

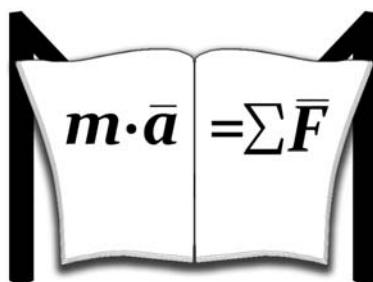
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология
машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства», 1-36 01 06 «Оборудование
и технология сварочного производства»,
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов
и производств», 1 36 01 04 «Оборудование и технологии
высокоэффективных процессов обработки материалов»
очной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2020

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
М55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «16» марта 2020 г., протокол № 9

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Механика материалов» для специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 1 36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» для студентов очной и заочной форм обучения. Содержат материалы к практическим занятиям.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2020

Содержание

Введение.....	4
1 Проверка прочности и расчет простого поперечного сечения балки при косом изгибе.....	5
2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения	7
3 Расчет бруса при внецентренном растяжении-сжатии. Определение положения опасных точек в поперечном сечении.....	10
4 Построение ядра сечения.....	14
5 Определение угловых и линейных перемещений в балках с помощью интеграла Мора.....	17
6 Определение угловых и линейных перемещений в балках по способу Верещагина.....	20
7 Решение статически неопределимых балок с помощью метода сил...	23
8 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный, определение несущей способности.....	27
9 Расчет продольно сжатого стержня составного сечения на устойчивость.....	34
10 Продольный и поперечный удары по брусу. Определение деформаций и напряжений в стержне. Расчет на прочность и жесткость стержневых конструкций при нагружении ударом.....	37
11 Расчет стержней при продольно-поперечном изгибе.....	40
12 Проверочный расчет на прочность при циклическом нагружении. Определение коэффициента запаса прочности.....	42
Список литературы	44
Приложение А.....	45
Приложение Б.....	46

Введение

Цель преподавания курса «Механика материалов» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

Методические рекомендации содержат примеры решения задач по основным темам курса. Представлены задачи для самостоятельного решения с целью подготовки к занятиям, контрольным работам и экзамену. Также приведены контрольные вопросы по теории курса.

1 Проверка прочности и расчет простого поперечного сечения балки при косом изгибе

Пример 1 – Проверить прочность стальной балки двутаврового поперечного сечения, изображенной на рисунке 1.1, а, если $[\sigma] = 170$ МПа.

Исходные данные: двутавр № 27 ($W_x = 371$ см³; $W_y = 41,5$ см³).

Решение

На основании принципа независимости действия сил рассмотрим отдельно каждую плоскость нагружения [1, 2].

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости, рисунок 1.1, б). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, в).

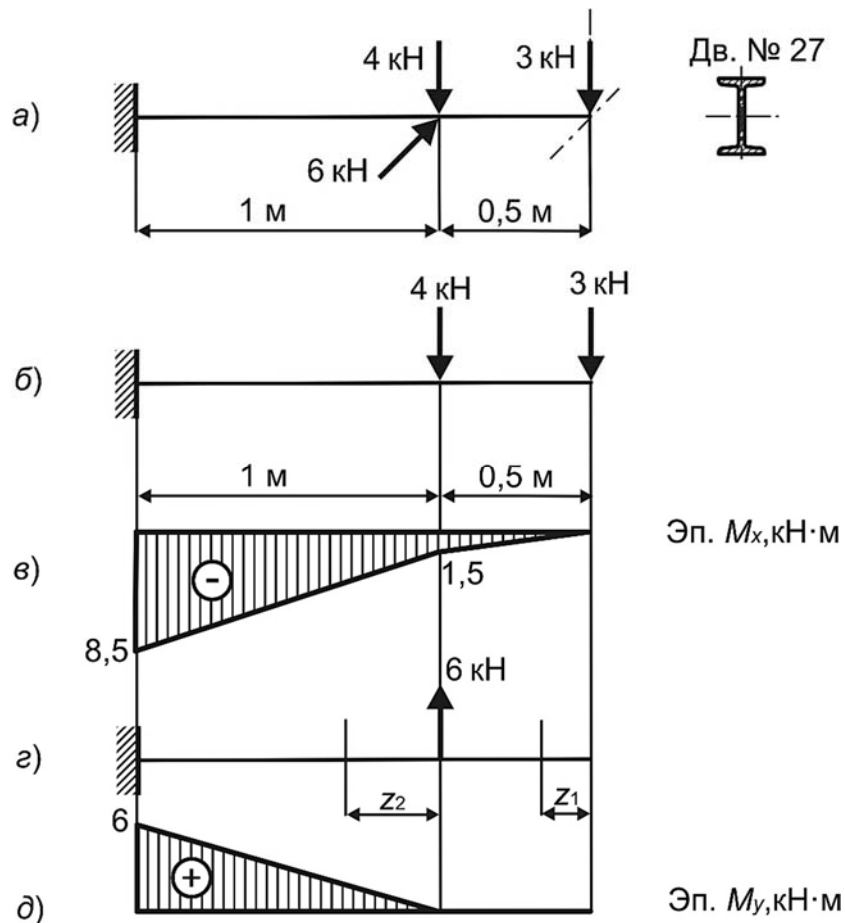


Рисунок 1.1

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, б). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.1, д).

Условие прочности для опасного сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{8,5 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} + \frac{6 \cdot 10^3}{41,5 \cdot 10^{-6}} = 167,5 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 170 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 1.2.

Исходные данные: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

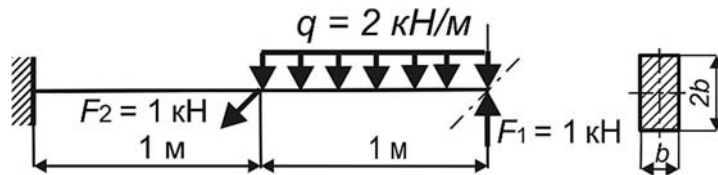


Рисунок 1.2

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить допустимую нагрузку на балку, изображенную на рисунке 1.3.

Исходные данные: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

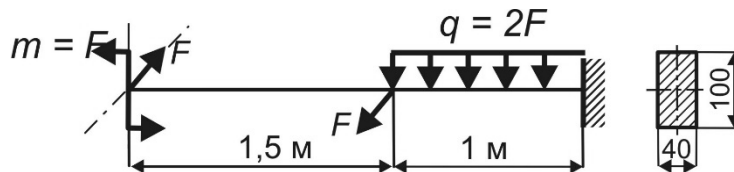


Рисунок 1.3

Контрольные вопросы

- 1 Какой случай изгиба называется косым изгибом?
- 2 В чем состоит принцип независимости действия сил при расчете балки на косой изгиб?
- 3 Запишите формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе.
- 4 Сформулируйте условие прочности при косом изгибе.
- 5 Запишите выражение для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.
- 6 Нейтральная ось при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения?
- 7 Как определить опасные точки опасного сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 8 Возможен ли косой изгиб балки, если осевые моменты ее поперечного сечения равны?
- 9 Как определить прогиб балки при косом изгибе?

2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

Пример 1 – Вал круглого сплошного поперечного сечения (рисунок 2.1, а) передает мощность $N = 6$ кВт, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. На валу установлены шкив диаметром $D_1 = 0,15$ м и шестерня, средний диаметр которой $D_2 = 0,1$ м. Определить диаметр вала по четвертой теории прочности, если $[\sigma] = 80$ МПа.

Решение

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (рисунок 2.1, б). Определим внешние моменты на шкиве и шестерне [1–4]:

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{6}{100} = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал внешних моментов (рисунок 2.1, в), в соответствии с которой построим эпюру крутящих моментов (рисунок 2.1, г).

Определим внешние силы, изгибающие вал со стороны шкива и шестерни:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,06}{0,15} = 2,4 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,06}{0,1} = 1,2 \text{ кН}.$$

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 2.1, д). Определим реакции опор и построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 2.1, е).

Составим схему действия на вал сил в горизонтальной плоскости (см. рисунок 2.1, д). Определим реакции опор и построим эпюру изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости (рисунок 2.1, е).

Построим эпюру суммарных изгибающих моментов (рисунок 2.1, ж) в характерных сечениях вала, если $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

$$M = 0; M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M = \sqrt{0,09^2 + 0,12^2} = 0,15 \text{ кН}\cdot\text{м}; M = 0.$$

