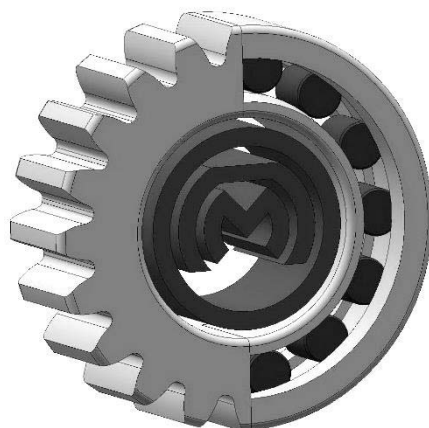


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности 1-37 01 07 «Автосервис»  
дневной и заочной форм обучения*



Могилев 2020

УДК 621.9.04  
ББК 34.5  
Т38

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин»  
«17» февраля 2020 г., протокол № 8

Составители: канд. техн. наук, доц. В. Л. Комар;  
ассистент М. В. Дроздова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Изложены цель, задачи, содержание и порядок выполнения практических занятий.

Учебно-методическое издание

## ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Ответственный за выпуск	А. П. Прудников
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2020

## Содержание

Введение.....	4
Практическое занятие № 1. Анализ и синтез плоских рычажных механизмов.....	5
Практическое занятие № 2. Определение угловых скоростей и ускорений звеньев. Построение планов скоростей и ускорений шатунных механизмов. ....	11
Практическое занятие № 3. Метод Жуковского. Расчет сил инерции. ....	18
Практическое занятие № 4. Силовой анализ механизмов методом планов сил. ....	20
Практические занятия № 5–7. Аналитический расчет планетарных механизмов. Кинематический анализ зубчатых механизмов. Синтез зубчатых механизмов.....	26
Практическое занятие № 8. Анализ кулачковых механизмов.....	35
Список литературы .....	41

## Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по курсу «Теория механизмов и машин» (ТММ) для студентов специальности 1–37 01 07 «Автосервис» дневной и заочной форм обучения.

Целью данных методических рекомендаций является формирование у студентов навыков изучения конструкций, принципа работы, основных геометрических параметров объектов, изучаемых дисциплиной «Теория механизмов и машин», а также порядок их анализа.

Теория механизмов и машин – это общеинженерная дисциплина, играющая роль связующего звена между циклами общенаучных и специальных дисциплин. Совместно с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин она образует группу предметов, закладывающих фундамент инженерного образования машиностроительного профиля.

Все задачи курса ТММ можно условно разделить на две категории: задачи анализа и задачи синтеза. Анализ состоит в исследовании кинематических и динамических свойств механизма по заданной схеме и заданным размерам. Задача синтеза является обратной по отношению к задаче анализа.

Задания для выполнения индивидуальных работ, требования к содержанию и оформлению изложены в [4–6].

## Практическое занятие № 1. Анализ и синтез плоских рычажных механизмов

### Теоретические основы практического занятия

*Механизмом* называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел. Механизмы являются составными частями машин.

Механизм состоит из звеньев. *Звеном* называется одна деталь механизма или несколько деталей, жестко связанных между собой. Звено, относительно которого изучается движение остальных звеньев, называется *стойкой*. Звено, которому сообщается движение, называется *входным*. Звено, совершающее движение, для реализации которого создан механизм, называется *выходным*.

*Кинематическая пара* – соединение звеньев, допускающее их относительное движение. Кинематические пары бывают высшие и низшие. В *низших* парах звенья соприкасаются по поверхностям, а в *высших* – по линиям или в точках. По числу допускаемых относительных движений соединяемых звеньев кинематические пары бывают *одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные*. По числу связей, накладываемых на относительное движение соединяемых звеньев кинематические пары бывают *первого, второго, третьего, четвертого и пятого классов S* (таблица 1).

Таблица 1 – Классификация кинематических пар

Подвижность $W$	Класс $S$	Название	Схема	Условное обозначение
3	3	Сферическая		
2	4	Сферическая с пальцем		
2	4	Цилиндрическая		
1	5	Вращательная		 
1	5	Поступательная		
1	5	Винтовая		

*Кинематическая цепь* – это система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Механизм – это кинематическая цепь, в которой указаны

стойка, входные и выходные звенья. Если кинематическая цепь содержит  $n$  подвижных звеньев, то число ее степеней свободы определится по формуле Сомова–Мальшева:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (1)$$

где  $n$  – число подвижных звеньев;

$p_1, p_2$  – число одно- и двухподвижных пар.

Если все звенья механизма движутся в плоскости, то (1) преобразуется в формулу Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \quad (2)$$

Число степеней свободы  $W$  равно числу обобщенных координат, т. е. числу независимых между собой параметров, однозначно определяющих положение всех звеньев механизма. Чаще всего применяют механизмы с  $W = 1$ . Звенья, за которыми закреплены обобщенные координаты, называют *начальными*.

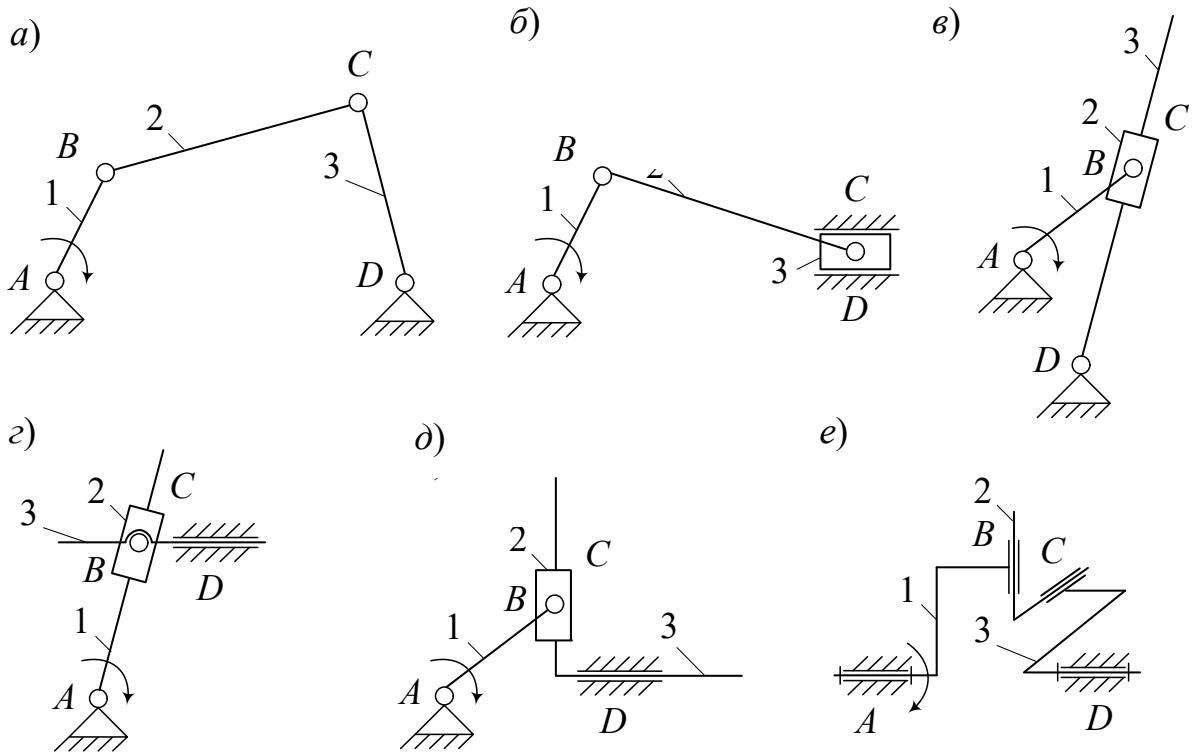
Существуют различные виды механизмов: рычажные, зубчатые, кулачковые, фрикционные и др. Механизмы, звенья которых образуют только низшие пары, называются *рычажными*. На рисунке 1 приведены основные виды простейших рычажных механизмов. Их звенья обозначают цифрами. Звенья имеют специальные названия. Кривошип 1 (см. рисунок 1) – звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси. Коромысло 3 (см. рисунок 1, а) – звено, совершающее неполный оборот вокруг неподвижной оси. Шатун 2 (см. рисунок 1, а и б) – звено рычажного механизма, не образующее кинематической пары со стойкой (совершает сложное движение). Кулиса 3 (см. рисунок 1, в) – звено рычажного механизма, совершающее вращательное движение и образующее с другим звеном (кулисным камнем 2 на рисунке 1, в) поступательную кинематическую пару. Кинематические пары обозначают прописными латинскими буквами. Неподвижное звено (стойка) отмечается штриховкой, не обозначается, но подразумевается, что оно имеет обозначение «ноль».

Распространена структурная классификация рычажных механизмов, предложенная Л. В. Ассуром и И. И. Артоболевским, согласно которой каждый механизм с одной степенью свободы  $W = 1$  можно считать состоящим из механизма первого класса и присоединенных к нему структурных групп.

*Механизм первого класса* представляет собой ведущее звено, соединенное со стойкой посредством кинематической пары. Обозначается на схеме стрелкой, указывающей направление его движения (рисунок 2).

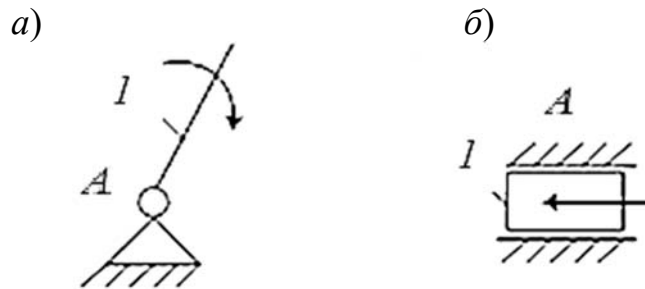
*Структурной группой* (группой Ассура) называется такая кинематическая цепь, которая после присоединения к стойке имеет нулевую степень свободы  $W = 0$ . После присоединения этой группы к звеньям механизма его степень подвижности не изменяется. Формула (2) для структурной группы приводится к следующему виду:

$$0 = 3n - 2p_1; \quad p_1 = 1,5n. \quad (3)$$



*a* – шарнирный четырехзвенник; *б* – кривошипно-ползунный; *в* – кулисный; *г* – тангенсный; *д* – синусный; *е* – крестовая муфта (механизм Ольдгейма)

Рисунок 1 – Основные виды рычажных механизмов



*a* – кривошип со стойкой; *б* – ползун со стойкой

Рисунок 2 – Механизмы первого класса

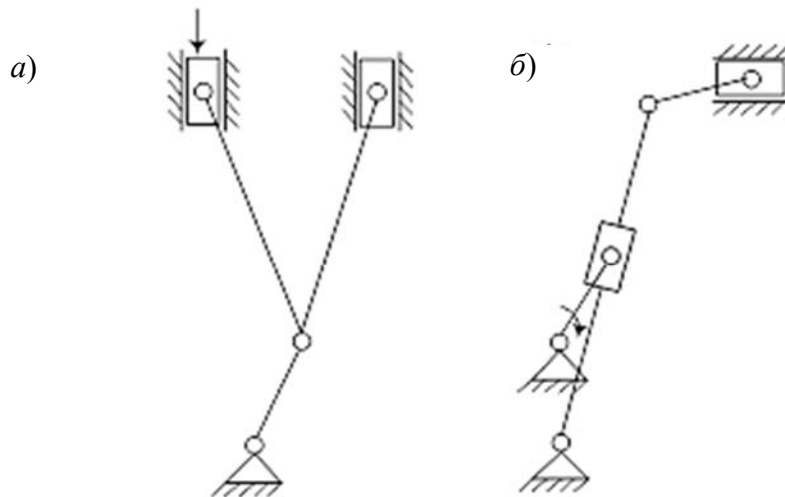
В таблице 2 представлены основные структурные группы. Структурная группа, у которой  $p_1 = 3$ ,  $n = 2$ , называется *диадой*.

Таблица 2 – Основные структурные группы

$n$	$p_1$	Схема структурных групп				
2	3					
4	6					

### Пример выполнения задания

Рассмотрим структуру плоских рычажных механизмов, приведенных на рисунке 3. Обозначим звенья механизмов цифрами (рисунок 4), начиная с ведущего звена. Укажем названия звеньев и движение, которое они совершают. Обозначим кинематические пары буквами. Укажем их названия и подвижность  $W$  (таблица 3), номера звеньев, образующие пару (таблица 4). Определим степень подвижности:  $W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ .



