МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Логистика и организация производства»

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-27 02 01 «Транспортная логистика (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2020

УДК 330.4
ББК 65 в 631
Э40

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Логистика и организация производства» «03» июня 2020 г., протокол № 20

Составитель ст. преподаватель Т. А. Бородич

Рецензент канд. экон. наук, доц. Н. С. Желток

В методических рекомендациях представлены материалы к проведению практических занятий для студентов специальности 1–27 02 01 «Транспортная логистика (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Ответственный за выпуск М. Н. Гриневич

Корректор Е. А. Галковская

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Построение моделей задачи линейного программирования

Для следующих задач построить модели задачи линейного программирования.

Задача 1. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расходы сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида, прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в таблице 1. Сколько продукции следует производить ежедневно, если в качестве показателя эффективности использовать прибыль?

Таблица 1 – Исходные данные

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид сырья</th><th colspan="2">Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие</th><th rowspan="2">Общее количество сырья (кг)</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td><td>4</td><td>300</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>120</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>12</td><td>252</td></tr>
<tr><td>Прибыль от реализации продукции, р.</td><td>30</td><td>40</td><td></td></tr>
</table>

Задача 2. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 49 тыс.р. Оборудование должно быть размещено на площади 2 128 м^2. Предприятие может заказать машины типа А стоимостью 7 тыс.р., занимающие площадь (с учетом проходов) 112 м^2 и выпускающие 10 ед. продукции в смену, и машины типа Б стоимостью 3 тыс.р., занимающие площадь 228 м^2 и обеспечивающие выпуск 12 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа А можно заказать не более 5 штук. Найти оптимальный план приобретения оборудования, учитывающий возможности предприятия и обеспечивающий наивысшую производительность нового участка.

Задача 3. Для выполнения работ Р1, Р2 и Р3 сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы двух марок А и Б стоимостью соответственно 3 и 5 д. е. каждый. С использованием новой техники необходимо выполнить не менее 20 у. е. работы Р1, не менее 190 ед. работы Р2 и не менее 88 ед. работы Р3. В таблице 2 представлены данные по возможности выполнения работ за рассматриваемый промежуток времени.

Найти такой вариант приобретения тракторов, при котором будут выполнены все необходимые работы и затраты будут минимальны.

Таблица 2 – Исходные данные

Марка трактора	Работа Р1	Работа Р2	Работа Р3
А	4	19	4
Б	1	15	15

Задача 4. С вокзала можно отправлять ежедневно курьерские и скорые поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в таблице 3.

Таблица 3 – Исходные данные

Характеристика парка вагонов	Тип вагона				
	багажный	почтовый	плацкартный	купейный	мягкий
Число вагонов в поезде, шт.:					
курьерском	1	–	5	6	3
скором	1	1	8	4	1
Вместимость вагонов, чел.	–	–	58	40	32
Наличный парк вагонов, шт.	12	8	81	70	27

Построить математическую модель задачи, на основании которой можно найти такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров достигло максимума.

Задача 5. Продукция прокатного стана выпускается в виде рулонов стандартной ширины по 150 см. По специальным заказам потребителей стан поставляет рулоны другой длины. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров представлены в таблице 4.

Требуется обеспечить выполнение заказов и свести к минимуму потери металла.

Таблица 4 – Характеристики поступивших заказов

Заказ	Требуемая ширина, см	Количество рулонов
1	50+ *к*	150
2	75+ *к*	200
3	45+ *к*	300
Примечание – *к* – номер варианта		

Задача 6. Трикотажная фабрика предполагает предложить потребителям полотна 150 и 90 артикулов. Требуется определить ассортимент указанных тканей, позволяющий фабрике получить максимальную прибыль на имеющемся оборудовании (машины Текстима и Кокетт). При этом следует определить, какие артикулы трикотажного полотна и в каких объемах нужно выпускать на каждой из машин. Исходные данные приведены в таблицах 5, 6.

Таблица 5 – Исходные данные для решения задачи

Артикул полотна	Величина прибыли, тыс. р., при выработке 1 т полотна на машине		Фактическая производительность машины, кг/ч	
	Текстима	Кокетт	Текстима	Кокетт
150	13,40	13,46	2,42	3,76
90	7,06	7,17	4,08	7,66

Таблица 6 – Фонд машинного времени

Машина	Фонд машинного времени, маш.-ч								
	Номер варианта								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Текстима	9 305	8 405	7 405	8 608	9 806	9 204	8 235	8 505	9 204
Кокетт	6 534	5 545	4 505	5 642	6 845	6 756	5 835	5 448	6 608

Продолжение таблицы 6

Машина	Фонд машинного времени, маш.-ч							
	Номер варианта							
	9	10	11	12	13	14	15	16
Текстима	8 350	7 850	7 500	8 120	8 240	8 340	9 000	9 500
Кокетт	5 850	5 500	6 500	6 240	5 600	5 340	6 600	6 500

Методические рекомендации

Предприятие изготавливает и продает краску двух видов: для внутренних и внешних работ. Для производства краски используется два исходных продукта А и В. Расходы продуктов А и В на 1 т соответствующих красок и запасы этих продуктов на складе приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Исходные данные

Исходный продукт	Расход продуктов (в тоннах на 1 т краски)		Запас продукта на складе, т
	Краска для внутренних работ	Краска для внешних работ	
А	1	2	3
В	3	1	3

Продажная цена за 1 т краски для внутренних работ составляет 2 000 у. е., краска для наружных работ продается по 1 000 у. е. за 1 т. Требуется определить, какое количество краски каждого вида следует производить предприятию, чтобы получить максимальный доход.