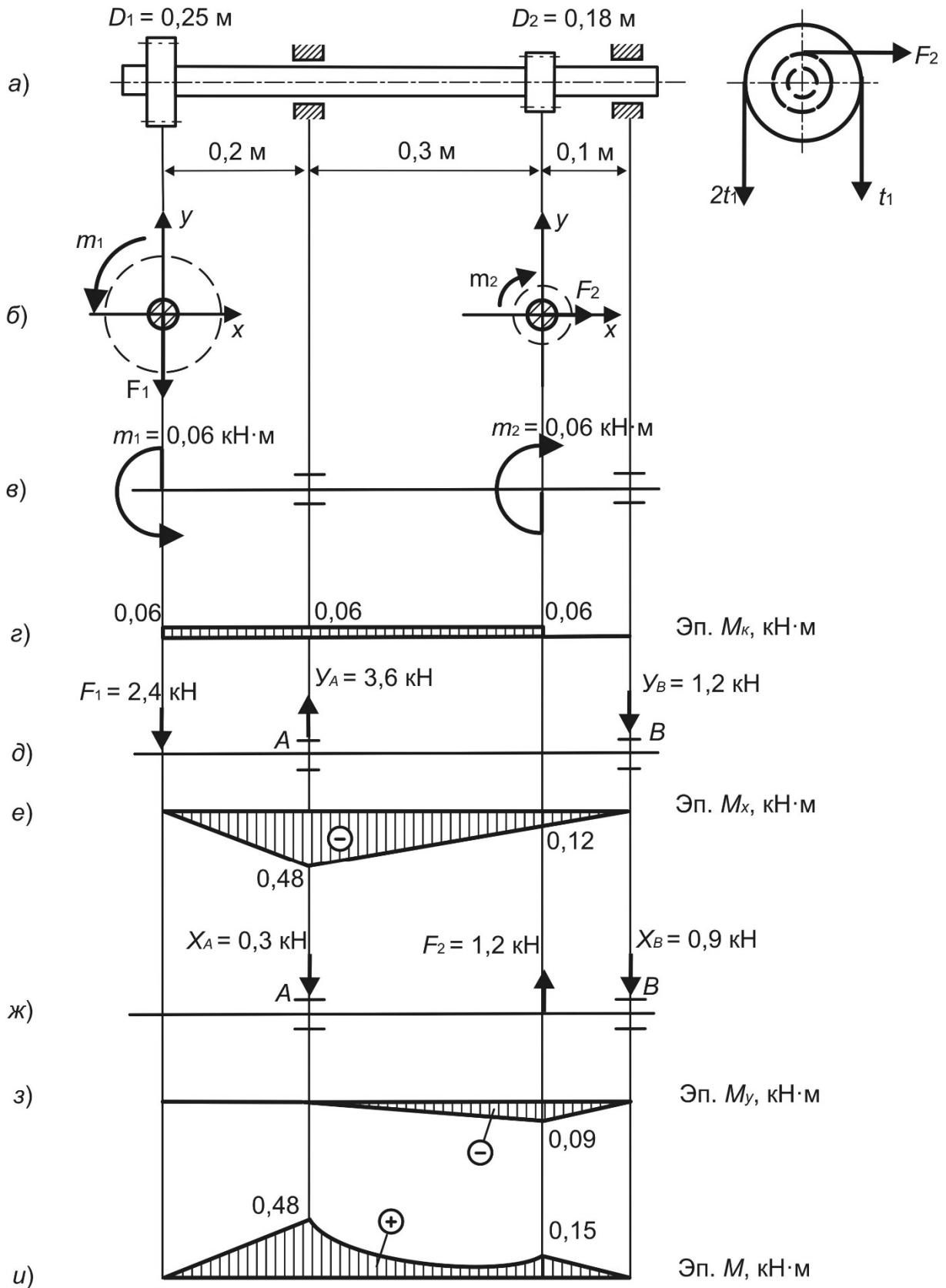


Рисунок 2.1

По эюре суммарных изгибающих моментов M и эюре крутящих моментов M_K определим опасное сечение.

В этом сечении действуют наибольший изгибающий момент $M = 0,48$ кН·м и наибольший крутящий момент $M_K = 0,06$ кН·м.

Эквивалентный (расчетный) момент по четвертой теории прочности в опасном сечении

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{0,48^2 + 0,75 \cdot 0,06^2} = 0,483 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,483 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0395 \text{ м} = 39,5 \text{ мм}.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность вала, изображенного на рисунке 2.2 по четвертой теории прочности.

Исходные данные: $N = 40$ кВт, $\omega = 100$ об/мин, диаметр вала $d = 55$ мм, $[\sigma] = 70$ МПа.

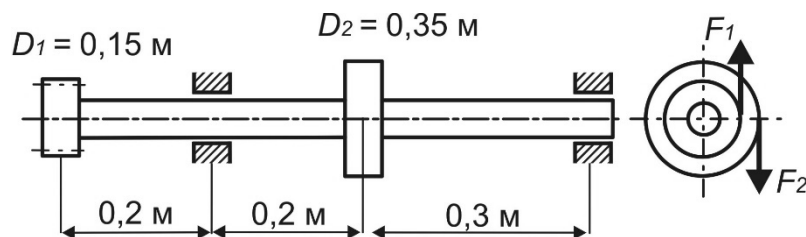


Рисунок 2.2

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить диаметр вала, изображенного на рисунке 2.3, по третьей теории прочности.

Исходные данные: $N = 20$ кВт, $n = 200$ об/мин, $[\sigma] = 80$ МПа.

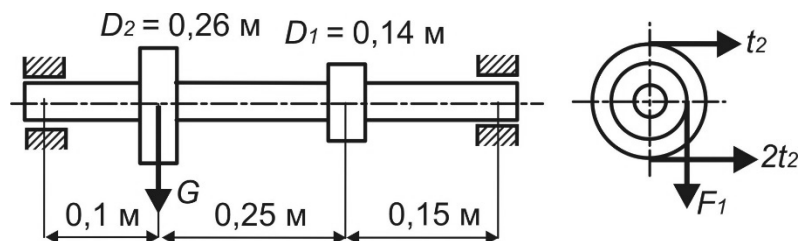


Рисунок 2.3

Контрольные вопросы

1 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?

2 Как определяется внешний момент, если известна передаваемая мощность?

- 3 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны колеса (шестерни)?
- 4 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны шкива?
- 5 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.
- 6 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?
- 7 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?
- 8 Какие точки поперечного сечения вала являются опасными при совместном действии изгиба и кручения?
- 9 Запишите выражения для определения эквивалентных (расчетных) напряжений по третьей и четвертой теориям прочности.
- 10 Запишите выражения для определения эквивалентного (расчетного) момента по третьей и четвертой теориям прочности.
- 11 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

3 Расчет бруса при внецентренном растяжении-сжатии. Определение положения опасных точек в поперечном сечении

Пример 1 – Проверить прочность бруса, сжатого сосредоточенной силой $F = 120$ кН, приложенной в точке F (рисунок 3.1). Брус изготовлен из материала, для которого $[\sigma]_{сж} = 100$ МПа, $[\sigma]_p = 20$ МПа.

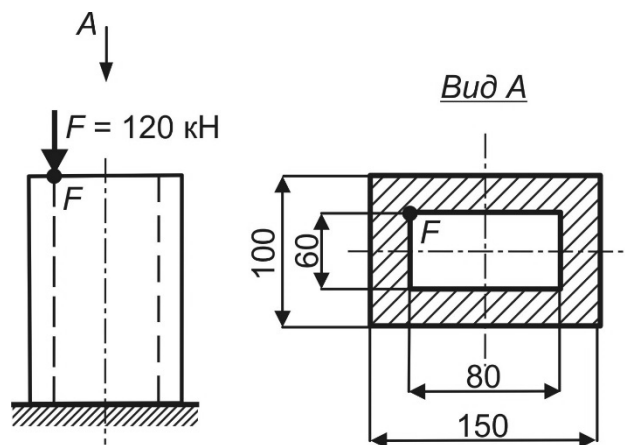


Рисунок 3.1

Решение

Составляем расчетную схему поперечного сечения (рисунок 3.2). На схеме размеры указываем в сантиметрах. Сечение имеет оси симметрии, Оси симметрии являются главными центральными осями (x и y соответственно). На их пересечении находится центр тяжести – точка C (см. рисунок 3.2).

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения.

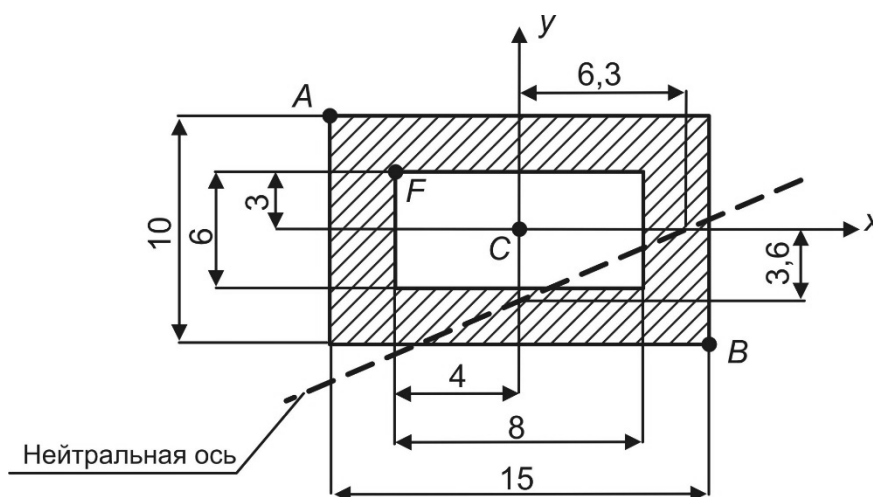


Рисунок 3.2

Площадь

$$A = 15 \cdot 10 - 8 \cdot 6 = 102 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [2]

$$I_x = \frac{15 \cdot 10^3}{12} - \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 1106 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{15^3 \cdot 10}{12} - \frac{8^3 \cdot 6}{12} = 2556,5 \text{ см}^4.$$

Осевые моменты сопротивления [2]

$$W_x = \frac{15 \cdot 10^3 - 8 \cdot 6^3}{6 \cdot 10} = 221,2 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{15^3 \cdot 10 - 8^3 \cdot 6}{6 \cdot 10} = 340,9 \text{ см}^3.$$

Квадраты радиусов инерции сечения [2]

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1106}{102} = 10,84 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{2556,5}{102} = 25,06 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы относительно центра тяжести

$$x_F = -4 \text{ см}; \quad y_F = 3 \text{ см}.$$

Внутренние силовые факторы

$$N = -120 \text{ кН};$$

$$M_x = \pm F \cdot y_F = \pm 120 \cdot 0,03 = \pm 3,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y = \pm F \cdot x_F = \pm 120 \cdot 0,04 = \pm 4,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Длины отрезков, которые нейтральная ось (линия) отсекает на главных центральных осях (см. рисунок 3.2):

$$x_0 = a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{25,06}{(-4)} = 6,3 \text{ см};$$

$$y_0 = a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,84}{3} = -3,6 \text{ см}.$$

Нейтральная ось делит сечение на растянутую и сжатую области.

Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси: в сжатой области – точка A , в растянутой области – точка B (см. рисунок 3.2).

Напряжения в опасных точках

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} - \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = -42,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} + \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = 18,6 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности на растяжение:

$$\sigma_{\max}^P \leq [\sigma]_P; \quad \sigma_{\max}^P = 18,6 \text{ МПа} \leq [\sigma]_P = 20 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности на сжатие:

$$\sigma_{\max}^{СЖ} \leq [\sigma]_{СЖ};$$

$$\sigma_{\max}^{СЖ} = 42,12 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{СЖ} = 100 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Бетонная колонна нагружена сжимающей силой, приложенной в точке F (рисунок 3.3). Определить допускаемую нагрузку.

Исходные данные: $b = 60 \text{ мм}$, $h = 200 \text{ мм}$, $r = 40 \text{ мм}$, материал – бетон, $[\sigma]_P = 4 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{СЖ} = 25 \text{ МПа}$.