$a$  – механизм V-образного двигателя внутреннего сгорания;  $b$  – механизм поперечно-строгального станка

Рисунок 3 – Плоские рычажные механизмы



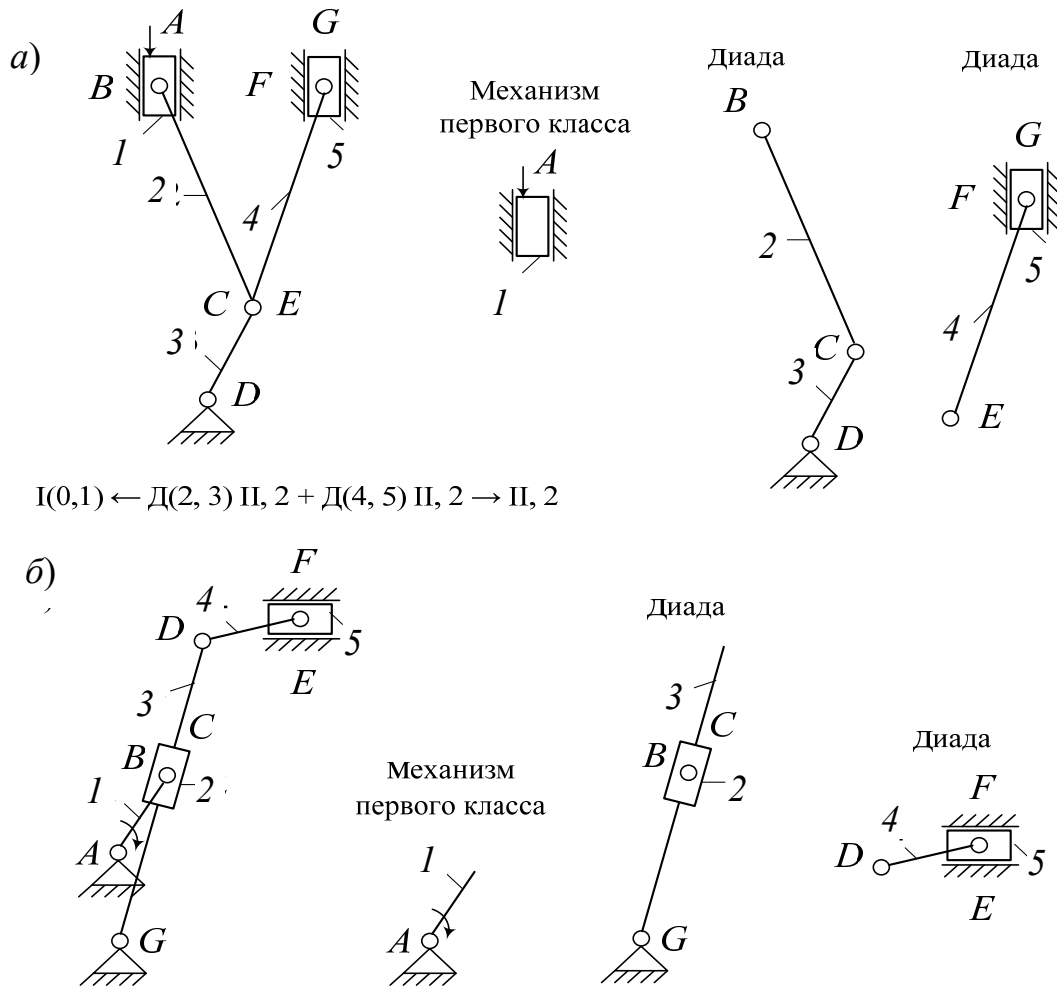


Рисунок 4 – Примеры структурного анализа механизмов

Таблица 3 – Звенья рычажных механизмов

Механизм V-образного двигателя		Механизм поперечно-строгального станка	
Название	Движение	Название	Движение
1 Ползун	Поступательное	1 Кривошип	Вращательное
2 Шатун	Сложное	2 Кулисный камень	Сложное
3 Кривошип	Вращательное	3 Кулиса	Вращательное
4 Шатун	Сложное	4 Шатун	Сложное
5 Ползун	Поступательное	5 Ползун	Поступательное

Для структурного анализа из заданных механизмов выделим механизмы первого класса. Для механизма двигателя – это ползун 1, образующий поступательную кинематическую пару A со стойкой 0. Для механизма станка – это кривошип 1, образующий со стойкой вращательную пару A.

Оставшиеся кинематические цепи механизмов разбиваем на простейшие структурные группы – диады, включающие два соединенных звена и три кинематические пары. Завершаем структурный анализ составлением структурной формулы механизмов:  $I(0, 1) \leftarrow Д(2, 3) II, 2 + Д(4, 5) II, 2 \rightarrow II, 2$ .

Формула расшифровывается следующим образом. Для получения представленных механизмов необходимо к механизму первого класса, включающему звенья (0,1), присоединить последовательно диаду Д (2, 3), а затем диаду Д (4, 5). Диады второго класса и второго порядка, следовательно, и механизм тоже второго класса и порядка. Структурный анализ зависит от заданного ведущего звена (рисунок 5).

Таблица 4 – Кинематические пары механизмов

Механизм V-образного двигателя				Механизм поперечно-строгального станка			
Обозначение	Название кинематической пары	Звено	$W$	Обозначение	Название кинематической пары	Звено	$W$
<i>A</i>	Поступательная	0,1	1	<i>A</i>	Вращательная	0,1	1
<i>B</i>	Вращательная	1,2	1	<i>B</i>	Вращательная	1,2	1
<i>C</i>	Вращательная	2,3	1	<i>C</i>	Поступательная	2,3	1
<i>D</i>	Вращательная	3,0	1	<i>D</i>	Вращательная	3,4	1
<i>E</i>	Вращательная	3,4	1	<i>E</i>	Вращательная	4,5	1
<i>F</i>	Вращательная	4,5	1	<i>F</i>	Поступательная	5,0	1
<i>G</i>	Поступательная	5,0	1	<i>G</i>	Вращательная	3,0	1

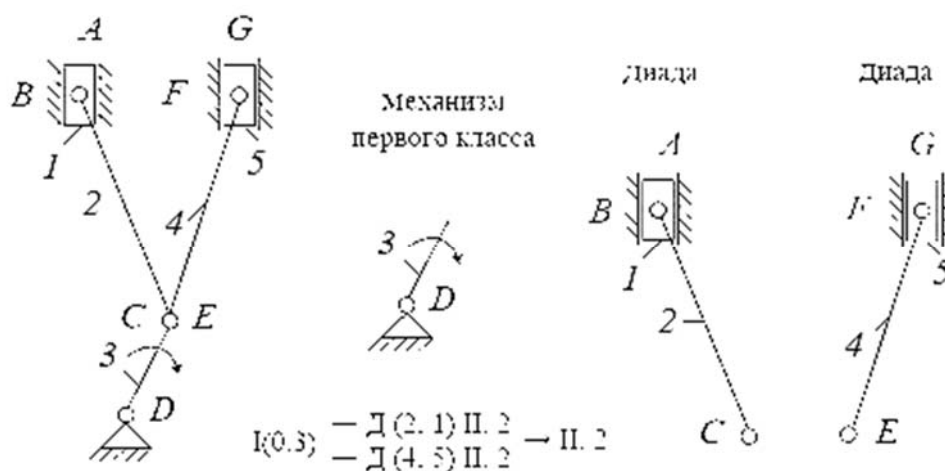


Рисунок 5 – Пример структурного анализа при ведущем кривошипе

## Практическое занятие № 2. Определение угловых скоростей и ускорений звеньев. Построение планов скоростей и ускорений шатунных механизмов

### Теоретические основы практических занятий

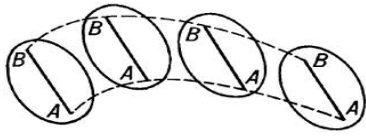
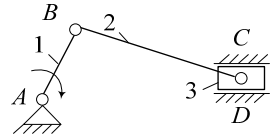
Кинематика – раздел механики, изучающий движение с геометрической точки зрения, т. е. без учета причин, вызывающих его. Для характеристики движения используют следующие кинематические параметры: перемещение  $s(t)$ , м; скорость  $v$ , м/с ( $v = \frac{ds}{dt}$ ); ускорение  $a$ , м/с<sup>2</sup> ( $a = \frac{dv}{dt}$ ). Можно применять их аналоги – функцию положения  $s(\varphi_1)$ , м; передаточную функцию скорости  $v_q$ , м/рад ( $v_q = \frac{dS}{d\varphi_1}$ ); передаточную функцию ускорения  $a_q$ , м/рад<sup>2</sup> ( $a_q = \frac{dv_q}{d\varphi_1}$ ). При этом  $\varphi_1$  – обобщенная координата угла поворота входного звена  $l$ ;  $t$  – время. Связь между скоростями и ускорениями, их передаточными функциями определяется по следующим формулам:

$$v = v_q \cdot \omega; \quad (4)$$

$$a = a_q \cdot \omega^2. \quad (5)$$

В таблице 5 рассмотрены основные виды движения и приведены их кинематические соотношения.

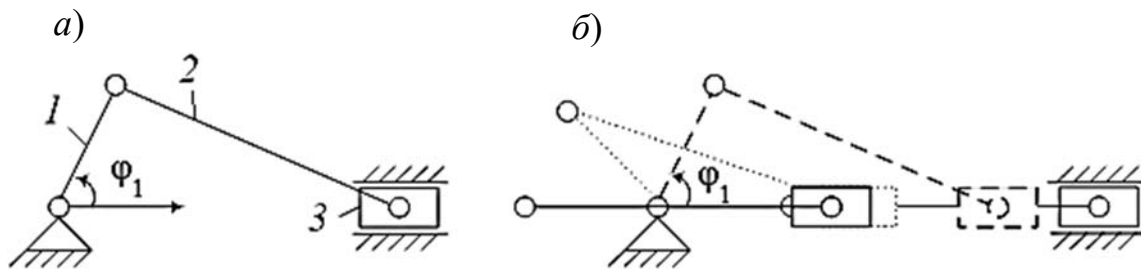
Таблица 5 – Основные виды движения

Вид движения	Пример движения	Скорость	Ускорение
<b>Поступательное движение тела</b> – это движение, при котором траектории, скорости и ускорения всех точек этого тела одинаковы и тело движется без поворота		$v_A = v_B = \frac{ds}{dt}$	$a_A = a_B = \frac{dv}{dt}$
<b>Прямолинейное движение ползуна</b> – частный случай поступательного движения по прямой		$v_3 = \frac{ds}{dt}$	$a_3 = \frac{dv}{dt}$

Окончание таблицы 5

Вид движения	Пример движения	Скорость	Ускорение
<b>Вращательное движение</b> – движение, при котором одна точка тела неподвижна относительно выбранной системы отсчета	Равномерное вращение	$v_A = \omega \cdot l_{OA}$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$
	Ускоренное вращение Замедленное вращение	$v_A = \omega \cdot l_{OA}$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$ $\vec{a}_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$ $a_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA}$
<b>Сложное движение</b> – результат сложения двух разных видов движений: переносного $e$ (вращательное) и относительного $r$ (поступательное)		$\vec{v}_A = \vec{v}_{A'}^e + \vec{v}_{AA'}^r$	$\vec{a}_A = \vec{a}_{A'}^e + \vec{a}_{AA'}^r + \vec{a}^k$ $a^K = 2\omega \cdot v_{AA'}^r$
<p><i>Примечание</i> – <math>\vec{a}_A^n</math> – вектор нормального ускорения точки, направляется к центру вращения; <math>a^K</math> – ускорение Кориолиса, направляется поворотом на <math>90^\circ</math> вектора относительной скорости <math>\vec{v}_{AA'}^r</math> по направлению переносного вращения <math>\omega</math></p>			

Для кинематического анализа строят кинематическую схему механизма (структурную схему с учетом геометрических размеров звеньев), планы положений звеньев (кинематические схемы при заданных положениях входного звена) (рисунок 6).



$a$  – кинематическая схема механизма;  $b$  – несколько планов положений механизма

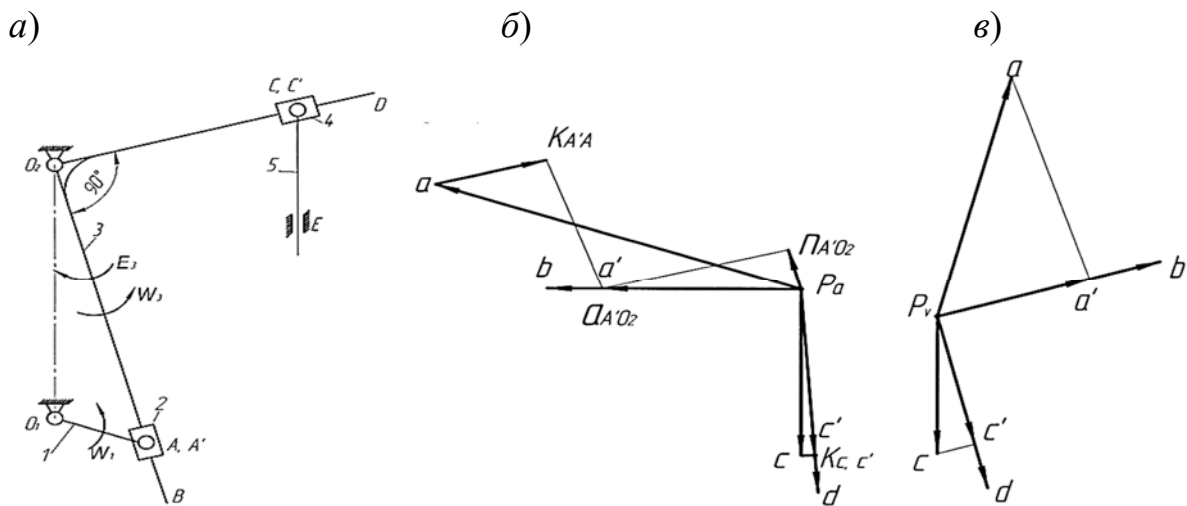
Рисунок 6 – Схемы для кинематического анализа механизма ( $\mu_s = 0,01$  м/мм)

Определить кинематические параметры можно методом планов, методом замкнутых векторных контуров, методом численного или графического дифференцирования (интегрирования).

**Планом скоростей звена** называется плоский пучок векторов, идущих из полюса, которые изображают в масштабе абсолютные скорости точек звена; отрезки, соединяющие концы векторов, изображают относительные скорости точек. Совокупность планов скоростей звеньев с общим полюсом называется **планом скоростей механизма**. Определение плана ускорений аналогично.