Рассмотрим составление математической модели задачи.

1 Переменные задачи:

а) x_1 – количество производимой краски для внутренних работ;

б) x_2 – соответствующее количество краски для наружных работ.

2 Ограничения, которым должны удовлетворять переменные задачи:

а) x_1 , $x_2 \geq 0$;

б) по расходу продукта А: $x_1 + 2x_2 \leq 3$;

в) по расходу продукта В: $3x_1 + x_2 \leq 3$.

3 Целевая функция задачи.

Обозначим Z доход от продажи краски (в условных единицах), тогда целевая функция задачи имеет вид:

$$\max Z(x) = 2x_1 + x_2. \tag{1}$$

Таким образом, математическая модель выглядит следующим образом:

$$\max Z = 2x_1+x_2. \tag{2}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 3x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

2 Графический метод решения задачи линейного программирования

Индивидуальное задание № 1

Решить графическим методом задачу линейного программирования (ЗЛП).

Задача 1

$$L(X) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20; \\ x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2

$$L(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 10; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 + 4x_2 \ge 3; \\ -x_1 + 4x_2 \le 2; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 3

$$L(X) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 6; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 3x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4

$$L(X) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge `6; \\ x_1 + 2x_2 \ge 5; \\ 4x_1 + x_2 \ge 8; \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 5

$$L(X) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1 + 2x_2 = 8; \\ x_1 + x_2 \ge 5; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 6

$$L(X) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3; \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 + x_2 \ge 6; \\ -2x_1 + 6x_2 \le 20; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Индивидуальное задание № 2

В следующей задаче линейного программирования

$$\min Z = 28x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (k+1)x_5;$$

$$\begin{cases} -(k+1)x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = k; \\ (k+2)x_1 + x_3 + x_5 = 3k+6; \\ -2(k+2)x_1 - x_4 + (k+1)x_5 = k; \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, \end{cases}$$

где k – номер варианта.

Требуется:

1) построить область допустимых решений;
2) решить задачу графическим способом.

Методические рекомендации

1 Решение ЗЛП графическим способом.

В рассматриваемом примере в пункте 1 содержатся только две переменные x_1 и x_2, поэтому задачу можно решить графически.

1.1 На плоскости $x_1 0 x_2$ строим область допустимых значений переменных, определяемую ограничениями задачи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \ \ (A); \\ 3x_1 + 1x_2 \le 3 \ \ (Б); . \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \quad (4)$$

Чтобы построить множество точек удовлетворяющих неравенству (А), нанесем на плоскость график прямой, определяющий границу этого множества: $x_1 + 2x_2 = 3$ (А). Приведем это уравнение к виду: $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$. А это уравнение прямой «в отрезках» и для построения этой прямой используются две точки (a, 0) и (0, b). Приведя уравнение (А) к виду прямой «в отрезках», получим: $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3/2} = 1$.

Аналогично, для ограничения (В) уравнение прямой в отрезках будет: $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{3} = 1$.

Построим обе прямые на плоскости. Множества точек, удовлетворяющих неравенствам (А) и (В), образуют полуплоскости, лежащие под соответствующими прямыми, а множество допустимых значений переменных будет пересечением (общей частью) этих полуплоскостей – четырехугольник ABCD (рисунок 1).

1.2 На множестве допустимых решений (ABCD) найдем точку, в которой целевая функция $Z = 2x_1 + x_2$ имеет максимальное значение. Для этого посмотрим линии уровня целевой функции.

Линией уровня называется множество точек, на которых функция принимает постоянное значение:

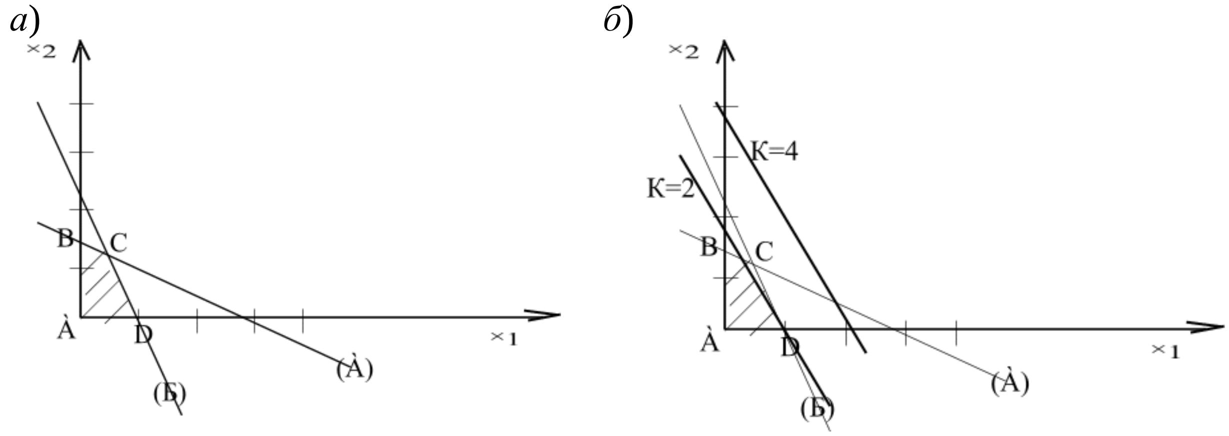

Рисунок 1 – Графическое представление области допустимых решений (*а*) и линии уровня (*б*)

$$Z = 2x_1 + x_2 = K, \tag{5}$$

где K – задаваемая постоянная.

