

---

УДК 621.833

*С. Н. Хатетовский, Л. Г. Доконов, Д. С. Галюжин*

**К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ЗВЕНЬЕВ  
ПРЕЦЕССИОННОЙ ПЕРЕДАЧИ**

---

UDC 621.833

*S. N. Khatetovsky, L. G. Dokonov, D. S. Galyuzhin*

**ON THE ISSUE OF EVALUATING ELASTIC DEFORMATIONS  
OF PRECESSIONAL TRANSMISSION LINKS**

---

**Аннотация**

Приведены формулы для определения длины контактной линии и проекций главного вектора и главного момента внешних сил. Рассмотрен вопрос определения прогиба входного вала планетарной прецессионной передачи типа KHV под воздействием сил зацепления методом Мора.

**Ключевые слова:**

прецессионная передача, передача эксцентрикового типа, точки контакта, линия контакта, силовой расчет.

**Abstract**

Formulas for determining length of the contact line and projections of the main vector and the main moment of external forces are given. The paper considers the issue of determining the deflection of the input shaft of planetary precessional K-H-V transmission under the action of meshing forces by using the Mohr method.

**Keywords:**

precessional transmission, eccentric transmission, contact points, contact line, force calculation.

---

Прецессионная передача относится к классу эксцентриковых передач [1]. Она характеризуется малыми радиальными габаритами и обеспечивает относительно большие передаточные отношения. Поэтому при ее синтезе конструктору приходится решать ряд проблем.

Первая проблема – обеспечение высокой жесткости звеньев: при малых габаритах неизбежны их значительные упругие деформации, которые приводят к нарушению правильности зубчатого зацепления.

Вторая проблема – обеспечение кинематической точности: даже при относительно небольших значениях погрешностей сборки и упругих деформациях звеньев, которые нарушают правильность зацепления, большое пере-

точное отношение масштабирует кинематическую погрешность.

Расчет сил, действующих в зацеплении колес прецессионной передачи, и, соответственно, упругих деформаций звеньев до настоящего времени осуществлялся по приближенной методике [2]. Это приводило к необходимости закладывать в расчеты большие коэффициенты запаса и, как следствие, к частичной потере преимуществ по малогабаритности.

В работе рассматривается теоретически точная методика расчета сил, действующих в зацеплении колес прецессионной передачи, и предлагается методика оценки упругих деформаций входного вала.

Указанные методики основаны на

уравнении контакта зубьев колес прецессионной передачи [3]:

$$r_{1z_1} = -\frac{R_C \cdot (\cos\theta - u_{12}) \cdot \sin\varphi}{\sin\theta \cdot \sin(\varphi + \varphi_1)} = 0, \quad (1)$$

где  $r_{1z_1}$  – аппликата точки контакта на цилиндрической поверхности ролика (зуба центрального колеса), которая определяется в системе координат  $x_1y_1z_1$ , жестко связанной с центральным колесом;  $R_C$  – радиус центров роликов;  $\theta$  – угол нутации;  $u_{12}$  – передаточное отношение при остановленном входном вале;  $\varphi$  – полярный угол точки контакта на поверхности ролика;  $\varphi_1$  – угол поворота центрального колеса.

Две другие координаты точки контакта в системе  $x_1y_1z_1$  [3]:

$$r_{1x_1} = \rho \cdot \sin\varphi; \quad (2)$$

$$r_{1y_1} = R_C - \rho \cdot \cos\varphi, \quad (3)$$

где  $\rho$  – радиус ролика.

Линию контакта можно развернуть на плоскость и представить в виде функции  $z = f(x)$  [3]. При этом длина линии контакта может быть найдена следующим образом:

$$s = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (4)$$

В этой формуле производная

$$k = \frac{dz}{dx} = \frac{r_C \cdot (\cos\theta - u_{12}) \cdot \cos\frac{x}{\rho}}{\rho \cdot \sin\left(\varphi_1 + \frac{x}{\rho}\right) \cdot \sin\theta} - \frac{r_C \cdot (\cos\theta - u_{12}) \cdot \sin\frac{x}{\rho} \cdot \cos\left(\varphi_1 + \frac{x}{\rho}\right)}{\rho \cdot \sin^2\left(\varphi_1 + \frac{x}{\rho}\right) \cdot \sin\theta}, \quad (5)$$

а пределы интегрирования

$$x_{\min} = \rho \cdot \varphi_{\min}; \quad (6)$$

$$x_{\max} = \rho \cdot \varphi_{\max}. \quad (7)$$

Методика определения  $\varphi_{\min}$  и  $\varphi_{\max}$  с учетом многопарности зацепления рассмотрена в [3].