### Пример выполнения задания

Вычерчиваем кинематическую схему механизма (рисунок 7), приняв масштабный коэффициент длин  $K_L = 0,0025$  м/мм.



$a$  – план механизма  $K_L = 0,0025$  мм;  $b$  – план ускорений  $K_a = 0,05$  м/(с<sup>2</sup> · мм);  $c$  – план скоростей  $K_v = 0,01$  м/(с · мм)

Рисунок 7 – Кинематический анализ механизма

*Построение плана скоростей.*

Порядок исследования точек

$$A \rightarrow A' \rightarrow C' \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C.$$

Определяем скорость точки  $A$ :

$$v_A = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 70}{30} = 0,59 \text{ м/с.}$$

Рассчитываем масштабный коэффициент плана скоростей:

$$k_v = \frac{v_A}{P_v a} = \frac{0,59}{59} = 0,01 \text{ м/(с·мм)}.$$

Выбираем полюс построения  $P_v$  и из него проводим вектор  $P_v a$  перпендикулярно звену  $O_1 A$  в сторону его вращения.

Скорость точки  $A'$  определяем графическим решением системы двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{v}_{A'} = \bar{v}_A + \bar{v}_{A'A}; \\ \bar{v}_{A'} = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{A'O_2}, \end{cases}$$

где  $\bar{v}_{O_2} = 0$ ;

$$v' = P_v a' k_v = 41 \cdot 0,01 = 0,41 \text{ м/с};$$

$\bar{v}_{A'A}$  параллельно  $O_2 B$ ;

$\bar{v}_{A'O_2}$  перпендикулярно  $O_2 B$ ;

Для определения скорости точки  $A'$  проводим из конца вектора  $P_v a$  линию, параллельную звену  $O_2 B$ , а из полюса  $P_v$  – перпендикулярную звену  $O_2 B$ , точка пересечения этих линий дает точку  $a'$ .

Скорости точек  $C'$ ,  $B$  и  $D$  рассчитываем по свойству подобия:

$$\frac{P_v a'}{P_v c'} = \frac{O_2 A'}{O_2 C'} \Rightarrow P_v c' = P_v a' \frac{O_2 C'}{O_2 A'} = 41 \cdot \frac{75}{115} = 26,7 \text{ мм};$$

$$\frac{P_v a'}{P_v b} = \frac{O_2 A'}{O_2 B} \Rightarrow P_v b = P_v a' \frac{O_2 B}{O_2 A'} = 41 \cdot \frac{130}{115} = 46,3 \text{ мм};$$

$$\frac{P_v a'}{P_v d} = \frac{O_2 A'}{O_2 D} \Rightarrow P_v d = P_v a' \frac{O_2 D}{O_2 A'} = 41 \cdot \frac{96}{115} = 34,2 \text{ мм};$$

$$v_{A'} = P_v a' \cdot k_v = 41 \cdot 0,01 = 0,41 \text{ м/с};$$

$$v_B = P_v b \cdot k_v = 51,3 \cdot 0,01 = 0,513 \text{ м/с};$$

$$v_D = P_v d \cdot k_v = 34,2 \cdot 0,01 = 0,342 \text{ м/с}.$$

Точка  $b$  лежит на продолжении вектора  $P_v a'$ .

Скорость точки  $C$  определяем графическим решением системы двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_{c'} + \bar{v}_{cc'}; \\ \bar{v}_c = \bar{v}_{c_0} + \bar{v}_{cc_0}, \end{cases}$$

где  $\bar{v}_{O_2} = 0$ ;

$v_{cc'}$  параллельно  $O_2D$ ;

$v_{cc_0}$  по вертикали.

Для нахождения точки  $C$  проводим из конца вектора  $P_{v c'}$  линию, параллельную звену  $O_2D$ , а из полюса  $P_v$  линию по вертикали. Точка пересечения этих линий дает точку  $C$ .

$$v_c = P_{v c} \cdot k_v = 38 \cdot 0,01 = 0,38 \text{ м/с.}$$

*Построение плана ускорений.*

Определяем ускорение точки  $A$ :

$$a_A = \left( \frac{\pi \cdot n_k}{30} \right)^2 l_{O_1 A} = \left( \frac{3,14 \cdot 70}{30} \right)^2 \cdot 0,08 = 4,3 \text{ м/с}^2.$$

Выбираем масштабный коэффициент плана ускорений:

$$k_a = \frac{a_{A_1}}{P_a a} = \frac{4,3}{86} = 0,05 \text{ м/(с}^2 \cdot \text{мм)}.$$

Из полюса  $P_a$  проводим вектор  $P_a a$  параллельно кривошпицу к центру вращения.

Для определения ускорения точки  $A'$  составляем систему двух векторных уравнений, которую решаем графически:

$$\begin{cases} \bar{a}_{A'} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A'A}^k + \bar{a}_{A'}; \\ \bar{a}_{A'} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A'O_2}^n + \bar{a}_{A'}^{\tau} O_2, \end{cases}$$

где  $\bar{a}_{O_2} = 0$ ;

$\bar{a}_{A'A}^k$  параллельно  $O_2B$ ;

$\bar{a}_{A'O_2}^n$  параллельно  $O_2B$ ;

$\bar{a}_{A'}^{\tau} O_2$  перпендикулярно  $O_2B$ .

Определяем составляющие этих уравнений.

Величина Кориолисова ускорения рассчитывается следующим образом:

$$a^k_{A'A} = 2 \frac{v_{A'}}{l_{A'O_2}} v_{A'A} = 2 \frac{0,41}{0,2875} \cdot 0,43 = 1,2 \text{ м/с}^2.$$

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо вектор относительной скорости  $\vec{v}_{A'A}$  повернуть на  $90^\circ$  в сторону вращения кулисы.

Для определения ускорения точки  $A'$  проводим из конца вектора  $P_a a$  вектор ускорения Кориолиса, а из его конца – вектор  $\vec{a}_{A'A}$ , параллельный звену  $BO_2$ . Для решения второго векторного уравнения проводим из полюса  $Pa$  вектор нормального ускорения  $\vec{a}_{A'O_2}^n$ , который направлен параллельно звену  $BO_2$  к центру его вращения и определяется как

$$a^n_{A'A} = \frac{v_{A'}^2}{l_{A'O_2}} = \frac{0,41^2}{0,2875} = 0,6 \text{ м/с}^2,$$

а затем проводим из конца нормального ускорения касательное, которое перпендикулярно звену  $BO_2$ . Точка пересечения последних векторов дает точку  $a'$ :

$$a_{A'} = P_a a' \cdot k_a = 40 \cdot 0,05 = 2 \text{ м/с}^2,$$

Ускорения точек  $C'$ ,  $B$  и  $D$  рассчитываем по теореме подобия:

$$\frac{P_a a'}{P_a c'} = \frac{O_2 A'}{O_2 C'} \Rightarrow P_a c' = P_a a' \frac{O_2 C'}{O_2 A'} = 40 \cdot \frac{75}{115} = 26 \text{ мм};$$

$$a_{c_1} = P_a c' \cdot k_a = 26 \cdot 0,05 = 1,3 \text{ м/с}^2;$$

$$\frac{P_a a'}{P_a b} = \frac{O_2 A'}{O_2 B} \Rightarrow P_a b = P_a a' \frac{O_2 B}{O_2 A'} = 40 \cdot \frac{144}{115} = 50 \text{ мм};$$

$$a_b = P_a b \cdot k_a = 50 \cdot 0,05 = 2,5 \text{ м/с}^2;$$

$$\frac{P_a a'}{P_a d} = \frac{O_2 A'}{O_2 D} \Rightarrow P_a d = P_a a' \frac{O_2 D}{O_2 A'} = 40 \cdot \frac{96}{115} = 33,4 \text{ мм};$$

$$a_d = P_a d \cdot k_a = 33,4 \cdot 0,05 = 1,67 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки  $C$  определяем графическим решением системы двух векторных уравнений:



$$\begin{cases} \bar{a}_c = \bar{a}_{c^1} + \bar{a}_{cc^1}^{\bar{\kappa}} + \bar{a}_{cc^1}; \\ \bar{a}_c = \bar{a}_{c_0} + \bar{a}_{cc_0}, \end{cases}$$

где  $\bar{a}_{c_0} = 0$ ;

$\bar{a}_{cc^1}$  параллельно  $O_2D$ ;

$\bar{a}_{cc_0}$  по вертикали.

Находим ускорение Кориолиса:

$$a_{cc^1}^k = 2 \cdot \frac{v_{A'}}{l_{A'O_2}} \cdot v_{C'C} = 2 \frac{0,41}{0,2875} \cdot 0,07 = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения  $\bar{a}_{cc^1}^{\bar{\kappa}}$  определяется поворотом вектора относительной скорости  $v_{C'C}$  на  $90^\circ$  в сторону вращения кулисы. Из конца вектора  $P_{ac'}$  откладываем вектор  $\bar{a}_{cc^1}^{\bar{\kappa}}$ , а затем из него – вектор  $\bar{a}_{cc^1}$ .

Точка пересечения вектора с вертикалью дает точку  $c$ :

$$a_c = P_a c k_a = 21 \cdot 0,05 = 1,05 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величины ускорений центров тяжести звеньев. Принимаем, что центр тяжести звена лежит на его середине.

$$a_{s_5} = a_c = 1,05 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{s_3} = P_a S_3 k_a = 20 \cdot 0,05 = 1,0 \text{ м/с}^2.$$

*Определение угловых скоростей и ускорений звеньев.*

Направление угловой скорости звена определяется направлением линейной скорости точки рассматриваемого звена. Для определения направления угловой скорости звена линейная скорость точки переносится в рассматриваемую точку звена и в какую сторону скорость поворачивает звено, туда будет направлена угловая скорость  $\omega_i$ .

$$\omega_i = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 70}{30} = 7,3 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon_1 = 0; \text{ при } \omega_1 = \text{const};$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{v_{A'}}{l_{A'O_2}} = \frac{0,41}{0,2875} = 1,43 \text{ с}^{-1}.$$

Направление углового ускорения определяется направлением тангенциального ускорения точки звена при переносе его в рассматриваемую точку звена. В какую сторону поворачивает тангенциальное ускорение рассматриваемой точки звена, туда и направлено угловое ускорение звена  $\varepsilon_i$ .

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{a_{A'O_2}^\tau}{l_{A'O_2}} = \frac{1,9}{0,2875} = 6,6 \text{ с}^{-2}.$$

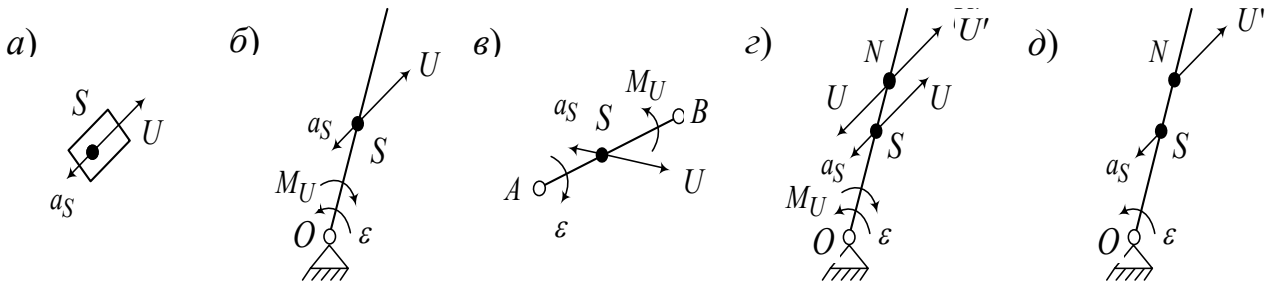
## Практическое занятие № 3. Метод Жуковского. Расчет сил инерции

### *Теоретические сведения практических занятий*

Для динамического расчета будем использовать два метода: *метод планов сил* и *метод рычага Жуковского*. Метод планов сил позволяет определить силу, уравновешивающую заданные внешние силы и силы инерции, а также позволяет определить реакции в кинематических парах. Метод основан на принципе освобожденности от связей (отброшенные связи заменяются реакциями) и на принципе Даламбера. *Уравновешивающая сила* прикладывается к концу кривошипа перпендикулярно ему и уравновешивает все остальные силы, приложенные к звеньям механизма.

Метод рычага Жуковского основан на принципе возможных перемещений (принципе Даламбера – Лагранжа), согласно которому работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот метод позволяет оценить уравновешивающую силу без определения реакций в кинематических парах.

*Сила инерции*  $U = -ma$  в инерциальных системах позволяет свести динамическую задачу к задаче статики. По *принципу Даламбера*, если к внешним силам добавить силы инерции, то систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии (*метод кинестатики*). Для поступательно движущегося тела (рисунок 8, а) сила инерции определяется произведением массы тела на ускорение центра масс ( $U = -ma_S$ ), прикладывается к центру масс противоположно направлению ускорения. Для вращающегося тела (рисунок 8, б), кроме силы, учитывают момент сил инерции  $M_U = -J_S \varepsilon$ , где  $J_S$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $S$  перпендикулярно плоскости движения;  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела. Для сложного движения (рисунок 8, в) тоже необходимо учесть и силу инерции, и момент сил инерции.