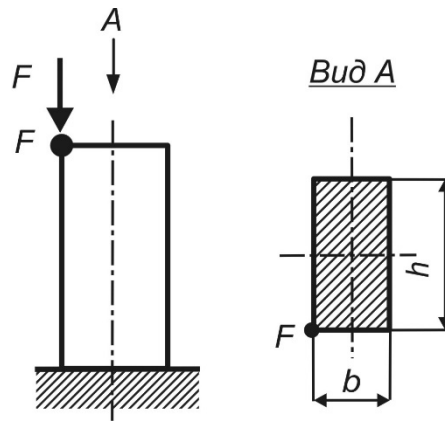


Рисунок 3.3

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Колонна, представленная на рисунке 3.4, нагружена сжимающей силой, приложенной в точке $F = 150$ кН. Определить напряжения в угловых точках сечения и построить эпюру нормальных напряжений.

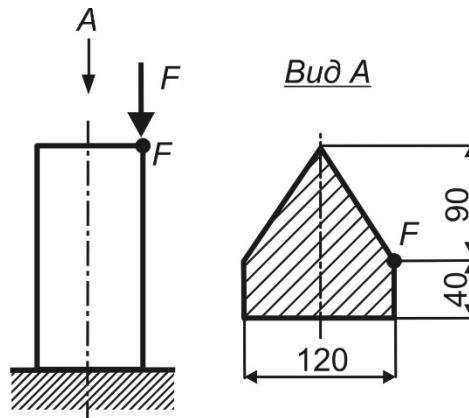


Рисунок 3.4

Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном растяжении (сжатии)?
- 2 Запишите выражение для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии).
- 3 Влияет ли на положение нейтральной оси величина и направление внецентренно приложенной нагрузки?
- 4 Как определить положение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии)? Запишите соответствующие формулы.
- 5 Как определить опасные точки сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 6 Запишите условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии)?

4 Построение ядра сечения

Пример 1 – Построить ядро сечения.

Исходные данные: поперечное сечение (рисунок 4.1).

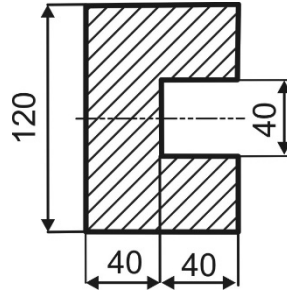


Рисунок 4.1

Решение

Вычерчиваем расчетную схему заданного поперечного сечения (рисунок 4.2, а).

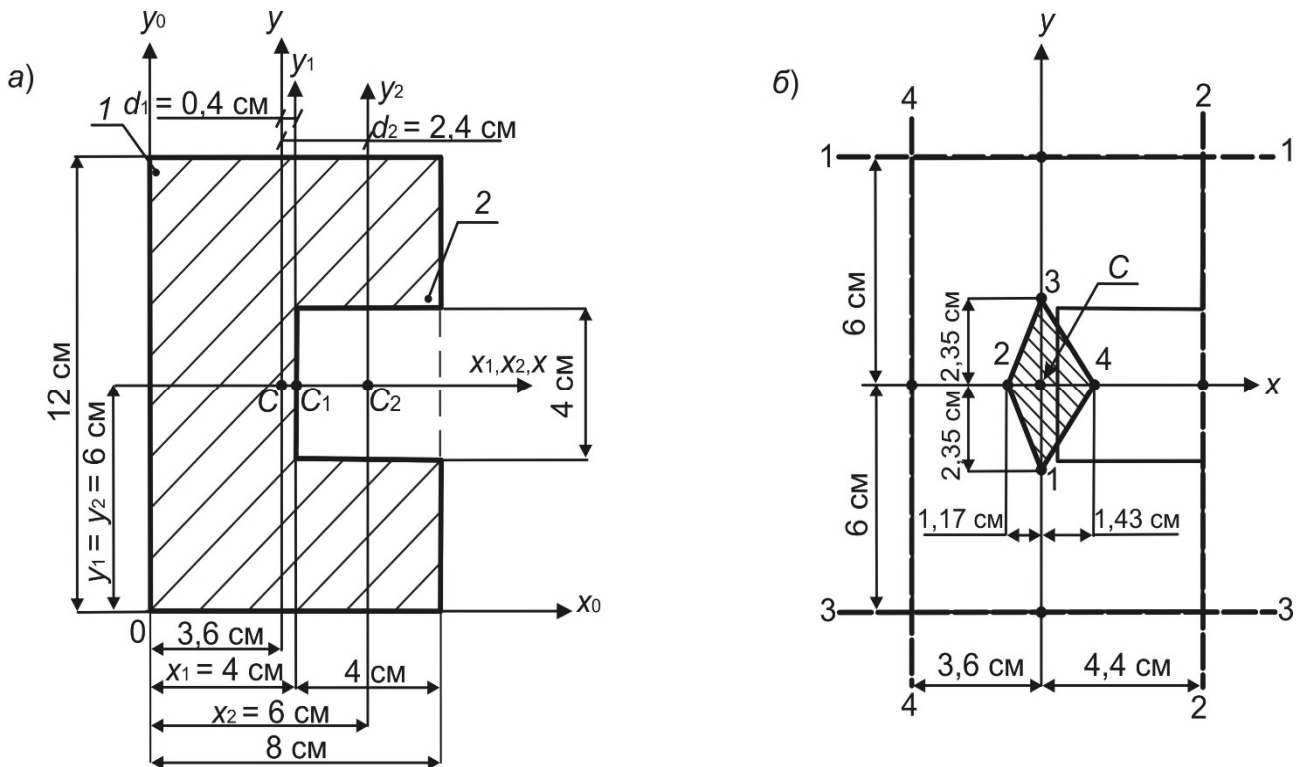


Рисунок 4.2

Заданное поперечное сечение состоит из двух простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – квадрат (см. рисунок 4.2, а).

Определим площади выделенных фигур в соответствии с таблицей А.1:

$$A_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2; \quad A_2 = 4^2 = 16 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = 96 - 16 = 80 \text{ см}^2.$$

Вычерчиваем заданное сечение. Через центры тяжести выделенных фигур проведем собственные главные центральные оси (см. рисунок 4.2, а).

Определим положение центра сечения относительно произвольно выбранных начальных осей y_0, x_0 (см. рисунок 4.2, а). Координаты центра тяжести сечения [1–4]

$$x_C = \frac{A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2}{A_1 - A_2} = \frac{96 \cdot 4 - 16 \cdot 6}{80} = 3,6 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{96 \cdot 6 - 16 \cdot 6}{80} = 6 \text{ см}.$$

Полученные координаты откладываем на начальных осях и отмечаем центр тяжести – точку C (см. рисунок 4.2, а). Центр тяжести находится на оси симметрии, которая является главной центральной осью x_C . Через центр тяжести проводим вторую главную центральную ось y_C .

Для расчета главных центральных моментов инерции используем формулы при параллельном переносе осей. С учетом данных таблицы А.1

$$I_{x_C} = \sum_1^n (I_{x_i} + c_i^2 \cdot A_i) = (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) - (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = \frac{8 \cdot 12^3}{12} - \frac{4^4}{12} = 1130,67 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum_1^n (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) = (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) - (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = \left(\frac{12 \cdot 8^3}{12} + 0,4^2 \cdot 96 \right) - \left(\frac{4^4}{12} + 2,4^2 \cdot 16 \right) = 413,87 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции $I_{x_C y_C} = 0$.

Квадраты радиусов инерции [1–4]

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1130,67}{80} = 14,13 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{413,87}{80} = 5,17 \text{ см}^2.$$

Проводим касательные к контуру сечения (рисунок 4.2, б).

Касательная 1-1. Относительно центра тяжести определим координаты точек пересечения данной касательной и главных центральных осей сечения

(см. рисунок 4.2, б) $x_0 = \infty$; $y_0 = 6$ см.

Координаты узловой точки 1

$$x_1 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{5,17}{\infty} = 0; \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{14,13}{6} = -2,35 \text{ см.}$$

Касательная 2-2: $x_0 = 4,4$ см; $y_0 = \infty$.

Координаты узловой точки 2

$$x_2 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{5,17}{4,4} = -1,17 \text{ см; } y_2 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{14,13}{\infty} = 0 \text{ см.}$$

Касательная 3-3: $x_0 = \infty$; $y_0 = -6$ см.

Координаты узловой точки 3

$$x_3 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{5,17}{\infty} = 0; \quad y_3 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{14,13}{(-6)} = 2,35 \text{ см.}$$

Касательная 4-4: $x_0 = -3,6$ см; $y_0 = \infty$.

Координаты узловой точки 2

$$x_2 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{5,17}{(-3,6)} = 1,43 \text{ см; } y_2 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{14,13}{\infty} = 0 \text{ см.}$$

Откладываем рассчитанные координаты узловых точек относительно центра тяжести, отмечаем точки и соединяем их прямыми линиями. Полученная геометрическая фигура является ядром сечения (см. рисунок 4.2, б).

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Построить ядро сечения.

Исходные данные: поперечные сечения (рисунок 4.3).

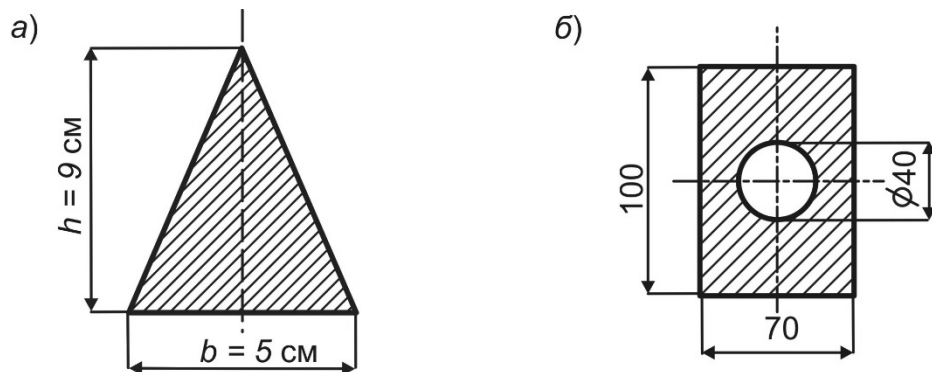


Рисунок 4.3

Контрольные вопросы

- 1 Что такое ядро сечения?
- 2 Запишите формулы для определения координат узловых точек ядра сечения.
- 3 Как пройдет нейтральная ось, если точка приложения силы будет находится на границе ядра сечения?

5 Определение угловых и линейных перемещений в балках с помощью интеграла Мора

Пример 1 – Для консольной балки постоянной жесткости (рисунок 5.1) определить прогиб в сечении C при помощи интеграла Мора.

