть q_1, q_2, …, q_t, то $N(q_1, q_2, ..., q_t; 1) = \sum_{i=1}^{t} q_i - (t-1)$.

Теорема Рамсея.

Пусть $r \geq 1$, $q_i \geq r$ $(i = 1, ..., t)$. Существует такое наименьшее натуральное $N = N(q_1, ..., q_t; r)$, что для любого $n \geq N$ и любого упорядоченного t-разбиения $P_r(S_n) = A_1 \cup ... \cup A_t$ найдётся (при некотором $i \in \{1, ..., t\}$) (q_i, A_i)-подмножество, т. е. такое q_i-подмножество множества S_n, все r-подмножества которого содержатся в A_i.

Приведенные примеры, относящиеся к разбиениям множеств, являются частными случаями теоремы Рамсея при $r = 1$, $P_r(S) = S$, а (q_i, A_i)-множество есть просто q_i-подмножество множества A_i. Для частного случая, когда $t = 1$, имеем $N(q_1, r) = q_1$.

Казалось бы, что для любого t-разбиения и при любых подходящих $(q_1, q_2, ..., q_t; r)$ можно определить $\min n = N(q_1, q_2, ..., q_t; r)$, существование которого в силу теоремы Рамсея обеспечено. Но это оказалось исключительно трудным делом, т. к. ещё нет никакого метода подсчёта этих чисел, называемых *числами Рамсея*.

Усилия в части отыскания чисел Рамсея не прекращаются, поскольку проблема допускает многочисленные интерпретации и разнообразные приложения. В теории графов, например, она интерпретируется как задача об окрашивании рёбер графов. Сама проблема отыскания чисел Рамсея часто рассматривается для отдельных классов графов.

Примеры для самостоятельной работы

1 Доказать следующие тождества:

а) $C_{n+m}^{m} = \sum_{k=0}^{m} C_{n+k-1}^{k}$, $m, n > 0$; б) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, $n \geq 0$;

в) $\sum_{i=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}$, $n \geq 1$; г) $\sum_{x=0}^{n} \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{2n+1}{n+1}$.

2 n $(n > 2)$ человек садятся за круглый стол. Два размещения по местам будем считать совпадающими, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколько существует способов сесть за стол?

Ответ: $(n-1)!/2$.

3 Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз; б) не менее двух тузов;

в) ровно один туз; г) ровно два туза.

Ответ: а) 9279308324; б) 6708426560; в) 2570881764; г) 2264093964.

4 Сколькими способами можно составить три пары из n шахматистов?

Ответ: $n!/(48(n-6)!)$.

5 Сколько существует чисел от 0 до 10^n, в которые не входят две идущие друг за другом одинаковые цифры?

Ответ: $\left(9^{n+1}-1\right)/8$.

6 Сколько существует n-значных натуральных чисел, у которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Ответ: C_{n+8}^{8}.

7 Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать четыре экзамена. Он полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 очков. Сколькими способами он сможет сдать экзамены, набрав не менее 17 очков и не получив ни одной двойки?

Ответ: 31.

8 Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 75226522?

Ответ: 265.

9 *Генуэзская лотерея.* Участники этой лотереи покупают билеты, на которых стоят числа от 1 до 90. На некоторых билетах стоят сразу 2, 3, 4 или 5 чисел. В день розыгрыша случайным образом выбирают 5 жетонов с номерами от 1 до 90. Выигрывают те участники, у которых все номера на билетах окажутся среди выбранных. Какова вероятность выигрыша в случае :

а) покупки билета с одним числом;

б) с k числами ($1 < k \le 5$)?

Ответ: а) $1/18$; б) $2/801$ – при игре на два номера; $1/11748$ – при игре на три номера; $1/511038$ – при игре на четыре номера; $1/43949268$ – при игре на пять номеров.

5 Основные понятия и определения теории графов

Совокупность объектов произвольной природы и отношений между каждой парой этих объектов может быть изображена на плоскости в виде множества точек, являющихся образом множества объектов, и множества отрезков линий, соединяющих пары точек, что является образом множества отношений. Такой образ объектов и отношений принято называть *графом*. Множество точек, являющихся образом множества объектов, называют *вершинами* графа, а множество отрезков линий, являющихся образом множества отношений, – *рёбрами* или *дугами* графа.

Граф $G =< X; r >$ называют *неориентированным*, если $(x_i, x_j) = (x_j, x_i)$. Отрезок линии $(x_i; x_j)$, соединяющий две вершины, называют *ребром* (рисунок 1, *б*).

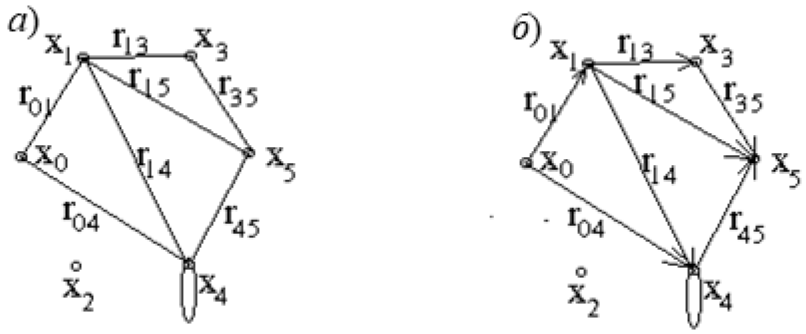


Рисунок 1

Граф $G =< X; r >$ называют *ориентированным*, если $(x_i, x_j) \neq (x_j, x_i)$, а направленный отрезок линии $(x_i; x_j)$, соединяющий две вершины, называют *дугой* (рисунок 1, *а*).

Любая программа или алгоритм вычислительного процесса, электронная схема или последовательность операций производственного процесса могут быть представлены ориентированным графом, а любая схема транспортной или электрической сети – неориентированным.

Для определения отношения принадлежности вершин графа ребру или дуге и, наоборот, рёбер или дуг – вершине вводится понятие «*инциденция»*, т. е. вершина x_i инцидентна ребру или дуге (x_i, x_j), если она является концевой вершиной данного отрезка линии, а ребро или дуга (x_i, x_j) инцидентна вершине x_i, если отрезок линии ограничен концевой вершиной x_i.

Число вершин, инцидентных ребру или дуге, всегда равно двум, т. к. они являются концевыми вершинами отрезка линии, а число рёбер или дуг, инцидентных вершине x_i, может быть произвольным. Это число называют *степенью* или *валентностью* вершины x_i и обозначают $\delta_i = \Sigma_j(x_i, x_j)$. Число дуг, исходящих из вершины x_i, называют *полустепенью* вершины графа и обозначают $\delta_i^+ = \Sigma_j(x_i, x_j)^+$. Вершину x_i, инцидентную исходящей дуге $(x_i, x_j)^+$, называют *истоком* (символ «+» свидетельствует о направлении дуги от вершины x_i). Число дуг, заходящих в вершину x_i, также называют *полустепенью* вершины графа и обозначают $\delta_i^- = \Sigma_j(x_i, x_j)^-$. Вершину x_i, инцидентную заходящей дуге $(x_j, x_i)^-$, называют *стоком* (символ «–» свидетельствует о направлении дуги к вершине x_i).

Две вершины графа называются *смежными*, если они различны и между ними существует ребро или дуга. Вершина x_i, несмежная ни с одной вершиной графа, называется *изолированной*. На рисунке 1, *а* изолированной является вершина x_2.

Два ребра также называются *смежными*, если они различны и имеют общую вершину.