*a* – для поступательного движения; *б* – для вращательного движения; *в* – для сложного движения; *г* – прием замены силы и момента сил инерции одной силой; *д* – результат замены

Рисунок 8 – Силы и моменты инерции для различных видов движения

Удобно заменить  $U$  и  $M_U$  (рисунок 8, *г*) одной силой  $U'$  (рисунок 8, *д*). Для этого можно приложить в точке  $N$  силы  $U$  и  $-U$ . Это не изменит равновесия тела. Силы  $-U$  (в точке  $N$ ) и  $U$  (в центре масс  $S$ ) образуют пару сил с моментом  $M = U \cdot SN$ . Если выбрать расстояние  $SN$  из условия  $SN = \frac{M_U}{U}$ , то  $M$  компенсирует  $M_U$  и можно учитывать в расчетах только силу  $U' = -ma_S$ , приложенную в точке  $N$ . Для коромысла  $SN = \frac{L}{6}$ , а  $ON = \frac{2}{3}L$ , где  $L$  – длина звена.

### Пример выполнения задания

Определим уравновешивающую силу с помощью рычага Жуковского (рисунок 9). Для этого построим повернутый в любом направлении на  $90^\circ$  план скоростей (см. рисунок 9, *б*) и перенесем на него со схемы сил механизма (см. рисунок 9, *а*) все силы в соответствующие точки.

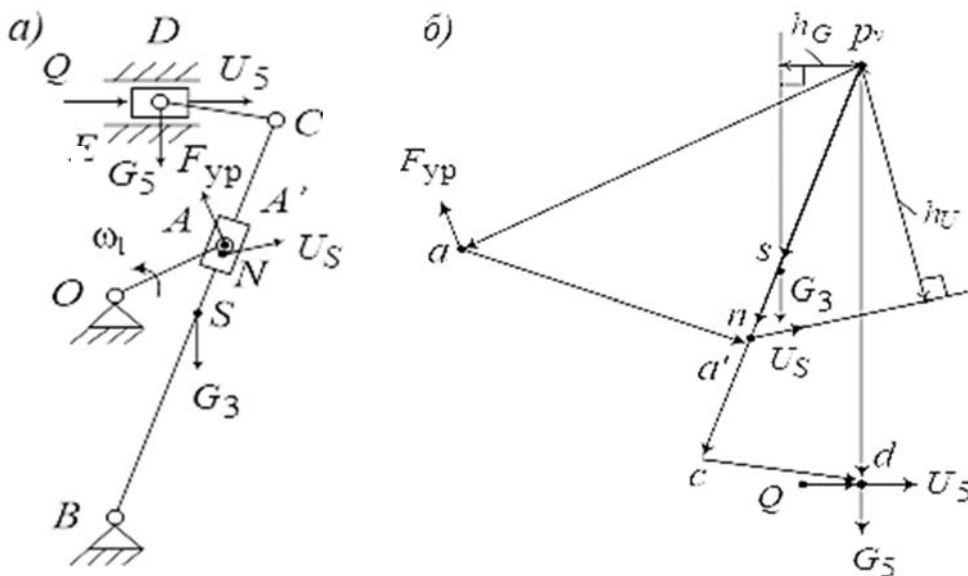
Считая, что план скоростей – это жесткий рычаг с опорой в полюсе, запишем уравнение моментов всех сил относительно полюса. Плечи будем подставлять в миллиметрах, измеряя их непосредственно на рисунке 9, *б*.

$$\sum M_{p_v} = 0; F_{yp} \cdot p_v a - G_3 \cdot h_G - U_3 \cdot h_U - (Q + U_5) \cdot p_v d = 0.$$

Линия действия силы  $G_5$  проходит через полюс, поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно полюса равен нулю. Рассчитаем уравновешивающую силу

$$F_{yp} = \frac{G_3 \cdot h_G + U_3 \cdot h_U + (Q + U_5) \cdot p_v d}{p_v a};$$

$$F_{yp} = \frac{78,48 \cdot 28 + 31,92 + (250 + 146,5) \cdot 155,2}{150} = 444,47 \text{ Н.}$$



*a* – схема приложенных к механизму сил; *б* – рычаг Жуковского

Рисунок 9 – Применение метода рычага Жуковского

## Практическое занятие № 4. Силовой анализ механизмов методом планов сил

### *Теоретические основы практического занятия*

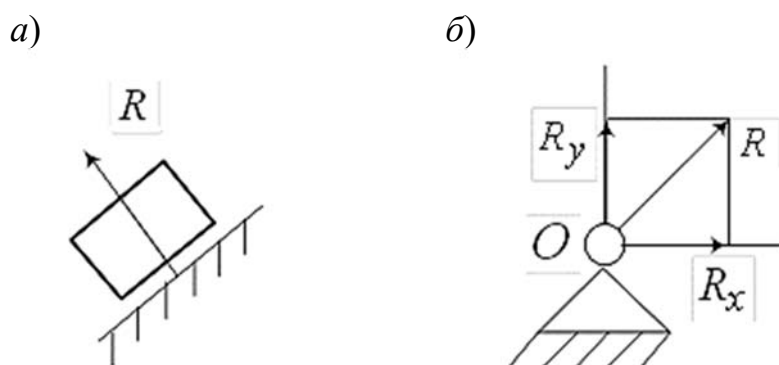
Преыдушие занятия были посвящены изучению *кинематики* звеньев механизма, т. е. изучению движения самого по себе, без учета воздействия сил. Однако на все окружающие нас тела действуют силы, различные по своей природе. *Динамика* изучает движение тел под действием сил. При этом учитываются инерционные свойства тела.

Принято выделять две основные задачи динамики: прямую и обратную. *Прямая задача динамики* состоит в том, чтобы по заданным силам найти закон движения звеньев. *Обратная задача динамики* – по заданному закону движения найти силы, вызвавшие это движение. К прямым задачам относятся рассматриваемые здесь задачи об истинном движении механизма, о регулировании хода машины, задача о маховике, к обратным задачам – силовое исследование механизма, уравнивание роторов и механизмов.

*Сила* – мера механического взаимодействия тел. Это векторная величина, имеющая точку приложения, направление и модуль. Принята следующая классификация сил. *Движущая сила* – это внешняя сила, приложенная к

ведущему звену механизма со стороны двигателя и совершающая положительную работу. *Сила полезного сопротивления* – это внешняя сила, для преодоления которой предназначен механизм, она приложена к ведомому звену и совершает отрицательную работу. *Силы вредного сопротивления* – силы трения в кинематических парах, силы гидравлического и аэродинамического сопротивления, совершающие отрицательную работу. *Сила тяжести*  $G = mg$  приложена к телу в центре масс, работа силы при опускании центра масс положительная, а при подъеме отрицательная, за полный цикл движения работа нулевая. *Силы реакции связей* – силы, возникающие в местах взаимодействия звеньев, т. е. в кинематических парах, и по третьему закону Ньютона равные по величине и противоположные по направлению. Для механизма работа сил реакции в кинематических парах равна нулю.

На рисунке 10 изображены реакции поступательной и вращательной кинематических пар без учета сил трения.



*a* – поступательная кинематическая пара; *б* – вращательная кинематическая пара

Рисунок 10 – Реакции в кинематических парах

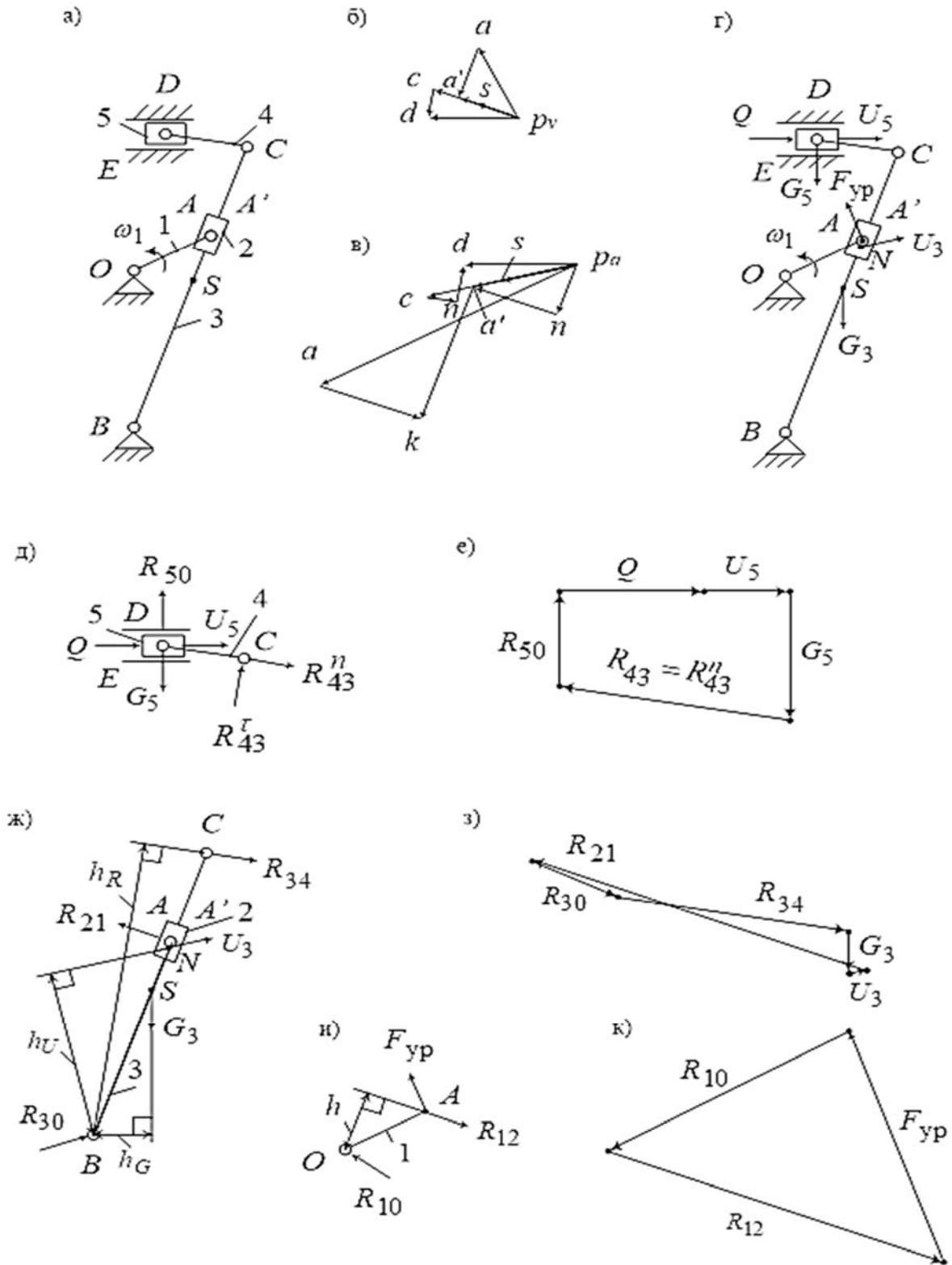
### **Пример выполнения задания**

Пусть задан механизм и сила полезного сопротивления  $Q = 250$  Н (рисунок 11, *a*), план его скоростей (рисунок 11, *б*) и ускорений (рисунок 11, *в*). Определим требуемую уравнивающую силу  $F_{ур}$  и реакции в кинематических парах методом планов сил и методом рычага Жуковского. Пусть известны массы звеньев: масса кулисы  $m_3 = 8$  кг; масса ползуна  $m_5 = 25$  кг. Массы остальных звеньев малы по сравнению с заданными, ими пренебрегаем.

Рассчитаем веса звеньев:

$$G_3 = m_3 \cdot g = 8 \cdot 9,81 = 78,48 \text{ Н};$$

$$G_5 = m_5 \cdot g = 25 \cdot 9,81 = 245,25 \text{ Н}.$$



$a$  – заданный механизм;  $b$  – план скоростей механизма;  $c$  – план ускорений механизма;  $d$  – схема приложенных к механизму сил;  $e$  – схема сил диады 4-5;  $f$  – план сил диады 4-5;  $g$  – схема сил диады 2-3;  $h$  – план сил диады 2-3;  $i$  – схема сил механизма первого класса;  $k$  – план сил механизма первого класса

Рисунок 11 – Применение метода планов сил

Определим силы инерции этих звеньев:

$$U_3 = -m_3 \cdot a_S = 8 \cdot (-3,99) = -31,92 \text{ Н};$$

$$U_5 = -m_5 \cdot a_D = 25 \cdot (-5,86) = -146,5 \text{ Н}.$$

Знаки «минус» показывают, что направление сил инерции противоположно соответствующим ускорениям, указанным на плане ускорений векторами  $\vec{a}_S - p_a s$ ,  $\vec{a}_D - p_a d$  (см. рисунок 11, в). Уравновешивающую силу  $F_{yp}$  приложим к концу кривошипа перпендикулярно ему в направлении его вращения (рисунок 11, з).

Выделим диаду 4–5 (рисунок 11, д). В местах отрыва (кинематических парах  $E$  и  $C$ ) отбросим связи и заменим их действие реакциями. Для поступательной пары  $E$  реакция  $R_{50}$  перпендикулярна направляющим пары, а во вращательной паре реакция неизвестного направления, которую можно разложить на две составляющие: нормальную –  $R_{43}^n$  (параллельно звену) и касательную –  $R_{43}^r$  (перпендикулярно звену). Нижний индекс состоит из двух чисел. Первое число указывает, на какое звено действует реакция, а второе – со стороны какого звена. Записываем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\underline{\underline{\vec{Q}}} + \underline{\underline{\vec{U}}}_5 + \underline{\underline{\vec{G}}}_5 + \underline{\underline{\vec{R}}}_{50} + \underline{\underline{\vec{R}}}_{43}^n + \underline{\underline{\vec{R}}}_{43}^r = 0.$$

Геометрически это значит, что многоугольник, стороны которого являются векторами суммы, должен быть замкнут. Такой многоугольник можно построить, имея не более двух неизвестных. Для определения их числа удобно применять подчеркивание. Два подчеркивания – вектор известен и по направлению, и по величине. Одно подчеркивание – вектор известен лишь по направлению. В данном случае имеем три неизвестных.

Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил звена 4 относительно точки  $D$ . Линия действия силы  $\vec{R}_{43}^n$  проходит через точку  $D$ , поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно точки  $D$  равен нулю. Момент создает сила  $\vec{R}_{43}^r$  на плече  $L_{CD}$ , поскольку  $L_{CD}$  является перпендикуляром, опущенным из точки  $D$  на линию действия силы. Причем момент положительный, потому что сила стремится повернуть звено 4 относительно точки  $D$  против часовой стрелки, тогда уравнения равновесия моментов  $\sum M_D(4) = 0$ ,  $R_{43}^r \cdot L_{CD} = 0$ ,  $R_{43}^r = 0$ . Теперь в уравнении равновесия две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению. Строить векторный многоугольник можно в любой последовательности, начиная с известных по направлению и модулю векторов.

Отложим  $Q = 250 \text{ Н}$  по ее направлению – вектор длиной  $|Q| = 50 \text{ мм}$  и определим масштабный коэффициент построения

$$\mu_F = \frac{Q}{|Q|} = \frac{250}{50} = 5 \text{ Н/мм.}$$

Определим, что  $|U_5|$  и  $|G_5|$ :

$$|U_5| = U_5 / \mu_F = 146,5 / 5 = 29,3 \approx 29 \text{ мм;}$$

$$|G_5| = G_5 / \mu_F = 245,25 / 5 = 49,05 \approx 49 \text{ мм.}$$

Пристроим их последовательно к вектору  $\vec{Q}$  (рисунок 11, *e*). Далее к концу вектора  $G_5$  пристроим линию действия реакции  $R_{43}^n$ , а из точки начала построения вектора  $Q$  – линию действия  $R_{50}$  до точки пересечения с линией реакции  $R_{43}^n$ . Поставим направление векторов  $R_{43}^n$  и  $R_{50}$  так, чтобы получился замкнутый векторный контур. Вектор  $R_{43}^n$  на схеме сил (см. рисунок 11, *d*) имеет противоположное направление тому, что получилось из построения.

Следует понимать, что истинное направление векторов получается при графическом решении векторных уравнений на планах сил. Но менять направление на схемах сил не следует, иначе расчеты моментов окажутся неверными. Замерим полученные вектора на плане:  $|R_{43}^n| = 80,5 \text{ мм}$ ,  $|R_{50}| = 36 \text{ мм}$ . Определим значения реакций:  $R_{43}^n = |R_{43}^n| \cdot \mu_F = 80,5 \cdot 5 = 402,5 \text{ Н}$ ,  $R_{50} = |R_{50}| \cdot \mu_F = 36 \cdot 5 = 180 \text{ Н}$ . Поскольку  $R_{43}^t = 0$ , то реакция  $\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^t = \vec{R}_{43}^n = 402,5 \text{ Н}$ .

Реакция  $\vec{R}_{45}$  во внутренней вращательной кинематической паре  $D$  определяется из условий равновесия звена 4:  $\sum F(4) = 0$ ,  $\vec{R}_{45} + \vec{R}_{43} = 0$ ,  $\vec{R}_{45} = -\vec{R}_{43}$ .

Рассмотрим диаду 2–3 (рисунок 11, *ж*). Отбросим связи и заменим их действие реакциями: в точке  $C$  реакция  $\vec{R}_{34} = -\vec{R}_{43} = -402,5 \text{ Н}$  (направлена противоположно  $\vec{R}_{43}$ ); в точке  $B$  реакция  $\vec{R}_{30}$  (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно); в точке  $A$  реакция  $\vec{R}_{21}$  (перпендикулярно кулисе 3). Запишем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\underline{\underline{\vec{R}_{34}}} + \underline{\underline{\vec{G}_3}} + \underline{\underline{\vec{U}_3}} + \underline{\underline{\vec{R}_{21}}} + \underline{\underline{\vec{R}_{30}}} = 0.$$



Снова имеем три неизвестных: модуль и направление реакции  $\vec{R}_{30}$  и модуль реакции  $\vec{R}_{21}$ . Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил диады относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B = 0; R_{34}h_R + U_S h_U + G_3 h_G - R_{21}L_{AB} = 0;$$

$$R_{21} = \frac{R_{34}h_R + U_3 h_U + G_3 h_G}{L_{AB}} = \frac{402,5 \cdot 55,2 + 31,92 \cdot 311 + 78,48 \cdot 100}{392} = 611,99 \text{ Н},$$

где  $h_R$ ,  $h_U$ ,  $h_G$  – плечи (перпендикуляры, опущенные из точки  $B$  на линии действия сил) сил  $R_{34}$ ,  $U_3$ ,  $G_3$  соответственно, значения подставляются в миллиметрах, измеряются на схеме сил.

Поскольку реакция получилась положительной, на схеме выбрано верное направление вектора  $\vec{R}_{21}$ .

Теперь в уравнении равновесия две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению. Начнем построение с известных сил. Реакция  $\vec{R}_{34}$  уже определена при рассмотрении диады 4–5 (см. рисунок 11,  $e$ ) и по третьему закону Ньютона равна  $\vec{R}_{43}$ , но противоположно направлена. Далее определим в выбранном масштабе длины в миллиметрах остальных известных векторов и пристроим их последовательно к вектору  $\vec{R}_{34}$  (рисунок 11,  $з$ ):

$$|G_3| = G_3/\mu_F = 78,48/5 = 15,696 \approx 16 \text{ мм}; |U_3| = U_3/\mu_F = 31,92/5 = 6,384 \approx 6 \text{ мм}.$$

К вектору  $U_3$  пристроим определенную выше реакцию  $R_{21}$ . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором  $R_{30}$ . Замерим его длину  $|R_{30}| = 32,6 \text{ мм}$ . Определим реакцию  $R_{30} = |R_{30}| \cdot \mu_F = 32,6 \cdot 5 = 163 \text{ Н}$ .

Реакция  $\vec{R}_{23}$  во внутренней кинематической паре  $A'$  определяется из условий равновесия звена 2:  $\sum F(2) = 0$ ,  $\vec{R}_{21} + \vec{R}_{23} = 0$ ,  $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{21}$ .

Силовой расчет механизма первого класса (рисунок 11,  $u$ ) заключается в определении уравновешивающей силы  $F_{yp}$  и реакции в кинематической паре  $O$ . Отбросим связи и заменим их действие реакциями: в точке  $A$  – реакция  $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21} = -618,39 \text{ Н}$  (направлена противоположно  $\vec{R}_{21}$ ); в точке  $O$  – реакция  $\vec{R}_{10}$  (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно). Запишем уравнение равновесия кривошипа:

$$\underline{\vec{R}_{12}} + \underline{\vec{F}_{yp}} + \vec{R}_{10} = 0.$$

Снова имеем три неизвестных: модуль и направление реакции  $\vec{R}_{10}$  и модуль реакции  $\vec{F}_{yp}$ .

Составим уравнение равновесия моментов сил кривошипа относительно точки  $O$ :

$$\sum M_O = 0; \quad R_{12} \cdot h - F_{yp} \cdot L_{OA} = 0; \quad F_{yp} = \frac{R_{12} \cdot h}{L_{OA}} = \frac{611,99 \cdot 11,3}{15} = 461,03 \text{ Н.}$$

Теперь в уравнении равновесия кривошипа две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению (рисунок 11,  $\kappa$ ). Реакция  $\vec{R}_{12}$  уже определена при рассмотрении диады 2–3 (см. рисунок 11,  $\varepsilon$ ) и по третьему закону Ньютона равна  $\vec{R}_{21}$ , но противоположно направлена. К вектору  $R_{12}$  пристроим определенную выше силу  $F_{yp}$ . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором  $R_{10}$ . Замерим его длину  $|R_{10}| = 94,6$  мм. Определим реакцию  $R_{30} = |R_{30}| \cdot \mu_F = 94,6 \cdot 5 = 473$  Н.

## **Практические занятия № 5–7. Аналитический расчет планетарных механизмов. Кинематический анализ зубчатых механизмов. Синтез зубчатых механизмов**

### ***Теоретические основы практического занятия***

Зубчатые механизмы служат для передачи вращения. В машиностроении чаще используются зубчатые механизмы, понижающие угловую скорость  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ , и увеличивающие вращающий момент  $T$ , Н·м, т. е. усилие. Такие передачи называют *редукторами*. Их необходимость обусловлена тем, что выпускаемые промышленностью двигатели быстроходны. Рабочие же органы, как правило, тихоходны и требуют больших усилий для выполнения работы. Но бывают зубчатые механизмы, которые увеличивают угловую скорость – *мультипликаторы*. Они могут использоваться, например, для центрифуг.

*Передаточное отношение*  $i$  – отношение угловой скорости  $\omega_1$ ,  $\text{с}^{-1}$ , ведущего зубчатого колеса к угловой скорости ведомого  $\omega_2$  с учетом направления вращения (это справедливо и для частот вращения  $n_1$  и  $n_2$ , об/мин), индексы в формуле указывают на номера колес:

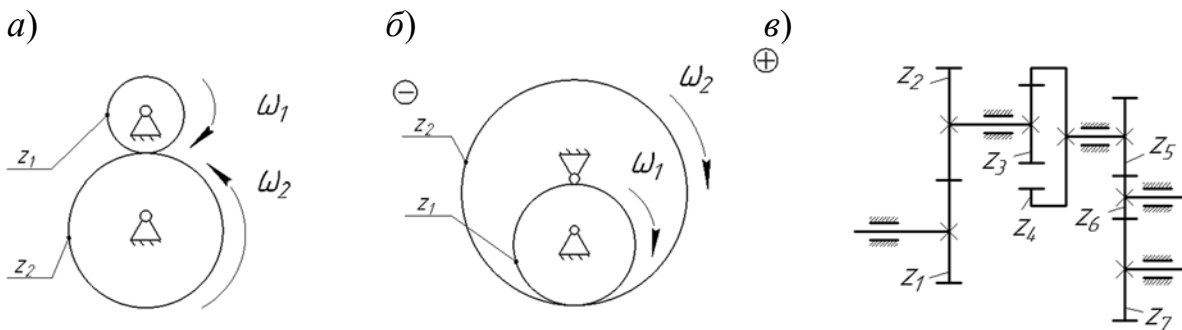
$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}.$$

Знак «плюс» используют при внутреннем зацеплении, а «минус» – при внешнем (рисунок 12, а, б). Передаточное отношение не следует путать с *передаточным числом*  $u$ , под которым понимают отношение числа зубьев большего колеса  $z_2$  к меньшему  $z_1$ :

$$u = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное число всегда больше единицы и знака не имеет. Часто передаточное отношение определяют через число зубьев.

*Зубчатым рядом* называют зубчатый механизм, образованный зубчатыми колесами с неподвижными осями. Зубчатый ряд может состоять из одной или нескольких передач (рисунок 12, в).



а – внешнее зацепление; б – внутреннее зацепление; в – схема зубчатого ряда

Рисунок 12 – Зубчатый ряд

Если зубчатый ряд имеет несколько зацеплений, то его передаточное отношение будет равно произведению передаточных отношений каждого зацепления. Например (см. рисунок 12, в), для зубчатого ряда от колеса 1 к колесу 7 передаточное отношение

$$i_{17} = i_{12}i_{34}i_{56}i_{67} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = -\frac{z_2 z_4 z_7}{z_1 z_3 z_5}.$$

*Планетарным* называется зубчатый механизм, содержащий колеса с подвижными осями. Звенья планетарного механизма имеют особенные названия. Зубчатые колеса с подвижной осью ( $z_2$  и  $z_3$  в таблице б) называются *сателлитами*. Подвижное звено, в котором помещена ось сателлита, называется *водителем*  $h$ . В планетарной передаче есть два центральных колеса: *центральное*  $z_1$  с внешними зубьями называется *солнечным*,  $z_1$  с внутренними зубьями – *эпициклом* (корона), неподвижное  $z_4$  – *опорным*.

При определении передаточного отношения планетарных передач используется *метод обращенного движения* (метод остановки водителя).