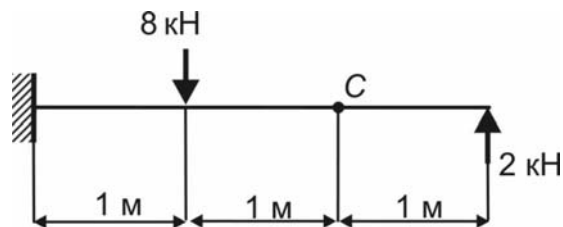


Рисунок 5.1

Решение

Покажем грузовое (действительное) состояние балки, вызванное заданными нагрузками (рисунок 5.2, а).

Покажем единичное (фиктивное) состояние балки [1–4], вызванное действием единичной нагрузки (рисунок 5.2, б). В этом состоянии балка освобождается от заданных нагрузок, но в сечении C нагружена единичной силой $\bar{F} = 1$. Разбиваем балки на три участка.

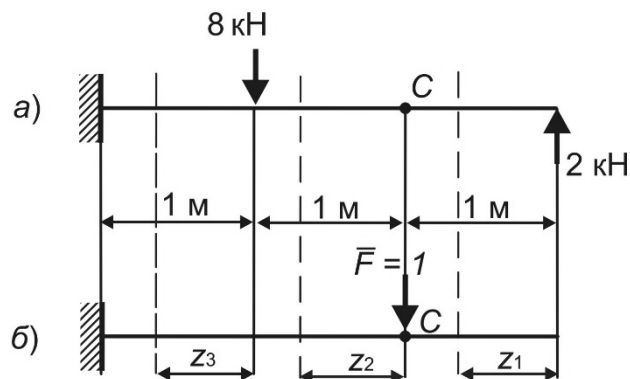


Рисунок 5.2

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от заданных нагрузок.

$$\text{Участок 1: } 0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м; } M_F = 2 \cdot z_1.$$

$$\text{Участок 2: } 0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м; } M_F = 2 \cdot (1 + z_2) = 2 + 2 \cdot z_2.$$

$$\text{Участок 3: } 0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м; } M_F = 2 \cdot (2 + z_3) - 8 \cdot z_3 = 4 - 6 \cdot z_3.$$

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от единичной нагрузки.

$$\text{Участок 1: } 0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м; } \bar{M} = 0.$$

$$\text{Участок 2: } 0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м; } \bar{M} = -1 \cdot z_2.$$

$$\text{Участок 3: } 0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м; } \bar{M} = -1 \cdot (1 + z_3) = -1 - z_3.$$

Запишем интеграл Мора для определения прогиба в сечении С [1–4]:

$$\Delta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left(\int_0^1 (2 + 2 \cdot z_2) \cdot (-1 \cdot z_2) dz + \int_0^1 (4 - 6 \cdot z_3) \cdot (-1 - z_3) dz \right) = -\frac{8}{3EI}.$$

Пример 2 – Для стальной балки (рисунок 5.3) определить угол поворота сечения С при помощи интеграла Мора.

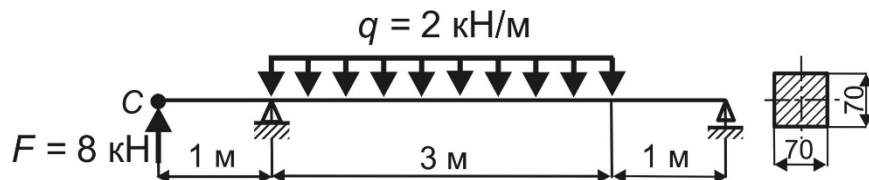


Рисунок 5.3

Решение

Покажем грузовое (действительное) состояние балки, вызванное заданными нагрузками (рисунок 5.4, а).

Покажем единичное (фиктивное) состояние балки [1–4], вызванное действием единичной нагрузки (рисунок 5.4, б). В этом состоянии балка освобождается от заданных нагрузок. В сечении С приложим единичный момент $\bar{m} = 1$. Разбиваем балки на три участка.

Запишем интеграл Мора для определения угла поворота в сечении C [1–4]:

$$\Theta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left(\int_0^1 (8 \cdot z_1) \cdot 1 dz + \int_0^3 \left(8 \cdot (1 + z_2) - 6,25 \cdot z_2 - 2 \cdot \frac{z_2^2}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - 0,25 \cdot z_2) dz + \int_0^1 (4,25 \cdot z_2) \cdot (0,25 \cdot z_2) dz \right) = \frac{19,354}{EI}.$$

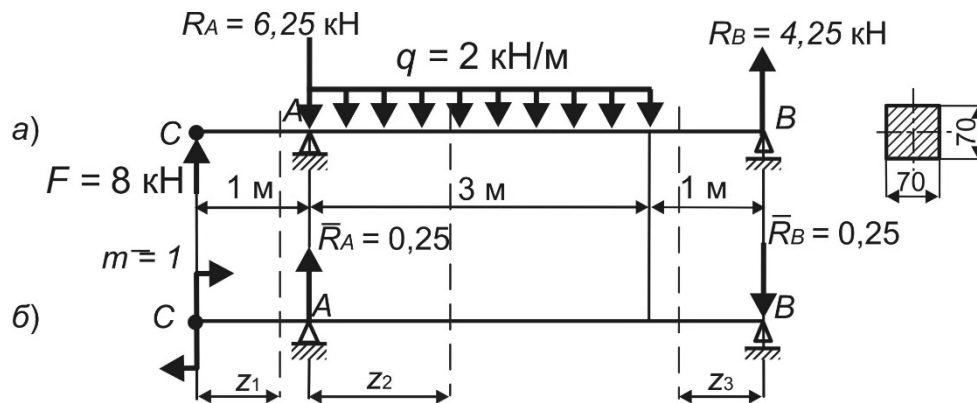


Рисунок 5.4

Осевой момент инерции заданного квадратного сечения в соответствии с таблицей А.1

$$I_x = \frac{b^4}{12} = \frac{7^4}{12} = 200,08 \text{ см}^4.$$

Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа или $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.
Окончательно

$$\Theta_C = \frac{19,354 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,08 \cdot 10^{-8}} = 0,048 \text{ рад.}$$

Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения потенциальной энергии деформаций при изгибе.
- 2 Сформулируйте теоремы о взаимности работ и перемещений.
- 3 Что обозначают коэффициенты в обозначении линейных и угловых перемещений?
- 4 Запишите интеграл Мора для определения перемещений при изгибе.
- 5 Что такое грузовое (действительное) состояние системы?
- 6 Что такое единичное (фиктивное) состояние системы?
- 7 Опишите порядок определения перемещений по методу Мора.

6 Определение угловых и линейных перемещений в балках по способу Верещагина

Пример 1 – Для заданной стальной балки (рисунок 6.1, а) определить прогиб в сечении С способом Верещагина.

Дано: двутавр № 18 ($I_{x_{об}} = 1290 \text{ см}^4$); модуль продольной упругости стали в соответствии $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

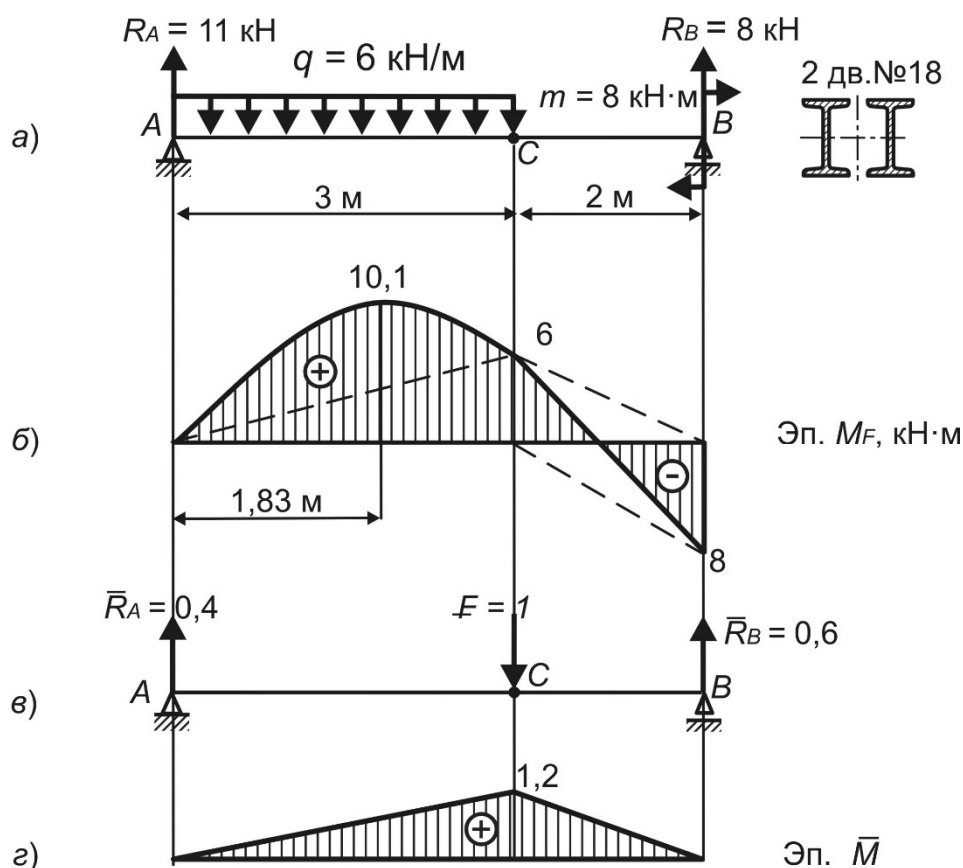


Рисунок 6.2

Решение

Рассмотрим грузовое состояние балки (см. рисунок 6.1, а). Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (рисунок 6.1, б).

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 6.1, в). От силы $\bar{F} = 1$, приложенной в сечении С, найдем опорные реакции и построим единичную эпюру \bar{M} (рисунок 6.1, г).

Определим прогиб сечения С перемножением единичной и грузовой эпюры:

$$\Delta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{6 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{84,5}{3EI_X}.$$

Осейвой момент инерции заданного сечения

$$I_X = 2 \cdot I_{X_{де}} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4.$$

Окончательно

$$\Delta_C = \frac{84,5}{3EI_X} = \frac{84,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2580 \cdot 10^{-8}} = 5,46 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Пример 2 – Для заданной стальной балки (рисунок 6.2, а) определить угол поворота сечения С способом Верещагина.