Последовательность смежных рёбер или дуг, соединяющих вершины x_i и x_j, называют *маршрутом* и обозначают $\mu_{ij} = ((x_i,\ x_k);\ \dots\ (x_l,\ x_j))$. Например, для неориентированного графа, приведенного на рисунке 1, *б*, между вершинами x_0 и x_5 существует шесть маршрутов, т. е.

$$\mu_{05} = \{(r_{04}, r_{45}); (r_{01}, r_{14}, r_{45}); (r_{01}, r_{1,5}); (r_{04}, r_{41}, r_{15}); (r_{04}, r_{41}, r_{13}, r_{35}); (r_{01}, r_{13}, r_{35})\}.$$

Маршрут неориентированного графа, связывающий вершины x_i и x_j различными ребрами, называют *цепью*, а ориентированного – *путем*.

Маршрут называют *простым*, если при его обходе каждая промежуточная вершина встречается не более одного раза.

Маршрут называют *открытым*, если его концевые вершины различны, и *замкнутым*, если его концевые вершины совпадают. Замкнутый маршрут, который содержит только одно ребро или дугу, называют *петлей*. На рисунке 1 петля указана для вершины x_4. Замкнутый маршрут называют *циклом*, замкнутый простой маршрут – *простым циклом*.

Маршрут называют *эйлеровым*, если он замкнут и проходит через каждое ребро графа только по одному разу.

Маршрут называют *гамильтоновым*, если он замкнут и проходит через каждую вершину графа только по одному разу.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепью. Для ориентированного графа выделяют *сильную связность*, когда любые две его вершины взаимодостижимы при наличии дуг, и *слабую связность*, когда любые две его вершины достижимы только при условии замены дуг на рёбра.

Граф называют *полным*, если любые две его вершины смежны между собой, и *пустым*, если любые две его вершины не смежны.

Способы задания графов

Матрица инциденции. Поскольку *инциденция* есть отношение принадлежности элемента одного множества X другому множеству r, то *матрица инциденции* $\|q_{i;j}\|$ должна быть прямоугольной, число строк которой равно мощности множества отношений $|r| = m$, а число столбцов – мощности множества вершин графа $|X| = n$.

Элементы матрицы инциденции неориентированного графа определяются по формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } x_i \text{ инцедентно } x_j; \\ 0, \text{если } x_i \text{ неинцедентно } x_j. \end{cases}$$

Следует отметить, что в каждой строке матрицы количество единиц равно двум, а в каждом столбце – равно степени вершины δ_i.

Элементы матрицы инциденции для ориентированного графа определяют по формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } v_i; \\ -1, \text{если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } v_i; \\ 0, \text{если дуга } u_j \text{ неинциндентна вершине } v_i. \end{cases}$$

В каждом столбце матрицы инциденции число +1 равно полустепени исхода вершины x_i, т. е. δ_i^+, а число –1 равно полустепени захода вершины x_i, т. е. δ_i^-.

Матрица смежности. Поскольку смежность есть бинарное отношение между элементами одного множества, то матрица смежности $\|r_{i,j}\|$ есть квадратная матрица, число строк и столбцов которой равно мощности множества $|X| = n$. Элементы матрицы смежности определяются соотношением

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } x_i \text{ смежна } x_j; \\ 0, \text{если } x_i \text{ несмежна } x_j. \end{cases}$$

По структуре матрицы смежности ориентированного и неориентированного графов можно сделать следующие выводы:

– каждый ненулевой элемент главной диагонали соответствует петле на графе;

– матрица смежности для неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали;

– матрица смежности для ориентированного графа несимметрична относительно главной диагонали;

– если в графе необходимо добавить вершину, несмежную с остальными вершинами, то к матрице смежности следует добавить столбец и строку, элементы которой содержат только «ноль»;

– столбец ориентированного графа, все элементы которого имеют значение «ноль», соответствует вершине-истоку всего графа;

– строка ориентированного графа, все элементы которой имеют значение «ноль», соответствует вершине-стоку всего графа.

Примеры для самостоятельного решения

1 Дан орграф $G = (X, V)$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

Составить матрицу смежности вершин.

Составить матрицу инциденций.

Изобразить граф графически.

Составить матрицу смежности дуг:

а) $V = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_4, x_3)(x_4, x_6), (x_6, x_5)\}$;

б) $V = \{(x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_6), (x_5, x_2), (x_5, x_4), (x_6, x_1), (x_6, x_2)\}$. .

2 Изобразить графы, соответствующие представленным матрицам смежности вершин. Составить матрицы инцидентности этих графов:

а) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3 Составить матрицу смежности вершин графа (рисунок 2).

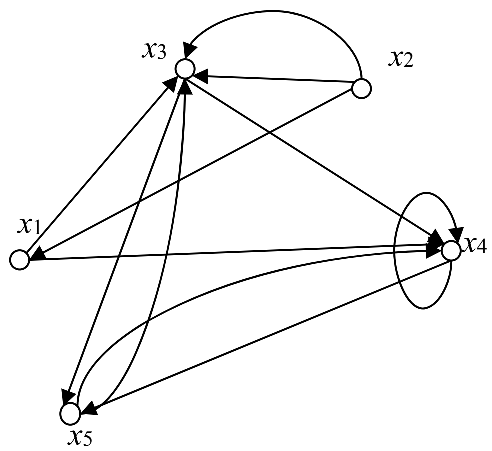


Рисунок 2

4 Составить матрицу инциденций графа (рисунок 3).

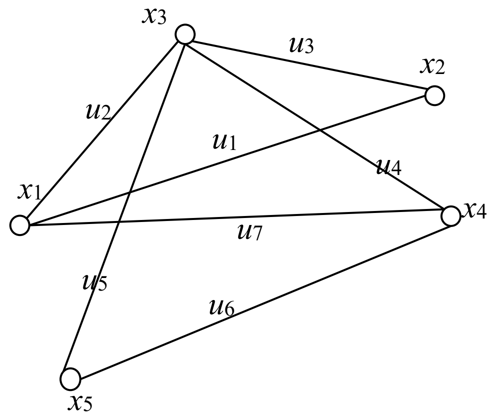


Рисунок 3

5 Для данных графов составить матрицы смежности вершин, дуг (ребер), инциденций (рисунок 4).

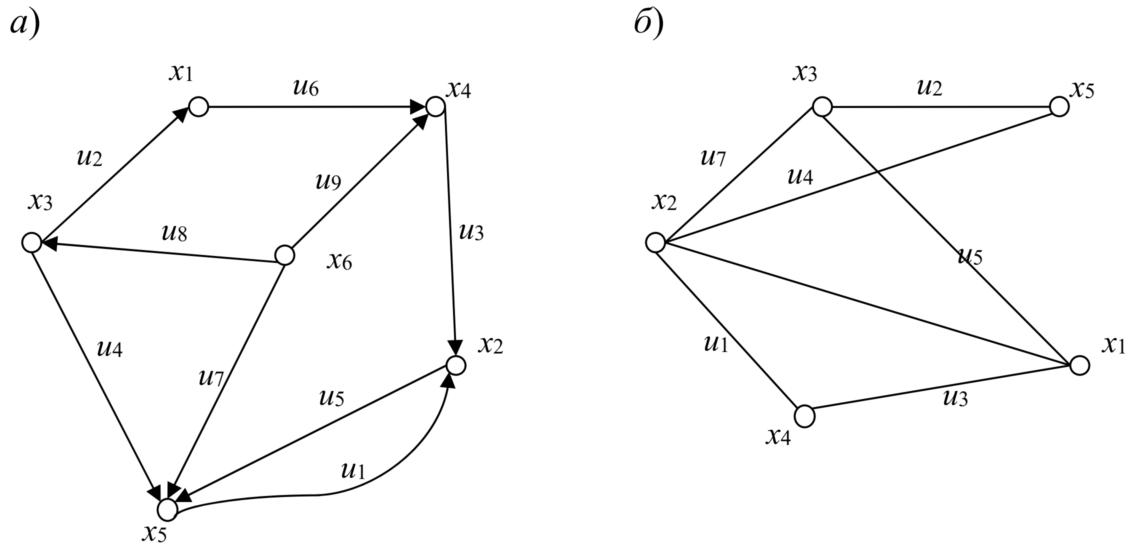


Рисунок 4

6 Построить наглядное изображение графа по матрице смежности вершин:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix}1&1&2&0&0\\1&0&1&3&0\\2&1&1&0&2\\0&3&0&1&1\\0&0&2&1&0\end{bmatrix}; \qquad \text{б) } A=\begin{bmatrix}2&1&0&3\\1&0&2&1\\0&2&1&1\\3&1&1&0\end{bmatrix}.$$

7 Построить наглядное изображение графа по матрице смежности дуг:

$$\text{а) } B=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}; \text{ б) } B=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

6 Операции над графами. Метрические характеристики графов

Алгебраические операции над графами позволяют формировать новые графы в результате объединения, пересечения, разности или композиции нескольких графов.