При $K = 1$ уравнение линии уровня будет:

$2x_1 + x_2 = 1$ или (в отрезках) $\frac{x_1}{1/2} + \frac{x_2}{1} = 1$.

Нанеся линии уровня на область допустимых решений (рисунок 1, *б*), получим, что при увеличении значения Z соответствующая линия уровня перемещается параллельно предыдущей вправо и вверх. Таким образом, точкой из многоугольника ABCD, в которой целевая функция Z имеет максимальное значение, будет вершина C (рисунок 1, *б*). Эта точка и определяет решение задачи.

1.3 Вычисление координат оптимальной точки (C). Точка C лежит на пересечении прямых (A) и (B), поэтому, чтобы определить ее координаты надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3; \\ 3x_1 + x_2 = 3. \end{cases} \tag{6}$$

Решение: $x_1^* = 0{,}6$; $x_2^* = 1{,}2$; максимальное значение $Z^* = 2 \cdot 0{,}6 + 1{,}2 = 2{,}4$ у. е.

2 Решение ЗЛП графическим способом в случае многомерного пространства.

Графический метод решения ЗЛП может быть применен не только к задачам с двумя переменными и ограничениями в виде неравенств, но и к каноническим задачам, у которых $n–m \le 2$, где n – количество переменных, а m – число линейно независимых уравнений (число векторов, образующих базис пространства). Необходимо выбрать две произвольные переменные (их называю свободными) x_{j1}, x_{j2} и, используя систему уравнений, выразить через них остальные переменные:

$$x_j = \varphi_j(x_{j1}, x_{j2}), j \in 1{:}n \backslash \{j_1, j_2\}, \tag{7}$$

где $\varphi_j(x_{j1}, x_{j2})$ – линейные функции.

Подставив полученное выражение в целевую функцию, получим задачу с двумя переменными:

$$\max(\min) Z'(x_{j1}, x_{j2}) = Z(\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}); x_{j1}, x_{j2}), j \in 1{:}n \backslash \{j_1, j_2\}; \tag{8}$$

– при ограничениях

$$\begin{aligned} &\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}) \geq 0; \\ &x_{j1}, x_{j2} \geq 0, j \in 1{:}n \backslash \{j_1, j_2\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Последняя ЗЛП может быть решена графически.

3 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Задача 1. Решить симплекс-методом задачи, составленные в разделе 1.

Задача 2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Исходные данные

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг				Запасы сырья, кг
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	120
II	0	1	3	2	240
III	4	2	0	4	800
Цена изделия, р.	9	6	4	7	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальную производственную программу, решив задачу с помощью симплекс-метода.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Задача 3. Решить задачу симплексным методом (N – номер варианта).

$$\min Z(X) = -x_1 - x_2;$$
$$\begin{cases} -(N+1)\cdot x_1 + x_2 \le 5; \\ 5x_1 + x_2 \ge 5; \\ x_1 - (1+N)\cdot x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Методические рекомендации

Решение задач осуществляется в соответствии с правилами симплексного преобразования.

1 В индексной строке симплекс-таблицы найти наибольший положительный элемент, если целевая минимизируется, (или отрицательный, в противном случае). Столбец, соответствующий этому элементу, – разрешающий.

2 Вычислить отношение свободных членов уравнения к положительным элементам разрешающего столбца. Данное отношение называется симплекс-отношением. Найти наименьшее из симплекс-отношений, оно соответствует разрешающей строке.

3 На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится

разрешающий элемент a_{i0j0}. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них.

4 Неизвестные элементы, соответствующие разрешающим столбцу и строке, меняются местами.

5 Переход к следующей таблице. Элементы разрешающей строки новой таблицы будут равны $a_{i0j}{}' = \dfrac{a_{i0j}}{a_{i0j0}}$ и $b_{i0}{}' = \dfrac{b_{i0}}{a_{i0jo}}$.

6 Элементы разрешающего столбца равны нулю, за исключением $a_{i0j0}{}' = 1$, т. к. x_{jo} – базисная переменная.

7 Все остальные элементы находятся по формулам:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{i0j0} - a_{i0j}a_{ij0}}{a_{i0j0}} \quad \text{и} \quad b'_i = \frac{b_i a_{i0j0} - b_{i0}a_{ij0}}{a_{i0j0}}. \qquad (10)$$

8 Вычисляем элементы индексной строки

$$\Delta' j = \frac{\Delta_j a_{i0j0} - \Delta_{jo} a_{ij0}}{a_{i0j0}} \quad \text{и} \quad \Delta' o = \frac{\Delta_0 a_{i0j0} - \Delta j_0 b_{i0}}{a_{i0j0}}. \qquad (11)$$

Для контроля вычислений можно вычислить $\Delta'_0 = C_Б A_0$ и $\Delta'_j = C_Б A_0 - c_j$.