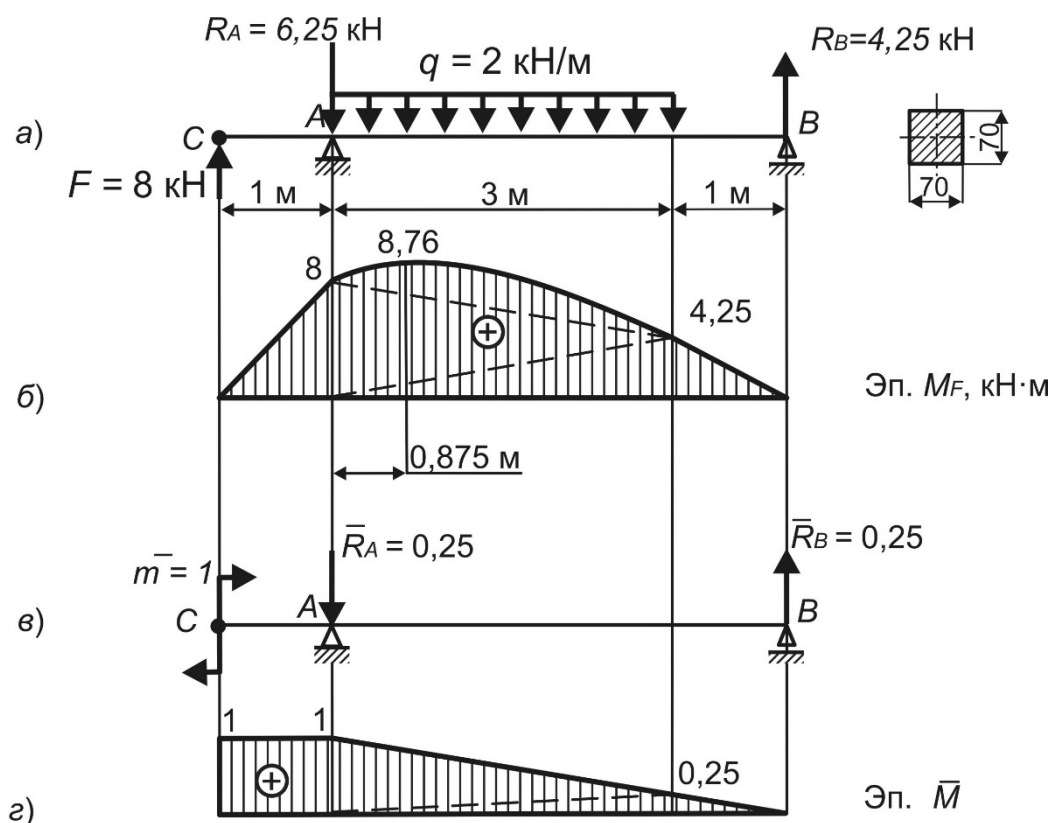


Рисунок 6.2

Решение

Рассмотрим грузовое состояние балки (см. рисунок 6.2, а). Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (рисунок 6.2, б).

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 6.2, в). От момента $\bar{m} = 1$, приложенного в сечении C , найдем опорные реакции и построим единичную эпюру \bar{M} (рисунок 6.2, з).

Определим прогиб сечения C перемножением единичной и грузовой эпюры:

$$\Theta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{2 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,25) \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right] = \frac{19,354}{E \cdot I_X}.$$

Осей момент инерции заданного квадратного сечения в соответствии с таблицей А.1

$$I_x = \frac{b^4}{12} = \frac{7^4}{12} = 200,08 \text{ см}^4.$$

Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа или $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.
Окончательно

$$\Theta_C = \frac{19,354 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,08 \cdot 10^{-8}} = 0,048 \text{ рад.}$$

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить прогиб в сечении C стальной балки (рисунок 6.3). Расчет произвести методом Мора и способом Верещагина.

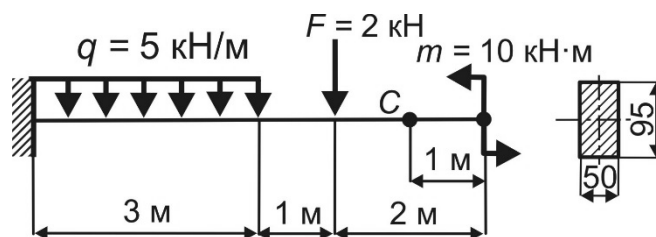


Рисунок 6.3

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Определить угол поворота сечения A стальной балки (рисунок 6.4). Расчет произвести методом Мора и способом Верещагина.

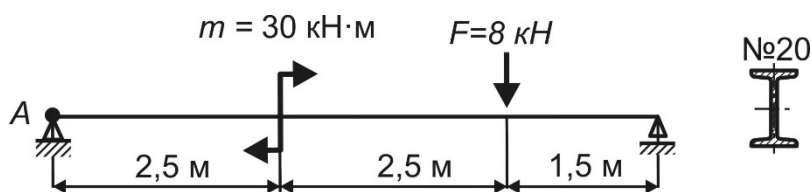


Рисунок 6.5

Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения перемещений способом Верещагина.
- 2 Какие нагрузки рассматриваются при построении грузовой эпюры?
- 3 Какие нагрузки рассматриваются при построении единичной эпюры?
- 4 Как перемножать эпюры по способу Верещагина?
- 5 Какие ограничения накладываются на применение способа Верещагина?
- 6 Опишите порядок определения перемещений по способу Верещагина.

7 Решение статически неопределимых балок с помощью метода сил

Пример1 – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 7.1. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

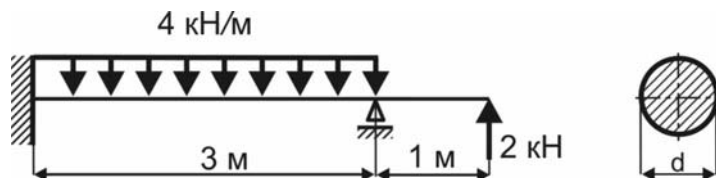


Рисунок 7.1

Решение

Степень статической неопределимости заданной балки (рисунок 7.2)

$$S = R - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Выберем основную систему (см. рисунок 7.2), освободив балку от заданной нагрузки и дополнительной связи.

Получим эквивалентную систему (см. рисунок 7.2), в которой приложим заданные нагрузки и реакцию дополнительной связи.

Составим каноническое уравнение метода сил [1–4]:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Приложим к основной системе заданные нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (см. рисунок 7.2).

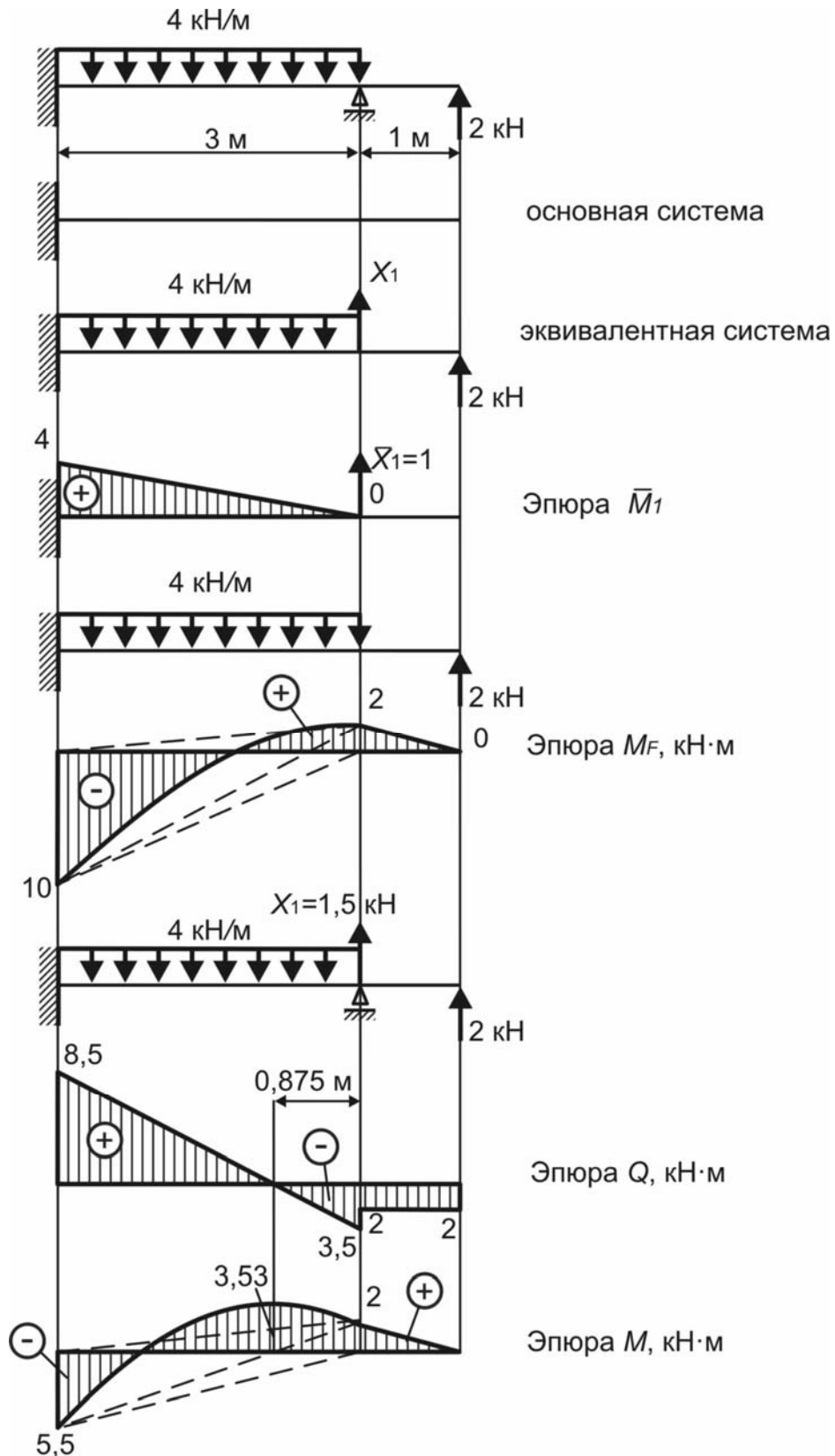


Рисунок 7.2

Приложим к основной системе единичную нагрузку $\bar{X}_1 = 1$ и построим единичную эпюру \bar{M}_1 (см. рисунок 7.2).