Согласно методике, изложенной в [4], интенсивность распределенной по длине линии контакта нагрузки может быть найдена по следующей формуле:

$$q = \frac{M_1}{\sum s_i} \cdot \frac{1}{r_{1x_1} \cdot n_{1y_1} - r_{1y_1} \cdot n_{1x_1}}, \quad (8)$$

где  $M_1$  – крутящий момент, приложенный к центральному колесу прецессионной передачи;  $s_i$  – длина линии контакта  $i$ -й контактирующей пары зубьев при многопарном зацеплении;  $n_{1x_1}$  – абсцисса единичной нормали к поверхности ролика, восстановленная в точке контакта;  $n_{1y_1}$  – ордината единичной нормали к поверхности ролика, восстановленная в точке контакта.

В системе  $x_1y_1z_1$  координаты указанной нормали  $\vec{n}_1$  определяются следующим образом:

$$n_{1x_1} = \sin\varphi; \quad (9)$$

$$n_{1y_1} = \cos\varphi; \quad (10)$$

$$n_{1z_1} = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим входной вал прецессионной передачи типа КНВ (рис. 1) в неподвижной системе координат  $xuz$ , начало отсчета которой совмещено с центром прецессии  $O$ .

Со стороны сателлита на него действуют главный вектор и главный момент активных сил (рис. 2).