9 Алгоритм продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто условие оптимальности:

а) опорный план X_0 доставляет целевой функции минимальное значение $\min Z = z(X_0) = \Delta_0$, если для него все оценки свободных переменных внеположительны;

б) опорный план X_0 доставляет целевой функции максимальное значение $\max Z = z(X_0) = \Delta_0$, если все оценки свободных переменных неотрицательны.

4 Двойственность в задаче линейного программирования

Задача 1. Составить двойственные задачи для задач из индивидуального задания 1 темы 2.

Задача 2. Составить двойственные задачи для задач из темы 1. Используя теоремы двойственности, найти решение двойственной задачи из оптимального решения прямой задачи. Дать экономическую интерпретацию переменных задачи.

Задача 3. Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты на изготовление единицы продукции приведены в таблице 9, там же указан общий фонд рабочего времени и цена изделия каждого вида.

Таблица 9 – Исходные данные

Тип оборудования	Нормы затрат времени на одно изделие, ч				Общий фонд рабочего времени, ч
	А	Б	В	Г	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
Цена изделия, р.	8	3	2	1	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости. Составить двойственную задачу, решить с помощью симплекс-метода. Используя теоремы двойственности, найти решение прямой задачи из оптимального решения двойственной задачи. Дать экономическую интерпретацию переменных задачи.

Методические рекомендации

Алгоритм составления двойственной задачи.

1 Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду «≤», а если минимум – к виду «≥». Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на минус 1.

2 Составить расширенную матрицу системы А1, в которую включить матрицу коэффициентов при переменных А, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции.

3 Найти матрицу А1’ , транспонированную к матрице А1.

4 Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы А1’и условия неотрицательности переменных.

Решение двойственной задачи записать на основе последней симплекс-таблицы, используя теоремы двойственности.

Первая (основная) теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны: Fmax = Zmin.

Установить соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи (рисунок 2).

Переменные прямой задачи					
первоначальные		дополнительные			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
↕	↕	↕	↕	↕	↕
y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4
дополнительные		первоначальные			
Переменные двойственной задачи					

Рисунок 2 – Соответствие между переменными прямой и двойственной задач

Вторая теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

5 Транспортные модели

Задача 1. Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 140, 160, 170 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 120, 90, 200, 110 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решить задачу методом потенциалов.

Задача 2. Три электрогенерирующие станции мощностью 25, 40 и 30 млн кВт·ч поставляют электроэнергию в три города. Максимальная потребность в электроэнергии этих городов оценивается в 30, 35 и 24 млн кВт·ч. Цены за 1 млн кВт·ч в данных городах приведены в таблице 10. Найти оптимальный план энергопотребления.

Таблица 10 – Стоимость за электроэнергию

В рублях

Показатель		Города		
		1	2	3
Станция	1	600	700	400
	2	320	300	350
	3	500	480	450

Задача 3. Решите распределительную задачу, исходные данные которой приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Распределительная матрица задачи

Производитель	Продукция			Фонд времени, ч
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 (c_{ij}, р./т) (λ_{ij}, т/ч) 6	5 2	4 4	360
A_2	6 12	2 4	2 8	90
A_3	3 72	9 24	1 48	146
A_4	2 9	5 3	3 6	1296
Объем выпуска, т	7056	3216	2976	

Задача 4. Некоторая фирма содержит три магазина, которым еженедельно следует доставлять товар: первому магазину – 1050 кг сыра, второму – 600 мешков муки, третьему – 2400 упаковок сока. Товары доставляются грузовыми машинами четырех транспортных предприятий. Количество машин на этих предприятиях составляет 65, 40, 45 и 20 машин. Все машины имеют различную грузоподъемность [ед.тов./маш.], в зависимости от типа машины и типа перевозимого груза:

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \\ 25 & 15 & 30 \\ \text{кг / маш.} & \text{мешков / маш.} & \text{упак. / маш.} \end{pmatrix}.$$

Стоимости использования машин [р./маш.] в зависимости от дальности перевозки и емкости машины равны:

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 & 24 \\ 10 & 9 & 6 \\ 250 & 210 & 240 \\ 100 & 75 & 90 \end{pmatrix}.$$

Организуйте экономичную перевозку товаров (при решении используйте метод северо-западного угла).

Методические рекомендации

Способы составления начального опорного плана.

1 *Способ северо-западного угла* предполагает начать работу с клетки (1, 1). Предположим, что $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$:

а) если $a > b_1$, то $x_{11} = b_1$, т. е. запросы первого потребителя будут полностью удовлетворены. В дальнейшем первый столбец в расчет не принимается, в нем переменные $x_{i1} = 0$; $i = 2, m$. Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку (1; 2) меньшее из чисел $(a_1 - b_1)$ и $a_1 > b_2$, т. е. $x_{11} = \min\{a_1 - b_1; \ b_2\}$; когда запасы первого поставщика исчерпаны, то дальнейшие расчеты производятся по второй строке и т. д.;

б) если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$, при этом запас первого поставщика будет полностью исчерпан, поэтому $x_{1j} = 0$, $j = 2; n$. Первая строка из дальнейшего рассмотрения исключается.