Бинарные операции.

При исполнении операций над двумя графами $G_1 =< X_1; r_1>$ и $G_2 =< X_2; r_2>$ следует обратить внимание на наличие общих элементов для X_1 и X_2 и (или) r_1 и r_2. Этот анализ позволяет выделить три конструктивных объекта:

1) вершины и рёбра (дуги) не имеют общих элементов, т. е. $(X_1 \cap X_2) = \varnothing$ и $(r_1 \cap r_2) = \varnothing$;

2) вершины имеют общие элементы, а рёбра (дуги) нет, т. е. $(X_1 \cap X_2) \neq \varnothing$ и $(r_1 \cap r_2) = \varnothing$;

3) вершины и рёбра (дуги) имеют общие элементы, т. е. $(X_1 \cap X_2) \neq \varnothing$ и $(r_1 \cap r_2) \neq \varnothing$.

Исполнение операций для каждого из них порождает принципиально иной объект.

Объединение графов $G_1 =< X_1; r_1>$ и $G_2 =< X_2; r_2>$ есть граф $G = (G_1 \cup G_2)$, для которого $X = (X_1 \cup X_2)$ и $r = (r_1 \cup r_2)$ (рисунок 5). Для вычисления смежности вершин формируемого графа следует использовать матрицы смежности по формуле

$$r_{i,j} = r_{i,j}^{(1)} \vee r_{i,j}^{(2)}.$$

Матрица смежности для графа G =< X; r> будет иметь число строк и столбцов равное $|X| = |X_1| + |X_2|$.

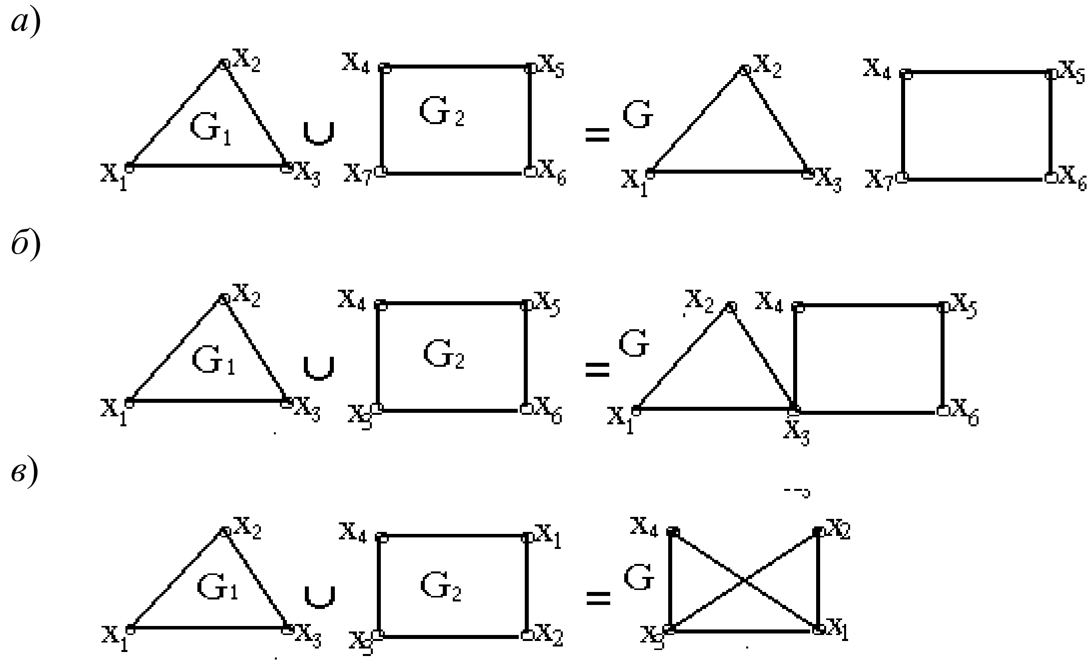


Рисунок 5

Пересечение графов $G_1 = \langle X_1; r_1\rangle$ и $G_2 = \langle X_2; r_2\rangle$ есть граф $G = (G_1 \cap G_2)$, для которого $X = (X_1 \cap X_2)$ и $r = (r_1 \cap r_2)$. Матрица смежности графа имеет число строк и столбцов равным $|X| = |X_1 \cap X_2|$. Для вычисления смежности вершин формируемого графа следует воспользоваться формулой

$$r_{i,j} = r_{i,j}^{(1)} \cdot r_{i,j}^{(2)}.$$

Композиция графов $G_1 = \langle X_1; r_1\rangle$ и $G_2 = \langle X_2; r_2\rangle$ есть граф $G = \langle X, r\rangle = (G_1 \circ G_2)$, для которого $X \subseteq (X_1 \cup X_2)$, а $r_{i,j} \in r$ существует тогда, и только тогда, когда есть хотя бы одна вершина x_k, принадлежащая множествам X_1 и X_2, что обеспечивает маршрут через вершину x_k, с началом в $x_i^{(1)} \in X_1$ и концом в $x_j^{(2)} \in X_2$ (рисунок 6). Для вычисления смежности вершин формируемого графа следует воспользоваться формулой

$$r_{i,j} = {}_{k=1}\vee^{n}(r_{i,k}^{(1)} \cdot r_{k,j}^{(2)}).$$

Матрица смежности графа имеет число строк и столбцов $|X| \le |X_1 \cup X_2|$.