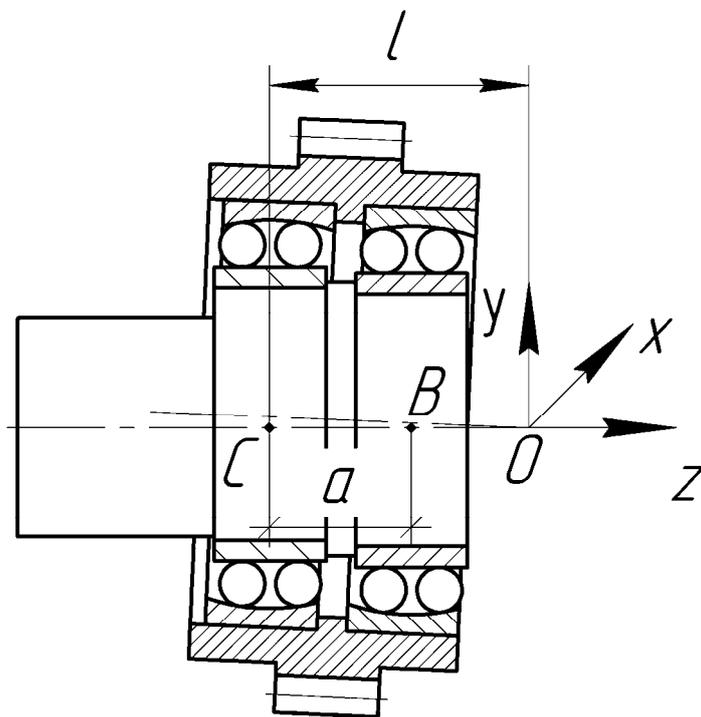


Рис. 1. Схема входного вала прецессионной передачи

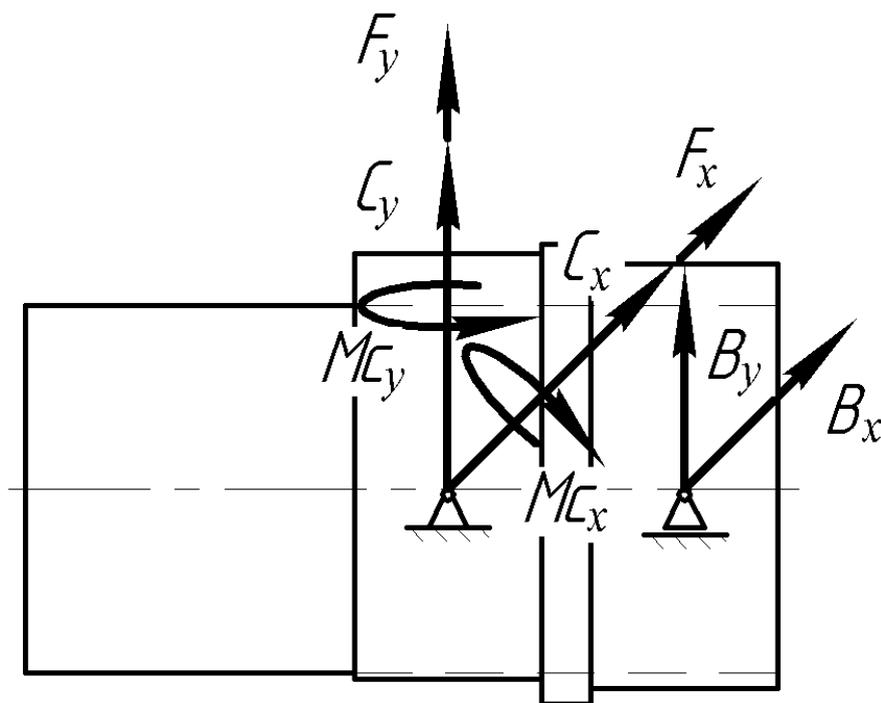


Рис. 2. Схема входного вала с наложенными связями относительно сателлита

Для упрощения расчетов принимаем для входного вала один диаметр, равный наименьшему диаметру его ше-

ек. Таким образом, получаем расчетную схему, показанную на рис. 3.

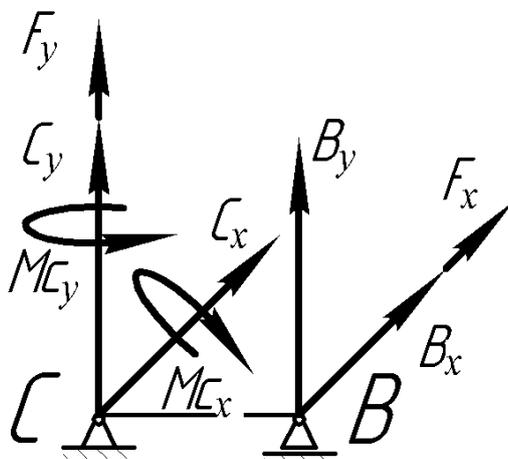


Рис. 3. Расчетная схема входного вала с наложенными связями относительно сателлита

Проекции главного вектора и главного момента активных сил в си-

стеме координат хуз найдем следующим образом:

$$F_x = \frac{\rho \cdot M_1}{\sum s_i} \cdot \sum \int_{\varphi_{\min i}}^{\varphi_{\max i}} \frac{n_{1x} \cdot \sqrt{1+k^2}}{r_{1x} \cdot n_{1y} - r_{1y} \cdot n_{1x}} d\varphi; \quad (12)$$

$$F_y = \frac{\rho \cdot M_1}{\sum s_i} \cdot \sum \int_{\varphi_{\min i}}^{\varphi_{\max i}} \frac{n_{1y} \cdot \sqrt{1+k^2}}{r_{1x} \cdot n_{1y} - r_{1y} \cdot n_{1x}} d\varphi; \quad (13)$$

$$F_z = \frac{\rho \cdot M_1}{\sum s_i} \cdot \sum \int_{\varphi_{\min i}}^{\varphi_{\max i}} \frac{n_{1z} \cdot \sqrt{1+k^2}}{r_{1x} \cdot n_{1y} - r_{1y} \cdot n_{1x}} d\varphi; \quad (14)$$

$$M_{Cx} = \frac{\rho \cdot M_1}{\sum s_i} \cdot \sum \int_{\varphi_{\min i}}^{\varphi_{\max i}} \frac{(n_{1z} \cdot r_{1y} - n_{1y} \cdot (r_{1z} - l)) \cdot \sqrt{1+k^2}}{r_{1x} \cdot n_{1y} - r_{1y} \cdot n_{1x}} d\varphi; \quad (15)$$

$$M_{Cy} = \frac{\rho \cdot M_1}{\sum s_i} \cdot \sum \int_{\varphi_{\min i}}^{\varphi_{\max i}} \frac{(n_{1x} \cdot (r_{1z} - l) - n_{1z} \cdot r_{1x}) \cdot \sqrt{1+k^2}}{r_{1x} \cdot n_{1y} - r_{1y} \cdot n_{1x}} d\varphi; \quad (16)$$

$$M_{Cz} = \frac{\rho \cdot M_1}{\sum s_i} \cdot \sum \int_{\varphi_{\min i}}^{\varphi_{\max i}} \frac{(n_{1y} \cdot r_{1x} - n_{1x} \cdot r_{1y}) \cdot \sqrt{1+k^2}}{r_{1x} \cdot n_{1y} - r_{1y} \cdot n_{1x}} d\varphi, \quad (17)$$