Определим коэффициенты канонического уравнения метода сил способом Верещагина [1–4]:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M_F \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{40,5}{EI}.$$

Решим каноническое уравнение метода сил с учетом найденных коэффициентов:

$$X_1 \cdot \frac{9}{EI} - \frac{40,5}{EI} = 0; \quad X_1 = 1,5 \text{ кН.}$$

Построим окончательные эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рисунок 7.2).

Выполним деформационную проверку [1–4]:

$$\Delta_{1F} = \frac{M \cdot \overline{M}_1}{EI} = 0;$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = 0.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определим диаметр балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 7,05 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 70,5 \text{ мм.}$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить размеры поперечного сечения для балки, изображенной на рисунке 7.3.

Исходные данные: $m = 12$ кН·м, $m_1 = 18$ к·Нм, $l_1 = 1,5$ м, $l_2 = 2$ м, $[\sigma] = 160$ МПа, $h = 2b$.

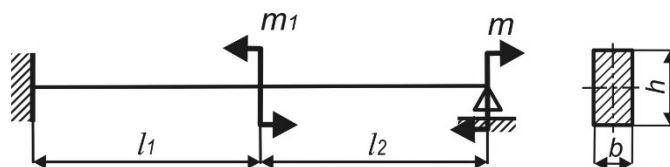


Рисунок 7.3

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность балки, изображенной на рисунке 7.4

Исходные данные: $F = 18$ кН, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 1$ м, $[\sigma] = 160$ МПа.

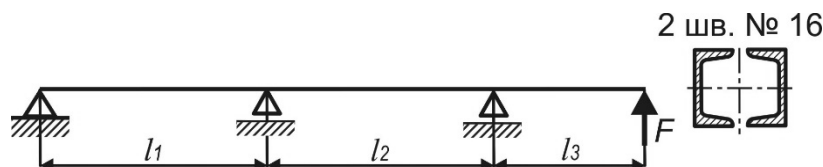


Рисунок 7.4

Контрольные вопросы

- 1 Какие системы называют статически неопределимыми?
- 2 Что называют степенью статической неопределимости?
- 3 Какие системы являются геометрически неизменяемыми?
- 4 Что такое основная система?
- 5 Что такое эквивалентная система?
- 6 Запишите канонические уравнения метода сил. Объясните их физический смысл.
- 7 Что означают величины X_1, X_2, \dots, X_n ?
- 8 Что означают величины $\delta_{ii}, \delta_{in}, \delta_{ni}, \delta_{nn}$?
- 9 Что означают величины $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{iF}$?
- 10 Как строятся единичные эпюры? Как определить необходимое количество единичных эпюр?
- 11 Как строится грузовая эпюра?
- 12 Какие эпюры необходимо перемножить, чтобы определить коэффициенты δ_{nn} ? Могут ли указанные коэффициенты быть отрицательными?
- 13 Какие эпюры необходимо перемножить, чтобы определить коэффициенты δ_{in}, δ_{ni} ? Будут ли указанные коэффициенты равны между собой?
- 14 Какие эпюры необходимо перемножить для определения грузовых коэффициентов?
- 15 Какими способами можно построить окончательные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
- 16 Каким образом выполняется деформационная проверка?
- 17 Запишите условие прочности для статически неопределимой балки.

8 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный, определение несущей способности

Пример 1 – Для стального стержня (рисунок 8.1) требуется: определить допустимое значение сжимающей нагрузки $[F]$, критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: материал стержня – сталь 3, модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа, $\mu = 1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

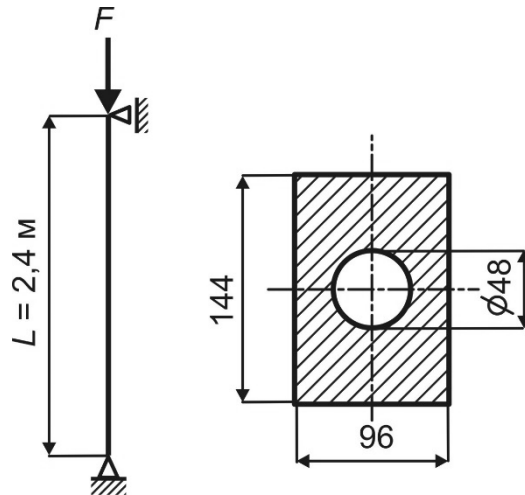


Рисунок 8.1

Решение

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения, которое состоит из двух простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – круг (рисунок 8.2).

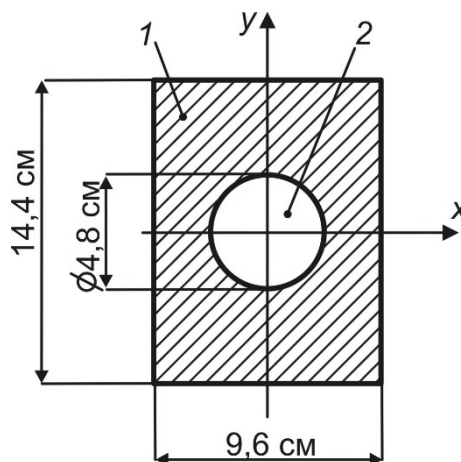


Рисунок 8.2

Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = 9,6 \cdot 14,4 - \frac{3,14 \cdot 4,8^2}{4} = 120,14 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [1–4]

$$I_X = I_{X_1} - I_{X_2} = \frac{9,6 \cdot 14,4^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 2362,73 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = I_{Y_1} - I_{Y_2} = \frac{14,4 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 1035,63 \text{ см}^4.$$

Минимальный момент инерции $I_{\min} = I_X = 1035,63 \text{ см}^4$.

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1035,63}{120,14}} = 2,93 \text{ см}.$$

Определяем максимальную гибкость стержня относительно материальной оси x :

$$\lambda_X = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,4}{2,93 \cdot 10^{-2}} = 81,9.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба в соответствии с таблицей Б.1:

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81,9 - 80) = 0,74.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,74 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 14224,6 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ($\lambda_{пред} = 100$), критическую силу определяем по формуле Ясинского [1–4]:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 81,9) \cdot 10^2 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} = 26026,4 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{26026,4 \cdot 10^2}{14224,6 \cdot 10^2} = 1,83.$$

Пример 2 – Определить размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 8.3). Для расчетов принять допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Материал стержня – сталь 3.

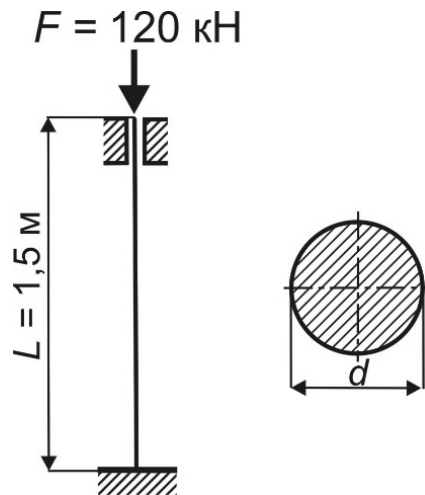


Рисунок 8.3

Решение

Для определения диаметра поперечного сечения стержня используем условие устойчивости [1–4]. Для данного случая оно имеет вид:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq \varphi \cdot [\sigma].$$

Откуда

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \varphi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot \varphi \cdot 160 \cdot 10^6}} = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi}}.$$

Минимальный момент инерции круглого сечения, если $I_x = I_y$:

$$I_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

Минимальный радиус инерции круглого сечения можно рассчитать по формуле

$$i_{\min} = 0,25 \cdot d.$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1,5}{0,25 \cdot d} = \frac{3}{d}.$$

Определение размеров поперечного сечения производим методом последовательных приближений [1–4].

Примем в первом приближении коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$. Тогда диаметр стержня

$$d_1 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_1}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,5}} = 0,043 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_1 = \frac{3}{d_1} = \frac{3}{0,043} = 69,77.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей Б.1:

$$\lambda = 60; \quad \varphi = 0,86;$$

$$\lambda = 70; \quad \varphi = 0,81.$$

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (69,77 - 60) = 0,811.$$

$$\varphi_1 \neq \varphi'_1.$$

Во втором приближении коэффициент продольного изгиба определяем по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,811 + 0,5}{2} = 0,656.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_2 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_2}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,656}} = 0,038 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_2 = \frac{3}{d_2} = \frac{3}{0,038} = 78,95.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей Б.1

$$\begin{aligned} \lambda = 70; & \quad \varphi = 0,81; \\ \lambda = 80; & \quad \varphi = 0,75. \end{aligned}$$

$$\varphi'_2 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{80 - 70} \cdot (78,95 - 70) = 0,756.$$

$$\varphi_2 \neq \varphi'_2.$$

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,756 + 0,656}{2} = 0,706.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_3 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_3}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,706}} = 0,037 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_3 = \frac{3}{d_3} = \frac{3}{0,037} = 81.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей Б.1:

$$\begin{aligned} \lambda = 80; & \quad \varphi = 0,75; \\ \lambda = 90; & \quad \varphi = 0,69. \end{aligned}$$

$$\varphi'_3 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81 - 80) = 0,744.$$

$$\varphi_3 \neq \varphi'_3.$$

В четвертом приближении

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,706 + 0,744}{2} = 0,725.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_4 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_4}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,725}} = 0,036 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_3 = \frac{3}{d_3} = \frac{3}{0,036} = 83,3.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей Б.1

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

$$\varphi'_4 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (83,3 - 80) = 0,73.$$

$$\varphi_4 \approx \varphi'_4.$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

$$\sigma_y = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,036^2} = 117,95 \text{ МПа} > 0,73 \cdot 160 = 116,8 \text{ МПа.}$$

Стержень работает с перенапряжением, которое составляет

$$\frac{117,95 - 116,8}{116,8} \cdot 100 \% = 1 \% < 5 \%.$$

Перенапряжение является допустимым. Диаметр стержня окончательно принимаем $d = 0,036 \text{ м} = 36 \text{ мм}$.

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить критическую силу для двух случаев закрепления стержня (рисунок 8.4).

Исходные данные: материал – сталь 3, $b = 60 \text{ мм}$, $h = 40 \text{ мм}$, $L = 2 \text{ м}$.