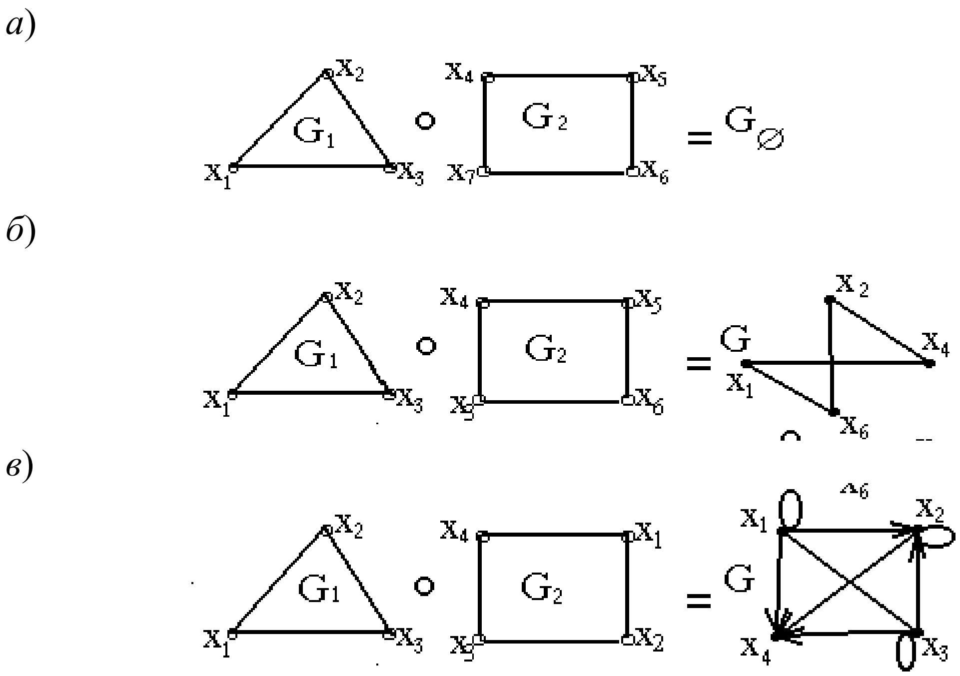


Рисунок 6

Декартовым произведением орграфов $G_1(X, E_1)$ и $G_2(Y, E_2)$ называется орграф $G_1 \times G_2$ с множеством вершин $X \times Y$, в которых дуга, идущая из вершины (x_1, y_1) в вершину (x_2, y_2), существует тогда, и только тогда, когда существует дуга $e_1 = (x_1, x_2)$ и $y_1 = y_2$ или существует дуга $e_2 = (y_1, y_2)$ и $x_1 = x_2$.

Произведением орграфов $G_1(X, E_1)$ и $G_2(Y, E_2)$ называется орграф $G_1 \cdot G_2$ с множеством вершин $X \times Y$, в которых дуга, идущая из вершины (x_1, y_1) в вершину (x_2, y_2) существует тогда и только тогда, когда существуют дуги $e_1 = (x_1, x_2)$ в $G_1(X, E_1)$ и $e_2 = (y_1, y_2)$ в $G_2(Y, E_2)$.

Примеры для самостоятельного решения

1 Найти декартово произведение следующих графов (рисунок 7).

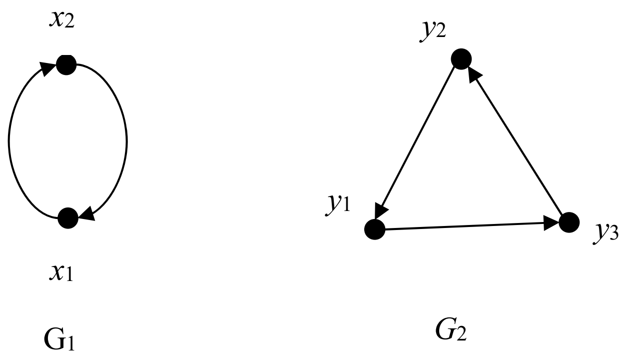


Рисунок 7

2 Найти произведение графов (рисунок 8).

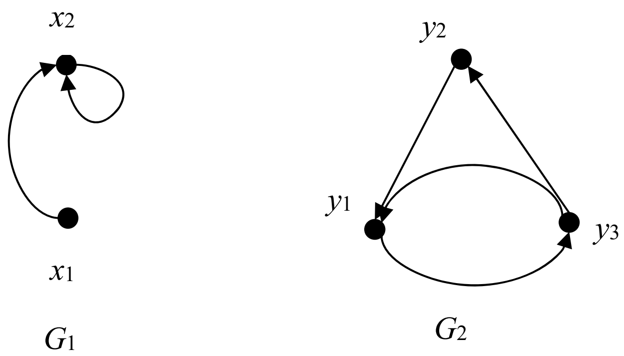
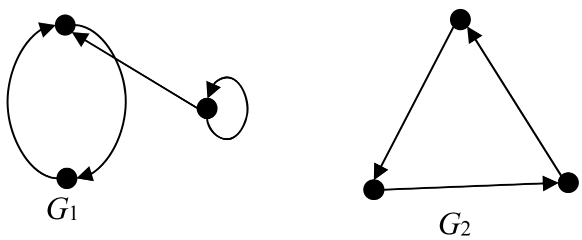


Рисунок 8

3 Найти композицию графов (рисунок 9).

а)



б)

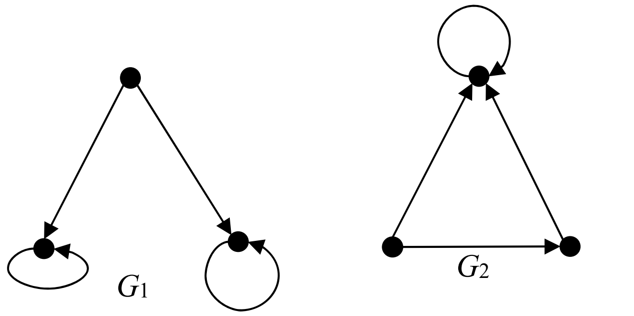


Рисунок 9

7 Упорядочение элементов графа. Кратчайший путь в графе

Упорядоченный граф – граф, изоморфный исходному, для которого характерны следующие правила:

1) вершины графа расположены по слоям;
2) вершины первого слоя не имеют предшествующих вершин;
3) вершины последнего слоя не имеют последующих вершин;
4) вершины i-го слоя соединяются дугами с вершинами $(i+1)$-го слоя;
5) вершины, находящиеся на одном слое не соединяются.

Требуется упорядочить граф, представленный на рисунке 10.

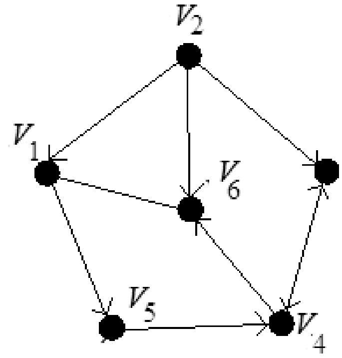


Рисунок 10

Произведем следующие действия.

1 Находим в графе вершины, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первый слой. Удаляем из графа эти вершины и дуги, из них исходящие.

2 В полученном графе находим вершины, в которые не входит ни одна дуга. Получаем вершины второго слоя. Удаляем эти вершины и дуги, из них исходящие.

3 Аналогично для остальных вершин повторяем п. 2 пункт алгоритма.

4 Процесс продолжается до тех пор, пока из исходного графа не будут удалены все вершины и дуги.

Аналогичным способом можно упорядочить не только вершины, но и дуги графа (рисунок 11).

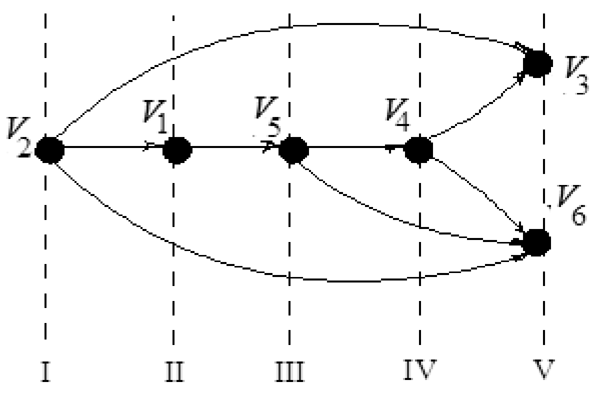


Рисунок 11

Матричный способ упорядочения вершин орграфа.

Упорядочение производится по матрице смежности вершин графа.

1 Строим вектор x_1, компонентами которого является сумма элементов столбцов матрицы смежности.

2 В векторе x_1 находим нулевую координату, т. е. вершину, соответствующую нулевой компоненте, находящейся на первом слое.

3 Из матрицы смежности вычёркиваем строку, соответствующую вершинам первого слоя.