Рассмотрим данный метод, применительно к планетарной передаче типа  $B$ , показанной в таблице 6. Передаточное отношение для данной передачи при передаче движения от солнечного колеса  $1$  к водилу  $h$  при остановленном коронном колесе  $4$  определяется по выражению

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

По методу Виллиса всему механизму сообщается угловая скорость, равная угловой скорости водила, но направленная в противоположном направлении. При этом получается обращённый механизм, в котором движение передаётся от солнечного колеса  $1$  к коронному колесу  $4$  при остановленном водиле  $h$ . Передаточное отношение обращённого механизма определяется по выражению

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H}.$$

В рассматриваемом механизме (рисунок 13,  $a$ ) угловая скорость коронного колеса  $\omega_4 = 0$ , следовательно

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = \frac{\omega_1}{-\omega_H} + \frac{-\omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H};$$

$$i_{14}^H = 1 - i_{14}^H \text{ или } i_{14} = 1 - i_{14}^H.$$

*Обращённый механизм* представляет собой зубчатый ряд, в котором движение передаётся от солнечного колеса  $z_1$  к колесу  $z_2$  и через колесо  $z_3$  колесу  $z_4$ . Пример такого механизма приведен на рисунке 13,  $b$ . Следовательно, передаточное отношение обращённого механизма  $i_{14}^H$  при известных числах зубьев всех звеньев планетарной передачи будет определяться выражением

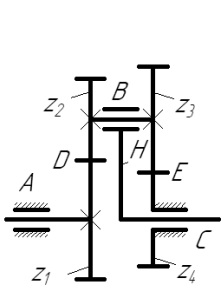
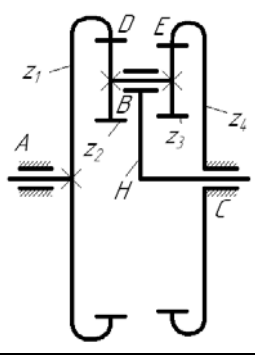
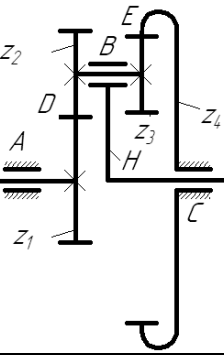
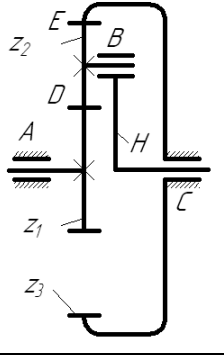
$$i_{14}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

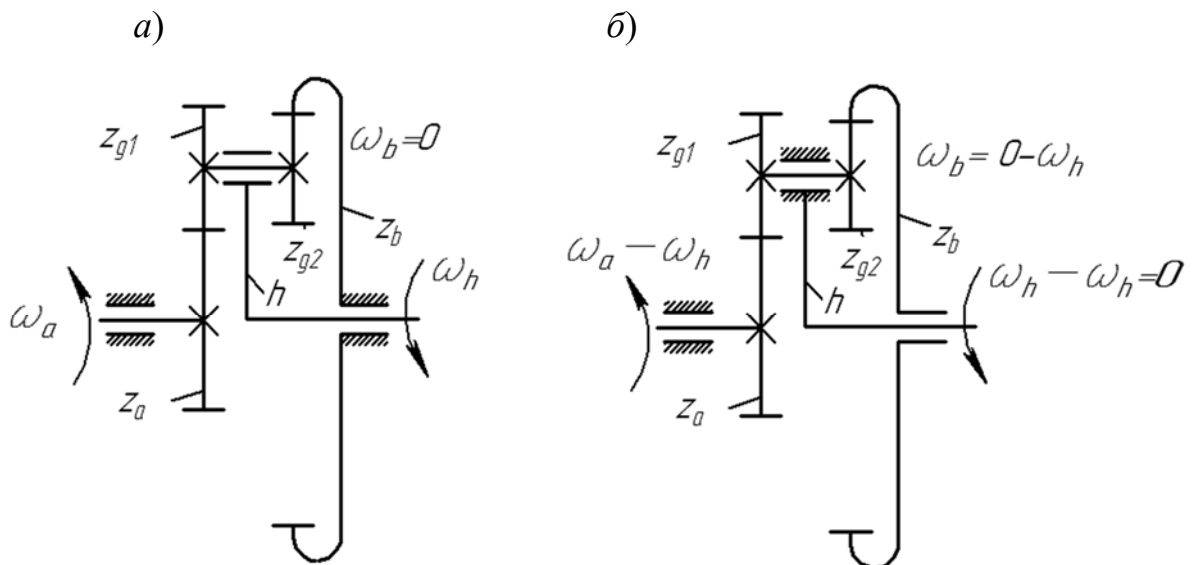
Окончательно получается передаточное отношение

$$i_{14}^H = 1 - i_{14}^H = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Передаточное отношение  $i_{14}^H$  называется кинематическим параметром планетарного механизма и обозначается  $p$  (см. таблицу 6).

Таблица 6 – Основные типы планетарных механизмов

Схема				
Название	Механизмы с двухвенцовыми сателлитами и одноименными зацеплениями (два внешних)	Механизмы с двухвенцовыми сателлитами и одноименными зацеплениями (два внутренних)	Механизм с двухвенцовыми сателлитами и разноименными зацеплениями	Механизм с одновенцовыми сателлитами и разноименными зацеплениями
Значение $p$	$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$	$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$	$-\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$	$-\frac{z_3}{z_1}$
Диапазон $p$	1...2	1...2	-10...-1	-5...1,4
Условие соосности	$z_1 + z_2 = z_3 + z_4$	$z_2 - z_1 = z_4 - z_3$	$z_1 + z_2 = z_4 + z_3$	$z_3 = z_1 + 2z_2$
Условие сборки	$\frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{k_c} = n$		$\frac{z_2 z_4 + z_1 z_3}{k_c} = n$	
<p>Примечание – <math>p</math> – кинематический параметр, который равен передаточному отношению обращенного механизма при передаче вращения от центрального колеса к водилу; <math>k_c</math> – число сателлитов; <math>n</math> – любое целое число</p>				



$a$  – планетарный механизм;  $b$  – обращённый механизм

Рисунок 13 – Кинематический анализ планетарного механизма

*Задача синтеза* планетарного механизма заключается в назначении чисел зубьев зубчатых колес с учетом условий обеспечения требуемого передаточного отношения, соосности, сборки и соседства (см. таблицу 6), отсутствия подрезания и заклинивания.

*Условие соосности* обеспечивает совпадение осей вращения центральных зубчатых колес и водила, иначе механизм заклинит. *Условие соседства* сателлитов выражается в том, что соседние сателлиты не должны касаться друг друга окружностями вершин. *Условие сборки* заключается в том, что при сборке после установки первого сателлита может оказаться, что остальные сателлиты установить нельзя. Это происходит потому, что поставленный первым сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес. *Условие отсутствия подрезания* колес с внешними зубьями обеспечивается, если для всех колес с внешними зубьями выполняется неравенство  $z_i \geq z_{\min} = 17$ . *Условие отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении* для передачи, состоящей из колес без смещения, можно обеспечить при выполнении следующих неравенств:  $Z_{\text{внешн}} \geq 20$ ,  $Z_{\text{внутр}} \geq 85$ ,  $Z_{\text{внутр}} - Z_{\text{внешн}} \geq 8$ .

### ***Пример выполнения аналитического расчета кинематического анализа планетарного механизма***

Аналитический метод кинематического анализа планетарных механизмов основан на методе обращенного движения. Сущность метода заключается в том, что всем звеньям планетарной ступени сообщается частота вращения водила  $n_H$ , но в противоположном направлении. Тогда водило становится неподвижным, а остальные звенья приобретут дополнительную скорость  $n_H$ .

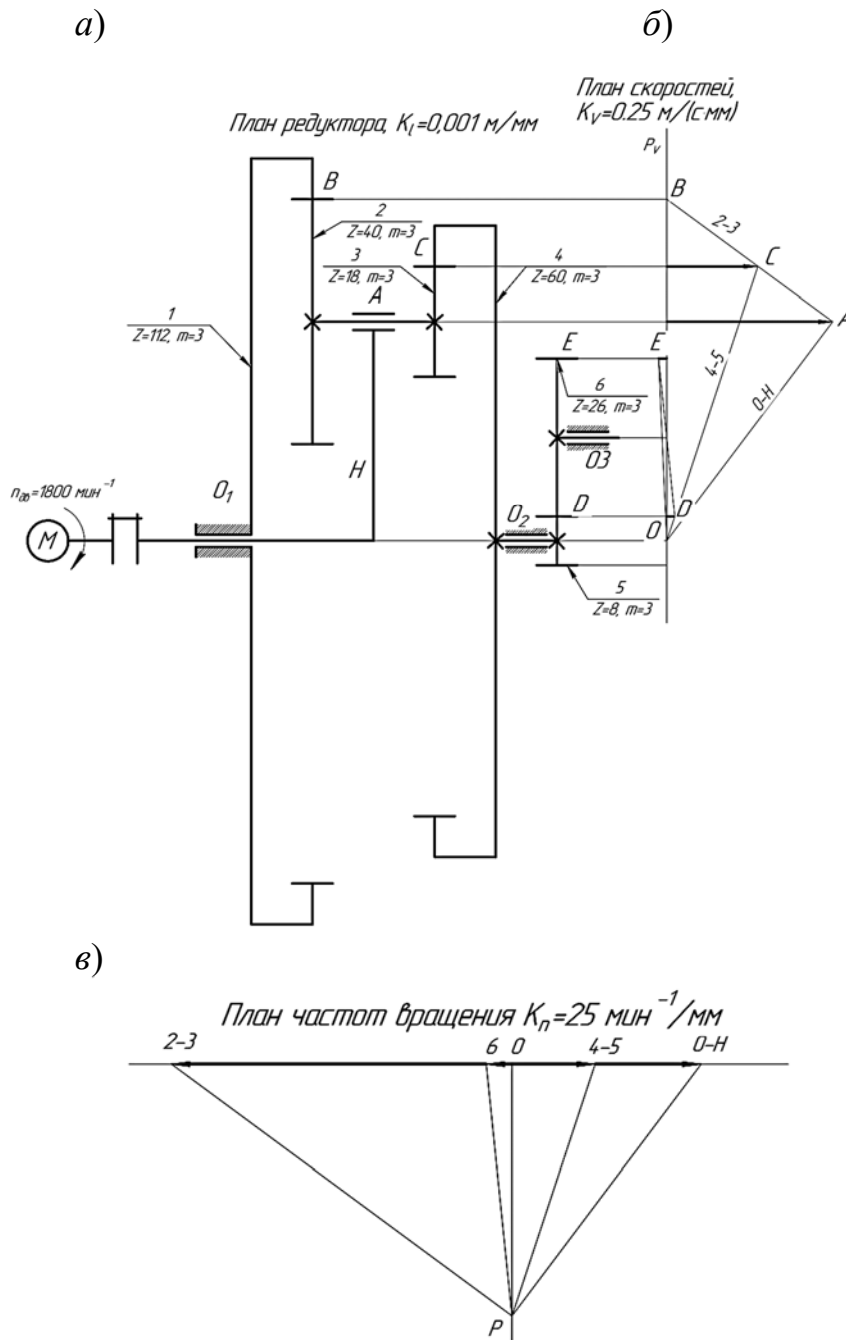
На рисунке 14 приведена схема исследуемого механизма. Исходные данные:  $n_{об} = n_H$  – числа зубьев колес зубчатого ряда;  $z_1 = 112$ ;  $z_2 = 40$ ;  $z_3 = 18$ ;  $Z_4 = 90$  – числа зубьев планетарной ступени. Необходимо определить частоты вращения всех звеньев механизма  $n_2, n_4, n_5, n_6$ .

Передаточное отношение обращенного механизма определится по формуле

$$i_{14}^H = \frac{n_1^H}{n_4^H} = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H}.$$

Верхний индекс  $H$  указывает, что параметры относятся к обращенному механизму. Передаточное отношение  $i_{14}^H$  выразим через числа зубьев колес:

$$i_{14}^H = \left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{40}{112} \cdot \frac{90}{18} = 1,786.$$



*a* – кинематическая схема механизма; *б* – план скоростей механизма; *в* – план частот вращения зубчатых колес механизма

Рисунок 14 – Графический метод кинематического анализа

Подставляя значение  $i_{14}^H = 1,786$  в формулу, найдем частоту вращения колеса 4,

$$1,786 = \frac{0 - 1800}{n_4 - 1800},$$

отсюда  $n_4 = 791,873 \text{ мин}^{-1}$ .

Частоту вращения колеса 6 определим из выражения

$$i_{56} = -\frac{z_6}{z_5} = \frac{n_5}{n_6},$$

откуда

$$n_6 = -\frac{n_5 \cdot z_5}{z_6} = -\frac{791,9 \cdot 8}{26} = -234,6 \text{ мин}^{-1}.$$

Для определения частоты вращения колеса 2, запишем формулу Виллиса для первой ступени планетарного механизма:

$$i_{12}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_2 - n_H}.$$

Определим это же передаточное отношение через число зубьев колес:

$$i_{12}^H = \frac{z_2}{z_1};$$

$$\frac{40}{112} = \frac{0 - 1800}{n_2 - 1800};$$

где  $n_2 = -3240 \text{ мин}^{-1}$ .

### ***Пример выполнения кинематического анализа зубчатого механизма***

В ряде случаев полезно провести кинематическое исследование планетарного механизма графическим методом. В основе этого метода лежат два положения кинематики:

1) скорость точки звена, совершающего вращательное движение, является линейной функцией радиуса вращения. В таком случае график зависимости скорости от радиуса колеса есть прямая линия;

2) любое плоское движение можно рассматривать как мгновенное вращательное вокруг мгновенного центра скоростей.

В качестве примера рассмотрим механизм, представленный на рисунке 14. Известны числа зубьев всех колес  $z_1 = 112$ ;  $z_2 = 40$ ;  $z_3 = 18$ ;  $z_4 = 90$ ;  $z_5 = 8$ ;  $z_6 = 26$ ;  $M = 3 \text{ мм}$ ;  $n_{об} = n_H = 1800 \text{ мин}^{-1}$ .