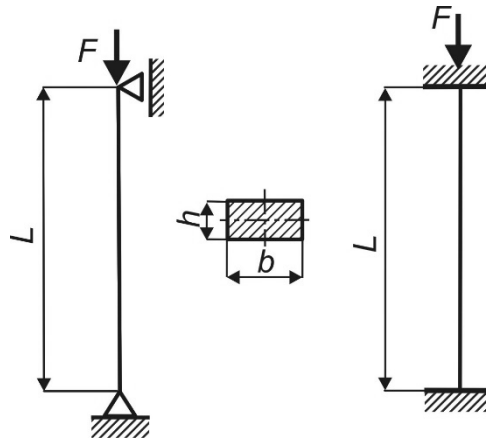


Рисунок 8.4

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение устойчивости.
- 2 Назовите формы равновесия.
- 3 Что является признаком потери устойчивости?
- 4 Дайте определение критической силы.
- 5 Запишите формулу для определения гибкости стержня.
- 6 Как определить коэффициент приведения длины стержня?
- 7 Запишите формулу Эйлера. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 8 Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 9 Запишите условие устойчивости.
- 10 Как определяется коэффициент продольного изгиба?
- 11 Запишите выражение для определения коэффициента запаса устойчивости.

9 Расчет продольно сжатого стержня составного сечения на устойчивость

Пример 1 – Для стального стержня (рисунок 9.1) определить допускаемое значение сжимающей нагрузки $[F]$, критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y . Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Исходные данные: длина стержня $L = 2,8$ м, $c = 20$ мм, швеллер № 18 ($A^{шв} = 20,7$ см², $I_X^{шв} = 1090$ см⁴, $I_Y^{шв} = 86$ см⁴), $z_0 = 1,94$ см, материал стержня – сталь 3, модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,.

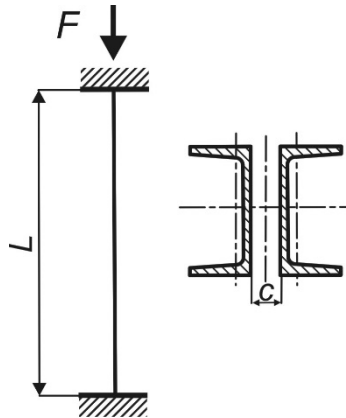


Рисунок 9.1

Решение

Определим геометрические характеристики заданного составного поперечного сечения, которое состоит из двух швеллеров (рисунок 9.2).

Площадь сечения

$$A = 2 \cdot A^{шв} = 2 \cdot 20,7 = 41,4 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции рассчитываем по формулам при параллельном переносе осей [1–4]:

$$I_x = 2 \cdot (I_X^{шв} + c^2 \cdot A^{шв}) = 2 \cdot I_X^{шв} = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 2 \cdot (I_Y^{шв} + d^2 \cdot A^{шв}) = 2 \cdot (86 + 2,94^2 \cdot 20,7) = 529 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2180}{41,4}} = 7,26 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{529}{41,4}} = 3,57 \text{ см}.$$

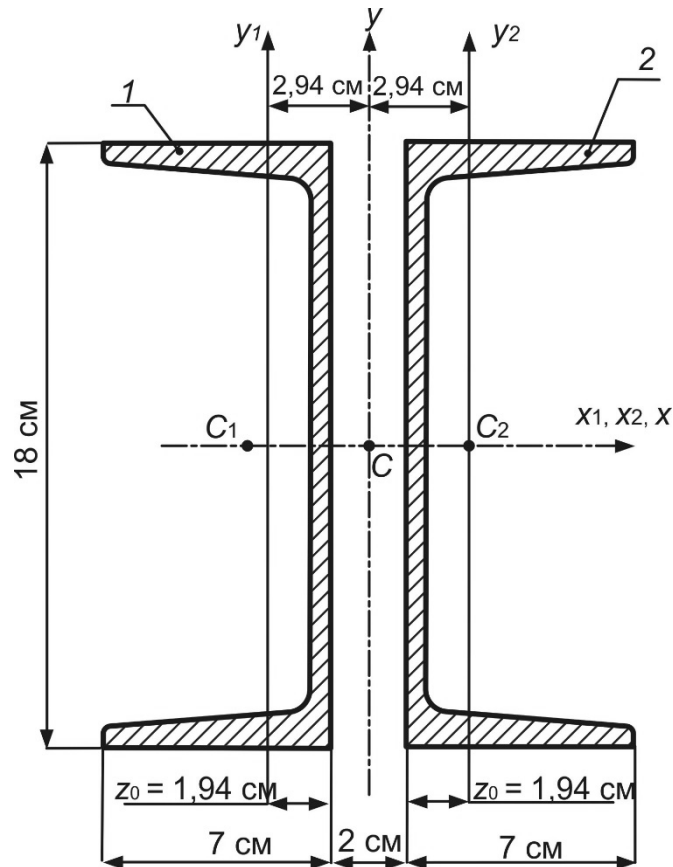


Рисунок 7.2

Рассчитываем гибкость стержня относительно материальной оси x :

$$\lambda_x = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 280}{7,26} = 19,3.$$

Определяем гибкость стержня относительно свободной оси y :

$$\lambda_x = \sqrt{\left(\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}\right)^2 + 40^2} = \sqrt{\left(\frac{0,5 \cdot 280}{3,57}\right)^2 + 40^2} = 56,02.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба в соответствии с таблицей Б.1:

$$\lambda = 50; \quad \varphi = 0,89;$$

$$\lambda = 60; \quad \varphi = 0,86.$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{60 - 50} \cdot (56,02 - 50) = 0,87.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допустимое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,87 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 576,3 \text{ кН.}$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ($\lambda_{пред} = 100$), критическую силу определяем по формуле Ясинского [1–4]:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 56,02) \cdot 10^6 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4} = 1019 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{1019}{576,3} = 1,77.$$

Пример 2 – Для стального стержня (рисунок 9.3) определить допустимое значение сжимающей нагрузки $[F]$, критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y . Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Исходные данные: длина стержня $L = 4$ м, $c = 100$ мм, швеллер № 10, материал стержня – сталь 3, модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

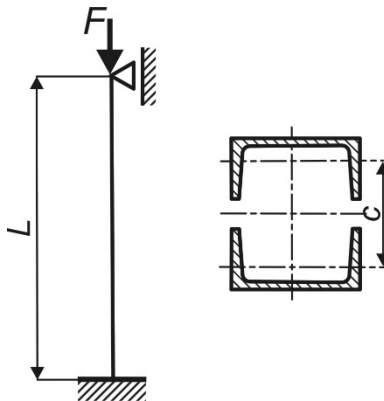


Рисунок 9.3

Контрольные вопросы

- 1 Какая из главных центральных осей является материальной осью?
- 2 Какая из главных центральных осей является свободной осью?
- 3 Запишите формулы для определения гибкости стержня относительно свободной оси и материальной оси.

10 Продольный и поперечный удары по брусу. Определение деформаций и напряжений в стержне. Расчет на прочность и жесткость стержневых конструкций при нагружении ударом

Пример 1 – На двутавровую стальную балку с высоты h падает груз G (рисунок 10.1, а). Проверить прочность, если $[\sigma] = 160$ МПа, и определить возникающие перемещения.

Исходные данные: двутавр № 20 ($W_x = 184$ см³, $I_x = 1840$ см⁴), модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Ударная нагрузка вызывает изгиб заданной балки (см. рисунок 10.1, а).

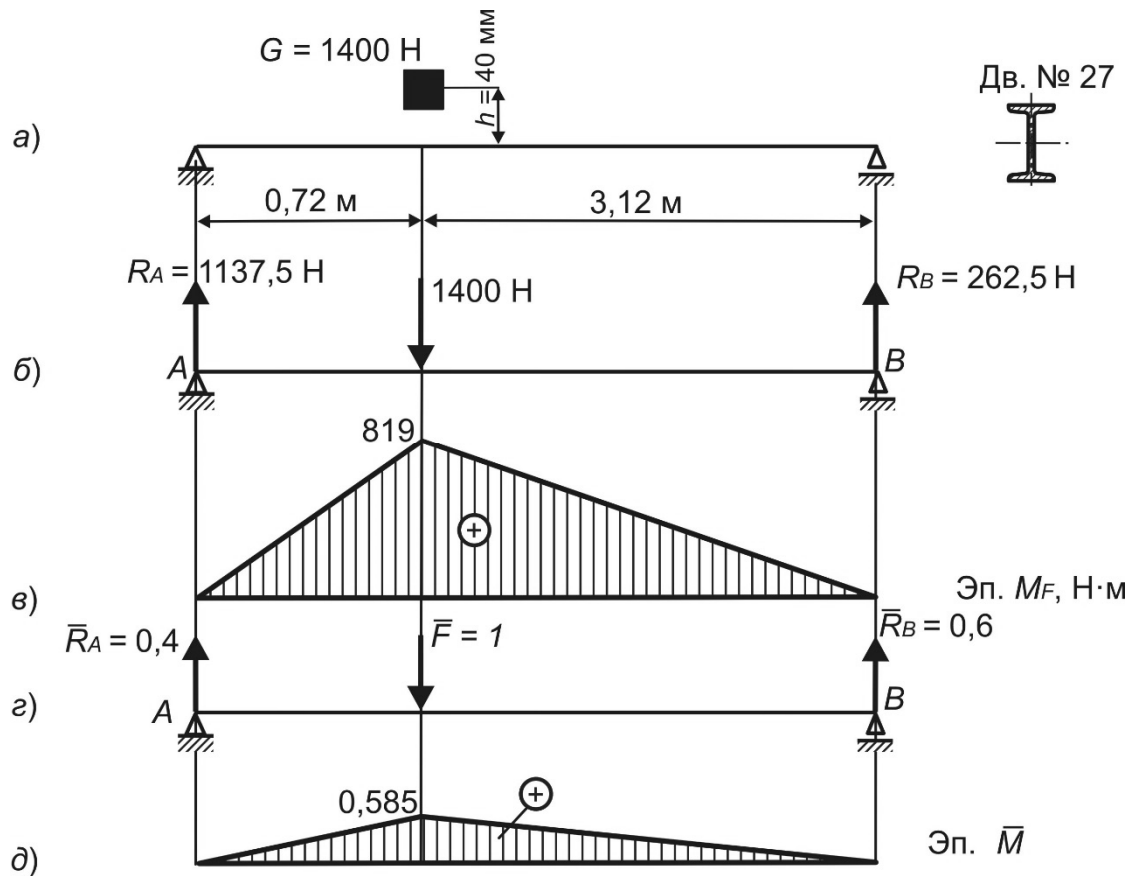


Рисунок 10.1

Прикладываем к балке груз G статически (рисунок 10.1, б). Определяем реакции опор от статической нагрузки. Строим эпюру изгибающих моментов M_F от статической нагрузки (рисунок 10.1, в). По этой эпюре определяем величину максимального изгибающего момента $M_{\max} = 819$ Н·м.