4 Находим компоненты вектора x_2 (сумму столбцов без вычеркнутой строки).

5 Нулевые компоненты вектора x_2 образуют вершины второго слоя.

6 Вычеркивая из матрицы строки, соответствующие вершинам второго слоя, находим компоненты вектора x_3 и т. д.

7 Процесс продолжается до тех пор, пока все строки матрицы не будут вычеркнуты.

Рассмотрим пример.

В вершину v_2 не заходит ни одна дуга. v_2 отнесем к группе I, v_1, v_3 – группе II, v_5 – группе III, v_4 – группе IV, v_6 – группе V.

$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{V} \end{matrix} \end{array}$$

Построим изоморфный граф (рисунок 12).

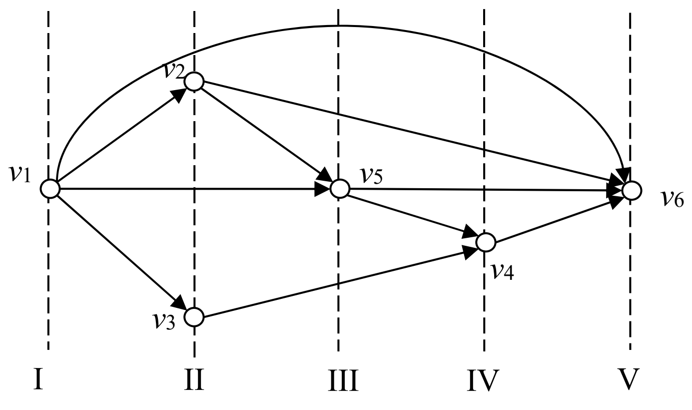


Рисунок 12

Примеры для самостоятельного решения

Упорядочить вершины графа и дуги (графическим и матричным методами) и построить изоморфный граф (рисунок 13).

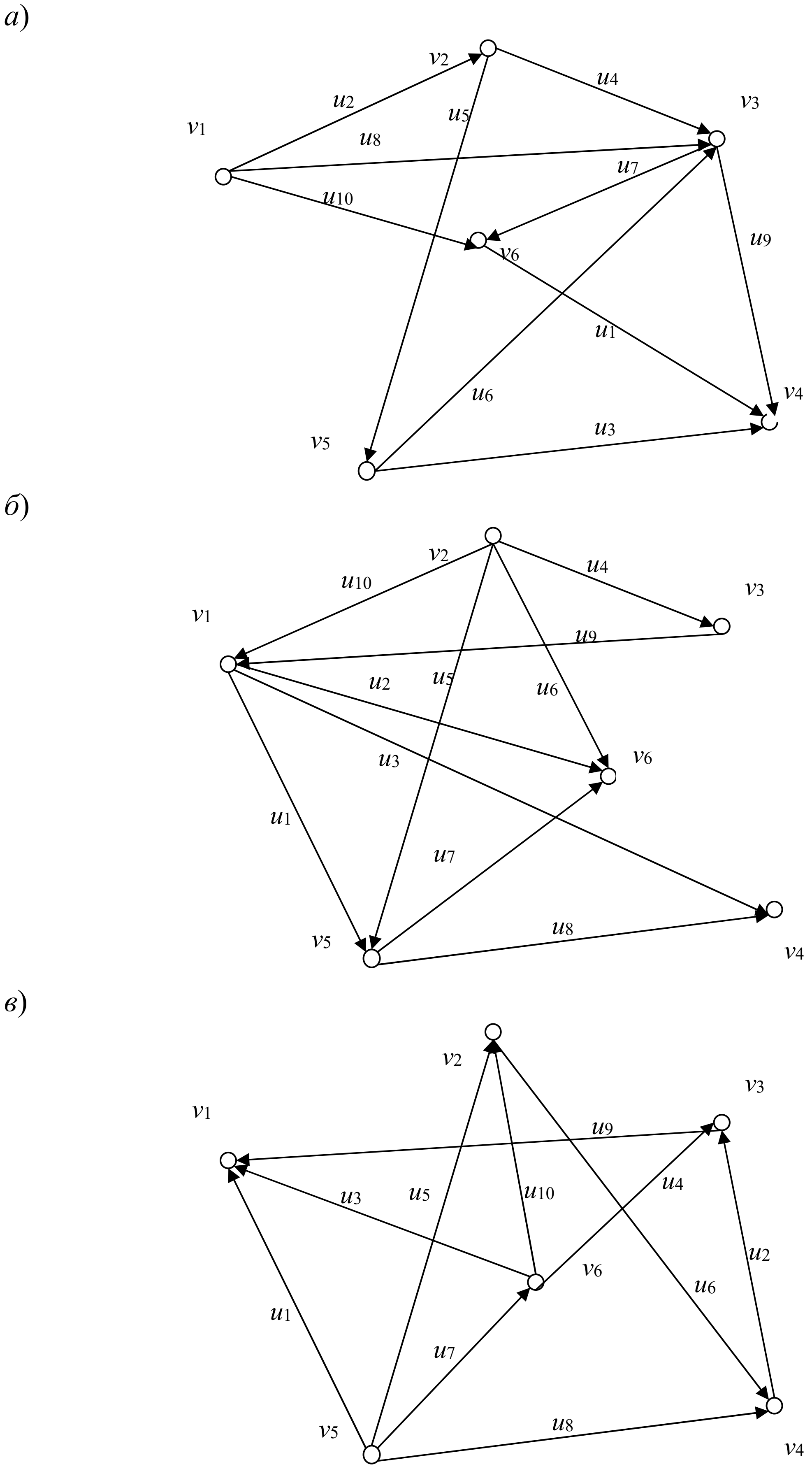

а)
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9 u_{10}
б)
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9 u_{10}
в)
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9 u_{10}

Рисунок 13

8 Остовы и деревья. Сети

Математической основой сетевого планирования является граф.

Сетевой график **(*сеть*)** характеризуется наглядным изображением (в виде графа изображается некоторый проект, показывающий технологическую связь между работой).

Сетевой график **(*сеть*)** – это граф без петель и контуров, который имеет одну или несколько числовых характеристик.

Основными понятиями сетевого планирования является ***работа и событие***.

Работа – процесс, который характеризуется затратами времени и ресурсов и приводит к определенным результатам (дуги).

Событие – результат выполнения одной или нескольких работ (вершины).

Существует несколько подходов по построению сетевого графика:

– в терминах событий (вершины – события, дуги – взаимосвязь между событиями);

– в терминах работ (вершины – работы, дуги – взаимосвязь между работами);

– в терминах событий и работ (вершины – события, дуги – работы).

События бывают:

– ***исходные*** – события, с которых начинается выполнение всего комплекса работ;

– ***завершающие*** – события, которыми заканчивается выполнение работ;

– ***промежуточные*** – все остальные события.

Если сеть имеет несколько завершающих событий, то такой системный график называется ***многоцелевым***.

Рассмотрим операции над событиями:

– ***осуществляемая работа (операция)*** характеризуется затратами времени и ресурсов (→);

– ***операция ожидания*** характеризуется затратами времени и ресурсов (–·–·→);

– ***фиктивная операция*** служит для взаимосвязи работ, не требует ни затрат времени, ни ресурсов (– – – →).

Основные требования при построении сетевого графика:

– сеть имеет *только одно* исходное событие;

– сеть имеет *только одно* завершающее событие;

– во все события в сети входит *хотя бы одна* дуга, кроме исходной;

– из каждого события сети выходит *хотя бы одна* дуга, кроме завершающего;

– сеть не имеет контуров;

– любая пара событий сети соединена *только одной* дугой, когда это невозможно, вводят фиктивную работу;

– если какие-либо операции могут быть начаты до полного завершения предшествующих работ, то их целесообразно разбить на несколько элементарных работ.