Аналогично производятся вычисления во всех остальных строках. План перевозок, построенный по такому способу, содержит $m + n - 1$ заполненных клеток, т. е. является опорным.

2 *Способ минимального элемента*. В данном методе рассматриваются тарифы, и в первую очередь заполняется клетка с минимальным значением тарифа. При этом в клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую

поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен. В результате получаем опорный план, который должен содержать $m + n - 1$ заполненных клеток.

В процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены и столбец и строка. Такое возможно в случае, когда исчерпан запас поставщика и полностью удовлетворен спрос потребителя. Полученный план будет вырожденным, т. к. выполняется условие равенства количества занятых клеток величине $m + n - 1$. В этом случае в свободную клетку необходимо записать число «0» – «ноль–загрузка», условно считая эту клетку занятой. Однако число «0» записывается в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.

3 *Метод Фогеля*. В распределительной таблице по строкам и столбцам определяют разность между двумя наименьшими тарифами. Максимальную разность отмечают знаком « □». Далее в строке (или в столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (или столбцы) с нулевыми остатками груза в дальнейшем в расчет не принимаются, на каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится по рассмотренным ранее правилам.

Транспортная задача является задачей линейного программирования, может быть решена симплекс-методом, но в виду ее специфики для нее был разработан специальный метод решения – метод потенциалов.

Алгоритм метода потенциалов:

1) построить опорный план по одному из правил;

2) вычислить потенциалы поставщиков и потребителей u_i и v_j, решив систему уравнений $v_j + u_i = c_{ij}$;

3) вычислить оценки s_{ij} для всех свободных клеток. Если все $s_{ij} \geq 0$, то опорный план оптимален. Если же для всех свободных клеток $s_{ij} > 0$, то оптимальный план единственный. Если же хоть для одной свободной оценки $s_{ij} = 0$, то имеется бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением целевой функции;

4) в случае если есть $s_{ij} \leq 0$, то строиться цикл, расчетная таблица заполняется заново и алгоритм начинается с пункта 2.

Этапы решения распределительной задачи (*РЗ*).

1 Преобразование распределительной задачи в транспортную задачу:

а) выбор базового ресурса и расчет нормированных производительностей ресурсов α_i:

$$\alpha_i = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{баз\ j}}; \tag{12}$$

б) пересчет запаса рабочего ресурса исполнителей a_i':

$$a_i' = \alpha_i a_i\,; \tag{13}$$

в) пересчет планового задания b_j':

$$b_j' = \frac{b_j}{\lambda_{баз\ j}}\,; \tag{14}$$

г) пересчет себестоимостей работ:

$$c_{ij}' = c_{ij}\lambda_{баз\ j}\,. \tag{15}$$

2 Проверка баланса пересчитанных параметров $\sum_{i=1}^{n} a_i' = \sum_{j=1}^{m} b_j'$ и построение транспортной матрицы.

3 Поиск оптимального решения транспортной задачи: $X^{'*} = \left(x'^{*}_{ij}\right)$.

4 Преобразование оптимального решения транспортной задачи $X^{'*}$ в оптимальное решение распределительной задачи X^*, причем переход $X^{'*} \to X^*$ выполняется по формуле (16)

$$x_{ij} = \frac{x_{ij}^{'}}{\alpha_i}, \tag{16}$$

где x_{ij} и $x_{ij}^{'}$ – элементы решения распределительной и транспортной задач соответственно.

5 Определение количества работ $X^{к*} = \left(x_{ij}^{к*}\right)$, соответствующее оптимальному решению распределительной задачи X^*:

$$x_{ij}^{к} = \lambda_{баз j} x_{ij}^{'}\,. \tag{17}$$

6 Определение целевой функции распределительной задачи $L(\ X^*)$.

6 Модели теории игр

Задача 1. Для следующих платежных матриц определить нижнюю и верхнюю цену игры, найти оптимальное решение игры, если существует седловая точка:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Для задачи, в которой отсутствует седловая точка, следует упростить матрицу, построить прямую и двойственную задачу линейного программирования, решить их, записать смешанные стратегии обоих игроков.

Задача 2. Небольшое частное предприятие выпекает диетические хлебобулочные изделия. Оборудование позволяет выпекать 500, 600 или 700 кг изделий в день. Спрос на данный вид продукции также может составлять 500, 600 или 700 кг в день. Если хлебобулочные изделия не продаются в этот день, то они возвращаются на предприятие для переработки. Затраты на производство 1 кг изделий составляют 2 тыс. р., а цена реализации – 3,5 тыс. р. Дополнительные затраты в случае возврата составляют 1 тыс. р. на 1 кг изделий.

Необходимо определить ежедневный объем выпечки диетических хлебобулочных изделий.

Определить оптимальную стратегию предприятия, используя критерии Вальда. Гурвица (0,2), Байеса (0,4; 0,25; 0,35), Лапласа. Сэвиджа.

Задача 3. Издательство «Свет» планирует издавать учебник. Результаты исследования отдела маркетинга представлены в таблице 12.