где  $r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}$  – координаты точки контакта в системе  $x_1y_1z_1$ ;  $n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}$  – координаты единичной нормали в системе  $x_1y_1z_1$ .

Чтобы выразить  $n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}, r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}$  через параметры  $\varphi$  и  $r_{1z_1}$ , следует осуществить переход от системы координат  $x_1y_1z_1$  к системе  $x_1y_1z$  (рис. 4). Этот переход осуществляется при помощи матричного преобразования, если координаты точки контакта и координаты нормали представить в виде вектор-столбцов:

$$R_1 = R_{11} = \begin{bmatrix} r_{1x_1} \\ r_{1y_1} \\ r_{1z_1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$N_1 = N_{11} = \begin{bmatrix} n_{1x_1} \\ n_{1y_1} \\ n_{1z_1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

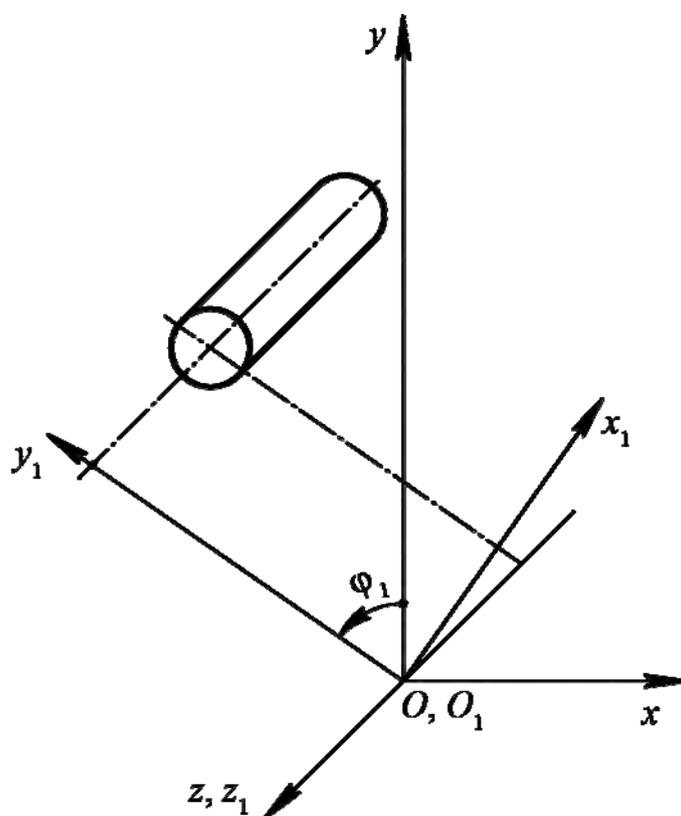


Рис. 4. Схема перехода от системы координат  $x_1y_1z_1$  к системе  $x_1y_1z$

Матрица преобразования имеет вид:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, в системе координат  $x_1y_1z$  вектор-столбец, составленный из координат точки контакта, определится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R_{01} = T_{01} \times R_{11} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{1x_1} \\ r_{1y_1} \\ r_{1z_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho \cdot \sin \varphi \\ R_C - \rho \cdot \cos \varphi \\ r_{1z_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi_1 - (R_C - \rho \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \varphi_1 \\ \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 + (R_C - \rho \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi_1 \\ r_{1z_1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Аналогично для координат нормали:

$$\begin{aligned}
 N_{01} = T_{01} \times N_{11} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x_1} \\ n_{1y_1} \\ n_{1z_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cdot \cos \varphi_1 + \cos \varphi \cdot \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 - \cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$n_{1y} = \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 - \cos \varphi \cdot \cos \varphi_1; \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 r_{1x} &= \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi_1 - \\
 &- (R_C - \rho \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \varphi_1; \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$n_{1z} = 0. \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 r_{1y} &= \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 - \\
 &- (R_C - \rho \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi_1; \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$n_{1x} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi_1 + \cos \varphi \cdot \sin \varphi_1; \quad (25)$$

Из приведенных выражений видно, что проекция главного вектора на ось  $z$  будет равна нулю, т. к.  $n_{1z} = 0$ .