Максимальные статические напряжения

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{819}{184 \cdot 10^{-6}} = 4,45 \text{ МПа.}$$

Прикладываем к балке единичную силу $\bar{F} = 1$. Определяем реакции опор от единичной силы (рисунок 10.1, з). Строим единичную эпюру \bar{M} (см. рисунок 10.1, в).

По способу Верещагина определяем перемещение в точке удара:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{M_F \cdot \bar{M}}{EI_X} = \left(\frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 0,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 + \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 \right) = \\ &= \frac{613,27}{EI_X} = \frac{613,27}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,000166 \text{ м.} \end{aligned}$$

Динамический коэффициент [1–4]

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,000166}} = 24.$$

Максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{\max}^D = k_D \cdot \sigma_{\max}^{cm} = 24 \cdot 4,45 = 106,8 \text{ МПа.}$$

Условие прочности

$$\sigma_{\max}^D = 106,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполнено. Прочность обеспечена.

Перемещение $\Delta_D = k_D \cdot \Delta_{cm} = 24 \cdot 0,000166 = 0,004 \text{ м.}$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность и определить возникающие перемещения для заданной балки (рисунок 10.2).

Исходные данные: $v = 1,2 \text{ м/с}$, $b = 85 \text{ мм}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

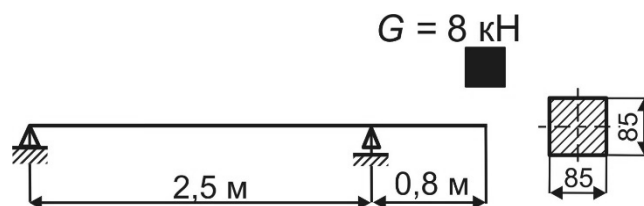


Рисунок 10.2

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить максимальные напряжения и перемещения, возникающие в поперечных сечениях бруса, изображенного на рисунке 10.3.

Исходные данные: $G = 9$ кН, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 1,5$ м, $h = 14$ мм, $A_1 = 1$ см², $A_2 = 2$ см², $A_3 = 1,5$ см², материал – сталь 3.

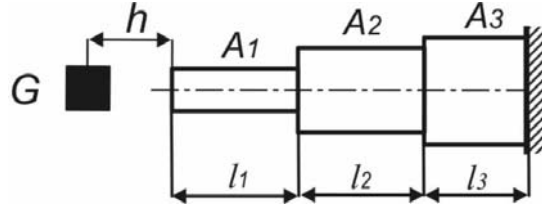


Рисунок 10.3

Контрольные вопросы

- 1 Какая нагрузка называется динамической?
- 2 Что такое динамический коэффициент?
- 3 Запишите формулу для определения напряжений при динамическом действии нагрузок.
- 4 Запишите выражение для определения динамического коэффициента в случае, когда груз поднимается (опускается) с постоянным ускорением.
- 5 Что такое удар?
- 6 Какие допущения приняты при расчете на ударное нагружение?
- 7 Запишите формулу для определения динамического коэффициента при ударе.
- 8 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает изгиб бруса.
- 9 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает растяжение (сжатие) бруса.

11 Расчет стержней при продольно-поперечном изгибе

Пример 1 – Стальная балка прямоугольного поперечного сечения (рисунок 11.1) нагружена сжимающими силами $F = 300$ кН и поперечными силами F_0 . Проверить прочность и устойчивость балки.

Исходные данные: коэффициент запаса прочности $n = 2$, $[\sigma] = 160$ МПа, коэффициент приведения длины для данной схемы закрепления $\mu = 1$, коэффициент, зависящий от типа поперечной нагрузки, $m = 1,13$ [1–4].

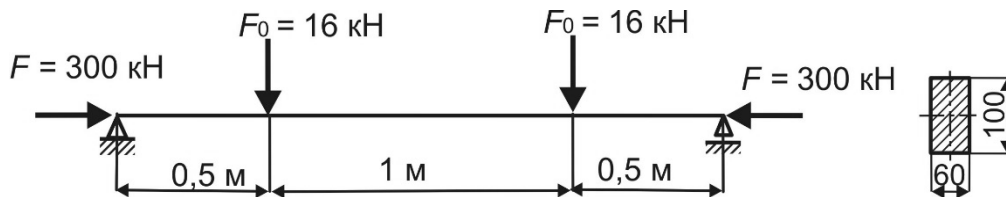


Рисунок 11.1

Решение

Геометрические характеристики поперечного сечения в соответствии с таблицей А.1:

$$A = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2;$$

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{6 \cdot 10^3}{6} = 100 \text{ см}^3;$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{10 \cdot 6^3}{12} = 180 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции, если $I_{\min} = I_y$:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{180}{60}} = 1,73 = 2,93 \text{ см.}$$

Эйлера сила в плоскости наибольшей жесткости, если $I_{\max} = I_x$:

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\max}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 500 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 2)^2} = 2450 \text{ кН.}$$

Максимальный изгибающий момент [1–4]

$$M_{\max} = \frac{F_0 \cdot l}{4} = \frac{16 \cdot 2}{4} = 8 \text{ кНм.}$$

Проверка прочности балки в плоскости наибольшей жесткости по условию прочности [1–4]:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W_X} \cdot \left(1 + \frac{m \cdot n \cdot f}{1 - n \cdot f} \right) \leq [\sigma].$$

При $f = \frac{F}{F_{\text{г}}} = \frac{300}{2465} = 0,122$ условие имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{300 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} + \frac{8 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(1 + \frac{1,13 \cdot 2 \cdot 0,122}{1 - 2 \cdot 0,122} \right) = 159 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Прочность обеспечена.

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_X = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 200}{1,73} = 116.$$

Коэффициент продольного изгиба для полученной гибкости $\varphi = 0,478$ [1–4].

Условие устойчивости

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$\sigma_y = \frac{300 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} = 50 \text{ МПа} < 0,478 \cdot 160 = 74,48 \text{ МПа.}$$

Устойчивость обеспечена.

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид деформаций называется продольно-поперечным изгибом?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении бруса при продольно-поперечном изгибе?
- 3 Запишите формулу для определения эйлеровой силы.

4 Запишите условие прочности для продольно-поперечного изгиба.

5 Обоснуйте необходимость проверки устойчивости при продольно-поперечном изгибе.

12 Проверочный расчет на прочность при циклическом нагружении. Определение коэффициента запаса прочности

Пример 1 – Проверить прочность шлифованного вала диаметром $d = 50$ мм, на который действует переменный изгибающий момент.

Исходные данные: максимальное значение момента $M_{\max} = 1250$ Н·м, минимальное значение момента $M_{\min} = 625$ Н·м. Масштабный коэффициент $\beta_m = 0,75$, эффективный коэффициент концентрации $K_{-1} = 1,5$, допускаемый коэффициент запаса усталостной прочности $[n] = 2$. Предел выносливости материала $\sigma_{-1} = 280$ МПа, предел прочности $\sigma_b = 700$ МПа.

Решение

Момент сопротивления поперечного сечения вала (см. таблицу А.1):

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{32} = 12,5 \text{ см}^3.$$

Максимальное напряжение цикла [1–4]

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1250}{12,5 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ МПа.}$$

Минимальное напряжение цикла [1–4]

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min}}{W_x} = \frac{625}{12,5 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ МПа.}$$

Амплитуда цикла [1–4]

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{100 - 50}{2} = 25 \text{ МПа.}$$

Среднее напряжение цикла [1–4]

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{100 + 50}{2} = 75 \text{ МПа.}$$

Коэффициент запаса усталостной прочности

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{-1}}{\beta_n \cdot \beta_m} \cdot \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \cdot \sigma_m} = \frac{280}{\frac{1,5}{1 \cdot 0,75} \cdot 25 + \frac{280}{700} \cdot 75} = 3,5.$$

Условие прочности

$$n = 3,5 \geq [n] = 2.$$

Прочность обеспечена.

Контрольные вопросы

- 1 Приведите примеры деталей и узлов техники, работающих в условиях переменных напряжений.
- 2 Дайте определения понятиям «усталость материалов», «выносливость материалов», «предел выносливости».
- 3 Что такое цикл?
- 4 Перечислите характеристики цикла.
- 5 Как определяется амплитуда, среднее напряжение, коэффициент асимметрии цикла?
- 6 Какие факторы влияют на величину предела выносливости?
- 7 Запишите условие прочности при переменных напряжениях.

Список литературы

1 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. – 5-е изд. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. – 543 с.

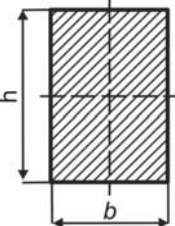
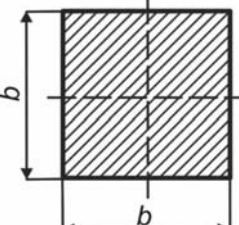
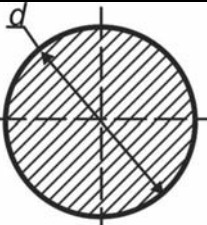
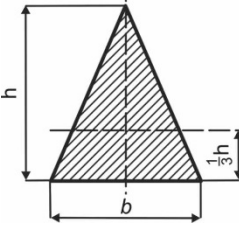
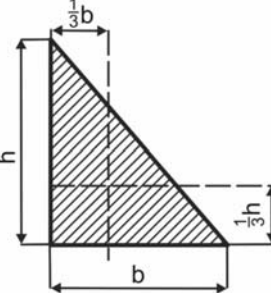
2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с.: ил.

3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.

4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2 изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.

Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции I_x, I_y	Момент сопротивления W_x, W_y
	$b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6};$ $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_{VII} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{VI} = \frac{b \cdot h^2}{12}$

Приложение Б (справочное)

Таблица Б.1 – Значения коэффициента продольного изгиба φ

Гибкость λ	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст 2, Ст 3, Ст 4	Ст 5	14Г2 15ГС 10Г2С 10Г2СД 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,8	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21				0,12
170	0,26	0,21	0,19				0,11
180	0,23	0,19	0,17				0,10
190	0,21	0,17	0,15				0,09
200	0,19	0,15	0,13				0,08
210	0,17	0,14	0,12				
220	0,16	0,13	0,11				