Таблица 12 – Исходные данные

Спрос на книгу в ближайшие три года, экз.	2000	3000	4000	5000
Вероятность	0,1	0,5	0,2	0,2

Предполагаемая прибыль составит 9 тыс. р. за 1 шт.; если книга не продается, то убытки равны 4 тыс. р. за 1 шт. Если издательство не удовлетворяет спрос, то убытки по неудовлетворенному спросу составят 1 тыс. р. за книгу (для поддержания репутации издательства и будущего спроса).

Определить, какое количество экземпляров учебника следует издавать фирме на трехлетний период, чтобы обеспечить возможно большую прибыль.

Задача 4. Частная фирма «Росток» производит косметическую продукцию для подростков. В течение месяца реализуется 15, 16 или 17 упаковок товара. Цена реализации упаковки составляет 75 тыс. р.

Косметика имеет малый срок годности. Поэтому, если упаковка не продана в месячный срок, она должна быть уничтожена. Поскольку производство одной упаковки обходится в 15 тыс. р., то потери фирмы составляют 15 тыс. р. Вероятности продать 15, 16 или 17 упаковок за месяц – 0,55; 0,1 и 0,35 соответственно.

Определить, сколько упаковок косметики следует производить фирме ежемесячно, чтобы обеспечить возможно большую прибыль.

Методические рекомендации

1 Решение матричных игр в чистых стратегиях.

Выигрыш игрока обозначается через $h_i(x)$, а соответствие между набором ситуаций и выигрышем игрока i называется функцией выигрыша (или платежной функцией) этого игрока H_i.

В качестве основного допущения в теории игр предполагается, что каждый игрок стремится обеспечить себе максимально возможный выигрыш при любых действиях партнера. Оптимальная стратегия Игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных выигрышей:

$$\max_i \min_j h_{ij} . \tag{18}$$

Это значение называется нижней ценой игры – α. Данная стратегия называется максиминной.

Игрок 2 выберет j-ю (минимаксную)

$$\min_j \max_i h_{ij} . \tag{19}$$

Это значение называется называемого верхней ценой игры – β.

В случае, если верхняя цена игры равна нижней, оба игрока получают свои гарантированные платежи, а значение h_{ij}^* называется ценой игры. В этом случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях. Стратегии, при которых достигается $h_{ij},^*$ – считаются оптимальными чистыми стратегиями.

2 Решение матричных игр в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей. Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры:

$$h_н \le V \le h_в . \tag{20}$$

При этом условии величина V называется ценой игры.

Для матричной игры, для которой $h_н \neq h_в$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока 1 (p_1, p_2 ,…, p_m) и для игрока 2 (q_1, q_2 , … , q_n), при которых игроки достигали бы своего максимально гарантированного выигрыша.

Данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств:

– для первого игрока: – для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1; \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/v; \\ x_1 \geq 0 : x_2 \geq 0 \ldots x_m \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq 1; \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1; \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/V; \\ y_1 \geq 0 : y_2 \geq 0 \ldots y_n \geq 0. \end{cases} \tag{21}$$

$$\min Z = \min 1/V = \min (x_1 + \ldots + x_m); \quad \max Z = \max 1/V = \max (y_1 + \ldots + y_n).$$

где $x_i = p_i/V$, а $q_j/V = y_j$.

3 Решение игр с природой.

Если вероятности q_j состояний $П_j$ природы известны, то пользуются критерием Байеса

$$\max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j . \tag{22}$$

Если игроку А представляются в равной мере правдоподобными все состояния $П_j$ природы, то, учитывая «принцип недостаточного основания» Лапласа, оптимальной считают чистую стратегию A_i, обеспечивающую

$$\max_i \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . \tag{23}$$

Оптимальной по критерию Вальда считается чистая стратегия A_i, при которой наименьший выигрыш игрока А будет максимальным, т. е. ему обеспечивается

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} . \tag{24}$$

Оптимальной по критерию Сэвиджа считается та чистая стратегия A_i, при которой минимизируется величина r_{ij} максимального риска, т. е. обеспечивается

$$\min_i \max_j r_{ij} . \tag{25}$$

Элементы r_{ij} матрицы рисков определяются по формуле

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \geq 0, \tag{26}$$

где β_j – максимально возможный выигрыш игрока А при состоянии $П_j$ или максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы, т.е.

$$\beta_j = \max_i a_{ij}. \tag{27}$$

Оптимальной по критерию Гурвица считается чистая стратегия A_i, найденная из условия

$$\max_i (\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij}), \tag{28}$$

где γ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений.

При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\gamma = 0$ – в критерий крайнего оптимизма, когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш. В связи с этим критерий Гурвица называют критерием пессимизма-оптимизма.

7 Сетевые модели

Задача 1. Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции склада по данным таблицы 13 и рассчитать – временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 13 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующая работа	Продолжительность, дн.
a1	–	1
a2	–	3
a3	–	4
a4	a1	3
a5	a1, a2	2
a6	a2	1
a7	a3, a6	4

Задача 2. Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 0, завершающим событием 6, и с указанными в таблице 14 продолжительностями работ показана на рисунке 3. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

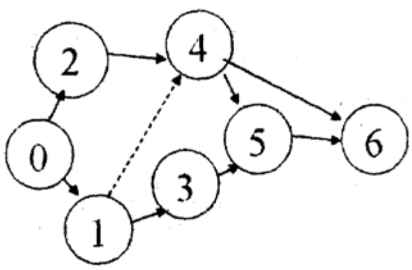

Рисунок 3 – Сетевая модель

Таблица 14 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дн.
(0,1)	2
(0,2)	3
(1,3)	2
(1,4)	0
(2,4)	2
(3,5)	3
(3,6)	2
(4,5)	7
(4,6)	5
(5,6)	6

Задача 3. По данным о кодах и длительностях работ в днях (таблица 15) постройте график привязки сетевой модели, определите критические пути и их длительность. Определите свободные и полные резервы каждой работы, отметьте на графике привязки свободные резервы работ.