Из расчетной схемы (см. рис. 3) определим реакции опор, составив четыре уравнения равновесия:

$$\sum F_{xi} = 0; B_x + C_x + F_x = 0; \quad (28)$$

$$\sum F_{yi} = 0; B_y + C_y + F_y = 0; \quad (29)$$

$$\sum M_{Cyi} = 0; B_x \cdot a + M_{Cy} = 0; \quad (30)$$

$$\sum M_{Cxi} = 0; -B_y \cdot a + M_{Cx} = 0. \quad (31)$$

Решая данную систему уравнений, определим реакции опор:

$$B_y = \frac{M_{Cx}}{a};$$

$$C_y = -F_y - B_y = -F_y - \frac{M_{Cx}}{a};$$

$$B_x = -\frac{M_{Cy}}{a};$$

$$C_x = F_x - B_x = F_x + \frac{M_{Cy}}{a}.$$

Так как входной вал находится под действием сил, расположенных в двух плоскостях, то расчет прогиба также необходимо производить в двух плоскостях, находя перемещения по координатам  $x$  и  $y$ . Затем общий прогиб найдем по формуле [5]

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (32)$$

где  $x$  и  $y$  – перемещение точки вала по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

Составим расчетную схему вала (рис. 5).

Вначале рассмотрим перемещение точки  $C$  вала под действием проекций сил, расположенных в плоскости  $yCz$ . Для этого составим расчетную схему действующих в этой плоскости сил, а также покажем расчетную схему вала с приложенной в точке  $C$  единичной силой для нахождения перемещения с помощью интеграла Мора (рис. 6).

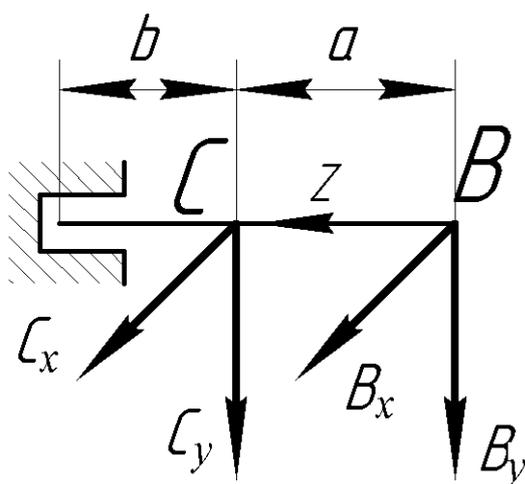


Рис. 5. Расчетная схема входного вала

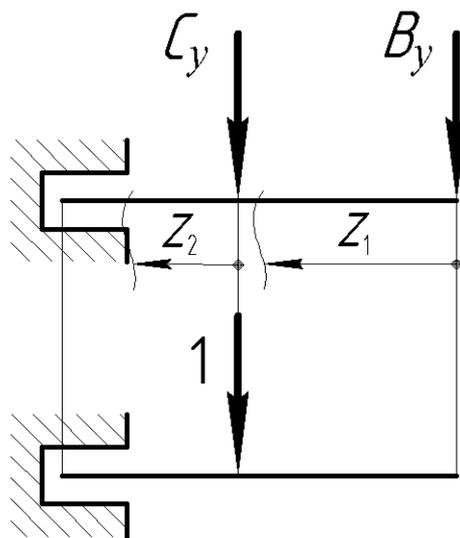


Рис. 6. Расчетная схема нагружения входного вала в плоскости  $yCz$  для определения перемещения точки  $C$

Для представленной на рис. 6 расчетной схемы уравнение для опре-

деления перемещения точки  $C$  будет иметь вид:

$$y_C = \frac{1}{E \cdot I_x} \int_0^b \left( (-C_y \cdot (a + z_2) - B_y \cdot z_2) \cdot (1 \cdot z_2) \right) dz. \quad (33)$$