Расчет временных параметров сети.

К временным параметрам относятся:

1) продолжительность выполнения всего комплекса работ;

2) сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Для этого на сетевом графике указывают пути. Любая последовательность от исходного события к завершающему (логически связанная). Ни один путь не может дважды проходить через одно и то же событие.

Пути бывают:

- *полные* – от исходного к завершающему событию;
- *предшествующие событию* – от исходного до текущего события;
- *последующие за событием* – от события до завершающего события.

Критический путь – путь, имеющий наибольшую продолжительность по времени. Критический путь определяет минимальное время выполнения комплекса работ. Работа, находящаяся на критическом пути, называется критической. Эти работы не допускают запаздывания. Остальные работы (некритические) могут быть закончены или отложены ранее установленного срока. Для этого вводят понятие резервов времени. Рассмотрим сроки совершения и резервы времени событий.

Ранним сроком свершения события называется момент времени, к которому должны быть закончены все работы, предшествующие данному событию.

$$t_p(j) = \max\left\{t_p(i) + t\left(i, j\right)\right\},$$

где $t_p(j)$ – ранний срок искомого события;

$t_p(i)$ – ранний срок предшествующего события;

$t\left(i, j\right)$ – время работы.

Поздним сроком свершения события называется момент времени, к которому заканчиваются все предшествующие события и остается столько времени, сколько необходимо для выполнения данного события.

$$t_n(i) = \min\left\{t_n(j) - t\left(i, j\right)\right\}.$$

Полным резервом времени называется максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить продолжительность, не изменяя критических сроков.

$$R_n = t_n(i) - t_p(j).$$

Свободный резерв времени – это запас времени, на который можно отложить начало работы или увеличить её продолжительность, не изменяя критических сроков.

$$R_c(i, j) = t_p(j) + t_p(i) - t(i, j)$$

Методы вычисления временных характеристик сети.

Данный метод является наиболее простым. Событие делится на четыре сектора. В верхнем секторе записывают номер события, в левом секторе записывают ранний срок свершения события, в правом секторе – поздний срок свершения события, в нижнем секторе – резерв времени (рисунок 14).

Рисунок 14

Вычисление производится в три этапа.

1 Двигаемся по сети от исходного события к завершающему, при этом вычисляем ранние сроки свершения события. Событие (i) имеет несколько предшествующих ему событий. Для всех предшествующих событий находим сумму, которая состоит из значений левых секторов предшествующих событий плюс продолжительность работы.

Из всех значений выбираем максимальное и записываем значение в левый сектор события i. Для исходного события значение левого сектора равно 0 (рисунок 15).

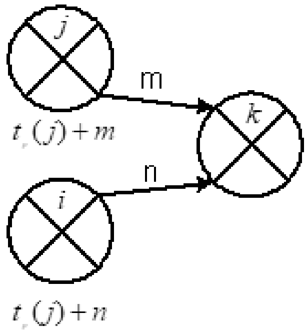


Рисунок 15

2 Для завершающего события значение из левого сектора переносим в правый сектор. Производим расчет поздних сроков совершения события, двигаясь от завершающего события к исходному. Находим разность между правыми секторами последних событий и продолжительностью соответственной работы. Из всех значений выбираем минимальное и заносим в правый сектор события i. Так для всех событий (рисунок 16).

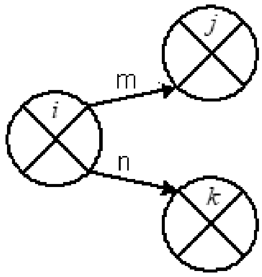


Рисунок 16

3 Находим разность между правым и левым сектором события и записываем в нижний сектор.

Выделяем на сети критический путь. Смотрим событие, для которого резерв времени равен нулю. Это значит, что эти события находятся на критическом пути (не всегда). Выделяем все события и работы, входящие в критический путь (рисунок 17).

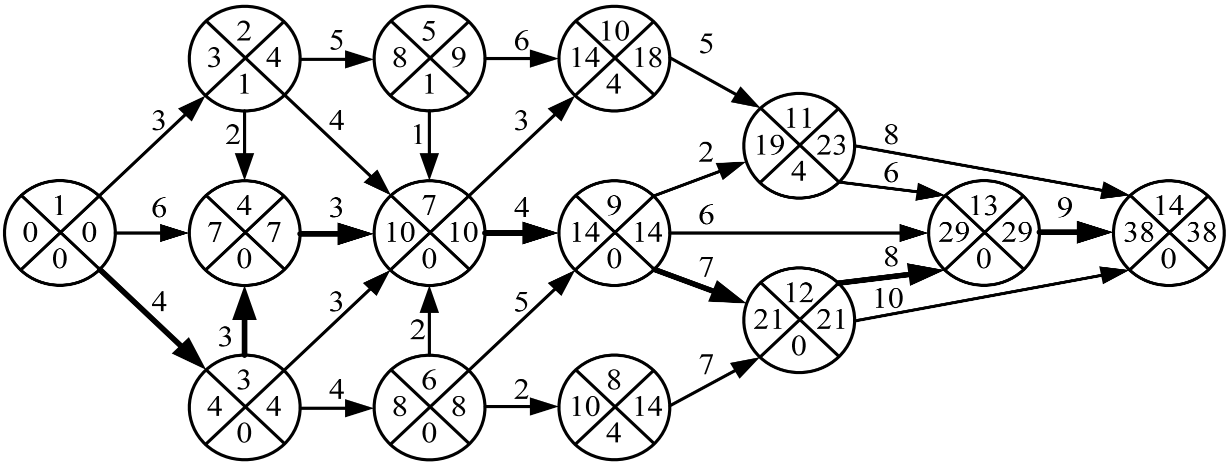


Рисунок 17

Расчет временных параметров с помощью линейного графика.

Рисуем ось времени, на ней выбираем начало отсчета t_0. Начинаем откладывать с t_0 работы (обычно работы, исходящие из исходного события). Желательно отмечать события, с которых начинаем и которыми заканчиваем. Над каждой работой записываем количество ресурсов.

Работа (i, j) откладывается с точки, в которой заканчивается работа предшествующая работе (i, j), имеющую наибольшую продолжительность.

После того как отмечены все работы, выделяем критический путь (рисунок 18).

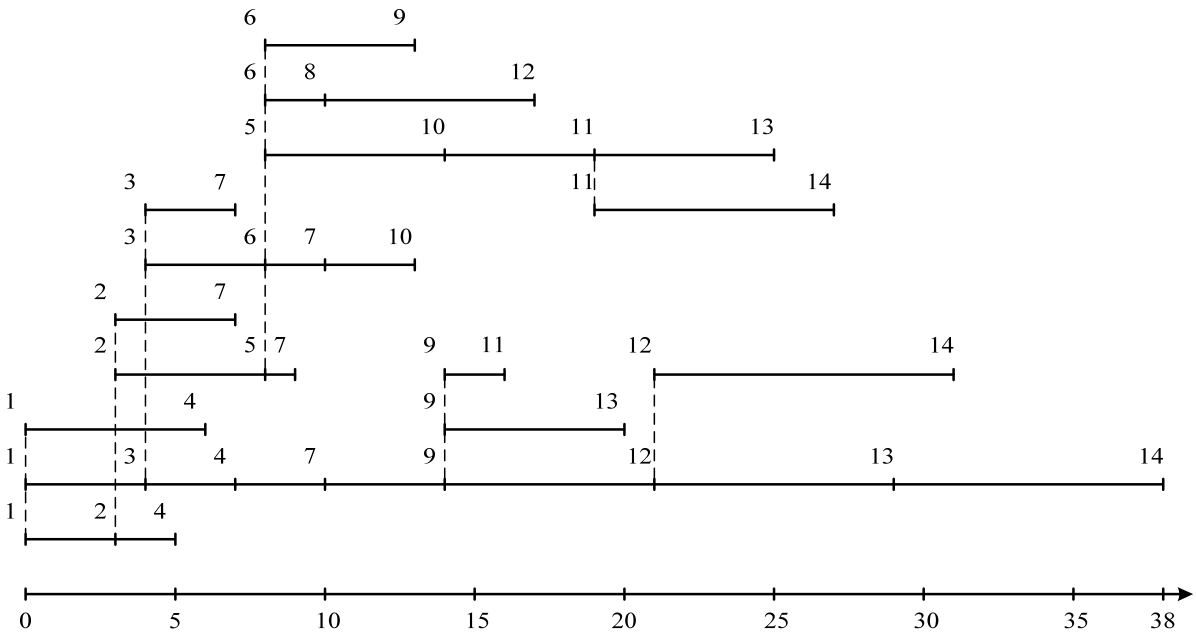


Рисунок 18

Потоки на сетях.