Таблица 15 – Исходные данные

(i,j)	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	3,6	3,7	4,5	4,6	5,7	6,7
$t(i,j)$, дн.	3	3	2	10	2	5	9	10	6	1	4

Задача 4. Для выполнения комплекса операций по ремонту оборудования, представленного графиком (рисунок 4), в первые три дня выделено 7 ед. ресурсов, в 4 и 5 день – 6 ед., а в последующие дни – 8 ед. Каждой дуге графика прописаны два числа: – первое – временная оценка в днях, второе – интенсивность выполнения операции.

Необходимо определить сроки выполнения операций таким образом, чтобы завершить весь комплекс за минимальное время. Операции не допускают перерыва в выполнении. Построить график Ганта.

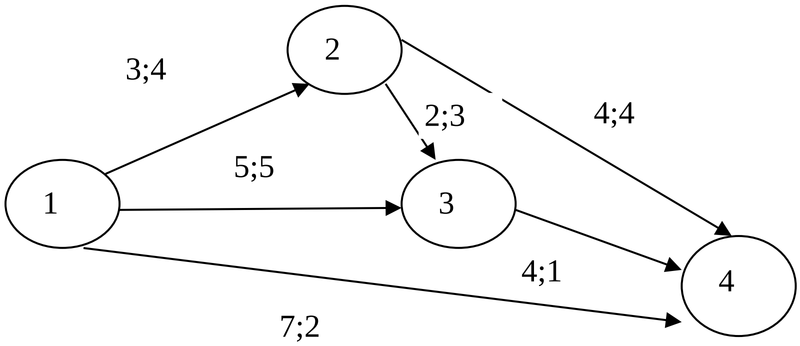

Рисунок 4 – Сетевая модель

Методические рекомендации

К основным временным параметрам сетевых графиков относятся:

– продолжительность критического пути (критический срок);

– сроки свершения и резервы событий;

– сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(1) = 0; \qquad (29)$$

$$t_p(j) = \max\,(t_p(i) + t(i,j)) \quad t\epsilon U^*, \qquad (30)$$

где U^* – множество работ, входящих в j-е событие;

$t_р(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i, j);

$t(i,j)$ – продолжительность работы (i, j).

Тогда для завершающего события S $t_р(S) = t_{кр}$.

Поздний срок $t_п(i)$ *свершения события* i – такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием без нарушения сроков реализации проекта в целом.

Для завершающего события S предполагается, что

$$t_п(S) = t_р\,(S) = t_{кр}. \tag{31}$$

Тогда

$$t_п(i) = \min(t_п(j) - t(i,j)), \tag{32}$$

где $t_п(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i, j).

Резерв времени $R(i)$ *события* i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i). \tag{33}$$

Ранние и поздние сроки критических событий совпадают, т. е. резерв времени у них равен нулю.

Знная сроки свершения событий, можно найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ:

– ранний срок начала работы

$$t_{рн}(i, j) = t_р(i); \tag{34}$$

– ранний срок окончания работы

$$t_{ро}(i, j) = t_р(i) + t(i, j); \tag{35}$$

– поздний срок окончания работы

$$t_{по}(i, j) = t_п(j); \tag{36}$$

– поздний срок начала работы

$$t_{пн}(i, j) = t_п\;(j) - t(i, j); \tag{37}$$

– полный резерв работы

$$Rп(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i, j). \tag{38}$$

8 Модели теории массового обслуживания

Задача 1. Известно, что заявки на услуги по перевозке грузов в автопарк поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\overline{t_{\text{об}}} = 2$ мин. Определить показатели эффективности работы системы массового обслуживания (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Задача 2. В условиях задачи 1 определить оптимальное число телефонных номеров в автопарке, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее 90 заявок на переговоры.

Задача 3. В обслуживающий центр с тремя каналами обслуживания поступают заказы от предприятий на работы по техобслуживанию и ремонту. Если работают все три канала, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 ч. Интенсивность потока заявок 0,25 (одна в час). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы обслуживающего центра.

Задача 4. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с тремя каналами. На осмотр и выявления дефектов каждой машины затрачивается около 40 мин. На осмотр поступает в среднем 52 машины в сутки. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она уезжает.

1 Найти предельные вероятности, а также показатели эффективности рассматриваемой системы массового обслуживания (СМО).

2 Решить задачу при условии неорганичной очереди и при условии двух заявок в очереди.

3 Решить задачу при условии, что имеется четыре канала обслуживания.

4 Определить число каналов обслуживания в задаче, чтобы относительная пропускная способность СМО была не менее 0,95.

Методические рекомендации

В таблице 16 представлены формулы характеристик для различных видов систем массового обслуживания (СМО).