Определяем диаметры зубчатых колес:

$$d_1 = mz_1 = 3 \cdot 112 = 336 \text{ мм};$$

$$d_2 = mz_2 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ мм};$$

$$d_3 = mz_3 = 3 \cdot 18 = 54 \text{ мм};$$

$$d_4 = mz_4 = 3 \cdot 90 = 270 \text{ мм};$$

$$d_5 = mz_5 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ мм};$$

$$d_6 = mz_6 = 3 \cdot 26 = 78 \text{ мм}.$$



Выбираем масштабный коэффициент построения плана скоростей редуктора:

$$K_v = \frac{V_A}{P_a} = \frac{31,65}{63,30} = 0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{мм}.$$

Вычерчиваем кинематическую схему механизма в масштабе  $K_l = 0,002 \text{ м/мм}$  и определяем скорость точки  $A$ .

$$V_A = \frac{\pi \cdot n_{\text{дв}}}{30} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{3,14 \cdot 1800}{30} \cdot \frac{0,336}{2} = 31,65 \text{ м/с}.$$

Для построения плана скоростей (см. рисунок 14, б) проведем вертикальную прямую линию полюса  $P-P$  и откладываем от нее по горизонтали значение скорости точки  $A$  равным  $P_a = 63 \text{ мм}$ . Соединив точку  $a$  с центром вращения  $O$ , получим линию распределения скоростей водила  $H$ . Точка  $B$  на механизме является мгновенным центром скоростей колес 2 и 3 и будет находиться на линии полюсов  $P-P$ . Соединив точки  $a$  и  $b$ , получим линию распределения скоростей для сателлита, т. е. для колес  $z_2$  и  $z_3$ . Скорость точки  $C$ , принадлежащей колесу 3 сателлита, определим, снеся эту точку на линию распределения скоростей 2–3. Так как точка  $c$  принадлежит также колесу  $z_4$ , то можно построить линию распределения скоростей колес 4 и 5.

Скорость точки  $D$  найдем, спроецировав ее на линию распределения скоростей 4–5. Соединив точку  $a$  с центром вращения колеса 6, найдем линию распределения скоростей шестого колеса.

Для построения плана частот вращения всех колес (см. рисунок 14, б) проведем горизонталь к точке  $O$ , восстановим перпендикуляр. От точки  $O$  по горизонтали отложим значение частоты вращения двигателя  $n_{\text{дв}}$ , равное  $P_a = 90 \text{ мм}$  в масштабе  $K_n = 20 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{мм}$  и проведем из точки  $a$  линию, параллельную линии распределения скоростей водила  $h$ , и на пересечении получаем полюс построения  $P$ . Из полюса проводим линии, параллельные линиям распределения скоростей каждого из колес, которые будут отсекают на горизонтали отрезки 0–2, 0–5, 0–6, выражающие в миллиметрах значения частот вращения каждого колеса. Из рисунка 14, б найдем значения частот вращения колес:

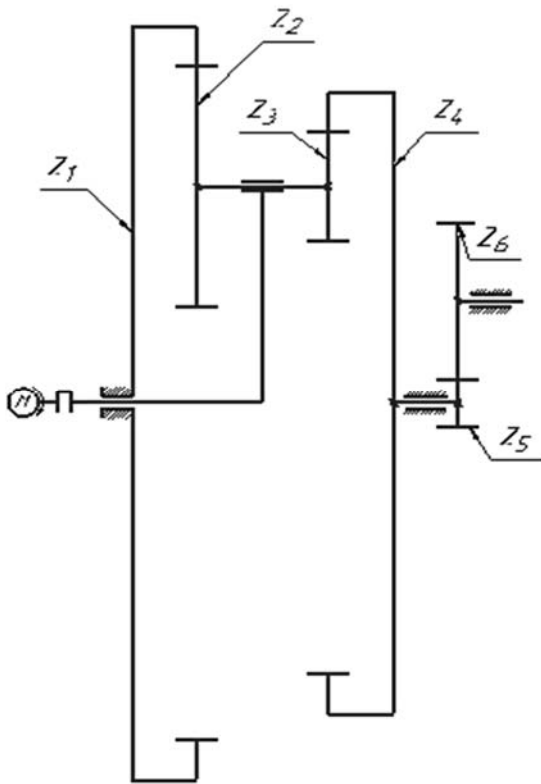
$$n_2 = n_3 = (0 - 3) \cdot K_n = 162 \cdot 20 = 3240 \text{ мин}^{-1};$$

$$n_4 = n_5 = (0 - 4) \cdot K_n = 41,5 \cdot 20 = 83 \text{ мин}^{-1};$$

$$n_6 = (0 - 6) \cdot K_n = 26 \cdot 20 = 520 \text{ мин}^{-1}.$$

### Пример выполнения задачи синтеза зубчатого механизма

На рисунке 15 приведена схема исследуемого механизма. Исходные данные:  $i_{H6} = 739$  – передаточное отношение от водила  $H$  к выходному колесу  $z_6$  при остановленном колесе  $z_1$ ;  $z_5 = 8$ ;  $z_6 = 26$  – числа зубьев колес зубчатого ряда;  $n_{дв} = 1800 \text{ мин}^{-1}$  – частота вращения двигателя, обозначенного  $M$  на схеме.



Зубчатый механизм состоит из планетарного механизма (колеса  $z_1, z_2, z_3, z_4$ ), передающего вращение от водила  $H$  к зубчатому колесу  $z_5$  и зубчатого ряда (колеса  $z_5$  и  $z_6$ ). Передаточное отношение такого механизма равно произведению передаточных отношений планетарного механизма и зубчатого ряда:

$$i_{H6} = i_{H4} \cdot i_{56}.$$

Известно передаточное отношение зубчатого ряда:

$$i_{56} = -\frac{z_6}{z_5} = -\frac{26}{8} = -3,25.$$

Определим передаточное число планетарного механизма:

Рисунок 15 – Схема зубчатого механизма

$$i_{H4} = \frac{i_{H6}}{i_{56}} = \frac{7,39}{-3,25} = -2,27.$$

Для обеспечения условия требуемого передаточного отношения выразим передаточное число планетарного механизма через число зубьев. Передаточное отношение обращенного механизма выразим через число зубьев:

$$i_{14}^H = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = 1,786.$$

Теперь известно, какое должно быть соотношение числа зубьев. Представим десятичную дробь простой и сократим ее. Распределим с помощью сомножителей это соотношение, учитывая, что центральные зубчатые колеса с внутренними зубьями  $z_1$  и  $z_4$  всегда имеют большее число зубьев, чем сателлиты  $z_2$  и  $z_3$ :

$$\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{5 \cdot 5}{14 \cdot 1} = 1,786.$$

Из соотношения видно, что для обеспечения заданного передаточного отношения с высокой точностью колесо  $z_4$  должно быть в 5 раз больше сателлита  $z_3$ . Для уменьшения габаритов механизма, а значит, снижения материалоемкости допускаются 3...5-процентные погрешности при обеспечении заданного передаточного отношения. Получим  $\frac{25}{14} = \frac{5 \cdot 5}{14 \cdot 1}$ .

Применим условие соосности:

$$(z_1 - z_2) = (z_4 - z_3);$$

$$4 \cdot (14 - 5) = 9 \cdot (5 - 1);$$

$$(56 - 20) = (45 - 9).$$

Умножим обе части равенства на 2 – минимальное число зубьев, которое можно нарезать для внешнего колеса при внутреннем зацеплении (условие отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении  $(112 - 40) = (90 - 18)$ ).

В результате синтезирован зубчатый планетарный механизм со следующим числом зубьев:  $z_1 = 112$ ;  $z_2 = 40$ ;  $z_3 = 18$ ;  $z_4 = 90$ .

## Практическое занятие № 8. Анализ кулачковых механизмов

### *Теоретические основы практического занятия*

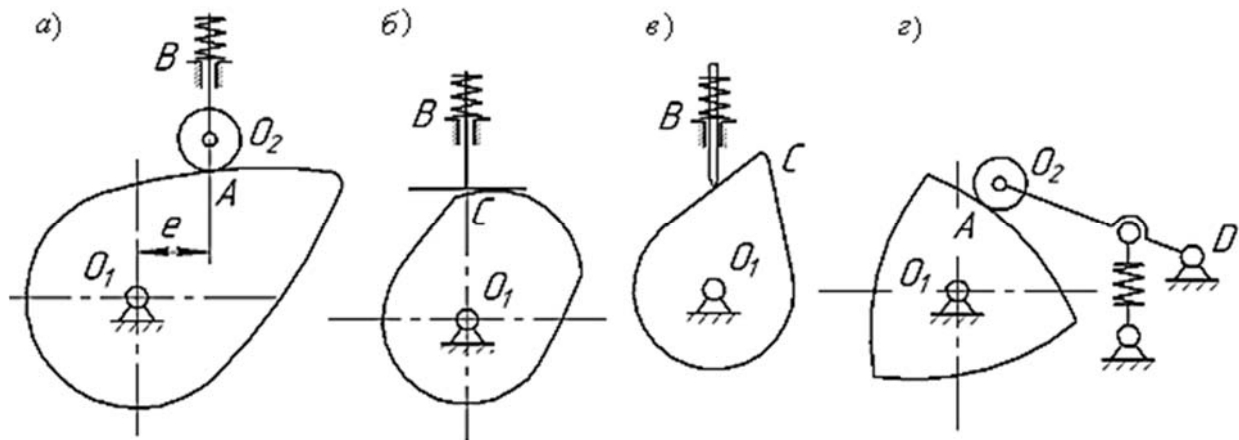
#### **Основные понятия и определения.**

Кулачковым механизмом называется механизм, в состав которого входит кулачок. Кулачком называется звено, имеющее элемент высшей пары, выполненной в виде поверхности переменной кривизны.

Простейший кулачковый механизм состоит из трёх звеньев: входного звена – кулачка  $1$ , совершающего вращательное движение, выходного звена  $3$  – толкателя или колебателя и стойки  $0$  (рисунок 16, *а-в*). Выходное звено в кулачковом механизме называется толкателем при возвратно-поступательном его движении или коромыслом (колебателем) при возвратно-качательном движении. Для уменьшения трения о поверхность кулачка выходное звено часто снабжают роликом  $2$  (рисунок 16, *а, г*).

Постоянное соприкосновение звеньев в кулачковой паре обеспечивается замыканием силовым или геометрическим (пазовый кулачок, рамочный толкатель и т. п.). По форме элементов кинематической пары выходные звенья могут быть остроконечные, роликовые, плоские (тарельчатые), сферические (грибовидные) и др.

Кулачковый механизм называется центральным, если ось толкателя проходит через центр вращения кулачка ( $e = 0$ ), и дезаксиальным, если ось толкателя смещена относительно центра вращения кулачка на некоторую величину  $e$ , называемую дезаксиалом (см. рисунок, 16, б, в).



*a* – дезаксиальный кулачковый механизм с роликовым толкателем; *б* – центральный кулачковый механизм с плоским толкателем; *в* – центральный кулачковый механизм с игольчатым толкателем; *г* – кулачковый механизм с роликовым колебателем

Рисунок 16 – Кинематические схемы кулачковых механизмов

Достоинством кулачковых механизмов является способность воспроизводить движения выходных звеньев по сложным законам. Наличие высшей пары, обуславливающей значительные удельные давления, вызывающие повышенный износ элементов пары, а также необходимость замыкания пары, относятся к недостаткам кулачковых механизмов.

Профилем кулачка называется кривая, полученная в сечении элемента кулачка плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения.

Профиль кулачка  $l$ , которого касается ролик, называется действительным. Траектория центра ролика  $2$  при движении его относительно кулачка называется центровой профилем. Центральной и действительный профили кулачка являются эквидистантными (равноотстоящими) кривыми (рисунок 17).

Минимальный радиус кулачка  $R_0$  – радиус-вектор, соединяющий центр вращения кулачка с ближайшей точкой профиля кулачка (см. рисунок 17). Различают минимальный радиус  $R_0$  действительного профиля и минимальный радиус  $R'_0$  центрального профиля кулачка:

$$R'_0 = R_0 + r_p,$$

где  $r_p$  – радиус ролика.

Максимальный радиус кулачка  $R_{\max}$  – радиус-вектор, соединяющий центр вращения кулачка с самой удалённой точкой профиля.

Подъём толкателя  $h$  – разность длин максимального  $R_{\max}$  и минимального  $R_0$  радиусов кулачка.

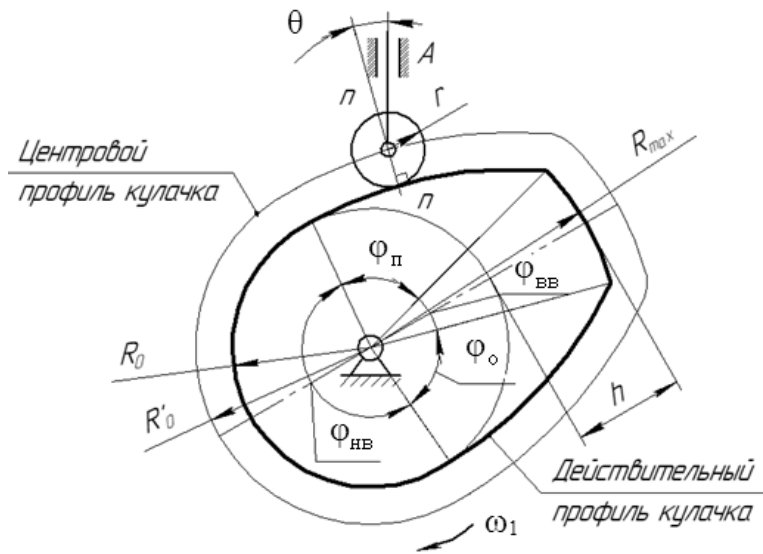


Рисунок 17 – Геометрические параметры кулачка

При вращении кулачка на один оборот различают такие фазы движения выходного звена, как фазы подъёма, верхнего выстоя, опускания, нижнего выстоя (или нерабочая фаза). Этим фазам соответствуют центральные углы поворота кулачка –  $\varphi_n, \varphi_{вв}, \varphi_o, \varphi_{нв}$ .

$$\varphi_n + \varphi_{вв} + \varphi_o + \varphi_{нв} = 360^\circ.$$

Сумма углов  $\varphi_n + \varphi_{вв} + \varphi_o = \varphi_p$  называется рабочим углом кулачка (см. рисунок 17).