Рассмотрим сети.

1 Через данную сеть по её ребрам или дугам будем пропускать некоторое вещество. Вещество проходит из *истока* в *сток* по ребрам данной сети.

Задача состоит в расчете максимального количества вещества, которое может пропустить через себя данная сеть.

Определение: ***пропускной способностью ребра*** r_{ij} называется количество вещества, которое может пройти по данному ребру за единицу времени.

Пропускная способность ребра в прямом и обратном направлении не одинакова. Если две вершины не соединены ребром, то пропускная способность между ними не равна нулю.

Если на графе над каждым ребром указать пропускную способность в прямом и обратном направлении, то соответствующие элементы ее матрицы будут положительны.

Определение: ***поток по ребру*** **–** это количество вещества, проходящего по ребру за единицу времени x_{ij}.

Множество всех потоков по ребру образует ***поток по сети***: $X = \{x_{ij}\}$.

Свойства потоков:

1) $x_{ij} = x_{ji}$, т. е. их пропускная способность одинакова в прямом и обратном направлении;

2) $x_{ij} = 0$ – поток по вершине;

3) $x_{ij} < r_{ij}$, r_{ij} – пропускная способность ребра.

Если $x_{ij} < r_{ij}$, то ребро ***ненасыщенное***. Если $x_{ij} = r_{ij}$, то ребро ***насыщенное***.

Вершина, с которой рассматривается поток, называется ***истоком***, а в котором заканчивается – ***стоком.***

Задача о максимальном потоке. Разрез на сети.

Теорема ***Форда-Фалкерсона***: максимальный поток по заданной сети равен минимальной пропускной способности разреза сети.

Разобьем множество сети на подмножество X и $\overline{X}$ (не X).

Разрез – множество дуг, для которых выполняются следующие требования:

1) $I \in x$ – исток; $S \in \overline{x}$ – сток;

2) $x \cap \overline{x} = \varnothing$;

3) $x \cap \overline{x} = \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N}$ – множество всех вершин в сети.

Пропускная способность разреза – это сумма пропускных способностей ребер, входящих в разрез.

Задача о максимальном потоке решается следующим образом.

Дан некоторый поток, который направлен из истока в сток.

Разобьем сеть на два подмножества:

– к первому отнесем все вершины, достигаемые из истока, по ненасыщенным ребрам;

– ко вторым отнесём все оставшиеся вершины.

При таком разбиении возможны два случая.

1 Исток и сток находятся в разных подмножествах, тогда задача решена.

2 Исток и сток находятся в первом подмножестве, требуется каким-либо методом увеличить поток из истока в сток и заново разбить сеть на два подмножества.

Задача о максимальном потоке (расчет непосредственно на сети).

1 Выписываем полные пути из истока в сток, считая при этом пропускную способность. Пропускная способность сети равна минимальной пропускной способности.

Над каждым ребром пути записываем поток по данному пути. Если поток и пропускная способность совпадают, то ***ребро насыщенное*** – выделяем его.

2 Строим другие полные пути и считаем их пропускную способность. Если какое-либо ребро пути входит в другой путь, то пропускная способность данного ребра равна первоначальной пропускной способности минус поток по другому пути. К потоку данного ребра прибавляем поток по новому пути. Выделяем все насыщенные ребра данного пути.

3 Строим следующий полный путь до тех пор, пока сток достигает истока по ненасыщенному пути.

4 Выделяем разрез на сети.

5 Считаем пропускную способность разреза, выписываем ребра, входящие в разрез, выписываем два подмножества вершин x и $\bar{x}$.

Задача о максимальном потоке (матричный способ).

1 Строим матрицу пропускной способности данной сети.

2 Строим какой-либо поток. Берем три или более полные пути из истока в сток и по данным путям строим поток.

3 Строим матрицу потока согласно п. 2.

4 Находим разность матриц $R - x$.

5 По разности матриц $R - x$ определяем, существует ли путь из истока в сток по ненасыщенным ребрам. Если не существует, решение найдено. Если существует путь, то увеличиваем поток по сети на пропускную способность данного пути и возвращаемся к п. 2.

Примеры для самостоятельного решения

1 На заданной сети указаны пропускные способности ребер. Предполагается, что пропускные способности в обоих направлениях одинаковы (рисунок 19).

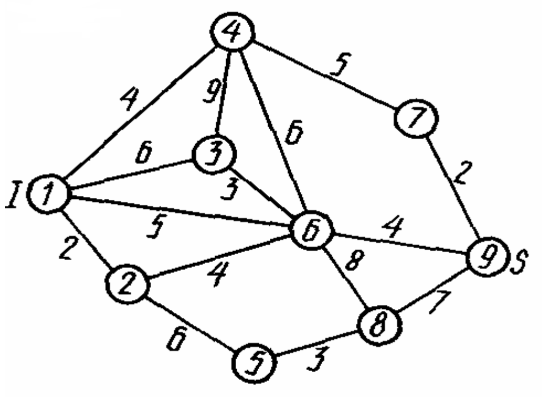
Требуется:

а) сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока I в сток S;

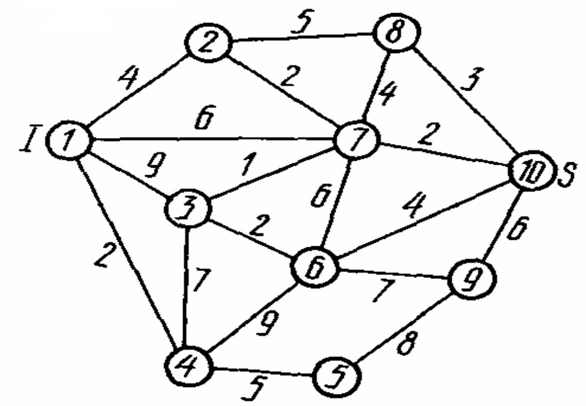
б) выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

2 Рассчитать непосредственно на сетевом графике комплекса работ ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, минимальное время выполнения комплекса (критический срок). Выделить на сетевом графике критический путь. Для некритических работ найти полные и свободные резервы времени (рисунок 20).