Таблица 16 – Характеристики СМО

Показатель	Формула
1	2
Одноканальная СМО с отказами	
Коэффициент использования СМО	$p = \lambda/\mu$

Продолжение таблицы 16

1	2
Предельные вероятности: – вероятность, что система свободна	$p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$
– вероятность, что система занята	$p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$
Относительная пропускная способность	$Q = p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = Q \cdot \lambda$
Вероятность отказа в заявке	$P_{otk} = p_1$
Многоканальная СМО с отказами	
Коэффициент использования СМО	$p = \lambda/\mu$
Предельные вероятности: – вероятность, что система свободна	$p_0 = \left(1 + p + \dfrac{p^2}{2!} + \ldots + \dfrac{p^n}{n!}\right)^{-1}$
– вероятность, что в системе занято k каналов	$p_k = p^k / k!\, p_0, k = 1, 2, \ldots, n$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{otk} = 1 - p^n/n! \cdot p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot (1 - p^n/n! \cdot p_0)$
Вероятность отказа в заявке	$P_{otk} = p^n/n! \cdot p_0$
Среднее число занятых каналов	$\bar{k} = \dfrac{A}{\mu}$
Одноканальная СМО с неограниченной очередью	
Предельные вероятности: – вероятность, что система свободна	$p_0 = 1 - p$
– вероятность, что в очереди находится k заявок	$p_k = p^k \cdot (1 - p)$
Среднее число заявок в системе	$L_{sist} = \dfrac{p}{1-p}$
Среднее число заявок в очереди	$L_{och} = L_{sist} - L_{ob}$
Среднее число заявок под обслуживанием	$L_{ob} = 1 - p_0$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{sist} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot L_{sist}$
Среднее время пребывания заявки в очереди	$T_{och} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot L_{och}$
Одноканальная СМО с ограниченной очередью	
Вероятность отказа в заявке	$P_{otk} = p^{m+1} \cdot p_0$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{otk}$

Окончание таблицы 16

1	2
Предельные вероятности состояний	$\begin{cases} p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-p}{1-p^{m+2}}, & p \neq 1; \\ \dfrac{1}{m+2}, & p = 1; \end{cases} \\ p_k = p^k \cdot p_0, \; k = 1, 2, \ldots, m+1 \end{cases}$
Среднее число заявок в очереди	$L_{och} = \begin{cases} \dfrac{p^2 \cdot \left(1 - p^m \cdot \left(m+1-m \cdot p\right)\right)}{\left(1+p^{m+2}\right)\left(1-p\right)}, & p \neq 1, \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & p = 1 \end{cases}$
Среднее число занятых каналов	$\bar{k} = L_{och} + 1 - p_0$
Среднее время ожидания в очереди	$T_{och} = L_{och} / \lambda$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{sist} = L_{och} / \lambda + Q / \mu$
Многоканальная СМО с неограниченной очередью	
Предельные вероятности: – вероятность, что система свободна	$p_0 = \dfrac{1}{(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{p^k}{k!}) + \dfrac{p^n}{n!(1-\dfrac{p}{n})}}$
– вероятность, что в $n - k$ каналов свободно	$p_k = p^k / k! \, p_0, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$
– вероятность очереди из $k - n$ заявок	$p_k = \dfrac{p^k}{n! n^{k-n}} p_0, \;\; k \geq n$
– вероятность того, что заявка окажется в очереди	$\mathrm{p}_{och} = \dfrac{p^{n+1}}{n! \cdot (n-p)}$
Среднее число заявок в очереди	$L_{och} = \dfrac{p^{n+1} \cdot p_0}{n! \cdot n} \cdot (1 - \dfrac{p}{n})^2$
Среднее число заявок в системе	$L_{sist} = L_{och} + p$
Среднее время ожидания в очереди	$T_{och} = L_{och} / \lambda$
Коэффициент простоя каналов	$K_s = 1 - p / n$
Примечание – λ – интенсивность поступления заявок в систему; t – среднее время обслуживания заявки; $\mu = 1/t$ – скорость обслуживания; n – число каналов; m – максимальная длина очереди	

Список литературы

1 **Алесинская, Т. В.** Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Т. В. Алесинская. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.

2 **Белолипецкий, А. А.** Экономико-математические методы: учебник для вузов / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. – Москва: Академия, 2009. – 368 с.

3 **Бродецкий, Г. Л.** Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации: учебник для студентов вузов / Г. Л. Бродецкий, Д. А. Гусев. – 2-е изд., стер. – Москва: Академия, 2014. – 288 с.

4 **Гармаш, А. Н.** Математические методы в управлении: учебное пособие для вузов / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова. – Москва: Вузовский учебник: Инфра-М, 2012. – 272 с.

5 Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2011. – 430 с.

6 Логистика: тренинг и практикум: учебное пособие / Под ред. Б. А. Аникина, Т. А. Родкиной. – Минск: Проспект, 2009. – 448 с.

7 **Попов, А. М.** Экономико-математические методы и модели: учебник для бакалавров / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – Москва: Юрайт, 2011. – 356 с.

8 **Фомин, Г. П.** Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник / Г. П. Фомин. – 2-е изд, перераб. и доп. – Москва: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

9 Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Под ред. С. Ф. Миксюка, В. Н. Комкова. – Минск: БГЭУ, 2006. – 219 с.