Для определения перемещения точки  $B$  рассмотрим схему нагружения,

представленную на рис. 7, и составим соответствующее уравнение:

$$y_B = \frac{1}{E \cdot I_x} \left( \int_0^a \left( (-C_x \cdot z_1) \cdot (-1 \cdot z_1) \right) dz + \int_0^b \left( -C_y \cdot ((a + z_2) + z_2) - B_y \cdot z_2 \right) \cdot (-1 \cdot (a + z_2)) dz \right). \quad (34)$$

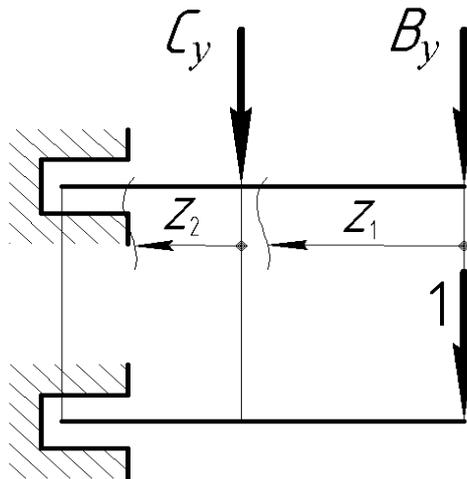


Рис. 7. Расчетная схема нагружения входного вала в плоскости  $yCz$  для определения перемещения точки  $B$

Аналогично рассчитывается и прогиб вала в точках  $C$  и  $B$  для сил, распо-

ложенных в плоскости  $xCz$ :

$$x_C = \frac{1}{E \cdot I_y} \int_0^b \left( (-C_x \cdot (a + z_2) - B_x \cdot z_2) \cdot (1 \cdot z_2) \right) dz; \quad (35)$$

$$x_B = \frac{1}{E \cdot I_y} \left( \int_0^a \left( (-C_x \cdot z_1) \cdot (-1 \cdot z_1) \right) dz + \int_0^b \left( -C_x \cdot ((a + z_2) + z_2) - B_x \cdot z_2 \right) \cdot (-1 \cdot (a + z_2)) dz \right). \quad (36)$$

Общий прогиб вала в точках  $C$  и  $B$

$$\Delta_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2};$$

$$\Delta_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}.$$

Полученные выражения прогиба в точках  $C$  и  $B$  позволят на стадии проектирования учесть их влияние на кинематические показатели передачи и произвести корректировку геометрических параметров входного вала с целью увеличения жесткости. Приведенные в работе расчеты позволят в дальнейшем создать методику расчета прецессионной передачи типа КНУ при задании выходных параметров редуцирующего устройства.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скойбеда, А. Т. Коническо-цилиндрические прецессионные редукторы (КЦПР) / А. Т. Скойбеда, П. Н. Громыко. – Минск: БГПА, 2001. – 189 с.
2. Корректировка результатов силового анализа прецессионного редуцирующего механизма с коническими роликами на основе использования методов компьютерного моделирования / П. Н. Громыко [и др.] // Горная механика и машиностроение. – 2012. – № 2. – С. 73–83.
3. Определение линий контакта зубчатых колес прецессионной передачи при многопарном зацеплении / С. Н. Хатетовский [и др.] // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2019. – № 3. – С. 104–111.
4. Заблонский, К. И. Жесткость зубчатых передач / К. И. Заблонский. – Киев: Техніка, 1967. – 259 с.
5. Федосьев, В. И. Сопrotивление материалов: учебник / В. И. Федосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

*Статья сдана в редакцию 9 ноября 2020 года*

**Станислав Николаевич Хатетовский**, канд. техн. наук, доц., Белорусско-Российский университет. E-mail: mechlab@yandex.ru.

**Леонид Геннадьевич Доконов**, канд. техн. наук, доц., Белорусско-Российский университет. E-mail: leon25@tut.by.

**Даниил Сергеевич Галужин**, канд. техн. наук, доц., Белорусско-Российский университет.

**Stanislav Nikolayevich Khatetovsky**, PhD (Engineering), Associate Prof., Belarusian-Russian University. E-mail: mechlab@yandex.ru.

**Leonid Gennadyevich Dokonov**, PhD (Engineering), Associate Prof., Belarusian-Russian University. E-mail: leon25@tut.by.

**Daniil Sergeyeovich Galyuzhin**, PhD (Engineering), Associate Prof., Belarusian-Russian University.