Угол  $\nu$ , заключённый между нормалью  $nn$  к профилю кулачка в точке касания и направлением движения выходного звена, называется углом давления (см. рисунок 17).

Задачей кинематического анализа кулачковых механизмов является определение закона движения выходного звена по заданному закону движения кулачка и кинематической схеме механизма. Решение этой задачи обычным графическим методом планов связано с определёнными трудностями, а именно: в неоднократном вычерчивании схемы кулачкового механизма, соответствующей определённым углам поворота кулачка. Поэтому в основу анализа кулачковых механизмов положен другой метод – метод обращённого движения, который заключается в том, что мысленно всему механизму сообщают вращение вокруг центра вращения кулачка с угловой скоростью  $(-\omega_1)$ , равной, но противоположно направленной угловой скорости кулачка. Тогда кулачок становится как бы неподвижным, т. к.  $\omega_1 + (-\omega_1) = 0$ , а стойка  $l$  с выходным звеном  $3$  будут вращаться вокруг центра вращения кулачка  $O_1$  в противоположную сторону (рисунок 18). Относительное вращение звеньев от этого не

изменится, а перемещение выходного звена  $S_i$  будет таким, как и в истинном движении при неподвижной стойке. Например, для кулачкового механизма с роликовым толкателем (см. рисунок 18) перемещение толкателя в этом положении  $S_i$  представляет собой расстояние от окружности минимального радиуса  $R'_0$  кулачка до центрального профиля кулачка.

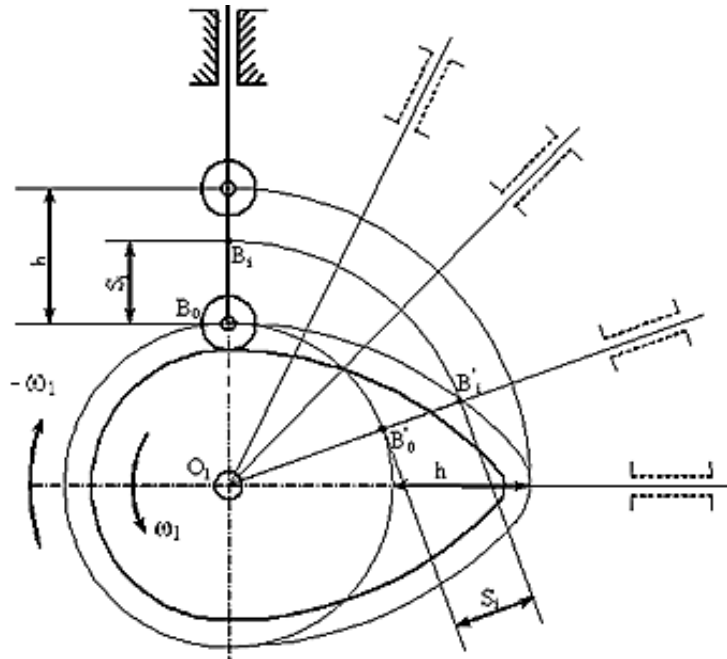


Рисунок 18 – Схема перемещения толкателя кулачкового механизма с роликовым толкателем

Таким образом, по кинематической схеме кулачкового механизма в обращённом движении определяются ряд положений выходного звена и соответствующие им перемещения, а затем строится диаграмма перемещений  $S = f(\varphi)$  или  $\psi = f(\varphi)$ .

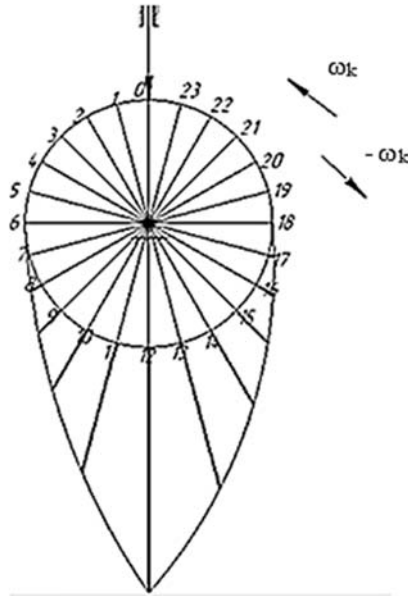
### **Пример выполнения задания**

#### **Анализ центрального кулачкового механизма с игольчатым толкателем.**

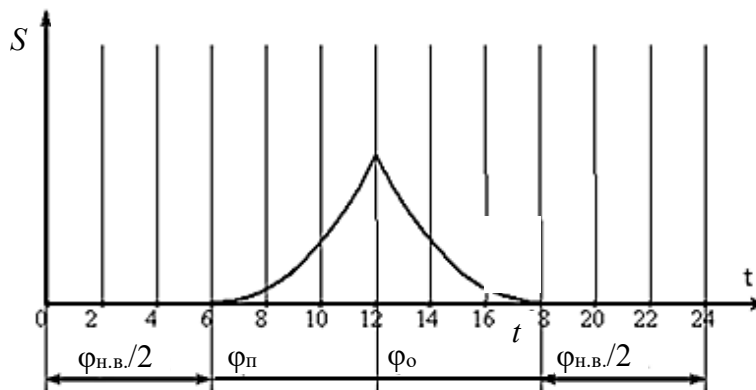
По исходным данным и профилю кулачка строим кинематическую схему центрального кулачкового механизма (рисунок 19, а).

Применяя метод обращённого движения, определяем положения толкателя, для чего делим окружность радиусом  $R_0$  на 24 равные части и из центра через точки деления  $(0, 1, \dots, 24)$  окружности проводим радиус-векторы (см. рисунок 19, а). В обращённом движении толкатель будет сгибаться по действительному профилю кулачка. Ось толкателя в обращённом движении всегда будет совпадать с радиус-вектором кулачка, проведённым из центра через соответствующую точку деления.

a)



б)



*a* – кинематическая схема кулачкового механизма; *б* – диаграмма перемещения толкателя

Рисунок 19 – Анализ центрального кулачкового механизма с роликовым толкателем

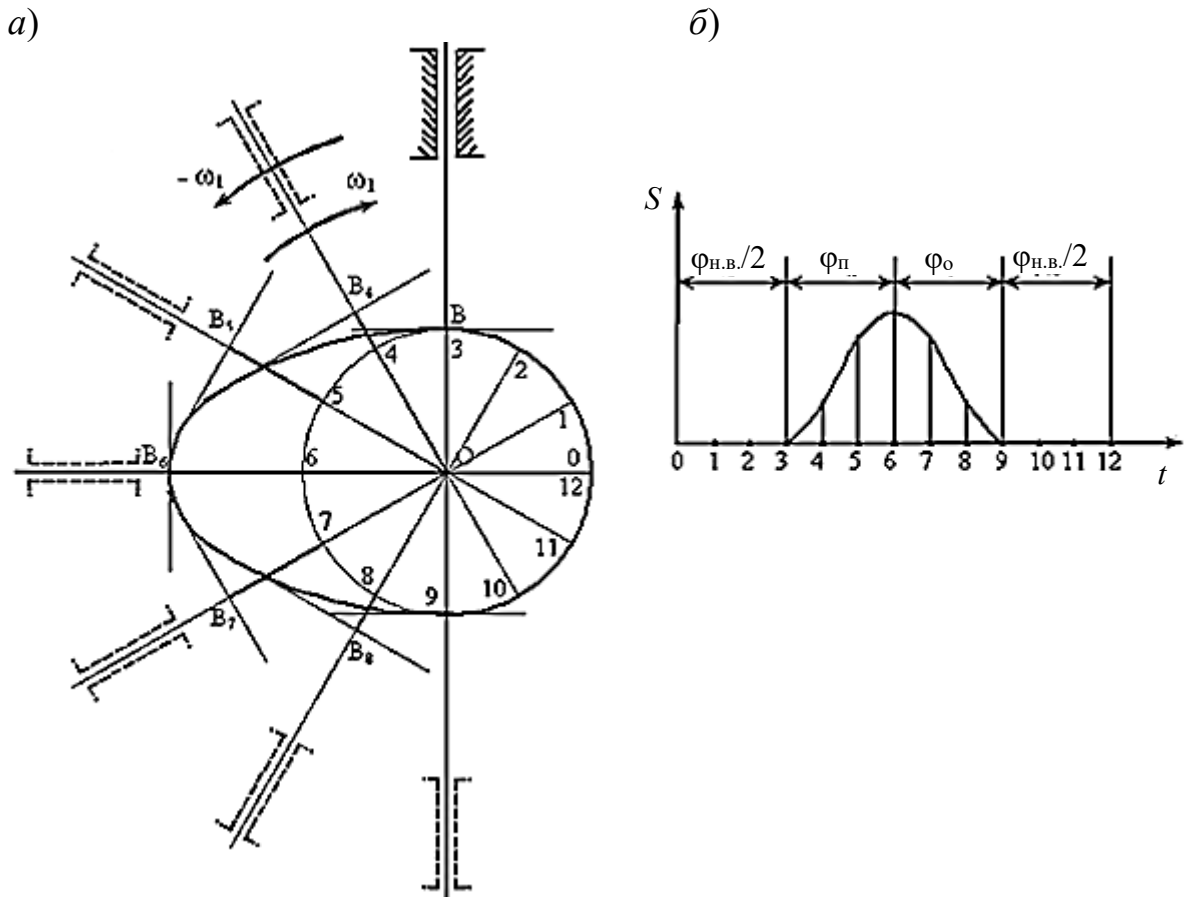
Определяем перемещение толкателя в каждом положении, как расстояние, измеренное по радиус-вектору кулачка от окружности минимального радиуса до профиля кулачка ( $0-0'$ ,  $1-1'$ , ...,  $23-23'$ ), при повороте кулачка на соответствующий угол (см. рисунок 19, *a*).

Строим диаграмму перемещения  $S = f(\varphi)$  в прямоугольной системе координат, для чего на оси абсцисс откладывают отрезок, соответствующий повороту кулачка на один оборот  $\varphi = 360$  (или на рабочий угол  $\varphi_p$ ), и делим его на столько равных частей, на сколько разделена окружность радиусом  $R_0$  (или  $\varphi_p$ ). По оси ординат в точках деления ( $0, 1, \dots, 24$ ) откладываем в масштабе соответствующие им перемещения толкателя ( $1-1', 2-2', \dots$ ), полученные на профиле кулачка. Соединив концы отрезков плавной кривой, получаем диаграмму перемещения толкателя (рисунок 19, *б*).

### Анализ кулачкового механизма с плоским толкателем.

Используя метод обращённого движения, строим планы механизма, для чего окружность минимального радиуса кулачка делим на 12 равные части и нумеруем точки деления (0, 1, ..., 12) в обращённом движении (рисунок 20, а). Через точки деления из центра  $O$  проводим лучи ( $O-0$ ,  $O-1$ ,  $O-2\dots$ ), которые и определяются текущими положениями оси толкателя в обращённом движении механизма.

Плоскость тарелки в каждом положении перпендикулярна к оси толкателя и должна касаться профиля кулачка. Поэтому на планах механизма строим положение тарелки, проводим касательные к профилю, которые и определяют искомое положение плоскости тарелки. Расстояния (например,  $4-B_4$ ,  $5-B_5$  и т. п.) от окружности минимальным радиусом до соответствующего положения плоскости тарелки представляют собой перемещения толкателя, которые откладываем в масштабе в соответствующих положениях в направлении оси ординат на диаграмме  $S = f(\varphi)$  (рисунок 20, б).



а – кинематическая схема кулачкового механизма; б – диаграмма перемещения толкателя

Рисунок 20 – Анализ кулачкового механизма с плоским толкателем



## Список литературы

1 **Волков, В. В.** Теория механизмов и машин: учебник / В. В. Волков. – Старый Оскол: ТНТ, 2017. – 328 с.

2 Зубчатые передачи и трансмиссии в Беларуси: проектирование, технология, оценка свойств / В. Б. Альгин [и др.]; под общ. ред. В. Б. Альгина, В. Е. Старжинского. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 406 с.

3 **Леонов, И. В.** Теория механизмов и машин. Основы проектирования по динамическим критериям и показателям экономичности: учебник / И. В. Леонов. – Москва: Юрайт, 2016. – 239 с.

4 Теория механизмов и машин. Расчетно-графическая работа № 1: методические рекомендации к самостоятельной работе / Сост. В. Л. Комар, О. В. Благодарная, О. А. Пономарева. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – 30 с.

5 Теория механизмов и машин. Расчетно-графическая работа № 2: методические рекомендации к самостоятельной работе / Сост. В. Л. Комар, Ю. В. Машин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – 25 с.

6 Теория механизмов и машин. Расчетно-графическая работа № 3: методические рекомендации к самостоятельной работе / Сост. О. В. Благодарная, О. А. Пономарева. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – 22 с.