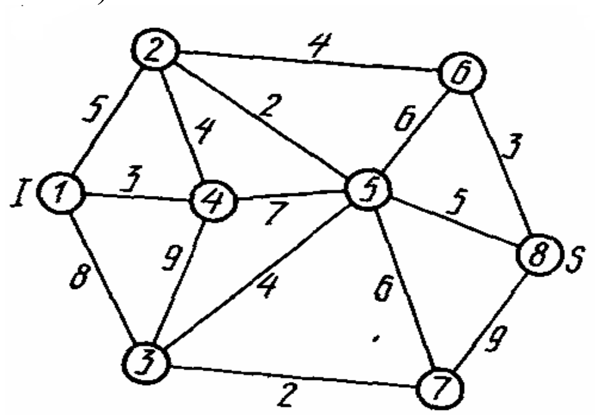
а)



б)



в)



г)

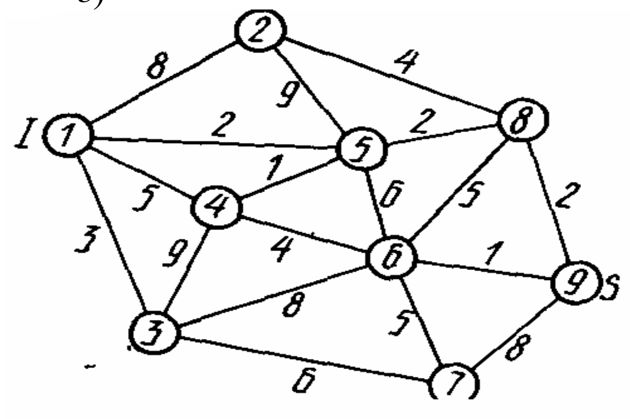
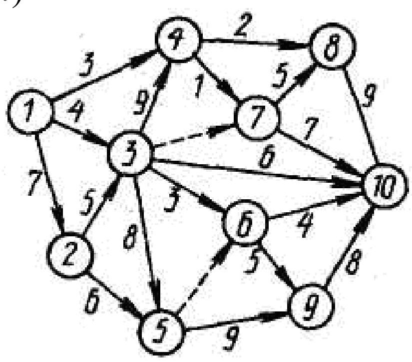
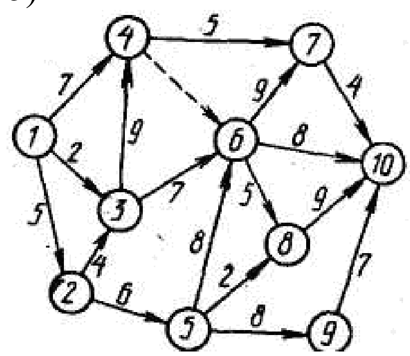


Рисунок 19

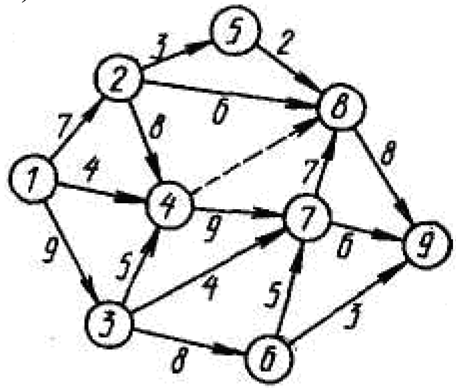
а)



б)



в)



г)

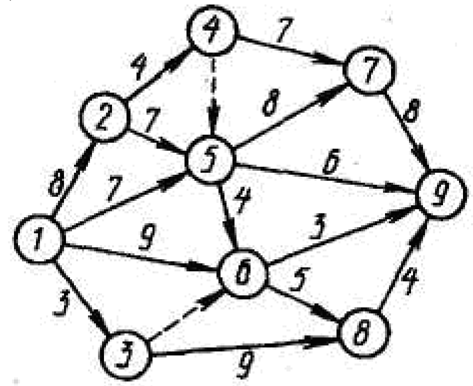


Рисунок 20

3 Для комплекса работ, представленного сетевым графиком, построить линейный график и найти по нему критический срок, критические работы, полные и свободные резервы некритических работ (рисунок 21).

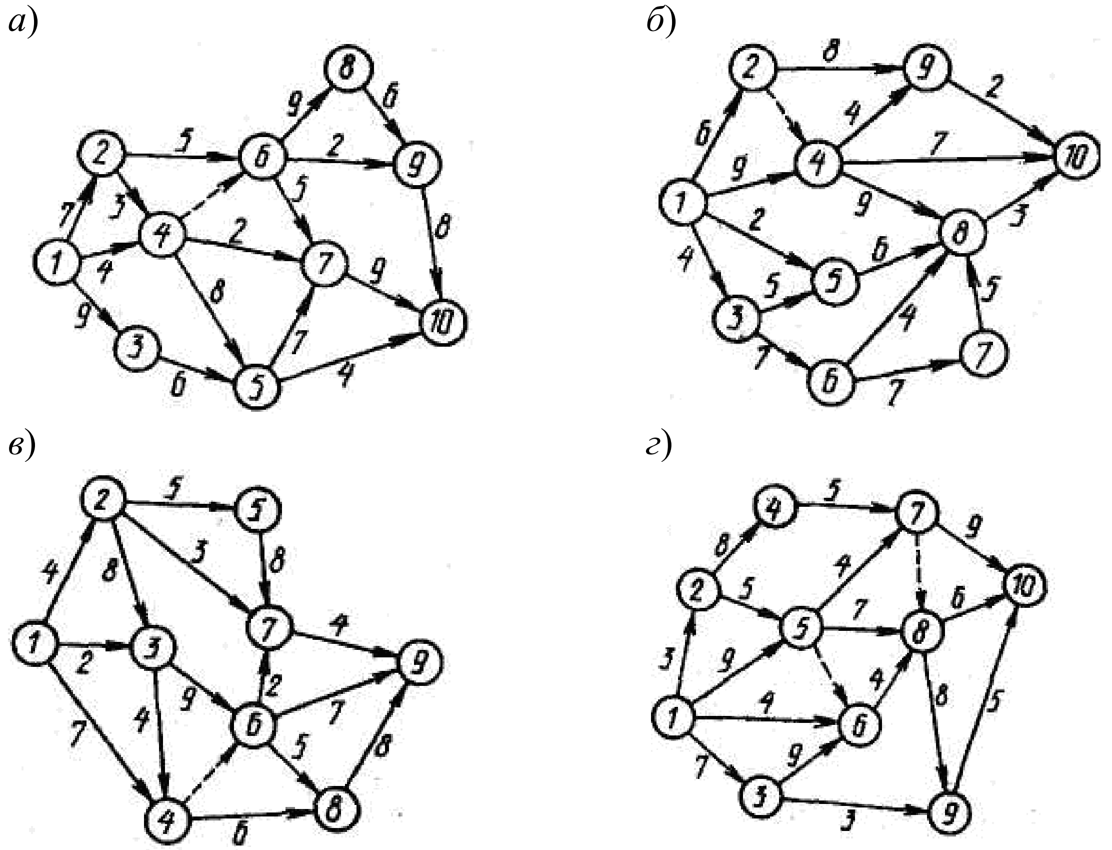


Рисунок 21

4 Сетевой график (орграф) задан матрицей смежности работ a_i (дуг) (таблица 4). Построить сетевой график и перенумеровать события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона. Найти критический путь и резервы времени полных путей. Построить линейный график и найти по нему работы критического пути. Для некритических работ определить полные и свободные резервы времени.

Таблица 4 – Условие задач

i	j									t_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	8
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	7
4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	6
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	9
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12

В таблице 4 указаны номера предшествующих i и последующих j работ, а также указана продолжительность работ t_i.

Список литературы

1 **Баврин, И. И.** Дискретная математика: учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – Москва: Юрайт, 2016. – 208 с.

2 **Белоусов, А. И.** Дискретная математика: учебное пособие / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; под ред. В. С. Зарубина. А. П. Крищенко. – 2-е изд. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 306 с.

3 **Деза, Е. И.** Основы дискретной математики: учебное пособие / Е. И. Деза, Д. Л. Модель. – 3-е изд. – Москва: ЛЕНАНД, 2016. – 224 с.